

ENGFIS FIS  
2014/15

## Análise Complexa

Salvatore Cosentino

Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho

Campus de Gualtar, 4710 Braga - PORTUGAL

gab B.4023, tel 253 604086 e-mail [scosentino@math.uminho.pt](mailto:scosentino@math.uminho.pt)

url <http://w3.math.uminho.pt/~scosentino>

7 de Janeiro de 2015



This work is licensed under a  
[Creative Commons Attribution-Noncommercial-ShareAlike 2.5 Portugal License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/pt/).

<i>CONTEÚDO</i>	2
-----------------	---

## **Conteúdo**

1 Álgebra e geometria dos números complexos	6
2 Funções holomorfas	12
3 Séries de potências, funções analíticas, exponencial	18
4 Integração complexa e teorema de Cauchy	23
5 Fórmula integral de Cauchy e consequências	31
6 Séries de Laurent e cálculo dos resíduos	37
7 EDPs lineares de segunda ordem: Laplace, ondas e calor	44
8 Separação de variáveis, harmônicas e modos	49
9 Séries de Fourier	55
10 Convergência das séries de Fourier	63
11 Aplicações das séries de Fourier às EDPs	68
12 Transformada de Fourier	71
13 Aplicações da transformada de Fourier às EDPs	77
14 Funções harmônicas	82
15 Transformações conformes	87

## Notações

**Números.**  $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$  denota o conjunto dos números naturais,  $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  denota o conjunto dos números inteiros não negativos.  $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$  denota o anel dos números inteiros.  $\mathbb{Q} := \{p/q \text{ com } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$  denota o corpo dos números racionais.  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  são os corpos dos números reais e complexos, respetivamente.

**Notação de Landau e ...** Se  $f(t)$  e  $g(t)$  são duas funções definidas numa vizinhança do ponto  $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$ , então

- $f(t) = O(g(t))$  (“ $f$  is big-O of  $g$ ”) quando  $t \rightarrow a$  quer dizer que existe uma constante  $C > 0$  tal que  $f(t) \leq C \cdot g(t)$  para todos os  $t$  numa vizinhança de  $a$ ,
- $f(t) = o(g(t))$  (“ $f$  is small-o of  $g$ ”) quando  $t \rightarrow a$  quer dizer que o quociente  $f(t)/g(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow a$ .
- $f(t) \asymp g(t)$  (“ $f$  and  $g$  are within a bounded ratio”) quando  $t \rightarrow a$  quer dizer que  $f(t) = O(g(t))$  e  $g(t) = O(f(t))$ , ou seja, que existe uma constante  $C > 0$  tal que  $\frac{1}{C} \cdot g(t) \leq f(t) \leq C \cdot g(t)$  para todos os  $t$  numa vizinhança de  $a$ ,
- $f(x) \sim g(x)$   $t \rightarrow a$  (“ $f$  and  $g$  are asymptotically equal”) quando  $t \rightarrow a$  quer dizer que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = 1$

**Espaço euclidiano.**  $\mathbb{R}^n$  denota o espaço Euclidiano de dimensão  $n$ . Fixada a base canónica  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ , os pontos de  $\mathbb{R}^n$  são os vetores

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) := x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$$

de coordenadas  $x_i \in \mathbb{R}$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ . Os pontos e as relativas coordenadas no plano Euclidiano ou no espaço Euclidiano 3-dimensional são também denotados, conforme a tradição, por  $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

O produto interno Euclidiano  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

O produto interno realiza um isomorfismo entre o espaço dual (algébrico)  $(\mathbb{R}^n)^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  e o próprio  $\mathbb{R}^n$ : o valor da forma linear  $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$  no vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  é  $\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$ .

A norma Euclidiana do vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  é  $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ . A distância Euclidiana entre os pontos  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  é definida pelo teorema de Pitágoras

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

A bola aberta de centro  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  e raio  $r > 0$  é o conjunto  $B_r(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$ . Um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$  se cada seu ponto  $\mathbf{a} \in A$  é o centro de uma bola  $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$ , com  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

**Caminhos.** Se  $t \mapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$  é uma função diferenciável do “tempo”  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , ou seja, um caminho diferenciável definido num intervalo de tempos  $I \subset \mathbb{R}$  com valores no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , então as suas derivadas são denotadas por

$$\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{x}} := \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \quad \dddot{\mathbf{x}} := \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3}, \quad \dots$$

Em particular, a primeira derivada  $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{x}}(t)$  é dita “velocidade”, a sua norma  $v(t) := \|\mathbf{v}(t)\|$  é dita “velocidade escalar”, e a segunda derivada  $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{x}}(t)$  é dita “aceleração”.

**Campos.** Um *campo escalar* é uma função real  $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida num domínio  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Um *campo vetorial* é uma função  $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_k(\mathbf{x}))$ , cujas coordenadas  $F_i(\mathbf{x})$  são  $k$  campos escalares.

A derivada do campo diferenciável  $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  no ponto  $\mathbf{x} \in X$  é a aplicação linear  $d\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + d\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|)$$

para todos os vetores  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  de norma  $\|\mathbf{v}\|$  suficientemente pequena, definida em coordenadas pela matriz Jacobiana  $\text{Jac}\mathbf{F}(\mathbf{x}) := (\partial F_i / \partial x_j(\mathbf{x})) \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$ . Em particular, o *diferencial* do campo escalar  $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  no ponto  $\mathbf{x} \in X$  é a forma linear  $du(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$du(\mathbf{x}) := \frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}) dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(\mathbf{x}) dx_n$$

(onde  $dx_k$ , o diferencial da função coordenada  $\mathbf{x} \mapsto x_k$ , é a forma linear que envia o vector  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  em  $dx_k \cdot \mathbf{v} := v_k$ ). A derivada do campo escalar diferenciável  $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  na direção do vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  (aplicado) no ponto  $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$ , é igual, pela regra da cadeia, a

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}u)(\mathbf{x}) := \left. \frac{d}{dt} u(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} = du(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}.$$

O *gradiente* do campo escalar diferenciável  $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é o campo vetorial  $\nabla u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$du(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \langle \nabla u(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle$$

para todo os vetores (tangentes)  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  (aplicados no ponto  $\mathbf{x} \in X$ ).

# 1 Álgebra e geometria dos números complexos

17 set 2014

1. (complex numbers as a device or as a reality) Complex numbers were invented/discovered in the XVI century as a “sophistic” device/trick to solve cubic equations like  $x^3 + px + q = 0$ . Today, they enter in our formulation of most fundamental laws of Nature, as for example in the Schrödinger equation or in Feynman path integrals,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi \quad \text{and} \quad \int_{\text{paths}} e^{iS[x]/\hbar} \mathcal{D}x.$$

2. (o corpo dos números complexos) O corpo dos *números complexos* é  $\mathbb{C} := \mathbb{R}(i)$ , onde  $i^2 = -1$ . Ou seja, é o conjunto  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$  dos números/pontos  $z = x + iy \approx (x, y)$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$ , munido das operações binárias “soma”, definida por

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

(que corresponde à soma dos vetores  $z_1 \approx (x_1, y_1)$  e  $z_2 \approx (x_2, y_2)$  do plano  $\mathbb{R}^2$ ), e “multiplicação”, definida por

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Em particular, se  $i := 0 + i \cdot 1 \in \mathbb{C}$ , então  $i \cdot i = -1$ , ou seja,  $\pm i$  são (as únicas) “raízes quadradas de  $-1$ ”. De fato (e esta é a origem das fórmulas acima), somas e multiplicações de números complexos podem ser manipuladas como as correspondentes operações entre números reais (ou seja, usando as propriedades associativas, comutativas e distributivas), e depois substituindo  $i \cdot i$  por  $-1$ . Todo  $z = x + iy \neq 0 + i0$  admite um inverso multiplicativo, dado por  $1/z = x/(x^2 + y^2) - iy/(x^2 + y^2)$ , pois  $z \cdot (1/z) = 1 + i0$ .

O conjunto  $\mathbb{C}$ , munido da operação  $+$ , é um grupo aditivo, cujo elemento neutro é  $0 := 0 + i0$ . Somar um número complexo  $z$ , i.e. fazer  $w \mapsto w + z$ , corresponde a uma translação no plano complexo  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ .

O conjunto  $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , munido da operação  $\cdot$ , é o grupo multiplicativo dos números complexos invertíveis, cujo elemento neutro é  $1 := 1 + i0$ . As potências inteiras de um número complexo são definidas por recorrência:  $z^{n+1} := z \cdot z^n$ , se  $n \geq 1$ , sendo  $z^0 := 1$ . Se  $z \in \mathbb{C}^\times$ , então as potências negativas são definidas por  $z^{-n} := (1/z)^n$ .

O *conjugado* de  $z = x + iy$  é  $\bar{z} := x - iy$ . A conjugação respeita soma e produtos, ou seja, verifica  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$  e  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ . Observe também que a conjugação é uma involução, ou seja,  $\bar{\bar{z}} = z$ .

Os números reais

$$x = \Re(z) := \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \Im(z) := \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

são ditos *parte real* e *parte imaginária* do número complexo  $z = x + iy$ , respetivamente. Observe  $z = \bar{z}$  sse  $z$  é real, i.e. sse  $\Im(z) = 0$ .

A conjugação permite definir  $N(z) := z\bar{z} = x^2 + y^2$ , que é um número real não-negativo (o “módulo” de  $z$  no sentido da teoria dos números), e portanto o *módulo*, ou *valor absoluto*, de  $z = x + iy$ ,

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

que é à norma euclidiana do vetor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Em particular,  $|z| = 0$  sse  $z = 0$ . O valor absoluto é multiplicativo, ou seja,  $|zw| = |z||w|$ , e  $|z/w| = |z|/|w|$  se  $w \neq 0$ . O inverso multiplicativo de um número complexo  $z \neq 0$  é então

$$1/z = \bar{z}/|z|^2$$

- Represente na forma  $x + iy$  os seguintes números complexos

$$1/i \quad \frac{2-i}{1+i} \quad \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{i}{2+i} \quad (1-i3)^2 \quad i^{17} \quad (2 \pm i)^3$$

- Verifique que, na identificação  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$  definida por  $x + iy \approx (x, y)$ , o produto  $(a + ib)(x + iy)$  é dado por

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Deduzza que a multiplicação por  $a + ib \neq 0$  é invertível.

- Interprete, e prove, a seguinte identidade entre números reais:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

- Resolva as seguintes equações

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \quad z^2 + z + 1 = 0$$

3. (representação polar) A representação polar do número complexo  $z = x + iy \approx (x, y) \in \mathbb{R}^2$  é

$$z = \rho e^{i\theta}$$

onde  $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$  é o módulo de  $z$ ,  $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  é um *argumento* de  $z$ , ou seja, um ângulo tal que  $x = \rho \cos(\theta)$  e  $y = \rho \sin(\theta)$  (logo definido a menos de múltiplos inteiros de  $2\pi$ ), e o número complexo  $e^{i\theta} \in \mathbb{S} := \{|z| = 1\}$  é (provisoriamente) definido pela *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \sin(\theta). \quad (1.1)$$

Pode ser útil escolher um valor do argumento, e chamar *argumento principal* de um número  $z$  o único argumento que satisfaz  $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ .

Se  $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ , então as fórmulas de adição para seno e cosseno mostram que

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{e} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (\text{se } \rho_2 \neq 0).$$

Estas fórmulas revelam o significado geométrico da multiplicação entre números complexos. Uma primeira consequência é que o inverso do número complexo  $z = \rho e^{i\theta}$ , com  $\rho > 0$ , é  $z^{-1} = \rho^{-1} e^{-i\theta}$ . Outra é que a multiplicação por  $z = \rho e^{i\theta} \neq 0$ , no plano  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ , ou seja, a transformação  $w \mapsto zw$ , corresponde a uma homotetia  $w \mapsto \rho w$  de razão  $|z| = \rho > 0$  (uma dilatação ou contração se  $\rho \neq 1$ ) e uma rotação  $w \mapsto e^{i\theta} w$  de um ângulo  $\theta$ . Em particular, a multiplicação por  $i = e^{i\pi/2}$  é uma “raiz quadrada” da rotação  $z \mapsto e^{i\pi} z = -z$  de um ângulo  $\pi$ , i.e. uma rotação de um ângulo  $\pi/2$ .

Se  $n = 1, 2, 3, \dots$ , então cada número complexo  $w \neq 0$  possui  $n$  raízes  $n$ -ésimas, i.e.  $n$  números complexos  $z$  que resolvem  $z^n = w$ . De fato, as raízes  $n$ -ésimas de  $w = \rho e^{i\theta}$ , com  $\rho \neq 0$ , são  $z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\theta + 2\pi k)/n}$ , com  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Os pontos  $z_k$  formam os vértices de um polígono regular de  $n$  lados, inscrito na circunferência de raio  $\sqrt[n]{\rho}$  e centro 0. Em particular, os números complexos  $\zeta_k := e^{i2\pi k/n}$ , com  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ , que resolvem  $(\zeta_k)^n = 1$  e portanto pertencem a circunferência unitária, são chamados *raízes  $n$ -ésimas da unidade*. Observe que  $\zeta_k = (\zeta_1)^k$ , onde  $\zeta_1 = e^{i2\pi/n}$  é uma raiz “primitiva”.

- Represente na forma polar os seguintes números complexos:

$$-i \quad i - 1 \quad \dots$$

- Use a representação polar e a fórmula de Euler (1.1) para provar a *fórmula de de Moivre*

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Deduzza as fórmulas

$$\cos(n\theta) = \dots \quad \text{e} \quad \sin(n\theta) = \dots$$

- Verifique que o conjugado de  $z = \rho e^{i\theta}$  é  $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$ .

- Calcule

$$e^{i\pi} \quad e^{-i\pi/2} \quad \sqrt{i} \quad \sqrt{-i} \quad \sqrt{1+i} \quad \sqrt[4]{i}$$

- Resolva as equações  $z^3 = 1$ ,  $z^5 = 1$  e  $z^3 = 81$ .
- Verifique que  $(1 + z + z^2 + \dots + z^n)(1 - z) = 1 - z^{n+1}$ , e portanto, se  $z \neq 1$ ,

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Considere  $z = e^{i\theta}$  com  $\theta \neq 2\pi\mathbb{Z}$  e real, calcule a parte real e deduza

$$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n + 1/2)\theta)}{2 \sin(\theta/2)}$$

Mostre que se  $\omega$  é uma raiz  $n$ -ésima não trivial da unidade (ou seja,  $\omega^n = 1$  e  $\omega \neq 1$ ) então

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

4. (desigualdades e métrica euclidiana) É evidente que a parte real e a parte imaginária de um número complexo são limitadas pelo módulo, i.e.

22 set 2014

$$-|z| \leq \Re(z) \leq |z| \quad \text{e} \quad -|z| \leq \Im(z) \leq |z| \quad (1.2)$$

Por outro lado, um cálculo direto mostra que  $|z \pm w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\Re(z\bar{w})$ . Usando as (1.2), deduzimos a *desigualdade do triângulo*

$$\boxed{|z + w| \leq |z| + |w|} \quad (1.3)$$

A desigualdade do triângulo diz que  $|z|$  é uma norma, e portanto  $d(z, w) := |z - w|$  é uma métrica no plano complexo. Ou seja, é positiva quando  $z \neq w$ , nula sse  $z = w$ , e satisfaz a desigualdade do triângulo

$$\text{dist}(z, w) \leq \text{dist}(z, p) + \text{dist}(p, w).$$

De fato, como já observado, é a métrica euclidiana de  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ , definida pelo produto escalar euclidiano  $(x, y) \cdot (x', y') = xx' + yy' = \Re(z\bar{z}')$ .

O *disco* (ou *bola*) aberto de raio  $r > 0$  e centro  $p \in \mathbb{C}$  é

$$D_r(p) := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z - p| < r\}.$$

Particularmente importante é o *disco unitário*  $\mathbb{D} := D_1(0)$ , formado pelos números complexos de módulo  $|z| < 1$ .

- Diga quando valem as igualdades nas (1.2) e (1.3).
- Mostre que

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

- Prove a desigualdade

$$|z - w| \geq ||z| - |w||$$

- Esboce os lugares do plano definidos pelas seguintes equações ou desigualdades:

$$|z - i| = 2 \quad 0 < \Re(z) < 1 \quad \Im(z) > 0 \quad 4/z = \bar{z}$$

$$|z - i| > |z + i| \quad |z - 1| + |z + 1| = 3 \quad |z + 1| - |z - 1| = 1$$

- Mostre que se  $z \in D_r(p)$ , então  $D_{r'}(z) \subset D_r(p)$  se  $r' < r - \text{dist}(z, p)$ .

5. (**retas e circunferências**) A circunferência (ou círculo)  $C_\rho(a)$  de centro  $a \in \mathbb{C}$  e raio  $\rho > 0$  é o lugar dos pontos que satisfazem  $|z - a| = \rho$ . Ao calcular os quadrados, temos  $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = \rho^2$ , ou seja,

$$|z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + b = 0, \quad (1.4)$$

onde  $b := |a|^2 - \rho^2 \in \mathbb{R}$ . Por exemplo, a circunferência unitária  $\mathbb{S} := C_1(0)$  é definida pela equação cartesiana  $|z|^2 = 1$ .

A equação paramétrica de uma reta passando pelo ponto  $p \in \mathbb{C}$  com velocidade  $v \in \mathbb{C}^\times$  é  $z(t) = p + vt$ , com  $t \in \mathbb{R}$ . Ao resolver para  $t$ , a condição “ $t$  real” traduz-se  $\Im((z - p)/v) = 0$ . Portanto, uma reta no plano complexo  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$  pode ser definida por uma equação cartesiana da forma  $\Im(\alpha z + \beta) = 0$ , onde  $\alpha = 1/v \in \mathbb{C}^\times$  e  $\beta = -p/v \in \mathbb{C}$  são parâmetros complexos. Uma equação cartesiana da reta é portanto

$$\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0, \quad (1.5)$$

onde  $a = -\bar{\alpha}/i = iv/|v|^2 \in \mathbb{C}^\times$  e  $b = 2\Im(\beta) \in \mathbb{R}$ . Por exemplo, umas equações cartesianas do eixo real  $\mathbb{R}$  e do eixo imaginário  $i\mathbb{R}$  são  $z - \bar{z} = 0$  e  $z + \bar{z} = 0$ , respetivamente.

- Determine uma equação cartesiana da reta que passa por  $z_0 = 1 + i$  com velocidade  $v = 2 - i$ .
  - Determine uma equação cartesiana da circunferência de centro  $1 + i$  e raio 3.
  - Mostre que a equação  $\Re((z - a)/(z - b)) = 0$  define uma circunferência cujo diâmetro é o segmento entre  $a$  e  $b$ .
6. (**sucessões**) Uma *sucessão/seqüência* (com valores complexos) é uma função  $z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ , ou seja, uma coleção  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números complexos  $z_n \in \mathbb{C}$ , indexados (portanto ordenados) por um inteiro positivo  $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ . Podemos pensar que o índice  $n$  é um “tempo”, e portanto o  $n$ -ésimo termo  $z_n$  é o valor de um “observável”  $z$  no instante  $n$ .

A sucessão  $(z_n)$  *converge* para o *limite*  $a \in \mathbb{C}$ , notação  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$  ou simplesmente  $z_n \rightarrow a$  (subentendido, quando  $n \rightarrow \infty$ ), se para cada “precisão”  $\varepsilon > 0$  existe um tempo  $\bar{n}$  tal que

$$|z_n - a| < \varepsilon$$

para todos os tempos  $n \geq \bar{n}$ . Isto significa que os valores  $z_n$  estão numa vizinhança arbitrariamente pequena de  $a$  desde que o tempo  $n$  seja suficientemente grande. É claro que a sucessão  $(z_n)$ , com  $z_n = x_n + iy_n$ , converge para  $a + ib$  sse as duas sucessões reais  $(x_n)$  e  $(y_n)$  convergem para  $a$  e  $b$ , respetivamente.

A sucessão  $(z_n)$  é *limitada* se existe  $M < \infty$  tal que  $|z_n| < M$  para todos os  $n$ . Também é útil dizer que  $z_n \rightarrow \infty$  quando, para cada  $K > 0$ , existe um tempo  $\bar{n}$  tal que  $|z_n| > K$  se  $n \geq \bar{n}$ .

Uma *subsucessão* de  $(z_n)$  é uma sucessão  $(z_{n_i})$  obtida selecionando apenas os valores  $z_{n_i}$ , sendo  $i \mapsto n_i$  uma função crescente  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . A propriedade importante de  $\mathbb{C}$  (ou dos espaços euclidianos  $\mathbb{R}^n$ ) é o seguinte

**Teorema 1.1** (Bolzano-Weierstrass). *Toda a sucessão limitada admite uma subsucessão convergente.*

Uma sucessão  $(z_n)$  é dita *fundamental*, ou *sucessão de Cauchy*, se para cada precisão  $\varepsilon > 0$  existe um tempo  $\bar{n}$  tal que

$$|z_n - z_m| < \varepsilon$$

para todos os tempos  $n, m > \bar{n}$ . É evidente que uma sucessão convergente é fundamental (um argumento triangular, pois quer  $z_n$  que  $z_m$  estão  $\varepsilon$ -próximos do limite se  $n$  e  $m$  são suficientemente grandes). Um argumento parecido mostra que uma sucessão fundamental que admite uma subsucessão convergente é convergente. As sucessões fundamentais são claramente limitadas (quase todos os seus termos, i.e. todos exceto um número finito deles, estão dentro de um disco), portanto, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass 1.1,



**Teorema 1.2** (teste de Cauchy). *Toda a sucessão fundamental em  $\mathbb{C}$  (ou em  $\mathbb{R}^n$ ) é convergente.*

Isto quer dizer que pode ser possível decidir se uma sucessão é convergente sem conhecer o seu limite! Em geral, a convergência das sucessões fundamentais é usada como definição da completude (sequencial) de um espaço métrico.

A sucessão mais importante é a *progressão geométrica*, definida pela lei recursiva

$$z_{n+1} = \lambda z_n$$

e uma condição inicial  $z_0 = a$ . Os seus termos são proporcionais aos termos da série com condição inicial  $a = 1$ , que são

$$z_0 = 1 \quad z_1 = \lambda \quad z_2 = \lambda^2 \quad \dots \quad z_n = \lambda^n \quad \dots$$

O parâmetro  $\lambda$  é chamado *razão*, sendo o quociente  $z_{n+1}/z_n$  entre dois termos sucessivos. A progressão geométrica ( $\lambda^n$ ) converge para zero quando  $|\lambda| < 1$ . É constante, logo trivialmente convergente, quando  $\lambda = 1$ , e oscila entre  $\pm 1$  quando  $\lambda = -1$ . É útil também observar que  $|\lambda^n| \rightarrow \infty$  quando  $|\lambda| > 1$ . O comportamento de  $z_n = \lambda^n$  para outros valores de  $\lambda \in \mathbb{S}$  é mais delicado, e depende da racionalidade do argumento de  $\lambda = e^{i\theta}$  ...

- Mostre que, se  $z = x + iy$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \rightarrow e^x e^{iy}$$

(calcule os limites do valor absoluto e do argumento separadamente)

7. (**esfera de Riemann**) Acontece que é útil acrescentar um ponto chamado  $\infty$  ao plano complexo, e definir a *esfera de Riemann* como sendo a reunião  $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . A ideia/motivação é fazer com que uma sequência de pontos  $z_n \in \mathbb{C}$  com valores absolutos  $|z_n|$  crescentes e ilimitados seja convergente com  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ . Para fazer isto, podemos “colar” ao plano complexo usual  $U_0 \approx \mathbb{C}$ , com coordenada  $z$ , um outro plano complexo  $U_\infty \approx \mathbb{C}$ , com coordenada  $w$ , declarando que  $w = 1/z$  se  $z \neq 0$  e  $w \neq 0$ . O ponto  $z = \infty$  da esfera de Riemann corresponde portanto ao ponto  $w = 0$  da segunda “carta”  $U_\infty$ .

Um modelo mais concreto da esfera de Riemann é a esfera unitária

$$\mathbb{S}^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . A correspondência  $\mathbb{S}^2 \approx \overline{\mathbb{C}}$  é definida da maneira seguinte. O “pólo norte”  $N = (0, 0, 1)$  representa o ponto  $\infty$ . Cada outro ponto  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  é identificado a um ponto  $z = x + iy$  do plano complexo  $\mathbb{C} \approx \{(x, y, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$  por meio da “projeção estereográfica”  $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ : o ponto  $z = \pi(x_1, x_2, x_3)$  é a interseção da reta passando por  $N$  e  $(x_1, x_2, x_3)$  com o plano  $\{x_3 = 0\}$ . O resultado é que

$$z = \frac{x_1 + iy_2}{1 - x_3}$$

e, de consequência,

$$x_1 = \frac{2x}{1 + |z|^2} \quad x_2 = \frac{2y}{1 + |z|^2} \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Uma circunferência  $C$  na esfera de Riemann  $\overline{\mathbb{C}} \approx \mathbb{S}^2$  é uma interseção da esfera  $\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  com um plano  $\{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = c\}$  (se  $c = 0$  é uma circunferência máxima, e se  $a_3 = c$  passa pelo pólo norte). A sua imagem  $\pi(C) \subset \mathbb{C}$  pela projeção estereográfica é uma circunferência do plano (caso genérico) ou uma reta (se  $a_3 = c$ ). Assim, é natural chamar genericamente “circunferências” as circunferências e as retas de  $\mathbb{C}$ .

- Verifique as fórmulas da projeção estereográfica.
- Verifique que a projeção estereográfica envia circunferências de  $\mathbb{S}^2$  em circunferências ou retas de  $\mathbb{C}$ .

8. **(projective line)** A more abstract model for the Riemann sphere is the *projective (complex) line*, which is the space of complex lines in the complex vector space  $\mathbb{C}^2$ , namely the quotient space

$$\mathbb{P}^1 := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^\times$$

of non-zero points  $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  modulo the equivalence relation  $(z_0, z_1) \sim (\lambda z_0, \lambda z_1)$  if  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ . The class of  $(z_0, z_1)$ , i.e. the complex line through  $(0, 0)$  and  $(z_0, z_1)$ , is traditionally denoted by  $[z_0, z_1]$ , and  $z_0$  and  $z_1$  are then said “homogeneous coordinates” of the point  $[z_0, z_1] \in \mathbb{P}^1$ . One recovers the usual coordinates on  $\overline{\mathbb{C}} \approx \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  setting  $z := z_0/z_1$  in the open set  $U_0 \approx \mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$  where  $z_1 \neq 0$ , and  $w := z_1/z_0 = 1/z$  in the open set  $U_1 \approx (\mathbb{C}^\times \cup \{\infty\}) \subset \overline{\mathbb{C}}$  where  $z_0 \neq 0$ . Clearly, both  $U_0 \approx \mathbb{C}$  and  $U_1 \approx \mathbb{C}$ , and their intersection is  $U_0 \cap U_1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ .

- Observe that the zero locus of  $|z_0|^2 - |z_1|^2$  projects to the unit circle in  $\mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$ . Show that circles in the Riemann spheres are zero loci of hermitian forms on  $\mathbb{C}^2$  with signature  $(1, 1)$ .

## 2 Funções holomorfas

24 set 2014

- (funções complexas de uma variável complexa)** O objetivo é compreender certas classes de funções  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , definidas em domínios  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ou  $\overline{\mathbb{C}}$ . Estas funções podem ser consideradas “campos”  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , com duas componentes reais,  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$ , que dependem de duas variáveis reais,  $x$  e  $y$ . Também podem ser consideradas “transformações”  $w = f(z)$ , que enviam regiões do plano onde vive  $z$  em regiões do plano onde vive  $w$ . A noção de continuidade é equivalente ao caso do plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$ . Por outro lado, a noção crucial de “derivada complexa”, apesar da sua simplicidade, é a origem de uma série de milagres.
- (topologia elementar)** Um subconjunto  $A \subset \mathbb{C}$  (ou, em geral, de um espaço métrico, como por exemplo  $\mathbb{R}^n$ , ou  $\overline{\mathbb{C}} \approx \mathbb{S}^2$ ) é *aberto* se é vazio ou se cada seu ponto  $p$  é centro de um disco  $D_r(p)$  (em geral, bola) contido em  $A$ . A família  $\mathcal{A}$  dos abertos é chamada “topologia” (induzida pela métrica), e verifica as seguintes propriedades: o conjunto vazio  $\emptyset$  e o próprio  $\mathbb{C}$  são abertos; uma reunião (arbitrária) de abertos é um aberto; a interseção de dois (ou de um número finito de) abertos é um aberto. Estas propriedades podem ser usadas como “definição” de topologia, sem passar por uma métrica.

Um subconjunto  $F \subset \mathbb{C}$  é *fechado* se o seu complementar  $\mathbb{C} \setminus F$  é aberto. Assim, a família  $\mathcal{F}$  dos fechados satisfaz as propriedades duais: o conjunto vazio  $\emptyset$  e o próprio  $\mathbb{C}$  são fechados; uma interseção de fechados é um fechado; a reunião de dois (ou de um número finito de) fechados é um fechado.

Um subconjunto arbitrário  $S \subset \mathbb{C}$  divide o plano em três subconjuntos disjuntos (alguns dos quais podem ser vazios): o *interior*  $\text{int}(S)$ , que é o maior aberto contido em  $S$  (ou seja,  $p \in \text{int}(S)$  se existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $D_\varepsilon(p) \subset S$ ), o *exterior*  $\text{ext}(S) := \text{int}(\mathbb{C} \setminus S)$ , e a *fronteira*  $\partial S := \mathbb{C} \setminus (\text{int}(S) \cup \text{ext}(S))$ . Em particular,  $p \in \partial S$  se todo o disco  $D_\rho(p)$  contém pontos de  $S$  e do seu complementar  $\mathbb{C} \setminus S$ . A reunião  $\overline{S} := \text{int}(S) \cup \partial S$ , que é um conjunto fechado, é chamada *aderência*, ou *fecho*, de  $S$ . Um ponto  $p \in \overline{S}$  se todo o disco  $D_\rho(p)$  contém pontos de  $S$ .

Uma *vizinhaça* do ponto  $p \in \mathbb{C}$  é um conjunto  $U$  que contém um disco  $D_\rho(p)$  suficientemente pequeno centrado em  $p$  (por exemplo, um aberto que contém  $p$ ).

Um aberto  $A \subset \mathbb{C}$  é *conexo* se não é uma reunião disjunta de dois abertos não-vazios. Equivalentemente, se cada dois pontos  $\alpha, \beta \in A$ , pode ser unidos por uma *curva* contida em  $A$ , uma função contínua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  tal que  $\gamma(0) = \alpha$  e  $\gamma(1) = \beta$  (de fato,  $\gamma$  pode ser escolhida diferenciável). Por exemplo, um aberto convexo, i.e. tal que se  $\alpha, \beta \in A$  então  $z(t) = (1-t)\alpha + t\beta \in A$  para todo o  $t \in [0, 1]$ , é conexo. Um aberto arbitrário  $D$  é uma reunião disjunta  $D = \cup_i D_i$  de abertos conexos  $D_i$ , chamados *componentes conexas*. A componente conexa de um ponto  $p \in D$  sendo o conjunto dos pontos  $p' \in D$  que podem ser unidos a  $p$  por uma curva contida em  $D$ .

Uma *região* é um subconjunto não-vazio, aberto e conexo  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . As regiões do plano  $\mathbb{C}$ , ou da esfera de Riemann  $\overline{\mathbb{C}}$ , são os domínios naturais das funções que queremos compreender.

- (limites e continuidade)** Seja  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função definida numa região  $D \subset \mathbb{C}$ . Se  $p \in D$ , então  $\lim_{z \rightarrow p} f(z) = \alpha$  (“o *limite* de  $f$  quando  $z$  tende para  $p$  existe e é igual a  $\alpha$ ”) quer dizer que para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |z - p| < \delta$  então  $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$ . A função  $f$  é *contínua* em  $p$  se  $\lim_{z \rightarrow p} f(z) = f(p)$ , ou seja, se para cada  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que  $f(D_\delta(p)) \subset D_\varepsilon(f(p))$ . A função  $f$  é *contínua* se é contínua em todos os pontos do seu domínio. A noção de continuidade é independente da métrica particular usada para definir os abertos. De fato, é imediato verificar que uma função  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua sse a imagem inversa  $f^{-1}(A)$  de cada aberto  $A \subset \mathbb{C}$  é um aberto.

Um subconjunto  $K \subset \mathbb{C}$  (ou de um espaço métrico) é *compacto* se toda a cobertura aberta  $K \subset \cup_\alpha A_\alpha$  (i.e. formada por abertos  $A_\alpha$ 's) admite uma subcobertura finita  $K \subset \cup_{i=1}^n A_{\alpha_i}$  (i.e. formada por um número finito dos  $A_\alpha$ 's). É evidente que a imagem  $f(K)$  de um compacto  $K \subset D$  por uma função contínua  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  é um compacto. Acontece que os compactos de  $\mathbb{C}$  (ou de  $\mathbb{R}^n$ ) são os subconjuntos fechado e limitados (i.e. contidos num disco  $D_R(0)$  suficientemente grande). Em particular,

**Teorema 2.1** (Weierstrass). *Uma função contínua  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  definida num compacto  $K$  é limitada, e atinge o seu máximo e o seu mínimo.*

Uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  é *uniformemente contínua* se para todo o  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que  $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$  se  $|z - z'| < \delta$ .

**Teorema 2.2** (Cantor). *Uma função contínua  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$  definida num compacto  $K$  é uniformemente contínua.*

4. (**funções afins**) As funções complexas mais simples correspondem às operações de corpo. São as *translações*  $f(z) = z + \alpha$  e as *homotetias (complexas)*  $f(z) = \lambda z$ . Podem ser combinadas para dar origem às *funções/transformações afins*

$$f(z) = \lambda z + \alpha, \quad (2.1)$$

com parâmetros  $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ . Se  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$  (i.e. se  $f$  não é constante!), a transformação  $w = \lambda z + \alpha$  é uma bijeção do plano complexo, cuja inversa é a transformação afim  $z = \lambda^{-1}w - \alpha/\lambda$ . Se definimos  $f(\infty) := \infty$ , então é também uma bijeção da esfera de Riemann. É claro que a composição de duas transformações afins é ainda uma transformação afim. O conjunto  $\text{Aff}(\mathbb{C})$  das transformações afins invertíveis, munido da lei “composição”, forma portanto um grupo, chamado *grupo afim complexo*.

- Sejam  $f(z) = \lambda z + \alpha$  e  $g(z) = \mu z + \beta$  duas transformações afins invertíveis. Calcule  $f \circ g$  e  $g \circ f$ . Descreva a lei de composição do grupo  $\text{Aff}(\mathbb{C})$ , parametrizado por  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$  como em (2.1) (os matemáticos dizem que  $\text{Aff}(\mathbb{C})$  é o produto “semi-direto” do grupo multiplicativo  $\mathbb{C}^\times$  que age sobre o grupo aditivo  $\mathbb{C}$ , denotado por  $\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}$ ).
  - Determine os pontos fixos de  $f(z) = \lambda z + \alpha$ , ou seja, os pontos  $p \in \overline{\mathbb{C}}$  tais que  $f(p) = p$ .
  - Esboce a sequência das imagens de um ponto  $z \neq 0$  (ou outra figura no plano complexo) pelas iteradas da homotetia  $f(z) = \lambda z$ , ou seja, as transformações  $f \circ f \circ \dots \circ f$  ou  $f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}$ , quando  $|\lambda| \neq 1$  ou quando  $|\lambda| = 1$ .
5. (**funções holomorfas**) Uma função  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida numa vizinhança  $U$  de  $p \in \mathbb{C}$ , é *derivável* em  $p$  se existe o limite

$$f'(p) := \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(p+z) - f(p)}{z}, \quad (2.2)$$

ou seja, se existe um número complexo  $\lambda = f'(p)$ , dito *derivada de  $f$  em  $p$* , tal que numa vizinhança de  $p$  podemos aproximar a função com uma função afim

$$f(p+z) \simeq \alpha + \lambda z,$$

com  $\alpha = f(p)$ , a menos de um “erro”  $e(z) := f(p+z) - \alpha - \lambda z$  que é “infinitésimo”, i.e. satisfaz  $\lim_{z \rightarrow 0} e(z)/z = 0$ . Em particular, uma função derivável é contínua.

Uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , definida numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  do plano complexo, é dita *holomorfa* se admite a derivada em todos os pontos  $p \in \Omega$ . É dita *inteira* quando o domínio é  $\Omega = \mathbb{C}$ . É também útil dizer que  $f$  é holomorfa num domínio  $D \subset \mathbb{C}$ , não necessariamente aberto, se é holomorfa numa vizinhança aberta de  $D$ . O modelo local de uma função holomorfa é portanto uma função afim, i.e.  $f(p+z) = \alpha + \lambda z + o(z)$ . Os pontos onde  $f'(p) = 0$ , i.e. onde  $f(p+z) = \alpha + o(z)$ , são chamados *pontos críticos* de  $f$ .

A definição de derivada complexa é formalmente igual à definição de derivada real, logo todas as regras de derivação usuais continuam válidas. Em particular, combinações lineares  $\alpha f(z) + \beta g(z)$  de funções holomorfas são holomorfas, e têm derivadas  $\alpha f'(z) + \beta g'(z)$ . Portanto, o espaço  $\mathcal{O}(\Omega)$  das funções holomorfas definidas numa região  $\Omega$  é um espaço linear complexo. Também produtos (pontuais)  $f(z)g(z)$  de funções holomorfas são holomorfos, a derivada

sendo dada pela regra de Leibniz  $f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ , e portanto  $\mathcal{O}(\Omega)$  é um anel. Se  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ , então  $g(z) = 1/f(z)$  é holomorfa em  $\Omega$  exceto nos pontos  $p$  onde  $f(p) = 0$ , chamados *zeros* da função  $f$ , e a sua derivada é  $g'(z) = -f'(z)/f(z)^2$ . Composições  $f \circ g$  de funções holomorfas são também holomorfas, e a derivada é dada pela regra da cadeia  $f'(g(z))g'(z)$ .

**Teorema 2.3.** *Uma função  $f \in \mathcal{O}(D)$  com derivada nula  $f'(p) = 0$  em todos os pontos de uma região  $D \subset \mathbb{C}$  é constante.*

*Demonstração.* Cada dois pontos  $\alpha, \beta \in D$  podem ser unidos por um caminho diferenciável  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ . A derivada da composição  $f \circ \gamma$  é  $f'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = 0$  para todos os tempos  $t$ , e portanto  $f(\alpha) = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = f(\beta)$ .  $\square$

6. (**condições de Cauchy-Riemann**) O limite em (2.2) deve ser independente da direção escolhida para fazer  $z \rightarrow 0$ . Em particular, podemos escolher  $z = \varepsilon$  ou  $z = i\varepsilon$ , com  $\varepsilon \rightarrow 0$  e real. Então uma função holomorfa  $f(z)$ , pensada como uma função  $f(x + iy) \approx f(x, y)$  de duas variáveis reais,  $x$  e  $y$ , verifica as *condições de Cauchy-Riemann*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}} \quad (2.3)$$

Se  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , com  $u$  e  $v$  funções reais, então a equação (2.3) é equivalente às duas equações diferenciais

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \quad (2.4)$$

Sejam  $\partial$  e  $\bar{\partial}$  os operadores diferenciais definidos por

$$\partial := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{e} \quad \bar{\partial} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Formalmente, pensando em  $z$  e  $\bar{z}$  como coordenadas do plano  $x$ - $y$ , definidas pelas mudanças de coordenadas  $x = (z + \bar{z})/2$  e  $y = (z - \bar{z})/2i$ , o operador  $\partial$  pode ser interpretado como sendo o operador  $\partial/\partial z = (\partial x/\partial z)\partial/\partial x + (\partial y/\partial z)\partial/\partial y$ , e o operador  $\bar{\partial}$  pode ser interpretado como sendo o operador  $\partial/\partial \bar{z} = (\partial x/\partial \bar{z})\partial/\partial x + (\partial y/\partial \bar{z})\partial/\partial y$ . As condições de Cauchy-Riemann (2.3) podem ser escritas

$$\boxed{\bar{\partial} f = 0}$$

Moralmente, uma função holomorfa é uma função que apenas depende de  $z$  e não de  $\bar{z}$ .

**Teorema 2.4.** *Se  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  são funções reais de classe  $C^1$  numa região  $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$  que satisfazem as condições de Cauchy-Riemann (2.3) ou (2.4), então  $f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$  é uma função holomorfa em  $\Omega$ .*

- Verifique se as seguintes funções são holomorfas, determine possíveis domínios, e calcule as derivadas  $f'(z)$ ,  $f''(z)$ , ...

$$f(z) = z \quad f(z) = \bar{z} \quad f(z) = z^2 \quad f(z) = |z|^2$$

$$f(z) = 1/z \quad f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) \quad f(z) = \Re(z)$$

- Mostre que  $f(z)$  é holomorfa sse  $\overline{f(\bar{z})}$  é holomorfa.
- Mostre que se uma função holomorfa tem valores reais (i.e.  $\Im(f(z)) = 0$ ), ou imaginários puros (i.e.  $\Re(f(z)) = 0$ ), ou tem módulo constante (i.e.  $|f(z)| = c$ ), então tem derivada  $f' = 0$ , e portanto é localmente constante

7. (transformações conformes) A matriz Jacobiana  $J = (\text{Jac}f)(p)$  de uma função diferenciável  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  num ponto  $p \in \Omega$  é uma matriz real  $2 \times 2$ , com 4 entradas independentes, que representa a parte linear de  $f(p+v) - f(p)$ , i.e.

$$f(p+v) = f(p) + J \cdot v + o(\|v\|).$$

As condições de Cauchy-Riemann (2.3) dizem que a matriz Jacobiana de uma função holomorfa depende apenas de 2 números reais, pois representa a multiplicação pelo número complexo  $f'(p) = \rho e^{i\theta}$ , logo é da forma  $J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ , onde  $a = \partial u / \partial x(p)$  e  $b = \partial v / \partial x(p)$ . Se  $\rho^2 = a^2 + b^2 = \det(J) > 0$ , então

$$J = \rho \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \rho R_\theta, \quad \text{com } R_\theta \in \text{SO}(2, \mathbb{R}).$$

Em particular,  $f$  envia pequenos círculos à volta de  $p$  em pequenos círculos à volta de  $f(p)$ , e preserva os ângulos entre as curvas diferenciáveis que passam por  $p$ . De fato, sejam  $\gamma(t)$  e  $\mu(t)$  duas curvas que passam pelo ponto  $p = \gamma(0) = \mu(0)$  com velocidades não nulas  $v = \dot{\gamma}(0)$  e  $w = \dot{\mu}(0)$ , respetivamente. Então as curvas  $f(\gamma(t))$  e  $f(\mu(t))$  passam pelo ponto  $f(p)$  com velocidades  $Jv$  e  $Jw$ , respetivamente, e  $(Jv \cdot Jw) \|v\| \|w\| = (v \cdot w) \|Jv\| \|Jw\|$ , o que significa que o ângulo entre  $v$  e  $w$  é igual ao ângulo entre  $Jv$  e  $Jw$ .

Uma transformação que preserva os ângulos e também preserva a orientação do plano (i.e.  $\det(\text{Jac}f) > 0$ ) é chamada *conforme*. Portanto, uma função holomorfa define uma transformação conforme  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  de uma região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  que não contém pontos críticos de  $f$  (i.e. uma região onde  $f' \neq 0$ ).

- Uma função tal que  $f(p+z) = f(p) + \lambda \cdot \bar{z} + o(z)$  nos pontos de uma região  $D \subset \mathbb{C}$  é dita *anti-holomorfa*. Uma transformação anti-holomorfa preserva os ângulos mas não a orientação, pois  $\det(\text{Jac}f) < 0$  fora dos pontos críticos. Mostre que  $f = u + iv$  é anti-holomorfa sse  $\partial f = 0$ , e portanto sse  $\bar{f} = u - iv$  é holomorfa.

8. (potências e raízes) Se  $n = 0, 1, 2, \dots$ , a potência

$$f(z) = z^n$$

é uma função inteira, i.e. é holomorfa em  $\mathbb{C}$ . A sua derivada é  $f'(z) = n z^{n-1}$ , que também é inteira. O único ponto onde  $f(p) = 0$  é a origem  $p = 0$ , que é também o único ponto crítico (i.e. onde  $f'(p) = 0$ ) se  $n \geq 1$ . Em particular,  $f(z) = z^n$  define uma transformação conforme  $f : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ . A imagem do ponto  $z = \rho e^{i\theta}$ , com  $\rho > 0$ , é o ponto  $w = \rho^n e^{in\theta}$ . Em particular, um setor angular  $A = \{\alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi/n\}$  de “comprimento”  $2\pi/n$  é enviado bijectivamente sobre  $\mathbb{C} \setminus \{\arg(z) = \alpha\}$ . A imagem inversa de  $w = r e^{i\phi} \neq 0$  é composta pelos  $n$  vértices  $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\phi+2\pi k)/n}$ , com  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , de um polígono regular inscrito na circunferência de raio  $\sqrt[n]{r}$ .

As potências negativas  $f(z) = z^{-n} = 1/z^n$ , com  $n = 1, 2, 3, \dots$ , são holomorfa no plano perfurado  $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , e as suas derivadas são  $f'(z) = -n z^{-(n+1)}$ .

- Seja  $f = u + iv : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  a função holomorfa  $f(z) = z^2$ , definida no semi-plano superior  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \Im(z) > 0\}$ . Descreva as curvas de nível das funções reais  $u$  e  $v$ .

9. (polinómios, zeros) Usando repetidamente somas e multiplicações, é possível construir os *polinómios*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (2.5)$$

com coeficientes  $a_k \in \mathbb{C}$ . O *grau* do polinómio (2.5) é  $\deg(f) = n$  se  $a_n \neq 0$ . Somas e produtos finitos de polinómios são polinómios. Portanto, o espaço  $\text{Pol}(\mathbb{C})$  dos polinómios forma um anel comutativo, cuja identidade é o polinómio constante  $f(z) = 1$ . Observe também que  $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ , desde que  $f$  e  $g$  sejam diferentes do polinómio nulo  $h(z) = 0$  (que portanto não convém chamar “polinómio!”).

Os polinômios são funções inteiras, infinitamente deriváveis (e com  $k$ -ésima derivada nula se  $k > \deg(f)$ ). Os coeficientes de um polinômio são determinados pelos valores de  $f$  e das suas derivadas na origem, pois  $a_0 = f(0)$ ,  $a_1 = f'(0)$ ,  $a_2 = f''(0)/2$ , ...

$$\boxed{\frac{a_k}{k!} = f^{(k)}(0)}$$

Os zeros, ou raízes, do polinômio  $f$  são os pontos  $p$  onde  $f(p) = 0$ , que formam o conjunto  $Z(f) := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } f(z) = 0\}$ . Se  $p$  é uma raiz de  $f$ , então  $f(z) = (z - p)g(z)$  onde  $g$  é um polinômio de grau  $\deg(g) = \deg(f) - 1$  (exercício). Acontece, e é um fato central chamado “teorema fundamental da álgebra” (Gauss, 1799) (teorema 5.9), que todo o polinômio de grau  $n \geq 1$  admite (pelo menos) uma raiz. De consequência (exercício), um polinômio de grau  $\deg(f) = n \geq 1$  factoriza no produto

$$f(z) = a_n (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)$$

onde  $p_1, p_2, \dots, p_n$  são as suas  $n$  raízes, não necessariamente distintas. A fatorização é única, a menos de permutações dos fatores. Se uma raiz  $p$  é repetida  $k$  vezes, ou seja, se  $f(z) = (z - p)^k g(z)$  com  $g(p) \neq 0$ , então o inteiro  $k \in \mathbb{N}$  é chamado *multiplicidade/ordem* da raiz  $p$ , ou também “*ordem de  $f$  no ponto  $p$* ”, e denotado por  $\text{ord}(f, p) = k$ . É natural chamar os pontos  $p$  onde  $f(p) \neq 0$  pontos de ordem  $\text{ord}(f, p) = 0$ . A maneira correcta de “contar” o número de zeros de um polinômio é  $Z := \sum_p \text{ord}(f, p)$  (observe que apenas um número finito de pontos têm ordem  $\neq 0$ ), e o teorema fundamental da álgebra diz que esta soma é igual a  $\deg(f)$ .

Se  $p$  é uma raiz do polinômio (2.5), então  $\bar{p}$  é uma raiz do polinômio  $\overline{a_n}z^n + \dots + \overline{a_1}z + \overline{a_0}$ . Em particular, as raízes não reais de um polinômio com coeficientes reais (i.e. com  $a_k = \overline{a_k}$ ) ocorrem em pares de números conjugados,  $p$  e  $\bar{p}$ .

- Se  $p$  uma raiz do polinômio (2.5) de grau  $n \geq 1$ , então

$$f(z) - f(p) = a_n(z^n - p^n) + \dots + a_1(z - p).$$

Use a identidade

$$z^k - p^k = (z - p)(z^{k-1} + z^{k-2}p + \dots + zp^{k-2} + p^{k-1})$$

e deduza que  $f(z) = (z - p)g(z)$  onde  $g$  é um polinômio de grau  $n - 1$ .

- Seja  $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  um polinômio de grau  $n \geq 1$  que possui as  $n$  raízes  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Mostre que

$$f(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - p_k) = c \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{p_k}\right)$$

e calcule a constante  $c$ . Deduza que a “derivada logarítmica”  $f'(z)/f(z)$  (que é moralmente a derivada de  $\log f(z)$ , fora dos zeros do polinômio) é dada por

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - p_k}.$$

- Determine um polinômio cujas raízes sejam as raízes  $n$ -ésimas da unidade, quando  $n = 2, 3, 4 \dots$  ou no caso geral.

10. (funções racionais, pólos) Uma *função racional* é o quociente

1 out 2014

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0} \quad (2.6)$$

entre dois polinômios  $g, h \in \text{Pol}(\mathbb{C})$ , que podemos assumir sem fatores (e portanto zeros) comuns. É uma função holomorfa, de fato infinitamente derivável, fora dos zeros do denominador  $h(z)$ . Somas, produtos e quocientes de funções racionais são funções racionais. Em particular, o espaço  $\text{Rat}(\mathbb{C})$  das funções racionais forma um corpo.

É conveniente definir  $f(p) = \infty$  se  $p$  é uma raiz do denominador  $h(z)$  (e não do numerador!), e chamar este ponto  $p$  um *pólo* de ordem  $\text{ord}(h, p) =: -\text{ord}(f, p)$ . Para definir também um valor de  $f$  em  $\infty$ , uma possibilidade é definir a função  $F(z) := f(1/z)$ , e depois definir  $f(\infty) := F(0)$  e  $\text{ord}(f, \infty) := \text{ord}(F, 0)$ . Mas

$$F(z) = z^{m-n} \frac{a_n + a_{n-1}z + \cdots + a_1z^{n-1} + a_0z^n}{b_m + b_{m-1}z + \cdots + b_1z^{m-1} + b_0z^m}.$$

Portanto,  $\infty$  é um zero de  $f$  de ordem  $m - n$  se  $m > n$ , é um pólo de  $f$  de ordem  $n - m$  se  $n > m$ , ou é um ponto regular onde  $f(\infty) = a_n/b_m \neq 0$ ,  $\infty$  se  $n = m$  (estamos a assumir implicitamente que  $\text{deg}(g) = n$  e  $\text{deg}(h) = m$  em (2.6)). Assim, uma função racional pode, e deve!, ser pensada como uma função contínua

$$f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

(a topologia da esfera de Riemann  $\overline{\mathbb{C}} \approx \mathbb{S}^2$  é induzida pela métrica euclidiana em  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ ). Se definimos o seu *grau*  $\text{deg}(f) := \max\{n, m\}$ , então  $f$  possui exatamente  $\text{deg}(f)$  zeros e  $\text{deg}(f)$  pólos na esfera de Riemann. Resolver  $f(z) = w$ , com  $w \in \mathbb{C}$ , significa achar os zeros de  $f(z) - w$ . Mas é evidente que  $\text{deg}(f - w) = \text{deg}(f)$ . A conclusão é que para cada  $w \in \overline{\mathbb{C}}$  existem  $\text{deg}(f)$  pontos  $p \in \overline{\mathbb{C}}$  tais que  $f(p) = w$ .

- Determine uma função racional cujos pólos são os pontos  $\pm 1$  e cujos zeros são os pontos  $\pm i$  (todos de ordem um).

11. (**transformações de Möbius**) As funções racionais de grau 1 são chamadas *transformações lineares fracionárias*, ou *transformações de Möbius*, e têm a forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (2.7)$$

onde os parâmetros  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  são tais que  $ad - bc \neq 0$  (caso contrário a fração não é reduzida, e  $f(z)$  é constante, logo de grau 0). Sendo  $\text{deg}(f) = 1$ , cada  $w \in \overline{\mathbb{C}}$  tem uma e uma única imagem inversa,

$$z = f^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

Uma transformação de Möbius define portanto uma bijeção  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  da esfera de Riemann, tendo definido  $f(\infty) := a/c$  e  $f(-d/c) := \infty$ , ou  $f(\infty) = \infty$  se  $c = 0$ .

Casos particulares são as translações  $T_\alpha(z) = z + \alpha$  com  $\alpha \in \mathbb{C}$ , as homotetias complexas  $M_\lambda(z) = \lambda z$  com  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ , e a *inversão*

$$I(z) := 1/z$$

(ao longo da circunferência unitária, pois  $|z| \cdot |I(z)| = 1$ ). De fato, uma transformação de Möbius genérica (2.7) é uma composição de estas três transformações elementares (quais?).

- Descreva a inversão  $f(z) = 1/z$  e a transformação  $g(z) = 1/\bar{z}$  (que não é holomorfa!) usando a forma polar.
- Verifique que a inversão  $f(z) = 1/z$  transforma circunferências e retas de  $\mathbb{C}$  em circunferências ou retas. Ou seja, transforma circunferências de  $\overline{\mathbb{C}}$  em circunferências.
- Determine as imagens e as imagens inversas dos pontos  $0, 1, \infty \in \overline{\mathbb{C}}$  pela transformação de Möbius (2.7). Mostre que a única transformação de Möbius que fixa estes três pontos (i.e. tal que  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  e  $f(\infty) = \infty$ ) é a identidade  $f(z) = z$ .



### 3 Séries de potências, funções analíticas, exponencial

1. (**séries**) Uma *série* é uma soma infinita formal  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ , onde os  $z_n \in \mathbb{C}$  são elementos de uma sucessão. Se a sucessão  $(s_n)$  das *somas parciais*, definidas por  $s_n := \sum_{k=0}^n z_k$ , converge, e o seu limite é  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ , então a série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é dita *convergente* (ou *somável*), e a sua *soma* é definida  $\sum_{n \geq 0} z_n := s$ .

A série  $\sum_n z_n$  é *absolutamente convergente* se a série  $\sum_n |z_n|$ , formada pelos valores absolutos dos seus termos, é convergente. A convergência absoluta implica a convergência, mas existem séries convergentes que não são absolutamente convergentes (chamadas *condicionalmente convergentes*, e têm um comportamento que pode parecer muito singular ...).

- A *série harmónica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

é divergente. De fato, o termo genérico  $1/n$  é superior ao integral  $\int_n^{n+1} dx/x$ , e portanto as somas parciais  $\sum_{k=1}^n 1/k$  são superiores a  $\log(n)$ .

- A mais importante é a *série geométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \quad (3.1)$$

A identidade  $(1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n)(z - 1) = z^{n+1} - 1$  implica que, se  $z \neq 1$ , a soma dos primeiros  $n + 1$  termos da progressão geométrica é

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

Em particular, quando  $|z| < 1$  a série geométrica é absolutamente convergente, e a sua soma é

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots = \frac{1}{1 - z}.$$

Por outro lado, se  $|z| > 1$  então  $|1 + z + z^2 + \dots + z^n| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Se  $0 \leq a_n \leq b_n$  para todo o  $n \gg 1$  (ou seja, suficientemente grande), então a convergência de  $\sum b_n$  implica a convergência de  $\sum a_n$ . Em particular, se  $|z_n| \leq C \lambda^n$  para alguma constante  $C > 0$  e todo o  $n \gg 1$ , então as somas parciais da série  $\sum_n |z_n|$  são limitadas por  $C$  vezes as somas parciais da série geométrica  $\sum_n \lambda^n$ , e, em particular, se  $|\lambda| < 1$ , então a série  $\sum_n z_n$  é absolutamente convergente. Isto acontece quando

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |z_n|^{1/n} < 1 \quad (\text{teste da raiz})$$

ou quando

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |z_{n+1}/z_n| < 1 \quad (\text{teste da razão})$$

2. (**sucessões e séries de funções**) Seja  $(f_n)$  uma sucessão de funções  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ , definidas numa região  $D \subset \mathbb{C}$ . Uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  é o *limite pontual* das  $f_n$ 's, ou  $f_n \rightarrow f$  *pontualmente*, se  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  para todo o  $z \in D$ . Acontece que o limite pontual não herda necessariamente as boas propriedades das  $f_n$ 's. Por exemplo, o limite pontual de uma sucessão de funções contínuas pode não ser uma função contínua.

A *norma uniforme* no espaço das funções limitadas definidas em  $D$  é  $\|f\|_{\infty} := \sup_{z \in D} |f(z)|$ . Induzes a distância uniforme  $\text{dist}_{\infty}(f, g) = \|f - g\|_{\infty}$ , que também pode fazer sentido (i.e. pode ser finita) quando  $f$  e  $g$  não são limitadas. A sucessão  $(f_n)$  converge *uniformemente* para  $f$  em  $D$ , ou  $f_n \rightarrow f$  *uniformemente*, se  $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Isto significa que para cada  $\varepsilon > 0$  existe um tempo  $\bar{n}$  tão grande (e independente do ponto  $z$ , ou seja, “uniforme”) que  $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$  para todo o  $z \in D$  se  $n > \bar{n}$ .

**Teorema 3.1.** *O limite uniforme de uma sucessão de funções contínuas é uma função contínua.*

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$ . Se  $n$  é suficientemente grande, então  $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$  para todo  $z \in D$ . Pela continuidade de  $f_n$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f_n(z) - f_n(z')| < \varepsilon$  se  $|z - z'| < \delta$ . Então, pela desigualdade do triângulo,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z')| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z')| + |f_n(z') - f(z')| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

se  $|z - z'| < \delta$ . □

O análogo do teste de Cauchy 1.2 para a convergência uniforme é o seguinte: a sucessão de funções  $(f_n)$  converge uniformemente em  $D$  sse para todo  $\varepsilon > 0$  existe um tempo  $\bar{n}$  tal que  $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$  para todo  $z \in D$  (ou seja,  $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ ) quando  $n, m > \bar{n}$ .

Uma série de funções  $\sum_n f_n(z)$  converge uniformemente para uma função  $F(z)$  num domínio  $D$  se a sucessão das somas parciais  $s_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)$  converge uniformemente para  $F$ . Pelo critério de Cauchy, isto acontece quando, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um tempo  $\bar{n}$  tal que

$$|s_{n+m}(z) - s_n(z)| = |f_{n+1}(z) + \dots + f_{n+m}(z)| < \varepsilon$$

para todo  $z \in D$  e todos os  $n > \bar{n}$  e  $m \geq 1$ . Se os termos da série são limitados por uma constante vezes os termos de uma série numérica  $\sum_n a_n$ , ou seja,  $|f_n(z)| \leq M a_n$ , então

$$|f_{n+1}(z) + \dots + f_{n+m}(z)| \leq M |a_{n+1} + \dots + a_{n+m}|$$

Em particular, se  $\sum a_n$  é uma série convergente, então a série  $\sum_n f_n(z)$  é uniformemente convergente (*M-teste de Weierstrass*).

### 3. (série geométrica) A série *geometrica*

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge no disco unitário  $\mathbb{D}$ . Converge uniformemente em cada disco  $\overline{D_\rho(0)}$  de raio  $0 < \rho < 1$  (pois, se  $|z| < \rho$ , os termos da série são limitados por  $|z^n| \leq \rho^n$ ). É claro que diverge quando  $z = 1 \in \partial\mathbb{D}$ , e quando  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ .

### 4. (séries de potências) As séries de funções mais elementares são as *séries de potências* $\sum_n c_n z^n$ , com coeficientes $c_k \in \mathbb{C}$ , cujas somas parciais são polinômios $s_n = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$ . Usando translações na varável independente, podemos ainda construir séries de potências

$$\sum_{n \geq 0} c_n (z - p)^n = c_0 + c_1 (z - p) + c_2 (z - p)^2 + \dots \quad (3.2)$$

em torno de um ponto arbitrário  $p \in \mathbb{C}$ . O “raio de convergência”  $R$  da série de potências (3.2) é dado pela *fórmula de Hadamard*

$$\boxed{1/R := \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}}$$

O “disco de convergência” é  $D := D_R(p)$  (se o “limsup” é  $\infty$ , então  $R = 0$  e  $D = \emptyset$ ; se o “limsup” é 0, então  $R = \infty$ , e  $D = \mathbb{C}$ ). Ou seja, como é fácil ver usando o teste da raiz, a série de potências (3.2) converge absolutamente para cada  $z \in D$ , diverge se  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ , e converge uniformemente (e portanto define uma função contínua) em cada subconjunto compacto  $K \subset D$  (por exemplo, em cada disco fechado  $\overline{D_r(p)}$  com  $r < R$ ).

Uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , definida numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , é *analítica*, ou *representável por séries de potências*, em  $\Omega$  se à volta de cada  $p \in \Omega$  existe um disco  $D_r(p)$  e uma série de potências (3.2) que converge para  $f(z)$  para todos os  $z \in D_r(p)$ .

**Teorema 3.2** (Abel). *Se  $f$  é analítica em  $\Omega$  então  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ , e a sua derivada  $f'$  também é analítica em  $\Omega$ . Em particular, se*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n$$

num disco  $D_r(p) \subset \Omega$ , então  $f'$  é a soma da série de potências obtida derivando termo a termo a série de potências de  $f$ , ou seja,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-p)^{n-1}.$$

*Demonstração.* [Ah78, Ru87]. □

Por indução, se  $f$  é analítica em  $\Omega$ , então todas as suas derivadas são analíticas, e portanto holomorfas, em  $\Omega$ . As séries de potências das derivadas, num disco  $D_r(p)$  onde  $f$  é dada por (3.2), são obtidas derivando termo a termo a séries de  $f$ , ou seja,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n (z-p)^{n-k}$$

Isto implica que os coeficientes  $c_k$  de uma série de potência (3.2) que representa uma função analítica  $f$  numa vizinhança de um ponto  $p$  são únicos, pois

$$c_k = \frac{f^{(k)}(p)}{k!}$$

- Derive a série geométrica para obter as séries de potências de

$$\frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{(1-z)^3}$$

em torno de 0.

- Determine o disco de convergência das seguintes séries de potências, e, se possível, uma expressão compacta para as funções que definem.

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n & \sum_{n \geq 0} n z^n & \sum_{n \geq 0} n^n z^n \\ & \sum_{n \geq 0} 2^n z^n & \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n} z^{2n} & \sum_{n \geq 0} (-1)^n (z-1)^n \end{aligned}$$

- Mostre que, se  $|\zeta| = \rho$  e  $|z| < \rho$ ,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \left( 1 + \frac{z}{\zeta} + \left(\frac{z}{\zeta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\zeta}\right)^3 + \dots \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

5. (exponencial e funções trigonométricas) A função exponencial  $\exp(z)$ , ou  $e^z$ , é a (única) solução da equação diferencial

$$f' = f \tag{3.3}$$

com condição inicial  $f(0) = 1$ . A conjectura  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  é solução formal de  $f' = f$  se  $a_{n+1} = a_n/(n+1)$ , e o seu valor inicial é  $f(0) = 1$  se  $a_0 = 1$ . Portanto, a solução formal é definida pela série de potências

$$e^z := \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \dots \tag{3.4}$$

É imediato verificar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |n|^{1/n} = \infty$  (exercício). Portanto o raio de convergência da série (3.4) é  $R = \infty$ , e pelo teorema de Abel 3.2, o exponencial é uma função inteira.

Um cálculo mostra que a derivada da função inteira  $h(z) = e^{z+a}e^{-z}$  é  $h' = 0$ . Portanto  $h$  é constante e o seu valor é  $h(z) = h(0) = e^a$ . Isto implica a “fórmula de adição”

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

Em particular,  $e^z e^{-z} = 1$ , e portanto  $e^z \neq 0$  para todo o  $z \in \mathbb{C}$ . A função exponencial define um homomorfismo  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  do grupo aditivo  $\mathbb{C}$  no grupo multiplicativo  $\mathbb{C}^\times$ .

Se  $x \in \mathbb{R}$ , então  $e^x$  é real e positivo, com derivada  $(e^x)' = e^x > 0$ . De fato,  $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ , e a restrição do exponencial define uma bijeção crescente  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ .

Se  $t \in \mathbb{R}$ , então o conjugado de  $e^{it}$  é  $\overline{e^{it}} = e^{-it}$ , e em particular  $|e^{it}| = 1$ . Portanto,  $\exp(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{S}$ . É possível então definir as funções reais de uma variável real “cos” e “sin” usando a fórmula de Euler

$$e^{it} =: \cos(t) + i \sin(t),$$

quando  $t \in \mathbb{R}$ . A equação diferencial (3.3) que define o exponencial implica que  $\cos' = -\sin$  e  $\sin' = \cos$ . A função complexa de uma variável real  $e^{it}$  é periódica (umas demonstrações estão em [Ah78, Ru87]), e o seu período (positivo) é chamado  $2\pi$ . Em particular,  $e^{2\pi i} = 1$ , e também  $e^{\pi i/2} = i$ .

O número  $i2\pi$  é também um período de  $e^z$ , ou seja,  $e^{z+2\pi in} = e^z$  se  $n \in \mathbb{Z}$ . Em particular, o exponencial  $z \mapsto w = e^z$  envia a faixa  $F = \{-\pi < \Im(z) \leq \pi\}$  sobre  $\mathbb{C}^\times$ , as imagens das retas  $\Re(z) = c$  sendo as circunferências  $|w| = e^c$ , e as imagens das retas  $\Im(z) = d$  sendo as semiretas  $\text{Arg}(z) = d$ .

Em geral, as funções trigonométricas complexas são definidas por

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad \text{e} \quad \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

As funções hiperbólicas são definidas por

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Assim, existe apenas uma função transcendente elementar, o exponencial, todas as outras sendo obtidas ao fazer somas, produtos e quocientes de exponenciais!

A equação diferencial  $f' = f$ , que define o exponencial, pode também ser resolvida numericamente. Por simplicidade, consideramos o problema de aproximar o valor de  $e^x$  com  $x$  real, e positivo. A ideia de Euler (o método mais simples para resolver numericamente equações diferenciais) consiste em dividir o intervalo  $[0, x]$  em  $N$  subintervalos de igual comprimento  $\varepsilon = x/N$ , pequeno, por meio dos pontos  $x_n = xn/N$ , com  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ . Os valores de  $f$  nestes pontos são obtidos por recursão, usando a aproximação linear  $f(x_{n+1}) \simeq f(x_n) + f'(x_n)\varepsilon$ , e a equação diferencial, que diz que  $f'(x_n) = f(x_n)$ . A condição inicial  $f(0) = 1$  então implica  $f(x_1) \simeq (1 - \varepsilon)$ ,  $f(x_2) \simeq (1 - \varepsilon)^2$ ,  $f(x_3) \simeq (1 - \varepsilon)^3$ ,  $\dots$ ,  $f(x_N) \simeq (1 - \varepsilon)^N$ . É natural esperar que o verdadeiro valor de  $e^x$ , ou em geral de  $e^z$  com  $z \in \mathbb{C}$ , seja obtido passando ao limite quando  $N \rightarrow \infty$ . Esta é mais uma famosa *fórmula de Euler*

$$e^z = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{N}\right)^N$$

Esta fórmula diz que, moralmente, “o exponencial é um polinômio com uma única raiz de ordem  $\infty$  no ponto  $\infty$ ”, ou seja,

$$e^z = \left(1 + \frac{z}{\infty}\right)^{+\infty}$$

(onde o  $\infty$  no denominador deve ser pensado como o ponto  $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ , e o  $+\infty$  no expoente é a multiplicidade da raiz, ou seja, o grau, de  $e^z$  em  $z = \infty$ )

- Calcule

$$\cos(i) \quad \sin(i) \quad \sin(1 + i)$$

- Use a fórmula de Euler para provar as fórmulas

$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos(\theta) \cos(\phi) \mp \sin(\theta) \sin(\phi)$$

e

$$\sin(\theta \pm \phi) = \cos(\theta) \sin(\phi) \pm \sin(\theta) \cos(\phi).$$

- Deduza as fórmulas de adição para  $\cosh(z)$  e  $\sinh(z)$ .
- [MG14] 3.7

## 4 Integração complexa e teorema de Cauchy

1. (**caminhos, curvas e contornos**) Um *caminho*  $\gamma$  na região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  do plano complexo é uma função contínua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  definida num intervalo compacto  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . A imagem  $\gamma([a, b])$  (ou simplesmente  $\gamma$ , com abuso de linguagem) é uma *curva*, do ponto  $\gamma(a)$  até o ponto  $\gamma(b)$ .

13 out 2014

Se  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$  e  $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \Omega$  são dois caminhos com  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ , então a *justaposição* é o caminho  $\gamma_1 \cdot \gamma_2 : [a, c] \rightarrow \Omega$ , definido por  $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) = \gamma_1(t)$  se  $a \leq t \leq b$  e por  $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) = \gamma_2(t)$  se  $b \leq t \leq c$ . O caminho *inverso* de  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é o caminho  $\gamma^{-1} : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$ , definido por  $\gamma^{-1}(t) := \gamma(-t)$ .

É importante observar que uma curva é compacta, sendo a imagem de um compacto por uma função contínua. O caminho/curva  $\gamma$  é *fechado* se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Os caminhos fechados são também chamados *laços*. Um caminho/curva é *simplex* quando  $\gamma(t) \neq \gamma(s)$  se  $a < t < s < b$ , ou seja, quando não tem auto-interseções.

Se  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ , com  $x$  e  $y$  funções reais do tempo  $t$ , então a *derivada* do caminho  $\gamma$  no instante  $t$  é o número complexo  $\dot{\gamma}(t) := \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ . Um caminho com derivada contínua (e limites laterais finitos nos extremos) é chamado *regular*. Um *contorno* é uma justaposição de (um número finito de) caminhos regulares (ou seja, é possível dividir  $[a, b]$  em um número finito de sub-intervalos  $[a_k, b_k]$  onde o caminho tem derivada contínua). Exemplos importantes são *contornos poligonais* (ou *linhas quebradas*), formados por justaposição de um número finito de segmentos parametrizados com velocidade constante.

O *comprimento* do contorno  $\gamma$  é o integral

$$|\gamma| := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Uma definição alternativa do comprimento, válida para caminhos não necessariamente diferenciáveis, é o  $\sup \sum_{k=0}^n |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)|$  sobre todas as partições  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  do intervalo  $[a, b]$  em um número finito de sub-intervalos (mas este número pode ser  $\infty$ ).

Uma *reparametrização* do contorno  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função  $t : [c, d] \rightarrow [a, b]$  crescente e derivável, com derivada  $dt/d\tau > 0$ , que induz o contorno  $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ , definido por  $\tilde{\gamma}(\tau) := \gamma(t(\tau))$ . A escolha  $t(\tau) = a + \tau(b - a)$  mostra que é sempre possível reparametrizar um contorno (ou um caminho) de forma a ter  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ . O comprimento de um contorno é independente da parametrização.

- $\gamma(t) = \alpha + t(\beta - \alpha)$ , com  $t \in [0, 1]$ , descreve o segmento de  $\gamma(0) = \alpha$  até  $\gamma(1) = \beta$ , percorrido com velocidade constante  $\dot{\gamma}(t) = \beta - \alpha$ .
- $\gamma(t) = a + \rho e^{it}$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ , descreve a circunferência de raio  $\rho > 0$  centrada em  $a$ , percorrida no sentido anti-horário.

2. (**curvas de Jordan e regiões simplesmente conexas**) Uma curva genérica, a imagem do intervalo  $[0, 1]$  por uma função contínua  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , pode ser um objeto complicado. Nem é claro que seja uma figura “unidimensional” (seja qual for a definição de dimensão). Por exemplo, existem funções contínuas de  $[0, 1]$  sobre o quadrado unitário  $[0, 1] \times [0, 1]$  (hoje chamadas *curvas de Peano*, ou *space filling curves*). Tais curvas não são injetivas. Por outro lado, uma curva fechada e simples “divide o plano em duas partes”. Ou seja,

**Teorema 4.1** (teorema da curva de Jordan). *Seja  $\gamma$  uma curva fechada e simples. O seu complementar  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  é a reunião disjunta de dois subconjuntos abertos e conexos: uma região limitada  $\Omega$  e uma região ilimitada  $\Omega_\infty$ , cuja fronteira comum é a curva  $\gamma$ .*

Uma curva fechada e simples é chamada *curva de Jordan*. A região limitada  $\Omega$  é chamada *interior* da  $\gamma$ , e a região ilimitada  $\Omega_\infty$  é chamada *exterior* de  $\gamma$ . A *orientação positiva* de um caminho fechado simples é a orientação tal que “ao deslocarmos-nos ao longo do caminho observamos o interior à nossa esquerda”.

Uma região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  é *simplesmente conexa* quando o interior de todo o caminho fechado simples  $\gamma$  em  $\Omega$  está contido em  $\Omega$ . Exemplos são as regiões *convexas*  $D \subset \mathbb{C}$ , tais que se

$a, b \in D$  então  $a + t(b - a) \in D \forall t \in [0, 1]$ . Existem outras definições equivalentes. Por exemplo,  $\Omega \subset \mathbb{C}$  é simplesmente conexa sse o seu complementar  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  é conexo. A definição usual usa o conceito de “homotopia”. Os laços  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \Omega$  e  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$  são *homótopos* (em  $\Omega$ ) se existe uma função contínua  $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ , dita *homotopia* entre  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ , tal que  $\gamma_s = \Gamma(\cdot, s)$  é um laço para todo o  $s \in [0, 1]$ , e  $\Gamma(\cdot, 0) = \gamma_0$  e  $\Gamma(\cdot, 1) = \gamma_1$ . Ou seja, uma homotopia é uma “deformação contínua do laço  $\gamma_0$  no laço  $\gamma_1$ ”. Ser homótopos é uma relação de equivalência no espaço dos laços (definidos numa região fixada  $\Omega$ ), denotada por  $\gamma_0 \sim \gamma_1$ , e um laço homótopo a um laço constante (i.e.  $\gamma(t) = p$  para todo o  $t$ ) é dito *contrátil*. Uma região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  é simplesmente conexa sse todo o laço em  $\Omega$  é “contrátil”.

3. (**campos conservativos e teorema de Green-Stokes**) O diferencial  $\omega = p(x, y)dx + q(x, y)dy$  é dito *exato* no domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  se existe uma função  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , dita *primitiva*, tal que  $dU = pdx + qdy$ , ou seja,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = p \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = q.$$

Uma primitiva pode ser pensada como um *potencial* do campo de vetores  $\mathbf{F} := -\nabla U = -(p, q)$ . Se  $c$  é um valor *regular* de  $U$  (i.e. se  $\nabla U \neq 0$  nos pontos onde  $U(x, y) = c$ ), então a curva de nível

$$\Sigma_c := \{(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } U(x, y) = c\},$$

ortogonal ao campo de vetores  $\mathbf{F}$ , é uma solução implícita da *equação diferencial exata*

$$p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0.$$

O *teorema de Euler-Poincaré* diz que o diferencial  $\omega = p(x, y)dx + q(x, y)dy$ , definido num domínio simplesmente conexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , por exemplo convexo, é exato se e só se é “fechado”, i.e. se

$$d\omega := \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0 \quad \text{ou seja, se} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

Neste caso, um potencial é dado pelo integral de linha

$$U(x, y) = - \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

onde  $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$  é um contorno entre um ponto fixado  $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0) \in \Omega$  e o ponto genérico  $\mathbf{r}(1) = (x, y)$  (ou seja,  $U(x, y)$  é trabalho feito pela força  $\mathbf{F}$  para deslocar uma partícula do ponto  $(x_0, y_0)$  até ao ponto  $(x, y)$ ). Por exemplo, se  $\Omega$  é um retângulo, é possível escolher um caminho horizontal de  $(x_0, y_0)$  até  $(x, y_0)$ , e depois um caminho vertical de  $(x, y_0)$  até  $(x, y)$ , e definir um potencial

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x p(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y q(x, t) dt.$$

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  uma região do plano limitada por um contorno fechado simples  $\partial\Omega$ . Então o *teorema de Green-Stokes* diz que o integral  $\oint_{\partial\Omega} \omega$  ao longo da curva  $\partial\Omega$ , orientada positivamente, é igual ao integral  $\int_{\Omega} d\omega$ , ou seja,

**Teorema 4.2** (Green-Stokes). *Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é uma região limitada pelo contorno fechado simples  $\partial\Omega$ , e  $pdx + qdy$  é uma forma diferencial com derivadas parciais contínuas em  $\Omega$ , então*

$$\boxed{\oint_{\partial\Omega} pdx + qdy = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx \wedge dy}$$

4. (integrais de contorno) Sejam  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$  um contorno e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua definida numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  contendo a curva  $\gamma([a, b])$ . O “integral da função  $f$  (ou, melhor, da forma  $f dz$ ) ao longo do contorno  $\gamma$ ” é o número complexo

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

Se  $\gamma$  é um contorno fechado, i.e.  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , então é usada a notação  $\oint_{\gamma} f(z) dz$ .

A restrição de  $f$  à curva  $\gamma([a, b])$  é uniformemente contínua. Portanto, se  $\mathcal{P}$  é uma partição  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  do intervalo  $[a, b]$  em um número finito de sub-intervalos de comprimento limitado por  $|\mathcal{P}| := \sup_k |t_{k+1} - t_k|$ , e se os  $z_k := \gamma(t_k)$ 's são os correspondentes pontos de  $\gamma$ , então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_k f(z_k) (z_{k+1} - z_k)$$

Isto significa que é possível aproximar  $\int_{\gamma} f dz$ , com precisão arbitrária, pelo integral ao longo de uma linha quebrada. Ou seja, para cada  $\varepsilon > 0$  existe uma linha quebrada  $\ell$ , com vértices em  $\gamma$ , tal que  $|\int_{\gamma} f dz - \int_{\ell} f dz| < \varepsilon$ .

O integral de contorno é aditivo. Ou seja, se  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow D$  e  $\gamma_2 : [b, d]$  são dois contornos com  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ , então o integral de  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  ao longo da *justaposição*  $\gamma_1 \cdot \gamma_2$  é

$$\int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

O integral de contorno não depende da parametrização, mas apenas da orientação do contorno. De fato, se  $t : [c, d] \rightarrow [a, b]$  é diferenciável, com derivada  $dt/d\tau > 0$ , e se  $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  é o contorno  $\tilde{\gamma}(\tau) := \gamma(t(\tau))$ , então

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz &= \int_c^d f(\tilde{\gamma}(\tau)) \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tau} d\tau = \int_c^d f(\gamma(t(\tau))) \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{d\tau} d\tau \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz \end{aligned}$$

Por outro lado, ao mudar a orientação do contorno, acontece que

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

Em particular, o integral ao longo do contorno  $\gamma \cdot \gamma^{-1}$  é zero.

O nome correcto (mas não utilizado!) para  $\int_{\gamma} f dz$  seria “integral da forma  $f dz$  ao longo do contorno  $\gamma$ ”, devido à seguinte “covariância”, ou regra de transformação. Se  $g \in \mathcal{O}(\Omega')$  é uma função holomorfa com valores em  $\Omega$  e derivada contínua (esta hipótese é desnecessária, pois mostraremos que as funções holomorfas são infinitamente deriváveis!), que envia um contorno  $\eta : [a, b] \rightarrow \Omega'$  no contorno  $\gamma = g \circ \eta : [a, b] \rightarrow \Omega$ , então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\eta} f(g(z)) g'(z) dz.$$

(o que justifica a notação).

Também importante é saber estimar valores de integrais de contorno. Se o valor absoluto da função  $f$  é limitado por  $M$  nos pontos de  $\gamma$ , i.e.  $\sup_t |f(\gamma(t))| \leq M$ , e  $|\gamma|$  denota o comprimento do contorno  $\gamma$ , então

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M |\gamma|. \quad (4.1)$$

Uma consequência importante é que “o limite uniforme comuta com o integral”, ou seja,



**Teorema 4.3.** Se  $(f_n)$  é uma sucessão de funções contínuas definidas no domínio  $D \subset \mathbb{C}$  que converge uniformemente para a função (contínua)  $f$ , e se  $\gamma$  é um contorno em  $D$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n dz = \int_{\gamma} f dz.$$

*Demonstração.* Pela desigualdade (4.1),

$$\left| \int_{\gamma} f_n dz - \int_{\gamma} f dz \right| = \left| \int_{\gamma} (f_n - f) dz \right| \leq \|f_n - f\|_{\infty} |\gamma| \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . □

- Calcule, se possível,

$$\int_{\gamma} z dz \quad \int_{\gamma} (i - z^2) dz \quad \int_{\gamma} x dz \quad \int_{\gamma} z^n dz \quad \int_{\gamma} \bar{z} dz$$

quando  $\gamma$  é o segmento  $t \mapsto t(3 + i)$ , com  $t \in [0, 1]$ , quando  $\gamma$  é o arco de parábola  $t \mapsto t + it^2$ , com  $t \in [-1, 1]$ , quando  $\gamma$  é o arco de circunferência  $\theta \mapsto re^{i\theta}$ , com  $\theta \in [0, \pi]$  e  $r > 0$ , e quando  $\gamma$  é a espiral  $t \mapsto e^{(i-1)t}$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ .

- Calcule (as circunferências são orientadas positivamente e parametrizada da forma natural: a circunferência  $|z - a| = \rho$  é a imagem de  $\gamma(t) = a + \rho e^{it}$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ )

$$\oint_{|z|=3} z^2 dz \quad \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 - 1} \quad \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \quad \oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z - i}.$$

5. (**primitivas**) A função holomorfa  $F \in \mathcal{O}(\Omega)$  é dita *primitiva* da função contínua  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$  se  $F'(z) = f(z)$  (nos pontos de uma região  $\Omega$  onde estão definidas). Se  $F' = f$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  é um contorno de  $\gamma(a) = \alpha$  até  $\gamma(b) = \beta$ , então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\beta) - F(\alpha)$$

Ou seja,  $\int_{\gamma} f dz$  apenas depende dos pontos inicial e final de  $\gamma$ , e portanto  $\oint_{\gamma} f dz = 0$  para todos os contornos fechados. De fato, vale o recíproco:

**Teorema 4.4.** Uma função contínua  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$  admite uma primitiva  $F \in \mathcal{O}(\Omega)$  numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  sse  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$  para todos os contornos fechados  $\gamma$  em  $\Omega$ .

*Demonstração.* De fato, basta fixar um ponto  $\alpha \in \Omega$ , e definir, para cada ponto  $p \in \Omega$ ,  $F(p) = \int_{\gamma} f(z) dz$ , onde  $\gamma$  é um caminho arbitrário de  $\gamma(a) = \alpha$  até  $\gamma(b) = p \in \Omega$  (a hipótese diz que este integral apenas depende de  $\alpha$  e  $p$ ). Então a diferença  $F(p + z) - F(p)$ , se  $|z|$  é suficientemente pequeno, é igual ao integral de  $f$  ao longo, por exemplo, do segmento  $\gamma(t) = p + tz$ , com  $t \in [0, 1]$ , ou seja,

$$F(p + z) - F(p) = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 f(p + tz) z dt.$$

Pela continuidade de  $f$ , este integral é igual a  $f(p)z + o(z)$ , e portanto  $F$  é derivável em  $p$  e a sua derivada é  $F'(p) = f(p)$ . □

- Calcule

$$\int_{\gamma} e^z dz \quad \int_{\gamma} (z^3 - iz^2 + 7 - i) dz \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}$$

quando  $\gamma$  é o contorno  $t \mapsto \sin(\pi t) + ie^t$ , com  $t \in [0, 1]$ .

- Calcule

$$\oint_{|z|=\rho} z^n dz \quad \oint_{|z|=\rho} e^z dz \quad \oint_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{z-a}$$

- Mostre que se  $\gamma$  é o arco de circunferência  $\gamma(t) = a + \rho e^{it}$  com  $t \in [\theta_1, \theta_2]$ , então

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = i(\theta_2 - \theta_1).$$

- Mostre que

$$\oint_{|z-a|=\rho} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq -1 \\ i2\pi & \text{se } n = -1 \end{cases}$$

- A função  $f(z) = 1/z$ , definida em  $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , admite primitivas? E  $f(z) = \bar{z}$ ?

6. (teorema de Cauchy-Goursat) Seja  $\Omega \subset \mathbb{C}$  uma região limitada, cuja fronteira é uma reunião disjunta  $\partial\Omega = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$  de contornos fechados simples  $\gamma_k$ . O integral de uma função contínua  $f(z)$  ao longo da fronteira  $\partial\Omega$  é definido por

15 out 2014

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz + \oint_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \oint_{\gamma_n} f(z) dz,$$

onde os caminhos  $\gamma_k$  são orientados de maneira tal que o domínio fica à esquerda de cada  $\gamma_k$ .

**Teorema 4.5** (Cauchy-Goursat). *Se  $f$  é holomorfa numa vizinhança de  $\Omega$ , então*

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 0} \tag{4.2}$$

*Demonstração.* Se assumimos que  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ , basta aplicar o teorema de Green-Stokes e observar que, pelas equações de Cauchy-Riemann,  $d(fdz) = 0$ .

Mais “elementar” e “elegante” é a demonstração de Goursat, que apenas usa a diferenciabilidade de  $f$ , ou seja, a aproximação linear  $f(a+z) \simeq \alpha + \lambda z$ , válida para  $z$  pequenos, e o integral elementar  $\oint_{\gamma} (\alpha + \lambda z) dz = 0$ . O primeiro passo é observar que é possível aproximar  $\Omega$  com uma reunião de triângulos (ou retângulos), a sua fronteira com uma reunião de linhas quebradas fechadas e simples, e que portanto é suficiente provar o teorema em cada triângulo (pois os integrais de  $f$  nos lados dos triângulos que não fazem parte da fronteira anulam-se dois a dois (fazer um desenho!)). Seja  $T$  um triângulo,  $f$  uma função holomorfa numa vizinhança de  $T$ , e  $|\oint_{\partial T} f(z) dz| = \eta$ . Os pontos médios dos lados dividem o triângulo  $T$  em 4 sub-triângulos similares, e a soma dos integrais de  $f$  ao longo destes 4 sub-triângulos é igual a  $\oint_{\partial T} f dz$ . Portanto, existe um destes sub-triângulos, que chamamos  $T_1$ , tal que

$$\left| \oint_{\partial T_1} f(z) dz \right| \geq \eta/4$$

Podemos iterar o processo, e construir a família decrescente de triângulos  $\dots \subset T_n \subset T_{n-1} \subset \dots$  tais que

$$\left| \oint_{\partial T_n} f(z) dz \right| \geq \eta/4^n$$

Se  $\ell$  é o comprimento do maior dos lados de  $T$ , então o diâmetro dos  $T_n$  é  $\ell/2^n$ , que  $\rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Seja  $p \in T$  a interseção dos  $T_n$ 's. Como  $f$  é holomorfa, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \frac{f(z) - \alpha}{z - p} - \lambda \right| < \varepsilon \quad \text{logo} \quad |f(z) - \alpha - \lambda(z - p)| < \varepsilon|z - p|$$

se  $0 < |z - p| < \delta$ , onde  $\alpha = f(p)$  e  $\lambda = f'(p)$ . Se  $n$  é suficientemente grande, o triângulo  $T_n$  está contido no disco de raio  $\delta$  à volta de  $p$ . Como  $\oint_{\partial T_n} (\alpha + \lambda(z - p)) dz = 0$  (porque as funções afins têm primitivas),

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\partial T_n} f(z) dz \right| &= \left| \oint_{\partial T_n} (f(z) - \alpha - \lambda(z - p)) dz \right| \\ &\leq \varepsilon \left| \oint_{\partial T_n} (z - p) dz \right| \end{aligned}$$

Neste último integral,  $|z - p|$  é limitado pelo diâmetro de  $T_n$ , que é  $\ell/2^n$ , e o comprimento de  $\partial T_n$  é limitado por  $3\ell/2^n$ . Logo, pela desigualdade (4.1),

$$0 \leq \eta/4^n \leq \left| \oint_{\partial T_n} f(z) dz \right| \leq \varepsilon \ell^2/4^n$$

A arbitrariedade de  $\varepsilon > 0$  implica que  $\eta = 0$ . □

Em particular,

**Teorema 4.6** (Cauchy). *Se  $f$  é holomorfa na região  $\Omega$  simplesmente conexa, por exemplo, convexa (como um retângulo ou um disco), então*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para todos os contornos fechados  $\gamma \subset \Omega$ .

- Se  $f = u + iv$ , com  $u$  e  $v$  reais, então

$$f dz = (u dx - v dy) + i(v dx + u dy)$$

Verifique que as equações de Cauchy-Riemann são equivalentes a  $d(f dz) = 0$ .

- Calcule

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z-3} dz & \quad \oint_{|z|=1} \frac{z^2}{z-2i} dz & \quad \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2z+2} \\ \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+4} dz & \quad \oint_{|z+2|=1} \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

7. (integrais gaussianos) Uma *gaussiana* é uma função do género  $g(x) = ce^{-\lambda x^2}$ , onde  $c$  e  $\lambda$  são dois parâmetros positivos. O cálculo

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^2 &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

mostra que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}}, \quad \text{ou seja,} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1}.$$

A função  $f(z) = e^{-\pi z^2}$  é inteira. Portanto, o seu integral  $\oint_{\gamma} e^{-\pi z^2} dz$  ao longo do retângulo  $\gamma$  de vértices  $\pm R$  e  $\pm R + i\xi$  (com  $\xi$  real) é nulo. Mas este integral é igual à soma

$$\int_{-R}^R e^{-\pi x^2} dx + i \int_0^{\xi} e^{-\pi(R+iy)^2} dy - \int_{-R}^R e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx - i \int_0^{\xi} e^{-\pi(-R+iy)^2} dy$$

No limite quando  $R \rightarrow \infty$ , o dois integrais que formam a parte imaginária tendem para 0, pois o valor absoluto do integrando é limitado por  $e^{-\pi(R^2-\xi^2)}$ . O resultado é que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = e^{-\pi \xi^2}}$$

(ou seja, “a gaussiana  $g(x) = e^{-\pi x^2}$  é um ponto fixo da transformada de Fourier”).

8. (integrais de Fresnel) Os integrais de Fresnel são as funções transcendentais

$$C(x) := \int_0^x \cos(t^2) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$$

$$S(x) := \int_0^x \sin(t^2) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}$$

(as séries de potências são obtidas integrando as séries de potências das partes real e imaginária de  $e^{it^2}$ ). A função

$$e^{iz^2} = \cos(z^2) + i \sin(z^2)$$

é inteira. Portanto, o seu integral  $\oint_{\gamma} e^{iz^2} dz$  ao longo do setor angular  $\gamma$  formado pelos segmento de 0 até  $R > 0$ , pelo arco de circunferência  $Re^{it}$  com  $t \in [0, \pi/4]$  e pelo segmento de  $Re^{i\pi/4}$  até 0, é nulo. Mas este integral é igual à soma

$$\int_0^R e^{it^2} dt + i \int_0^{\pi/4} e^{iR^2(\cos(2t)+i\sin(2t))} R dt - e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-t^2} dt$$

No limite quando  $R \rightarrow \infty$ , o segundo integral tende para 0. De fato, o valor absoluto da função integranda é limitado por  $Re^{-R^2 \sin(2t)} \leq Re^{-(4R^2/\pi)t}$  (pois  $\sin(\theta) \geq (2/\pi)\theta$  se  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ), logo o valor absoluto do segundo integral é limitado por ([Sm03])

$$R \int_0^{\pi/4} e^{-(4R^2/\pi)t} dt = R \frac{1 - e^{-R^2}}{4R^2/\pi} \leq \frac{\pi}{4R}.$$

O terceiro integral é proporcional ao integral gaussiano  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ , e é dado por  $e^{-i\pi/4} \sqrt{\pi}/4$ . O resultado é que os limites dos integrais de Fresnel  $C(x)$  e  $S(x)$  quando  $x \rightarrow \infty$  são

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \sqrt{\pi/8}.$$

9. (logaritmo e potências, ramos) Um *logaritmo* do número complexo  $z \neq 0$  é um número complexo  $w$  tal que  $e^w = z$ . Se  $w = r + i\theta \neq 0$ , com  $r, \theta \in \mathbb{R}$ , então  $e^w = z$  sse

20 out 2014

$$e^r = |z| \quad \text{e} \quad e^{i\theta} = \frac{z}{|z|},$$

e portanto sse  $r = \log |z| > 0$  é o logaritmo real do número positivo  $|z|$ , e  $\theta$  é um argumento de  $z$ , ou seja, um ângulo tal que  $\cos(\theta) + i \sin(\theta) = z/|z|$ , definido a menos de múltiplos inteiros de  $2\pi$ . Ou seja, o logaritmo complexo pode ser definido como sendo a “função multivalorada” (em inglês, “multivalued function”) que envia um número complexo  $z = \rho e^{i\theta}$ , com  $\rho > 0$ , no conjunto enumerável de pontos

$$\log(\rho e^{i\theta}) = \log(|z|) + i \arg(z) = \log(\rho) + i(\theta + 2\pi\mathbb{Z}).$$

É natural então definir *potências (não inteira)*  $z^\alpha$ , com  $z \in \mathbb{C}^\times$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ , por meio da fórmula

$$z^\alpha := \exp(\alpha \log(z))$$

Quando o argumento é um número real  $z > 0$ , esta é uma função bem definida se  $\log$  é o logaritmo natural de uma variável real positiva. Em geral, se  $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^\times$ , então  $z^\alpha$  é a função multivalorada que assume o conjunto de valores

$$z^\alpha = e^{\alpha(\log \rho + i(\theta + 2\pi\mathbb{Z}))}$$

Para definir um logaritmo contínuo (e de consequência holomorfo), uma possibilidade é cortar o plano ao longo de uma semi-reta da origem  $\ell$ , e restringir a função a uma região simplesmente conexa  $\mathbb{C}^\times \setminus \ell$  (uma alternativa é estender o domínio da função a uma “superfície de Riemann” ...). Por exemplo, é possível definir um *logaritmo principal*,  $\text{Log} : \mathbb{C}^\times \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$ , escolhendo o argumento principal  $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$ .

Em geral, se  $\Omega \subset \mathbb{C}^\times$  é uma região simplesmente conexa que não contém a origem, então pelo teorema de Cauchy  $\oint_\gamma dz/z = 0$  para todos os contornos fechados  $\gamma \subset \Omega$ . Portanto, fixado um ponto  $p = e^\alpha \in \Omega$ , podemos definir uma primitiva de  $1/z$  como o integral

$$L(z) := \alpha + \int_p^z \frac{dz}{z}$$

ao longo de um contorno arbitrário de  $p$  até  $z \in \Omega$ . Então  $L'(z) = 1/z$  e  $L(p) = \alpha$ . A função  $e^{L(z)}/z$  tem derivada nula, logo é constante e igual a  $e^{L(z)}/z = e^{L(p)}/p = 1$ . Portanto

$$e^{L(z)} = z$$

e é natural chamar  $L$  um *ramo do logaritmo*.

Um exemplo natural é escolher  $\Omega = \mathbb{C}^\times \setminus \mathbb{R}_-$  (i.e. retirar do plano a semi-reta dos reais não positivos) e o ponto  $p = 1 = e^0$ . Então  $L$  é o logaritmo principal, pois, se  $z = \rho e^{i\theta}$  com  $\rho > 0$  e  $\theta \in (-\pi, \pi)$ , então  $L(z) = \log(\rho) + i\theta$ .

- Calcule

$$\log(i) \quad \text{Log}(-i) \quad 2^{1+i} \quad i^{-i} \quad (-1)^{2i}$$

- Resolva as equações

$$\sin(z) = 2 \quad \log(z+1) = i \quad e^z = 2 \quad e^z = i \quad \cosh(z) = 1$$

- Se  $w = \sin(z)$ , então  $Z := e^{iz}$  satisfaz  $Z^2 - 2i\omega Z - 1 = 0$ . Resolva para  $Z$  e deduza

$$\arcsin(w) = i \log(iw \pm \sqrt{1-\omega}) .$$

Determine uma fórmula análoga para  $\arccos(w)$ .

## 5 Fórmula integral de Cauchy e consequências

1. (**índice**) Todas as potências  $z^n$ , com  $n \neq -1$ , admitem uma primitiva. Portanto, o “único” integral que é preciso calcular em análise complexa é o integral de  $1/z$ , que é holomorfa em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Se a circunferência  $|z| = \rho$  é parametrizada por  $\gamma(t) = \rho e^{it}$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ , então  $dz/z = i dt$  (ou seja,  $dz/z$  é  $i$  vezes o diferencial do argumento de  $z$ ), e portanto

$$\oint_{|z|=\rho} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Em geral, sejam  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  um contorno fechado (não necessariamente simples) e  $p \in \mathbb{C}$  um ponto situado fora da curva  $\gamma([0, 1])$ . O *índice* de  $p$  relativamente a  $\gamma$ , ou o *número de rotações/voltas* (em inglês, “winding number”) de  $\gamma$  em torno de  $p$ , é o inteiro

$$\text{Ind}(\gamma, p) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z-p} \quad (5.1)$$

Informalmente, é “o número de voltas”, positivo se no sentido anti-horário e negativo se no sentido horário, que o vetor entre  $\gamma(t)$  e  $p$  dá quando o tempo  $t$  percorre o intervalo  $[0, 1]$ .

**Teorema 5.1.** Para cada  $p \notin \gamma([0, 1])$ , o índice é um número inteiro, i.e.  $\text{Ind}(\gamma, p) \in \mathbb{Z}$ . Em quanto função de  $p$ ,  $\text{Ind}(\gamma, p)$  é constante em cada componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$ . Se  $p$  está na componente conexa ilimitada de  $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$  (i.e. se  $|p|$  é suficientemente grande), então  $\text{Ind}(\gamma, p) = 0$ .

*Demonstração.* Para  $t \in [0, 1]$ , seja  $\phi(t) := \int_0^t (\dot{\gamma}(\tau)/(\gamma(\tau) - p)) d\tau$ , assim que  $\phi(1) = 2\pi i \text{Ind}(\gamma, p)$ . Um cálculo mostra que a derivada de  $\Phi(t) = e^{\phi(t)}/(\gamma(t) - p)$  é igual a zero nos pontos de continuidade de  $\dot{\gamma}$ . Portanto,  $\Phi(1) = \Phi(0)$ , e, sendo  $\gamma(1) = \gamma(0)$  e  $e^{\phi(0)} = 1$ , isto implica que  $e^{\phi(1)} = 1$ , e portanto que  $\phi(1) \in 2\pi i \mathbb{Z}$ .

Fixado  $\gamma$ , a função  $p \mapsto \text{Ind}(\gamma, p)$  é contínua em  $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$ . Sendo uma função com valores inteiros, é localmente constante, ou seja, constante em cada componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$ .

Seja  $R = \max_{t \in [0, 1]} |\gamma(t)|$ . Se  $|p| > R$ , podemos estimar

$$|\text{Ind}(\gamma, p)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{|\gamma|}{|p| - R} < 1$$

se  $|p|$  é suficientemente grande. Sendo um inteiro não negativo,  $|\text{Ind}(\gamma, p)|$  deve ser igual a zero.  $\square$

2. (**fórmula integral de Cauchy**) Seja  $f$  é uma função holomorfa definida numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ ,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  um contorno fechado simples, e  $p$  um ponto no interior de  $\gamma$ . Então a função  $g(z) = f(z)/(z-p)$  é holomorfa em  $\Omega \setminus \{p\}$ . Pelo teorema de Cauchy,  $\oint_{\gamma} g(z) dz$  é igual ao integral  $\oint_{|z-p|=\rho} g(z) dz$  se  $\rho > 0$  é suficientemente pequeno (i.e.  $< \text{dist}(p, \gamma)$ ). Pela continuidade de  $f$ ,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{|z-p|=\rho} \frac{f(z)}{z-p} dz = 2\pi i f(p).$$

A conclusão é o seguinte fórmula integral, que é o resultado central da teoria das funções holomorfas.

**Teorema 5.2** (fórmula de Cauchy). Se  $f$  é holomorfa numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , então o seu valor em cada ponto  $p \in \Omega$  é dado pelo integral

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-p} dz \quad (5.2)$$

onde  $\gamma$  é um contorno fechado simples que contém  $p$  no seu interior.

Ou seja, o valor de  $f$  num ponto  $p$  no interior de um contorno fechado simples  $\gamma$  é dado pela média dos valores  $f(z)$  da função na curva  $\gamma$  pesados pelo núcleo  $1/(z-p)$  (i.e. a convolução de  $f$  com  $1/z$ ). Em particular, ao escolher uma circunferência  $\gamma$ , fronteira de um disco  $D_\rho(p) \subset \Omega$ , com  $\rho > 0$  suficientemente pequeno, podemos representar  $f(p)$  como um integral

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\rho} \frac{f(z)}{z-p} dz.$$

Mas  $1/(z-p)$  é uma função infinitamente diferenciável de  $p$ , desde que  $p \neq z$ . Derivando a fórmula de Cauchy (5.2) é portanto possível obter fórmulas integrais para as derivadas de  $f$ ,

$$f'(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-p)^2} dz, \quad f''(p) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-p)^3} dz, \quad \dots$$

**Teorema 5.3.** *Uma função holomorfa  $f$  numa região  $\Omega$  é infinitamente diferenciável, e todas as suas derivadas são funções holomorfas. Em particular, as derivadas de  $f$  em  $p$  admitem a representação integral*

$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}} dz \quad (5.3)$$

onde  $\gamma$  é um contorno fechado simples que contém  $p$  no seu interior.

- Calcule

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} dz \quad \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz \quad \oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+1}$$

$$\oint_{|z|=2\pi} \frac{ze^z}{(z-\pi)^2} dz \quad \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2(z^2-4)}$$

- Calcule

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}$$

- Mostre que, se  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z} dz = i2\pi$$

e deduza que

$$\int_0^\pi e^{a \cos \theta} \cos(a \sin \theta) d\theta = \pi.$$

3. (teorema de Morera) O teorema de Cauchy admite um recíproco parcial. <sup>1</sup>

não leccionado

**Teorema 5.4** (Morera). *Seja  $f$  uma função contínua na região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Se  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$  para todos os contornos fechados  $\gamma \subset \Omega$ , então  $f$  é uma função holomorfa.*

*Demonstração.* A hipótese é equivalente à existência de uma primitiva  $F$ . Mas se  $F$  é holomorfa, então também a sua derivada  $F' = f$  é holomorfa.  $\square$

Uma consequência importante é que limites uniformes de sucessões de funções holomorfas são holomorfos.

**Teorema 5.5.** *Seja  $(f_n)$  é uma sucessão de funções holomorfas definidas numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , que converge uniformemente para uma função  $f$  em cada compacto  $K \subset \Omega$ . Então o limite  $f$  é holomorfa em  $\Omega$ .*

<sup>1</sup>G. Morera, Un teorema fondamentale nella teoria delle funzioni di una variabile complessa, *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere* **19** (1886), 304-307.

*Demonstração.* Todo o ponto  $p \in \Omega$  é centro de um disco  $D = D_\rho(p)$  com aderência  $\bar{D} \subset \Omega$ . Os integrais das  $f_n$  ao longo de cada contorno  $\gamma \subset D$  são nulos, i.e.  $\oint_\gamma f_n dz = 0$ , pelo teorema de Cauchy-Goursat. Pela continuidade uniforme, também são nulos os integrais de  $f$ , pois  $\oint_\gamma f_n dz \rightarrow \oint_\gamma f dz$ . O teorema de Moreira então diz que  $f$  é holomorfa em  $D$ .  $\square$

O teorema 5.5 é um instrumento para “produzir” funções holomorfas. Por exemplo, somas

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

de séries de funções holomorfas  $f_n(z)$  que convergem uniformemente em certos domínios.

4. (fórmula do valor médio e princípio do máximo módulo) Seja  $f(z)$  uma função holomorfa na região  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , e seja  $p \in \Omega$ . Se  $\rho > 0$  é suficientemente pequeno, então  $D_\rho(p) \subset \Omega$ . Na fronteira  $S_\rho(z_0)$ , parametrizada por  $\gamma(t) = p + \rho e^{it}$  com  $t \in [0, 2\pi]$ , temos que  $dz/(z-p) = i dt$ . Portanto a fórmula de Cauchy (5.2) tem como caso particular a seguinte representação.

22 out 2014

**Teorema 5.6** (fórmula do valor médio). *O valor de uma função holomorfa  $f$  em um ponto  $p$  do seu domínio é igual à média dos valores de  $f$  em uma circunferência de raio  $\rho > 0$  suficientemente pequeno à volta de  $p$ , i.e.*

$$f(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad (5.4)$$

Uma consequência é o

**Teorema 5.7** (princípio do máximo módulo). *O valor absoluto de uma função holomorfa e não constante não pode atingir o seu máximo numa região (aberta)  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Em particular, se  $f$  é holomorfa na região limitada  $\Omega$ , então  $\sup_\Omega |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|$ .*

*Demonstração.* Se  $|f(p + \rho e^{i\theta})| \leq |f(p)|$  para todos os  $\theta$ , então (5.4) implica que  $f$  é constante e igual a  $f(p)$  na circunferência  $|z - p| = \rho$ . Mas uma função holomorfa constante num arco é necessariamente constante.  $\square$

5. (desigualdades de Cauchy, teoremas de Liouville e Gauss) A fórmula de Cauchy (5.3) permite estimar as derivadas de  $f$  num ponto  $p \in \Omega$  em função do máximo de  $f$  em  $\partial\Omega$  e da distância  $\text{dist}(p, \partial\Omega)$ . Em particular, se  $f$  é holomorfa no disco  $D_R(p)$ , e se  $M = \sup_{z \in \partial D_R(p)} |f(z)|$ , então obtemos a *desigualdade de Cauchy*

$$\left| f^{(n)}(p) \right| \leq \frac{n! M}{R^n} \quad (5.5)$$

para o valor absoluto da  $n$ -ésima derivada de  $f$  em  $p$ . Uma consequência é o importante

**Teorema 5.8** (Liouville). *Uma função inteira e limitada é constante.*

*Demonstração.* Se  $f$  é inteira e  $|f(z)| \leq M$ , então (5.5) implica que  $|f'(p)| \leq M/R$  para todos os pontos  $p \in \mathbb{C}$  e todos os raios os  $R > 0$ . Portanto  $f' = 0$ , e, de consequência,  $f$  é constante.  $\square$

**Teorema 5.9** (Gauss). *Todo o polinómio  $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  de grau  $n \geq 1$  (i.e. não constante) com coeficientes complexos possui uma raiz em  $\mathbb{C}$ .*



*Demonstração.* Se  $f(z) \neq 0$  para todos os  $z \in \mathbb{C}$ , então  $g(z) = 1/f(z)$  é uma função inteira e limitada (pois  $|f(z)| \rightarrow \infty$  quando  $|z| \rightarrow \infty$ ), logo constante pelo teorema de Liouville 5.8.  $\square$

E portanto,

**Teorema 5.10** (teorema fundamental da álgebra). *Um polinómio  $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  de grau  $n \geq 1$  fatoriza no produto*

$$f(z) = a_n(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n),$$

onde  $p_1, p_2, \dots, p_n$  são as  $n$  raízes (não necessariamente distintas).

*Demonstração.* Se  $f$  é um polinómio de grau  $n \geq 1$ , então  $f(z) = (z - p)g(z) + r$ , onde  $g$  é um polinómio de grau  $n - 1$  e  $r$  é uma constante (o resto da divisão euclidiana de  $f$  por  $z - p$ ). Se  $p$  é uma raiz de  $f$ , então  $r = f(p) = 0$ , e portanto  $f(z) = (z - p)g(z)$ . O teorema segue por indução.  $\square$

- Se  $p_1, p_2, \dots, p_n$  são  $n$  pontos distintos de  $\mathbb{C}$ , então

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n) \\ &= z^n - (p_1 + p_2 + \dots + p_n)z^{n-1} + \dots + (-1)^n(p_1 p_2 \dots p_n) \end{aligned}$$

é um polinómio de grau  $n$  que se anula nos  $p_k$ 's, e

$$f_k(z) = f(z)/(z - p_k)$$

com  $k = 1, \dots, n$ , são polinómios de grau  $n - 1$  que se anulam nos  $p_j$  com  $j \neq k$  e tais que  $f_k(p_k) \neq 0$ . Se  $w_1, w_2, \dots, w_n$  são  $n$  números complexos arbitrários (não necessariamente distintos), então

$$g(z) := \sum_k w_k \frac{f_k(z)}{f_k(p_k)}$$

é um polinómio de grau  $\leq n - 1$  tal que  $g(z_k) = w_k$  para todo  $k = 1, 2, \dots, n$  (chamado *polinómio interpolador de Lagrange*). Mostre que este é o único polinómio de grau  $\leq n - 1$  cujo gráfico passa pelos pontos  $(z_k, w_k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ .

6. (séries de Taylor) Seja  $f$  uma função holomorfa no disco  $D_R(p)$  (por exemplo, em um domínio contendo este disco), e seja  $M = \sup_{z \in \partial D_R(p)} |f(z)| < \infty$ . Outra consequência da desigualdade de Cauchy (5.5) é que a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - p)^n \tag{5.6}$$

com coeficientes  $c_n := f^{(n)}(p)/n!$  define uma função holomorfa no disco  $D_R(p)$ , pois o seu raio de convergência é  $\geq R$ . Esta série de potências (5.11) é chamada *série de Taylor*<sup>2</sup> de  $f$  (ou também *série de Maclaurin* quando  $p = 0$ , em alguns manuais).

**Teorema 5.11** (Taylor). *Se  $f$  é holomorfa em  $D_R(p)$ , então é igual a sua série de Taylor, i.e.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - p)^n$$

nos pontos  $z \in D_R(p)$ .

<sup>2</sup>B. Taylor, *Methodus incrementorum*, Londini, 1715.

*Demonstração.* A menos de translações e homotetias, podemos assumir que  $p = 0$  e  $R = 1$ , ou seja, que  $f$  é holomorfa no disco unitário  $\mathbb{D}$ . Pela fórmula de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (5.7)$$

se  $z \in \mathbb{D}$ . Se  $|w| = 1$  e  $|z| < 1$ , o “núcleo” de este integral é dado pela série

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} \frac{1}{1-(z/w)} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}$$

que converge uniformemente em  $w$  para cada  $z \in \mathbb{D}$  fixado. Ao substituir esta expressão na (5.7), e usando o teorema 4.3, podemos reconhecer os valores das derivadas de  $f$  em 0 dados pela (5.3), e portanto

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

□

Portanto, uma função holomorfa admite uma expansão em série de Taylor em torno de cada ponto do seu domínio, ou seja, é uma função analítica. Em particular, “holomorfa” e “analítica” podem ser considerados sinónimos.

O teorema de Liouville 5.8 admite a seguinte generalização, consequência das desigualdade de Cauchy (5.5) e da unicidade dos coeficientes da série de Taylor.

**Teorema 5.12.** *Uma função inteira  $f$  tal que  $\sup_{|z|=R} |f(z)| = \mathcal{O}(R^n)$  é um polinómio de grau  $\leq n$ .*

- Determine as séries de Taylor em torno de  $p = 0$ , e os respectivos raios de convergência, das seguintes funções:

$$\frac{1}{1+z} \quad \frac{1}{1+z^2} \quad \frac{z}{z^4+4} \quad e^{2z} \quad ze^{-z} \quad (1+z)e^z \quad z^2e^z \quad e^{-z^2}$$

- Determine as séries de Taylor em torno dos pontos  $p = 1$  e  $p = i$ , e os respectivos raios de convergência, das seguintes funções:

$$1/z \quad 1/z^2 \quad e^z$$

- Integre a série geométrica

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

e deduza que a série de Taylor do logaritmo principal  $\log(1-z)$  em torno de  $p = 0$  é dada pela *série de Mercator*

$$\log(1-z) = -z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 - \dots$$

em  $|z| < 1$ . Calcule também a série de Taylor de  $\log(1+z)$  em torno de  $p = 0$ .

- Determine os primeiros termos da expansão em série de Taylor em torno de  $p = 0$  das seguintes funções:

$$e^z \sin(z) \quad \cos(z) \sin(z) \quad \frac{e^z}{\cos(z)} \quad \frac{\sin(z)}{z}$$

## Algumas séries de Taylor

função = série de Taylor-Maclaurin	disco de convergência
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ where $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$	$ z  < R = (\limsup  c_n ^{1/n})^{-1}$
$(1 - z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$	$ z  < 1$
$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots$	$ z  < \infty$
$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 + \dots$	$ z  < \infty$
$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 + \dots$	$ z  < \infty$
$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 + \dots$	$ z  < \infty$
$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 + \dots$	$ z  < \infty$
$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \dots$	$ z  < 1$
$(1 + z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}z^3 + \dots$	$ z  < 1$
$\arcsin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} z^{2n+1}$	$ z  < 1$

## 6 Séries de Laurent e cálculo dos resíduos

1. (séries de potências em torno de  $\infty$ ) Uma função  $f(z)$  é “analítica em  $z = \infty$ ” se a função  $g(w) = f(1/w)$  é analítica em  $w = 0$ , ou seja, se admite a expansão

27 out 2014

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^{-n}$$

num disco  $D_R(\infty) := \{|z| > 1/R\} \subset \bar{\mathbb{C}}$  centrado em  $\infty$  (que corresponde a um disco  $|w| < R$  na coordenada  $w = 1/z$  da esfera de Riemann). Os coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} f(z) z^{n-1} dz$$

onde  $\rho > 1/R$ .

- Determine, se existir, a expansão em série de potências em torno de  $\infty$  de

$$1/z^3 \quad e^z \quad \frac{1}{z^2 + 1} \quad e^{1/z^2}$$

2. (séries de Laurent) Se  $f_+(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-p)^n$  é uma função analítica no disco  $|z-p| < R$  e  $f_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n}$  é uma função analítica no disco  $|z-p| > r$ , e se  $r < R$ , então a soma  $f(z) = f_+(z) + f_-(z)$  é uma função analítica no anel  $A_{r,R}(p) := \{r < |z-p| < R\}$ , representada pela série de potências (positivas e negativas)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-p)^n.$$

Vice-versa, se  $f(z)$  é holomorfa no anel  $A_{r,R}(p)$ , então pode ser representada como uma soma  $f(z) = f_+(z) + f_-(z)$  de uma função

$$f_+(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-p|=\rho} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

holomorfa no disco  $|z-p| < \rho < R$  centrado em  $p$ , e uma função

$$f_-(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-p|=\rho} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

holomorfa no disco  $|z-p| > \rho > r$  centrado em  $\infty$  (nos dois casos,  $\rho$  é qualquer raio  $r < \rho < R$ , os integrais sendo iguais pelo teorema de Cauchy). De fato, se  $z \in A_{r,R}(p)$  e  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno, pela fórmula de Cauchy e pelo teorema de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-p|=R'} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-p|=r'} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

onde os raios  $r < r' < R' < R$  são tais que  $D_\varepsilon(z) \subset A_{r',R'}(p)$  (fazer um desenho!). Portanto,  $f(z)$  admite uma expansão em *série de Laurent*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-p)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-p)^{-n} \quad \text{se } z \in A_{r,R}(p) \end{aligned}$$

em torno de  $p$ . Os coeficientes  $c_n$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , são dados pelos integrais

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\rho} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}} dz$$

onde  $r < \rho < R$ .

- Determine séries de Laurent das seguintes funções em anéis oportunos

$$e^{1/z} \quad \frac{1}{(z-1)(z-2)} \quad \frac{e^z}{z^2}$$

- Determine as possíveis expansões em série de Laurent centradas em 0 das seguintes funções

$$\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z} \quad \frac{1}{z(z-1)} \quad \frac{z-1}{z+1} \quad z \sin(1/z)$$

3. (singularidades isoladas, pólos) Um ponto  $p \in \mathbb{C}$  é uma *singularidade isolada* de  $f$  se  $f$  é holomorfa num disco perfurado  $A_{0,\rho}(p) = D_\rho(p) \setminus \{p\}$ , e portanto admite a representação

29 out 2014

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-p)^n \quad \text{se } 0 < |z-p| < \rho \quad (6.1)$$

A *ordem* de  $f$  na singularidade isolada  $p$  é  $\text{ord}(f, p) := \inf\{k \text{ s.t. } c_k \neq 0\}$ , ou seja, o número  $n \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$  tal que  $c_n \neq 0$  (se  $n \neq \pm\infty$ ) e  $c_k = 0$  para todos os  $k < n$ .

A singularidade isolada é *removível* se  $\text{ord}(f, p) = n \geq 0$ . Neste caso  $f$  admite uma extensão holomorfa em todo o disco  $D_\rho(p)$ , definida por  $f(p) = c_0$ . Em particular, se  $0 < n < \infty$ , então  $f$  tem um zero de ordem  $n$  em  $p$ , logo é da forma

$$\begin{aligned} f(z) &= c_n (z-p)^n + c_{n+1} (z-p)^{n+1} + \dots \\ &= (z-p)^n g(z) \end{aligned} \quad (6.2)$$

com  $g$  holomorfa e  $\neq 0$  numa vizinhança de  $p$ . O caso  $\text{ord}(f, p) = \infty$  é o caso trivial da função constante e igual a zero. Por exemplo,  $z^k$  tem zero de ordem  $k \geq 1$  na origem.

A singularidade isolada é um *pólo* de *multiplicidade*  $m \geq 1$  quando  $-\infty < \text{ord}(f, p) = -m < 0$ , ou seja, quando  $f$  é representada por uma série de Laurent “finita” (contendo um número finito de potências negativas)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-m}}{(z-p)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-p} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n \\ &= (z-p)^{-m} g(z) \end{aligned} \quad (6.3)$$

com  $g(z)$  holomorfa e  $\neq 0$  numa vizinhança de  $p$ . Por exemplo,  $1/z^k$  tem um pólo de multiplicidade  $k \geq 1$  na origem (chamado “simples” se  $k = 1$ , “duplo” se  $k = 2, \dots$ ).

A singularidade isolada é *essencial* quando  $\text{ord}(f, p) = -\infty$ , ou seja,  $c_n \neq 0$  para infinitos  $n$  negativos. Por exemplo,  $e^{1/z} = 1 + z^{-1} + (1/2)z^{-2} + (1/6)z^{-3} + \dots$  tem uma singularidade essencial na origem.

**Teorema 6.1.** *Uma singularidade isolada  $p$  de uma função holomorfa  $f(z)$  é removível sse  $f(z)$  é limitada numa vizinhança de  $p$ .*

*Demonstração.* Se  $|f(z)| < M$  numa vizinhança de  $p$ , então todos os coeficientes negativos da série de Laurent de  $f$  em torno de  $p$  são nulos, pois

$$|c_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\varepsilon} (z-p)^{n-1} f(z) dz \right| \leq M\varepsilon^n$$

se  $n = 1, 2, \dots$ . A série de Laurent  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n$  é portanto uma extensão holomorfa de  $f$  numa vizinhança de  $p$ . A outra implicação é trivial.  $\square$

Um corolário surpreendente é o seguinte.

**Teorema 6.2** (Casorati-Weierstrass). *Se  $p$  é uma singularidade essencial de  $f(z)$ , então existe uma sucessão  $z_n \rightarrow p$  tal que o conjunto dos valores  $f(z_n)$  é denso em  $\mathbb{C}$  (ou seja, para todo  $\alpha \in \mathbb{C}$  existe uma subsucessão tal que  $f(z_{n_i}) \rightarrow \alpha$ ).*

*Demonstração.* Caso contrário, existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que  $f(U \setminus \{p\}) \subset \mathbb{C} \setminus D_\rho(\alpha)$ , com  $\rho > 0$ . Isto implica que a função  $g(z) := 1/(f(z) - \alpha)$ , holomorfa em  $U \setminus \{p\}$ , é limitada, e portanto, pelo teorema 6.1, que  $\text{ord}(g, p) \geq 0$ . De consequência,  $f(z) = \alpha + 1/g(z)$  tem, no máximo, um pólo de ordem finito em  $p$ , contrariamente à hipótese.  $\square$

- Determine as singularidades isoladas e a natureza de

$$\frac{e^z}{z} \quad \frac{1}{(z-1)(z-2)} \quad \frac{1}{z^2} \quad ze^{1/z} \quad \frac{e^{3z}}{z^2 - 2z - 3}$$

- Mostre que  $e^z$ ,  $\sin(z)$  ou  $\cos(z)$  têm singularidades essenciais em  $\infty$ .
- Mostre que uma função inteira com uma singularidade não essencial em  $\infty$  é um polinômio.

4. (teorema dos resíduos) O resíduo da função holomorfa  $f$  na singularidade isolada  $p \in \mathbb{C}$  é o coeficiente  $\text{Res}(f, p) := c_{-1}$  na série de Laurent (6.1). Pela fórmula de Cauchy,

3 nov 2014

$$\text{Res}(f, p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$$

se  $\gamma$  é um contorno fechado simples que contém no seu interior  $p$  e nenhuma outra singularidade de  $f$ , por exemplo, uma circunferência suficientemente pequena à volta de  $p$ . (melhor seria dizer que o resíduo é um invariante da forma  $f(z)dz$ , e não da função  $f$ !).

O cálculo dos resíduos pode ser simplificado se a singularidade não é essencial. Por exemplo, se  $p$  é um pólo simples de  $f$ , i.e.  $\text{ord}(f, p) = -1$ , e portanto

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-p} + c_0 + c_1(z-p) + c_2(z-p)^2 + \dots,$$

então

$$\text{Res}(f, p) = \lim_{z \rightarrow p} (z-p)f(z)$$

Neste caso, é também útil observar que, se  $g$  é uma função holomorfa em  $p$ , então

$$\text{Res}(fg, p) = g(p) \text{Res}(f, p)$$

Se  $p$  é um pólo duplo, i.e.  $\text{ord}(f, p) = -2$ , então

$$\text{Res}(f, p) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{d}{dz} ((z-p)^2 f(z)).$$

Em geral, se  $p$  é um pólo de multiplicidade  $m > 0$ , i.e.  $\text{ord}(f, p) = -m$ , e portanto  $f(z)$  é da forma (6.3) numa vizinhança de  $p$ , então

$$\text{Res}(f, p) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow p} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-p)^m f(z))$$

Outra observação útil é a seguinte. Se  $f(z)$  tem um zero simples em  $p$ , i.e. é da forma

$$f(z) = c_1(z-p) + c_2(z-p)^2 + \dots$$

com  $c_1 = f'(p) \neq 0$ , então

$$\boxed{\text{Res}(1/f, p) = 1/f'(p)}$$

Seja  $\Omega \subset \mathbb{C}$  uma região limitada cuja fronteira  $\partial\Omega$  é uma reunião de contornos fechados simples. Seja  $f$  uma função holomorfa numa vizinhança de  $\Omega$  exceto num número finito de singularidade isoladas  $p_1, p_2, \dots \in \Omega$ . Então o teorema de Cauchy aplicado ao domínio obtido ao retirar de  $\Omega$  uns discos suficientemente pequenos  $D_\rho(p_k)$  centrados nos  $p_k$ 's, implica o seguinte

**Teorema 6.3** (teorema dos resíduos). *Se  $f$  é holomorfa em  $\Omega \subset \mathbb{C}$  exceto num número finito de singularidades isoladas  $p_1, p_2, \dots \in \Omega$ , então*

$$\boxed{\oint_{\partial\Omega} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_k \text{Res}(f, p_k)} \quad (6.4)$$

- Calcule os resíduos de

$$\frac{e^z}{z} \quad \frac{1}{(z-1)(z-2)} \quad \frac{1}{z^2} \quad ze^{1/z} \quad \frac{e^{3z}}{z^2 - 2z - 3}$$

- Calcule os integrais

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz & \quad \oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2 + 1} dz & \quad \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^2} dz \\ \oint_{|z|=R} e^{1/z^2} dz & \quad \oint_{|z|=2} \frac{z-3}{z(z-1)} dz & \quad \oint_{|z|=5} \frac{e^z}{z^2 - 2z - 3} dz \end{aligned}$$

5. (**integrais de funções racionais de cos e sin**) Se  $f(\cos(\theta), \sin(\theta))$  é uma função racional de cos e sin, então a substituição  $z = e^{i\theta}$  transforma o integral de  $f(\cos(\theta), \sin(\theta))$  entre 0 e  $2\pi$  no integral de contorno

$$\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta = \oint_{|z|=1} F(z) \frac{dz}{iz}$$

onde  $F$  é a função racional

$$F(z) := f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right),$$

pois  $\cos(\theta) = (z + 1/z)/2$ ,  $\sin(\theta) = (z - 1/z)/2i$  e  $dz/iz = d\theta$ . O segundo integral pode então ser calculado somando  $2\pi i$  vezes os resíduos da função integranda  $g(z) = -iF(z)/z$  nos pontos singulares no disco unitário  $\mathbb{D}$  (se  $f$  não tem pólos na circunferência unitária  $\partial\mathbb{D}$ ).

- Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos(\theta)} \quad \int_0^\pi \frac{\cos(2\theta)}{3 - \cos(\theta)}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\alpha + \beta \sin(\theta)} \quad \text{com } \alpha > \beta > 0$$

- O núcleo de Poisson no disco unitário  $\mathbb{D}$  é

$$P_r(\theta) := \Re\left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}$$

com  $0 \leq r < 1$ . Mostre que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 1$$

5 nov 2014

6. (integrais impróprios de funções racionais) Se  $f(x) = g(x)/h(x)$  é uma função racional (quociente entre os polinômios  $g$  e  $h$ ) e se o seu integral impróprio na reta real é absolutamente convergente, ou seja,  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$  (o que acontece se  $\deg(h) > \deg(g) + 1$ , ou seja, se  $\infty$  é um zero de ordem  $\text{ord}(f, \infty) > 1$  de  $f$ , e portanto  $f(x) = \mathcal{O}(|x|^{-2})$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ ) então o integral impróprio de  $f$  pode ser calculado somando  $2\pi i$  vezes os resíduos de  $f$  no semi-plano superior  $\mathbb{H}$ , i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{p \in \mathbb{H}} \text{Res}(f, p)$$

De fato, o segundo membro é igual ao integral de  $f(z)$  ao longo do contorno formado pelo segmento  $[-R, R] \subset \mathbb{R}$  e pela semi-circunferência  $S_R = \{Re^{it} : t \in [0, \pi]\}$ , mas o integral  $\int_{S_R} f(z) dz \rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow \infty$  (pois o integrando é limitado por  $|f(z)| \leq CR^{-2}$  e o comprimento de  $S_R$  é igual a  $\pi R$ ).

A mesma técnica pode ser utilizada para calcular integrais impróprios do género

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx \quad (6.5)$$

parte real e parte imaginária de  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx$ , pois  $|f(z)e^{i\alpha z}| \leq |f(z)|$  se  $\Im(z) > 0$  e  $\alpha > 0$ . Menos óbvio é que estes integrais podem ser calculados também quando  $\infty$  é um zero simples de  $f$ , i.e. quando  $\text{ord}(f, \infty) = 1$ , e portanto  $|f(z)| \leq C/|z|$  numa vizinhança de  $z = \infty$ . Uma possibilidade é integrar a função meromorfa  $F(z) := f(z)e^{i\alpha z}$  ao longo de um retângulo de vértices  $-X_-, X_+, X_+ + iY, -X_- + iY$ . Se  $X_-, X_+, Y \gg 1$ , então o interior do retângulo contém todos os pólos de  $F(z)$  no semi-plano superior (estamos a assumir que não há pólos no eixo real!). Por outro lado, os valores absolutos dos integrais ao longo dos lados verticais e do lado superior do retângulo são limitados por

$$\frac{C}{X_{\pm}} \int_0^Y e^{-\alpha y} dy \leq \frac{C}{X_{\pm}} \quad \text{ou} \quad \frac{e^{-\alpha Y}}{Y} \int_{-X_-}^{X_+} dx \leq \frac{e^{-\alpha Y}}{Y} (X_+ + X_-),$$

respetivamente. Passando ao limite quando  $Y \rightarrow \infty$  e depois  $X_{\pm} \rightarrow \infty$ , o resultado é que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{p \in \mathbb{H}} \text{Res}(F, p)$$

(se  $\alpha > 0$ , caso contrário é necessário escolher o retângulo oposto, i.e. com  $Y < 0$ , e portanto somar os resíduos nos pólos contidos no semi-plano inferior). As partes real e imaginária deste integral são os integrais (6.5). A mesma conclusão pode ser obtida usando a seguinte observação, chamada *lema de Jordan*. Seja  $M(R) := \sup_{|z|=R} |f(z)|$ . O integral de  $f(z)e^{i\alpha z}$  ao longo da semi-circunferência  $S_R = \{Re^{it} : t \in [0, \pi]\}$  pode ser estimado, usando a desigualdade elementar  $(2/\pi)t \leq \sin(t) \leq 1$  para valores de  $t \in [0, \pi/2]$ , como

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_R} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| &\leq M(R) R \int_0^{\pi} e^{-\alpha R \sin(t)} dt = 2 M(R) R \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin(t)} dt \\ &\leq M(R) R \int_0^{\pi/2} e^{-(2\alpha R/\pi)t} dt \leq M(R) \frac{\pi}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha R}) \end{aligned}$$

Portanto, se  $M(R) \rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow \infty$ , este integral tende para 0 (se  $\alpha > 0$ , caso contrário é necessário escolher a semi-circunferência  $S_R^- = \{Re^{it} : t \in [-\pi, 0]\}$  no semi-plano inferior).

- Calcule

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \\ \int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + 1} dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + \beta^2} dx \end{aligned}$$



- O núcleo de Poisson no semi-plano superior  $\mathbb{H}$  é

$$P_y(x) := \frac{y}{x^2 + y^2}$$

com  $y > 0$ . Mostre que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_y(x) dx = 1.$$

7. (valor principal de Cauchy) Se a função racional  $f(x)$  tem pólos simples na reta real que coincidem com os zeros de  $\cos(x)$  ou  $\sin(x)$ , os integrais (6.5) podem também ser calculados. Quando os pólos simples de  $f(x)$  na reta real não são anulados pelos zeros de  $\sin$  ou  $\cos$ , e portanto o integral de  $F(x) = f(x)e^{i\alpha x}$  não existe, ainda é possível (e útil, por exemplo na teoria da transformada de Hilbert) definir e calcular os integrais “no sentido do valor principal”. Por exemplo, se  $0 \in \mathbb{R}$  é o único pólo de  $F(z)$  na reta real, e é um pólo simples, então o valor principal (de Cauchy) do integral  $\int_{\mathbb{R}} F(x) dx$  é definido por

10 nov 2014

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |z| < R} F(z) dz$$

Seja  $\gamma$  o contorno obtido unendo os segmentos  $\varepsilon < |z| < R$  da reta real com as semi-circunferências  $S_R = \{Re^{it} : t \in [0, \pi]\}$  e  $S_\varepsilon = \{\varepsilon e^{it} : t \in [0, \pi]\}$ . Se  $R$  é suficientemente grande e  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno, o teorema dos resíduos diz que

$$2\pi i \sum_{p \in \mathbb{H}} \text{Res}(F, p) = \int_{S_R} F(z) dz + \int_{\varepsilon < |z| < R} F(x) dx - \int_{S_\varepsilon} F(z) dz$$

O primeiro integral tende para 0 quando  $R \rightarrow \infty$  se  $F(z) = f(z)e^{i\alpha z}$  satisfaz as hipóteses do lema de Jordan. O limite do último integral quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  pode ser calculado explicitamente: se  $F(z) = C/z + F_0(z)$ , com  $F_0$  holomorfa numa vizinhança da origem, então  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} f(z) dz = \pi i C$ , pois o integral da parte holomorfa é limitado por  $M\pi\varepsilon \rightarrow 0$ , se  $M = \max_{|z| \leq \varepsilon} |f_0(z)|$ . É evidente como generalizar esta fórmula ao caso de mais pólos simples na reta real: cada pólo na reta real conta “metade”, ou seja,  $\pi i$  vezes o resíduo. O resultado é que

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = 2\pi i \sum_{p \in \mathbb{H}} \text{Res}(F, p) + \pi i \sum_{p \in \mathbb{R}} \text{Res}(F, p)$$

- Calcule

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x - a} dx \quad \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x - a} dx$$

8. (integral da função sinc) A função de Shannon (ou *sinus cardinalis*)

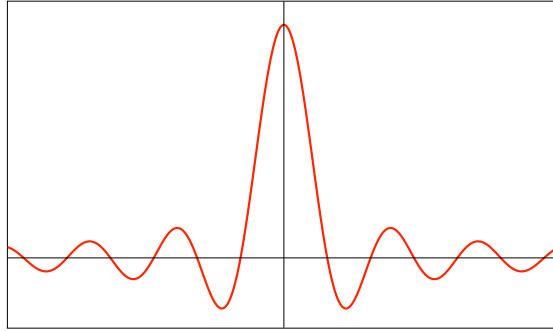
$$\text{sinc}(x) := \frac{\sin(x)}{x} = 1 - x^2/6 + x^4/120 - \dots$$

joga um papel importante em análise de Fourier (é a transformada de Fourier de uma função característica), em particular nas aplicações à teoria da informação e ao processamento de sinais digitais. A origem é uma singularidade removível, e sinc é uma função inteira se o seu valor na origem for definido  $\text{sinc}(0) := 1$ . Os seus zeros são os múltiplos não triviais de  $\pi$ , e Euler provou que sinc é um produto infinito

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (6.6)$$

O seu integral impróprio  $I := \int_0^{\infty} \text{sinc}(x) dx$  (que não converge absolutamente!) pode ser calculado observando que o resíduo da função  $f(z) = e^{iz}/z$  em  $p = 0$  é  $\text{Res}(f, 0) = 1$ . Então

$$I = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{4i} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$



9. (resíduos e séries: alguns valores da função zeta de Riemann) A função  $f(z) = \pi \cot(\pi z)$  tem pólos simples nos inteiros  $n \in \mathbb{Z}$ , com resíduos  $\text{Res}(f, n) = 1$ , e é uniformemente limitada nos lados do quadrado  $Q_R \subset \mathbb{C}$  de vértices  $\pm R \pm iR$  e  $\pm R \mp iR$ , com  $R \in \mathbb{N} + 1/2$ . Pelo teorema dos resíduos 6.3, se  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,

não leccionado

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\partial Q_R} \frac{f(z)}{z^{2k}} dz = \text{Res}(f/z^{2k}, 0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}},$$

e portanto os valores da função zeta de Riemann  $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$  (holomorfa no semi-plano  $\Re(s) > 1$ ) quando  $s = 2k = 2, 4, 6, \dots$  são

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{1}{2} \text{Res}(f/z^{2k}, 0)$$

Para calcular o resíduo de  $f(z)/z^{2k}$  em 0 é necessário calcular a série de Laurent da cotangente num disco perfurado à volta da origem:

$$\begin{aligned} \cot(z) &:= \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{1 - z^2/2 + z^4/24 - \dots}{z(1 - z^2/6 + z^4/120 - \dots)} \\ &= z^{-1}(1 - z^2/2 + z^4/24 - \dots)(1 + z^2/6 - 7z^4/360 + \dots) \\ &= z^{-1} - z/3 - z^3/45 - \dots \end{aligned}$$

Por exemplo,  $\text{Res}(f/z^2, 0) = -\pi^2/3$ , e portanto

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (6.7)$$

(a solução do problema de Basel).

- Compare o coeficiente de  $z^2$  na série de Laurent de  $\sin(\pi z)/\pi z$  e o coeficiente de  $z^2$  no produto infinito em (6.6), e deduza a prova (original de Euler) da fórmula (6.7).

## 7 EDPs lineares de segunda ordem: Laplace, ondas e calor

1. **(Laplaciano, equação de Laplace, funções harmônicas)** O Laplaciano (ou operador de Laplace) no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é o operador diferencial  $\Delta = \text{div} \circ \text{grad}$ , definido, em coordenadas cartesianas  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , por

12 nov 2014

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

se  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é uma função real de classe  $C^2$ . A equação de Laplace para o campo escalar  $u(\mathbf{x})$  definido num domínio  $D \subset \mathbb{R}^n$  é a EDP

$$\Delta u = 0 \tag{7.1}$$

As soluções da equação de Laplace são ditas *funções harmônicas*.

- Quais funções satisfazem a equação de Laplace  $u''(x) = 0$  na reta?
- Determine as soluções da equação de Laplace  $u''(x) = 0$  no intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  com condições de fronteira  $u(a) = c$  e  $u(b) = d$ .
- Verifique que

$$u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

é uma solução da equação de Laplace (13.2) em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

- Verifique que (o potencial elétrico/gravitacional gerado por uma carga/massa colocada na origem)

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

é uma solução da equação de Laplace (13.2) em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ .

2. **(equação de calor)** A equação de calor/difusão para o campo escalar  $u(\mathbf{x}, t)$ , definido para  $\mathbf{x}$  numa região  $D \subset \mathbb{R}^n$  e tempos  $t > 0$ , é

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \Delta u \tag{7.2}$$

onde  $\Delta$  é o Laplaciano no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  e  $\beta > 0$  é um coeficiente de difusão. As funções harmônicas são soluções estacionárias (i.e. independentes do tempo) da equação de calor.

- Mostre que a substituição  $\tau = \beta t$  transforma a equação do calor acima em  $u_\tau = \Delta u$ .
- Verifique que

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4\beta t}$$

é uma solução da equação de calor (13.1) na reta.

- Verifique que

$$u(x, y, t) = \frac{1}{t} e^{-(x^2+y^2)/4\beta t}$$

é uma solução da equação de calor (13.1) no plano.

3. **(princípio do máximo, unicidade e estabilidade)** A unicidade e a estabilidade das soluções da equação de calor são consequências de um princípio físico intuitivo: um ponto interior de um condutor isolado no instante  $t > 0$  não pode ser mais quente ou mais frio do que era no instante inicial  $t = 0$ , ou dos pontos da fronteira do condutor.

**Teorema 7.1** (Princípio do máximo). *Seja  $u(x, t)$  uma solução (duas vezes diferenciável) da equação de calor (13.1) no retângulo  $R = [a, b] \times [0, T]$  (ou seja,  $x \in [a, b]$  e  $t \in [0, T]$ ). Então  $u(x, t)$  assume o máximo e o mínimo quando  $t = 0$  ou na fronteira  $x = a$  ou  $b$ .*

*Demonstração.* Seja  $B = \{(x, t) \in R \text{ t.q. } t = 0 \text{ ou } x = a \text{ ou } x = b\}$ , a região onde o teorema diz que  $u$  assume o máximo e o mínimo. Seja  $M = \max_{(x,t) \in B} u(x, t)$ , seja  $(x_0, t_0) \in R \setminus B$  um ponto onde, contrariamente a tese,  $u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$  com  $\varepsilon > 0$ . Seja

$$v(x, t) := u(x, t) - \frac{\varepsilon}{2T}(t - t_0),$$

que é limitada por  $v(x, t) \leq M + \varepsilon/2$  em  $B$ . Como  $v(x_0, t_0) = M + \varepsilon$ , a função  $v$  assume o seu máximo num ponto  $(x_1, t_1) \in R \setminus B$ . Neste ponto as derivadas de  $v$  satisfazem

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_1, t_1) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1, t_1) \leq 0$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_1, t_1) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t_1) - \frac{\varepsilon}{2T} \geq 0,$$

o que é impossível se  $u$  é solução da equação de calor. O mesmo argumento com  $-u(x, t)$  prova o resultado relativo ao mínimo.  $\square$

Aplicando o princípio do máximo à diferença entre duas soluções, obtemos o

**Teorema 7.2** (Unicidade das soluções). *Existe no máximo uma solução da equação de calor num intervalo limitado, dadas condições iniciais e de fronteira arbitrárias.*

Outra consequência é o

**Teorema 7.3** (Estabilidade das soluções). *Se  $u(x, t)$  e  $v(x, t)$  são duas soluções da equação de calor num intervalo finito  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  tais que  $|u(x, t) - v(x, t)| \leq \varepsilon$  se  $t = 0$  ou se  $x \in \partial I$ , então  $|u(x, t) - v(x, t)| \leq \varepsilon$  para todo  $x \in I$  e todo tempo  $t \geq 0$ .*

4. (equação de onda) A equação de onda para o campo  $u(\mathbf{x}, t)$ , com  $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$  e  $t \in \mathbb{R}$ , é

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u} \quad (7.3)$$

onde  $c > 0$  é a velocidade de propagação das ondas.

- Mostre que a substituição  $\tau = ct$  transforma a equação de onda em  $u_{\tau\tau} = \Delta u$ .
- Verifique que as “ondas planas”

$$u_{\xi}(\mathbf{x}, t) := Ae^{i(\xi \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

são soluções da equação das ondas  $u_{tt} = c^2 \Delta u$  no “espaço-tempo”  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , se a frequência  $\omega$  e o número de onda  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  satisfazem a relação de dispersão  $\omega^2 - c^2 \|\xi\|^2 = 0$ .

5. (solução de d’Alembert da equação de onda) A mudança de variáveis independentes  $(x, t) \mapsto (\xi, \eta)$ , onde  $\xi = x + ct$  e  $\eta = x - ct$ , transforma a equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

na forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0,$$

cuja solução geral é uma sobreposição

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

de duas “ondas viajantes” (traveling waves) com velocidades  $\pm c$  e perfis  $f$  e  $g$  (duas funções diferenciáveis arbitrárias). A solução da equação de onda na reta real com condições iniciais

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x).$$

é dada pela fórmula de d'Alembert <sup>3</sup>

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy \quad (7.4)$$

- Prove a fórmula de d'Alembert (ou seja, resolva o sistema  $f + g = \phi$  e  $c(f' - g') = \psi$  para as funções  $f$  e  $g$ ).
- Mostre que, se as condições iniciais  $\phi(x)$  e  $\psi(x)$  são nulas fora dum intervalo  $[-L, L]$ , então a solução  $u(x, t)$  é nula fora do intervalo  $[-L - ct, L + ct]$ , e dê uma interpretação.
- Determine uma solução quando as condições iniciais são

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \cos(2\pi x),$$

ou

$$u(x, 0) = e^{-x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

- Mostre que, se as condições iniciais  $u(x, 0) = \phi(x)$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$  são funções ímpar, então a solução de d'Alembert  $u(x, t)$  é uma função ímpar de  $x$  para cada tempo  $t$ . Use esta observação para resolver o problema das ondas na semi-reta  $x \geq 0$  com condição de fronteira nula  $u(0, t) = 0$  (condições de fronteira de Dirichlet).
6. (energia, unicidade e estabilidade) As pequenas vibrações de uma corda vibrante com densidade linear  $\rho$ , tensão  $k$  e comprimento  $\ell$ , são modeladas pela ‘equação da corda vibrante’

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

onde  $u(x, t)$  denota o deslocamento transversal, na posição  $x \in [0, \ell]$  e o tempo  $t \in \mathbb{R}$ , e  $c = \sqrt{k/\rho}$ . A unicidade das soluções é também consequência de um princípio físico: a conservação da energia. A energia de uma corda vibrante é

$$E := \frac{1}{2} \int_0^\ell \left( \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + k \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dx$$

Se  $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$  para todos os tempos  $t$ , então a energia é uma constante do movimento, pois

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_0^\ell \left( \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) dx \\ &= \left[ k \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^\ell + \int_0^\ell \left( \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx \\ &= \int_0^\ell \rho \frac{\partial u}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = 0. \end{aligned}$$

**Teorema 7.4** (Unicidade das soluções). *Existe no máximo uma solução de classe  $\mathcal{C}^2$  da equação da corda vibrante forçada*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$$

dadas umas condições iniciais  $u(x, 0) = \phi(x)$  and  $u_t(x, 0) = \varphi(x)$  e condições de fronteira  $u(0, t) = \lambda(t)$ ,  $u(\ell, t) = \mu(t)$ .

<sup>3</sup>J.-B. le Rond D'Alembert, Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration, *Histoire de l'acadmie royale des sciences et belles lettres de Berlin* 3 (1747), 214-219.

*Demonstração.* A diferença  $w = u_1 - u_2$  entre duas soluções,  $u_1$  e  $u_2$ , é uma solução da equação de onda  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$  com condições iniciais e de fronteira triviais. A energia de  $w$  é igual ao seu valor inicial, que é zero. Portanto  $\partial w / \partial x$  e  $\partial w / \partial t$  são identicamente nulas, e de consequência  $w$  é constante e igual ao seu valor inicial, que também é nulo.  $\square$

**Teorema 7.5** (Estabilidade das soluções). *Para cada  $\varepsilon > 0$  e cada tempo  $T > 0$  existe um  $\delta(\varepsilon, T) > 0$  tal que, se  $u(x, t)$  e  $v(x, t)$  são duas soluções da equação de onda na reta real com condições iniciais que diferem por menos de  $\delta(\varepsilon, T)$  então*

$$|u(x, t) - v(x, t)| \leq \varepsilon$$

para cada posição  $x \in \mathbb{R}$  e cada tempo  $0 \leq t \leq T$ .

*Demonstração.* Se os valores absolutos das condições iniciais  $u(x, 0)$  e  $u_t(x, 0)$  são limitadas por  $\delta$ , a fórmula de d'Alembert (7.4) diz que a solução da equação de onda na reta é limitada por  $|u(x, t)| \leq \delta + \delta t$ . Em particular, para tempos  $0 \leq t \leq T$ , a solução é limitada por  $\delta(1 + T)$ . Portanto, basta considerar  $\delta(\varepsilon, T) = \varepsilon / (1 + T)$ .  $\square$

7. (difusão/movimento Browniano) No modelo do movimento Browniano proposto por Einstein em 1905<sup>4</sup>, a densidade de probabilidade  $P(x, t)$  de encontrar a partícula Browniana na posição  $x$  no tempo  $t$  sabendo que ela estava na posição 0 no tempo 0 é a solução não-negativa da equação da difusão

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

tal que  $\lim_{t \rightarrow 0} P(x, t) = 0$  para todo o  $x \neq 0$ , e  $\int_{-\infty}^{\infty} P(x, t) dx = 1$  para todo o tempo  $t > 0$ . O “coeficiente de difusão” é  $\beta = \frac{RT}{N\alpha}$ , onde  $R$  é a constante de gás perfeito,  $T$  a temperatura absoluta,  $N$  o número de Avogadro, e  $\alpha = 6\pi\eta\rho$  um coeficiente de fricção (que depende da viscosidade dinâmica  $\eta$  do líquido e do raio  $\rho$  da partícula Browniana).

- Verifique que a Gaussiana

$$P_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta t}} e^{-x^2/(4\beta t)}.$$

resolve o problema do movimento Browniano.

- Verifique que

$$P_{t+s}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_t(y) P_s(x-y) dy$$

e interprete este facto.

- Calcule o caminho quadrático médio da partícula Browniana no tempo  $t$ , definido por

$$\langle x(t)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P_t(x) dx.$$

8. (equação de Korteweg-de Vries) Considere a equação de Korteweg-de Vries<sup>5</sup> (KdV)

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0,$$

que descreve ...

- Mostre que  $u(x, t) := \phi(x - vt - x_0)$  é uma solução da KdV se  $\phi$  é uma solução da EDO  $-v\phi' + \phi''' + 6\phi\phi' = 0$ , e portanto se existe uma constante  $c$  tal que  $\phi$  é uma solução da equação de Newton

$$\phi'' = -3\phi^2 + v\phi + c$$

<sup>4</sup>A. Einstein, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Ann. Phys.* **17**, 549, 1905 [English translation in A. Einstein, *Investigations on the Theory of Brownian Movement*, Dover, New York, 1956].

<sup>5</sup>D.J. Korteweg and G. de Vries, On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Wave, *Philosophical Magazine* **39** (1894), 422-443

- Verifique que a “secante hiperbólica”

$$\operatorname{sech}(x) := \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

é solução da EDO

$$f'' = -2f^2 + f$$

com condições de fronteira  $f(\pm\infty) = 0$ .

- Deduza que

$$u(x, t) = \frac{v}{2} \operatorname{sech} \left( \frac{\sqrt{v}}{2} (x - vt - x_0) \right)$$

é uma solução da KdV, que descreve uma “onda solitária” (*soliton*), localizada numa vizinhança de  $x_0 + vt$ , que viaja com velocidade  $v$ .

9. (equação de Burgers) Considere a *equação de Burgers*

$$u_t = \mu u_{xx} + uu_x$$

com viscosidade  $\mu > 0$ .

- (substituição de Cole<sup>6</sup>-Hopf<sup>7</sup>) Mostre que se  $v(x, t)$  é uma solução da equação de calor  $v_t = \mu v_{xx}$ , então

$$u = 2 \frac{\partial}{\partial x} \log v = \frac{2}{v} v_x$$

é uma solução da equação de Burgers  $u_t = \mu u_{xx} + uu_x$ .

---

<sup>6</sup>J.D. Cole, On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quart. Appl. Math.* **9** (1951), 225-236.

<sup>7</sup>E. Hopf, The partial differential equation  $ut + uu_x = \mu u_{xx}$ , *Comm. Pure and Appl. Math.*, **3** (1950), 201-230.

## 8 Separação de variáveis, harmônicas e modos

1. (**problema de Sturm-Liouville**) O problema de Sturm-Liouville consiste em determinar constantes  $\lambda \in \mathbb{R}$  e correspondentes funções  $u(x)$ , definidas num intervalo  $x \in [a, b]$ , que resolvam a equação

17 nov 2014

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = \lambda w(x)u$$

com condições de fronteira  $u(a)$  ou  $u'(a) = A$  e  $u(b)$  ou  $u'(b) = B$ , dadas umas funções  $p(x)$  e  $w(x)$ . Se definimos o operador  $L$  como

$$Lu := \frac{1}{w(x)} \left( -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u \right) = \frac{1}{w} (-(pu)'+qu)$$

então o problema de Sturm-Liouville consiste em resolver

$$Lu = \lambda u$$

ou seja, determinar os valores próprios  $\lambda$  e as correspondentes funções próprias  $u$  de  $L$ .

- Determine os valores próprios e as funções próprias de

$$u'' = -\lambda u$$

no intervalo  $x \in [0, \pi]$  com condições de fronteira  $u(0) = u(\pi) = 0$ .

- Determine os valores próprios e as funções próprias de

$$u'' = -\lambda u$$

no intervalo  $x \in [0, \pi]$  com condições de fronteira  $u'(0) = u'(\pi) = 0$ .

- Determine os valores próprios e as funções próprias de

$$u'' = -\lambda u$$

no intervalo  $x \in [0, \pi]$  com condições de fronteira  $u(0) - u'(0) = u(\pi) - u'(\pi) = 0$ .

- Mostre que as funções próprias  $u(r)$ , com  $0 < r < \infty$ , de

$$r^2 u'' + r u' = n^2 u$$

quando  $n \in \mathbb{Z}$ , são  $u_{\pm}(r) = r^{\pm n}$  se  $n \neq 0$ , e  $u_0(r) = 1$  ou  $u_0(r) = \log r$  se  $n = 0$ .

2. (**separação de variáveis**) O método de separação de variáveis para determinar soluções de uma EDPs linear homogênea  $Lu = 0$ , por exemplo nas variáveis  $x$  e  $t$ , consiste em substituir a conjetura

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

na equação, e deduzir  $(A_x X)T = (B_t T)X$ , onde  $A_x$  e  $B_t$  são operadores diferenciais lineares nas variáveis  $x$  e  $t$ , respetivamente. A igualdade então implica que existe uma constante  $\lambda$  tal que  $X$  e  $T$  satisfazem as equações de Sturm-Liouville

$$A_x X = \lambda X \quad \text{e} \quad B_t T = \lambda T.$$

As condições de fronteira determinam certos valores próprios  $\lambda$  e as correspondentes funções próprias admissíveis  $X_{\lambda}(x)$  e  $T_{\lambda}(t)$ , e portanto as soluções separáveis  $X_{\lambda}(x)T_{\lambda}(t)$ . Pelo princípio de sobreposição são também soluções combinações lineares (finitas)

$$u(x, t) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} X_{\lambda}(x) T_{\lambda}(t),$$

com  $c_{\lambda} \in \mathbb{R}$ .



- Determine, se possível, soluções separáveis das seguintes EDPs.

$$\begin{array}{lll} u_x + u_y = 0 & tu_{xx} + u_t = 0 & u_t = 2u_x \\ u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0 & u_{xx} + u_{xy} + u_y = 0 & u_{tx} = u_x \\ u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 & yu_{xx} + xu_{yy} + xyu_{zz} = 0 & u_{tx} = 0 \end{array}$$

3. (corda vibrante e harmônicas) As pequenas vibrações transversais de uma corda de comprimento  $\ell$ , tensão  $k$  e densidade linear  $\rho$  são modeladas pela equação de onda

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0} \quad (8.1)$$

com condições de fronteira  $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ , onde  $u(x, t)$  denota o deslocamento transversal da corda na posição  $x \in [0, \ell]$  e no tempo  $t$ , e  $c = \sqrt{k/\rho}$ . Para ter fórmulas simples, consideramos  $\ell = \pi$  (que corresponde a uma mudança de variável  $x \mapsto x' = \pi x/\ell$ )

O produto  $u(x, t) = X(x)T(t)$  é uma solução “separável” de (8.1) se  $XT'' = c^2X''T$ , e portanto se existe uma constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$X'' = \lambda X \quad \text{e} \quad T'' = \lambda c^2 T$$

As únicas soluções não triviais do problema de Sturm-Liouville  $X'' = \lambda X$  no intervalo  $[0, \pi]$  com condições de fronteira nulas  $X(0) = X(\pi) = 0$  são proporcionais a  $X_n(x) = \sin(nx)$  e têm valores próprios  $\lambda_n = -n^2$ , com  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Para cada um destes valores de  $n$ ,  $T_n$  é solução da equação do oscilador harmônico  $T_n'' = -n^2 c^2 T_n$  de frequência  $nc$ . As soluções separáveis do problema da corda vibrante são portanto as *ondas estacionárias*

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left( a_n \cos(nct) + b_n \sin(nct) \right) \sin(nx) \\ &= A_n \sin(nct + \tau_n) \sin(nx) \end{aligned}$$

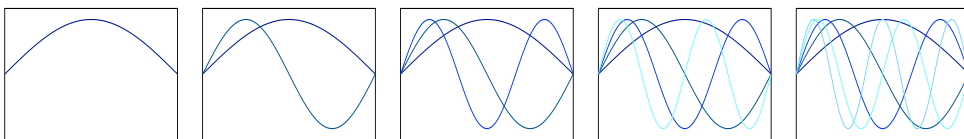
com  $n = 1, 2, 3, \dots$ , onde os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ , ou a amplitude  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ , e a fase  $\tau_n = \arctan(a_n/b_n)$ , são constantes arbitrárias (que dependem das condições iniciais,  $u_n(x, 0)$  e  $(\partial u_n/\partial t)(x, 0)$ ). A linearidade da equação de ondas implica o *princípio de sobreposição*: toda sobreposição de soluções ainda é uma solução. Em particular, se as condições iniciais são sobreposições finitas de harmônicas

$$u(x, 0) = \sum_n a_n \sin(nx) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_n b_n \sin(nx),$$

então a solução é

$$u(x, t) = \sum_n \left( a_n \cos(nct) + \frac{b_n}{nc} \sin(nct) \right) \sin(2\pi x/\ell_n)$$

(a unicidade vem do teorema de unicidade).



Primeiras 5 harmônicas de uma corda vibrante.

No caso geral em que o comprimento é  $\ell$ , as ondas estacionárias são

$$u_n(x, t) = A_n \sin(2\pi\nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x/\ell_n), \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots$$

onde as frequências próprias e os comprimentos de onda são

$$\nu_n := n \frac{c}{2\ell} \quad \text{e} \quad \ell_n := \frac{2\ell}{n},$$

com  $n = 1, 2, 3, \dots$ , respetivamente. A primeira frequência,  $\nu_1 = c/\ell_1$ , é dita *som* (ou *tom*, ou *modo*) *fundamental*, e as outras,  $\nu_n = n\nu_1 = c/\ell_n$ , com  $n = 2, 3, 4, \dots$ , são ditas *n-ésimas harmónicas* (ou *overtones*) da corda.

Por exemplo, se a fundamental é o  $A_4$  de 440 Hz (é o caso da segunda corda de um violino), então a segunda harmónica é o  $A_5$  de 880 Hz, a terceira está próxima do  $E_6$  de 1318.5 Hz, a quarta é o  $A_6$  de 1760 Hz, a quinta está próxima do  $C\sharp_7$  de 2217.5 Hz, a sexta está próxima do  $E_7$  de 2637 Hz, a sétima está próxima do  $G_7$  de 3136 Hz, ... Em particular, as primeiras harmónicas contêm a “fundamental” A, a “quinta justa” E a “terça maior”  $C\sharp$ , as três notas (“tríade maior”) do “acorde maior”! <sup>8</sup>

- Mostre que a energia

$$E := \frac{1}{2} \int_0^\ell \left( \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + k \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dx$$

é uma constante do movimento, ou seja, que  $\frac{d}{dt}E = 0$  (calcule a derivada e integre por partes).

- Mostre que a energia de uma onda estacionária

$$u_n(x, t) = A_n \sin(2\pi\nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x/\ell_n)$$

é dada por

$$E_n = \pi^2 M A_n^2 \nu_n^2,$$

onde  $M = \rho\ell$  é a massa da corda.

- Determine as vibrações de uma corda de comprimento  $\ell = \pi$  dadas as condições iniciais

$$u(x, 0) = \sin(3x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2 \sin(4x),$$

ou

$$u(x, 0) = 3 \sin(x) - \sin(2x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin(3x).$$

- A primeira corda de um violino, que tem comprimento 325 mm e costuma ser afinada com uma tensão de 70 N (ou seja,  $\simeq 7.1$  Kg), vibra com frequências 660 Hz, 1320 Hz, 1980 Hz, ... Determine a densidade linear e o peso da corda. O que deve fazer um violinista para obter o Lá5 de 880 Hz com esta corda?

#### 4. (vibrações amortecidas) Considere a equação da corda vibrante “amortecida”

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

em  $0 \leq x \leq \pi$ , onde  $\alpha > 0$  é um coeficiente de atrito, com condições de fronteira  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ .

- Mostre que a conjectura  $u_n(x, t) = q_n(t) \sin(nx)$  implica que  $q_n(t)$  satisfaz a EDO

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n + 2\alpha \dot{q}_n = 0,$$

com frequência  $\omega_n^2 = (cn)^2$ .

- Deduza as soluções separáveis do problema com atrito pequeno.

5. (condução de calor com temperatura constante na fronteira) A condução de calor num fio condutor de comprimento  $\pi$  (para ter fórmulas simples; se o comprimento for  $\ell$ , basta fazer a mudança de variável  $x \mapsto x' = \pi x/\ell$ ) e difusividade térmica  $\beta > 0$  é modelada pela equação de calor

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0} \quad (8.2)$$

onde  $u(x, t)$  é a temperatura na posição  $x$  e no instante  $t$ . Colocamos o problema de resolver o problema com condições de fronteira constantes,  $u(0, t) = a$  e  $u(\pi, t) = b$  para todos os tempos  $t \geq 0$ . A função

$$w(x, t) := a + \frac{b-a}{\pi}x$$

é uma solução estacionária, i.e. independente do tempo (o limite esperado do perfil de temperatura quando  $t \rightarrow \infty$ ). Então a solução da equação com condições de fronteira constantes  $u(0, t) = a$  e  $u(\pi, t) = b$  é igual a

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t),$$

onde  $v(x, t)$  é a solução da equação com condições de fronteira nulas  $v(0, t) = v(\pi, t) = 0$ .

Um cálculo análogo ao da corda vibrante mostra que as soluções separáveis da equação de calor (13.1) com condições de fronteira nulas,  $v(0, t) = 0$  e  $v(\pi, t) = 0$ , são (proporcionais a) os *modos*

$$v_n(x, t) = e^{-\beta n^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right)$$

com  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Pelo princípio de sobreposição, uma sobreposição finita de modos

$$v(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n e^{-\beta n^2 t} \sin(nx)$$

é uma solução da equação com condições de fronteira nulas  $v(0, t) = 0$  e  $v(\ell, t) = 0$  e condição inicial

$$v(x, 0) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(nx)$$

É importante observar que o limite de  $v(x, t)$  quando  $t \rightarrow \infty$  é a função identicamente nula, e portanto o limite de  $u(x, t)$  é a solução estacionária  $w(x, t)$ , como esperado.

- Um fio condutor de comprimento 1m e difusividade térmica  $10^{-2} \text{cm}^2/\text{s}$  é posto em contacto térmico, nos dois extremos, com dois reservatórios mantidos a temperatura constante de  $0^\circ\text{C}$ . Sabendo que o perfil inicial da temperatura do condutor é

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{1\text{m}}x\right) \times 60^\circ\text{C},$$

quanto tempo é necessário esperar para que nenhuma parte do condutor tenha temperatura superior a  $4^\circ\text{C}$ ? O que acontece para grandes valores do tempo?

E se os dois extremos do condutor forem mantidos a temperaturas constantes de  $0^\circ\text{C}$  e  $100^\circ\text{C}$ , respectivamente, qual o perfil de temperatura do condutor passado um tempo grande?

- Determine as soluções da equação de calor num condutor de comprimento  $\pi$  com condições de fronteira nulas,  $u(0, t) = 0$  e  $u(\pi, t) = 0$ , e condição inicial

$$u(x, 0) = \sin(x) + 3 \sin(2x),$$

ou

$$u(x, 0) = \pi \sin(7x) - \sin(5x).$$

<sup>8</sup>To learn more about music, you may want to visit <http://www.phys.unsw.edu.au/music/>

6. (condução de calor num condutor isolado) A condução de calor num fio condutor termicamente isolado de comprimento  $\pi$  e difusividade térmica  $\beta > 0$  é modelada pela equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

em  $0 \leq x \leq \pi$ , com condições de fronteira  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$  e  $\frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0$  (o fluxo é proporcional ao gradiente de temperatura). As soluções separáveis são os modos

$$u_n(x, t) = e^{-\beta n^2 t} \cos(nx)$$

com  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Pelo princípio de sobreposição, uma sobreposição finita de modos

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\beta n^2 t} \cos(nx)$$

é uma solução com condição inicial

$$u(x, 0) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx).$$

O limite de  $u(x, t)$  quando  $t \rightarrow \infty$  é o coeficiente  $a_0$ , que é a média dos valores iniciais

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x, 0) dx$$

(pois os  $\cos(nx)$ , com  $n \geq 1$ , têm média nula em  $[0, \pi]$ ).

- Mostre que o “calor”

$$Q(t) := C \int_0^\pi u(x, t) dx,$$

onde  $C = mc$  é a capacidade térmica do condutor (o produto da massa  $m$  e o calor específico  $c$ ) é constante, ou seja, que  $\frac{d}{dt} Q(t) = 0$ .

- Determine as soluções da equação de calor num condutor isolado de comprimento  $\pi$  com condição inicial

$$u(x, 0) = \cos(x) + 3 \cos(2x),$$

ou

$$u(x, 0) = 3 - \cos(5x).$$

7. (condução de calor num condutor circular) Também podemos considerar um condutor isolado circular, por exemplo uma circunferência de comprimento  $2\pi$  (a circunferência unitária  $\mathbb{S} = \{e^{ix}, x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ ). Neste caso, não há fronteira, e de consequência não há condições de fronteira, mas condições de periodicidade ( $u(0, t) = u(2\pi, t)$  para todos os tempos  $t \geq 0$ ). Então as soluções separáveis da equação de calor (13.1) são

$$u_n(x, t) = e^{-\beta n^2 t} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

com  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Pelo princípio de sobreposição, uma sobreposição finita de modos

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} e^{-\beta n^2 t} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

é uma solução com condição inicial

$$u(x, 0) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

8. (calor com dispersão) Considere a equação de calor com dispersão

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u$$

no intervalo  $0 \leq x \leq \ell$  com condições de fronteira  $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$  para todos os  $t \geq 0$ .

- Verifique que a substituição  $v(x, t) := e^{-t} u(x, t)$  transforma a equação acima na equação

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0.$$

- Determine as soluções separáveis do problema.

9. (ondas e calor no intervalo infinito) Determine soluções separáveis e limitadas das equações de onda e de calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

com  $x \in \mathbb{R}$ .

10. (equação de Schrödinger livre) A “função de onda”  $\psi(\mathbf{x}, t)$  de uma partícula livre não-relativística satisfaz a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi,$$

onde  $m$  é a massa da partícula e  $\hbar$  é a constante de Planck reduzida.

- Determine soluções separáveis no intervalo  $x \in [0, \ell] \subset \mathbb{R}$ , com condições de fronteira nulas,  $\psi(0, t) = \psi(\ell, t) = 0$ .
- Mostre que as soluções separáveis e limitadas na reta real são proporcionais a

$$\psi_E(x, t) = e^{-iEt/\hbar} e^{ipx/\hbar},$$

onde  $E \geq 0$  e  $p = \sqrt{2mE}$ .

- Verifique que as ondas planas

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A e^{i(\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle - \omega t)}$$

são soluções separáveis da equação de Schrödinger em  $\mathbb{R}^3$  se a frequência  $\omega$  e o número de onda  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  satisfazem a relação de dispersão  $\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m} \|\boldsymbol{\xi}\|^2$ .

11. (equação de Klein-Gordon) A “função de onda”  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , com  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  e  $t \in \mathbb{R}$ , de uma partícula livre relativística de massa própria  $m$  satisfaz a equação de Dirac, e portanto a equação de Klein-Gordon (em unidades de Planck<sup>9</sup>)

$$-\psi_{tt} + \Delta \psi = m^2 \psi.$$

- Verifique que as ondas planas

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A e^{i(\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle - \omega t)}$$

são soluções separáveis da equação de Klein-Gordon em  $\mathbb{R}^3$  se a frequência  $\omega$  e o número de onda  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  satisfazem a relação de dispersão  $\omega^2 - \|\boldsymbol{\xi}\|^2 = m^2$ .

12. (o problema de Fourier) Moral: sabemos resolver o problema da corda vibrante ou os problemas da condução de calor quando as condições iniciais são sobreposições (finitas) de ondas estacionárias ou modos. Isto levanta o problema de decidir quais funções periódicas  $f(x)$  podem ser representadas, ou pelo menos aproximadas com precisão arbitrária, como combinações lineares de senos e/ou cossenos com frequências que são múltiplo inteiros do inverso do período de  $f$ . Em termos mais abstratos, o problema é decidir quando e em que sentido uma função  $f(x)$ , periódica de período  $2\pi$ , pode ser representada como

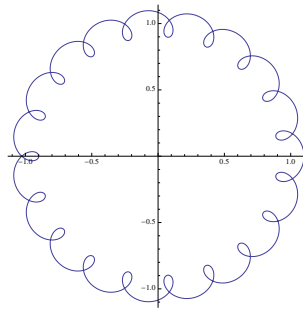
$$f(x) = \sum_n c_n e^{i2\pi n x}$$

<sup>9</sup> $c = 1, \hbar = 1, \dots$

## 9 Séries de Fourier

1. **(epiciclos e deferentes)** A ideia de Aristóteles e Platão, de que “todos os movimentos são combinações de movimentos circulares uniformes” está na base dos calendários calculados por Iparco e Ptolomeu, e transmitidos pelos árabes no *Almagesto*. Nestas cosmologias, cada corpo celeste, estrelas fixas ou errantes, descreve uma circunferência, dita *epiciclo*, à volta de uma circunferência, que por sua vez descreve uma circunferência à volta de uma circunferência, . . . , que por sua vez descreve uma circunferência à volta de uma circunferência inicial, dita *deferente*, centrada na Terra. Até o sistema de Copérnico funciona assim: a única novidade, que também não é uma novidade porque os próprios gregos consideraram esta possibilidade, é que o centro do deferente é colocado no Sol, ideia que pareceu simplificar muito o modelo.

24 nov 2014



2. **(aproximação de funções periódicas por polinômios trigonométricos)** A intuição subjacente é que todo movimento periódico planar pode ser aproximado com precisão arbitrária por uma sobreposição finita de movimentos circulares uniformes.<sup>10</sup> Este é o conteúdo da Análise de Fourier. Um polinômio trigonométrico (complexo) de grau  $\leq N$  definido no círculo  $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  (ou seja, periódico de período  $2\pi$ ) é uma sobreposição finita

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

de (ondas planas) harmônicas  $e_n(x) := e^{inx}$ , com coeficientes  $c_n \in \mathbb{C}$ . Se  $c_n = \overline{c_{-n}}$  para todos os  $n$ , então o polinômio é real, e pode ser representado como soma de senos e cossenos. O problema é o de determinar, fixado um grau  $N$ , o polinômio trigonométrico que melhor aproxima uma função periódica  $f(t)$  (de período  $2\pi$ ). A ideia de Bessel (1828) é escolher os coeficientes  $c_k$ 's usando o *princípio dos mínimos quadrados*, ou seja, procurando minimizar a “soma dos quadrados das distâncias” entre  $f(t)$  e a sobreposição  $v(t)$ , o integral

$$\text{dist}(f, v)^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - v(t)|^2 dt.$$

3. **(geometria do espaço das funções de quadrado integrável)** O problema de minimização de Bessel admite uma interpretação geométrica. Seja  $\mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  o espaço vetorial complexo das funções Riemann-integráveis  $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  definidas na circunferência  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \approx (-\pi, \pi]$  (ou, equivalentemente, funções definidas na reta real e periódicas de período  $2\pi$ ) tais que  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$  (i.e. de quadrado integrável), munido do *produto interno* e da *norma*  $L^2$ , definidos por

$$\langle f, g \rangle_2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \quad \text{e} \quad \|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle_2}$$

respetivamente. Apesar do nome, esta norma não é estritamente positiva, pois pode acontecer que  $\|f\|_2 = 0$  para funções  $f$  que não são identicamente nulas (por exemplo a função característica dos racionais). Os matemáticos dizem que este é um espaço *pré-Hilbertiano*. O produto interno permite definir a ortogonalidade, e portanto enunciar o teorema de Pitágoras. O produto interno e a norma  $L^2$  também satisfazem a

<sup>10</sup>G. Gallavotti, Quasi periodic motions from Hipparchus to Kolmogorov, *Rendiconti Lincei - Matematica e Applicazioni*, Series 9, Band 12, No. 2 (2001), 125-152 (<http://arxiv.org/abs/chao-dyn/9907004>).

**Teorema 9.1** (desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Se  $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ , então*

$$|\langle f, g \rangle_2| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

*Demonstração.* Se  $\|f\|_2 = 0$  ou  $\|g\|_2 = 0$  a desigualdade é trivial. Nos outros casos, a desigualdade elementar  $|2ab| \leq |a|^2 + |b|^2$  implica que, se  $\lambda > 0$ ,

$$|f(x)\overline{g(x)}| \leq \frac{1}{2}(\lambda|f(x)|^2 + \lambda^{-1}|g(x)|^2),$$

e portanto, integrando, que

$$|\langle f, g \rangle_2| \leq \frac{1}{2}(\lambda\|f\|_2^2 + \lambda^{-1}\|g\|_2^2).$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz segue ao escolher  $\lambda = \|g\|_2/\|f\|_2$ .  $\square$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que a norma satisfaz a desigualdade do triângulo  $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ . Então o quociente  $\mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})/\sim$  pela relação de equivalência  $f \sim g$  se  $\|f - g\| = 0$  é um espaço euclidiano complexo (de dimensão infinita).

As harmônicas, ou ondas planas (ou caracteres, na linguagem dos matemáticos),

$$e_n(t) := e^{int}$$

com  $n \in \mathbb{Z}$ , formam um sistema ortonormado, pois  $\langle e_n, e_m \rangle_2 = 0$  se  $n \neq m$ , e  $\|e_n\|_2 = 1$ .

- Verifique as relações de ortogonalidade

$$\langle e_n, e_m \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

4. (**coeficientes de Fourier e desigualdade de Bessel**) Fixado um inteiro  $N > 0$ , seja  $V_N \approx \mathbb{C}^{2N+1}$  o subespaço de dimensão finita de  $\mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  gerado pelas  $e_n$ 's com  $|n| \leq N$ , cujos pontos são os “polinômios trigonométricos” de grau  $N$

$$v(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}.$$

Dada uma função  $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ , colocamos o problema de minimizar a sua distância  $\|f - v\|$  com os pontos  $v \in V_N$ . A intuição geométrica (nos espaços de dimensão finita) sugere que o mínimo, seja atingido quando  $v$  é igual ao polinômio trigonométrico  $S_N f = \sum_{|n| \leq N} c_n e_n$ , onde os coeficientes  $c_n$  são os produtos internos (i.e. as componentes)

$$c_n = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

chamados *coeficientes de Fourier* de  $f$  relativamente ao sistema ortonormado dos  $e_n$ 's. De fato, um cálculo elementar mostra que a diferença  $f - S_N f$  é ortogonal a  $V_N$  (sendo ortogonal a todas as harmônicas  $e_n \in V_N$ ), e portanto, se  $w \in V_N$  é qualquer outro ponto, pelo teorema de Pitágoras

$$\|f - w\|_2^2 = \|(f - S_N f) + (S_N f - w)\|_2^2 = \|f - S_N f\|_2^2 + \|S_N f - w\|_2^2 \geq \|f - S_N f\|_2^2.$$

Mais um cálculo elementar mostra que o quadrado da distância entre  $f$  e  $S_N f$  é

$$0 \leq \|f - S_N f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{|n| \leq N} |c_n|^2$$

Em particular, a série de termos não-negativos  $\sum_n |c_n|^2$  é limitada, logo convergente. No limite quando  $N \rightarrow \infty$  obtemos a

**Teorema 9.2** (desigualdade de Bessel). Se  $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  e  $c_n = \langle f, e_n \rangle_2$  são os seus coeficientes de Fourier, então

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \leq \|f\|_2^2$$

5. (geometria do espaço  $\ell^2(\mathbb{Z})$ ) Os coeficientes de Fourier de uma função integrável são sucessões  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  tais que  $\sum_n |c_n|^2 < \infty$ . O espaço de todas estas sucessões é chamado  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , e pode ser munido de um produto interno

$$\langle c, d \rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \overline{d_n}$$

que induz a norma

$$\|c\| := \sqrt{\langle c, c \rangle} = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \right)^{1/2}$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz no espaço  $\ell^2(\mathbb{Z})$  é

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \overline{d_n} \right| \leq \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |d_n|^2 \right)^{1/2}$$

Portanto a “transformada de Fourier”, o operador  $\mathcal{F} : f \mapsto (c_n)$ , que associa a cada função integrável na circunferência a sucessão dos seus coeficientes de Fourier, envia  $\mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  em  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . A desigualdade de Bessel diz que este operador não dilata as normas.

6. (séries de Fourier) Seja  $f(x)$  é uma função integrável em  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , ou seja, uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periódica de período  $2\pi$ , e portanto determinada pelos seus valores no intervalo  $(-\pi, \pi]$ . A série de Fourier (complexa) de  $f(x)$  é a série formal

26 nov 2014

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

(o símbolo “ $\sim$ ” é apenas uma notação para dizer que a série à direita, que pode não ser convergente!, e a série de Fourier da função à esquerda!), onde os coeficientes de Fourier (complexos) de  $f$  são os números complexos

$$c_n = \widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (9.1)$$

Em particular, o coeficiente  $c_0$  é a média de  $f$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$  (ou em qualquer outro intervalo de comprimento  $2\pi$ ).

As “somadas parciais da série de Fourier” são os polinómios trigonométricos

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}.$$

Usando a fórmula de Euler, a série de Fourier pode ser representada como uma série de senos e cosenos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

onde  $a_0/2 = c_0$ , e  $a_n = c_n + c_{-n}$  e  $b_n = i(c_n - c_{-n})$  se  $n \geq 1$ , ou seja,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$



É evidente que se  $f$  tem valores reais então também os seus coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são reais.

Se  $f(x)$  é par, então  $c_n = c_{-n}$ , logo  $b_n = 0$ , para todos os  $n \geq 1$ , e a série de Fourier de  $f$  é uma série de cossenos  $a_0/2 + \sum_n a_n \cos(nx)$  com coeficientes

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx.$$

Se  $f(x)$  é ímpar, então  $c_n = -c_{-n}$ , logo  $a_n = 0$ , para todos os  $n \geq 0$ , e a série de Fourier de  $f$  é uma série de senos  $\sum_n a_n \sin(nx)$  com coeficientes

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx.$$

- Determine as séries de Fourier das seguintes funções periódicas de período  $2\pi$  definidas, no intervalo  $[-\pi, \pi]$  por (as soluções estão no formulário!)

$$f(\theta) = \theta, \quad f(\theta) = |\theta|, \quad f(\theta) = \theta^2,$$

$$\Theta(\theta) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \theta < \pi \\ 0 & \text{se } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}, \quad 2\Theta(\theta) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \theta < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}.$$

$$Z(x) := \begin{cases} \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ x & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -\pi - x & \text{se } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Mostre que a série de Fourier complexa da função *sawtooth*  $S(\theta)$ , periódica de período  $2\pi$  e definida por

$$S(\theta) := \begin{cases} \pi - \theta & \text{se } 0 \leq \theta < \pi \\ -\pi - \theta & \text{se } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}$$

no intervalo  $-\pi \leq \theta < \pi$ , é

$$S(\theta) \sim \frac{1}{i} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{in\theta}}{n} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin(n\theta).$$

- Mostre que a série de Fourier complexa da função *square wave*  $Q(\theta)$ , periódica de período  $2\pi$  e definida por

$$Q(x) := \begin{cases} +1 & \text{se } |x| < \pi/2 \\ -1 & \text{se } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

no intervalo  $-\pi \leq \theta < \pi$ , é

$$Q(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} e^{-inx} = \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) - \frac{1}{3} \cos(3x) + \frac{1}{5} \cos(5x) - \dots \right).$$

7. (séries de Fourier e séries de Laurent) Seja  $g(z)$  é uma função holomorfa numa região  $\Omega \subset \mathbb{C}$  que contém a circunferência unitária  $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |z| = 1\}$ . A sua expansão em série de Laurent centrada em  $p = 0$ ,

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

pode ser escrita, nos pontos  $z = e^{i\theta} \in \mathbb{S}$  (i.e. com  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ), como

$$g(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Os “coeficientes”  $c_n$  da série de Laurent de  $g(z)$  são portanto os coeficientes de Fourier da função  $f(\theta) := g(e^{i\theta})$ , periódica de período  $2\pi$ .

8. (fórmulas para séries de Fourier num intervalo genérico) Seja  $f(x)$  é uma função integrável em  $\mathbb{R}/2\ell\mathbb{Z}$ , ou seja, uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periódica de período  $2\ell$ , e portanto determinada pelos seus valores no intervalo  $[-\ell, \ell]$ . A *série de Fourier (real)* de  $f(x)$  é

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \right)$$

onde os *coeficientes de Fourier* de  $f$  são definidos pelos integrais

$$a_n := \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx \quad \text{e} \quad b_n := \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx.$$

Também é útil, na resolução de problemas como a corda vibrante ou a propagação de calor, desenvolver funções, definidas num intervalo  $[0, \ell]$ , em séries de apenas senos ou apenas cosenos.

A *série de Fourier de senos* da função  $f(x)$ , definida no intervalo  $0 \leq x \leq \ell$ , é a série de Fourier da extensão ímpar  $2\ell$ -periódica de  $f$ , ou seja,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \quad \text{onde} \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx.$$

A *série de Fourier de cosenos* da função  $f(x)$ , definida no intervalo  $0 \leq x \leq \ell$ , é a série de Fourier da extensão par  $2\ell$ -periódica de  $f$ , ou seja,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right), \quad \text{onde} \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx.$$

- Determine as séries de Fourier de senos (ou seja, da extensão ímpar e  $2\pi$ -periódica) das seguintes funções definidas no intervalo  $0 \leq \theta < \pi$  (algumas soluções estão no formulário!):

$$1 \quad 1 - \cos(2\theta) \quad f(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{se } 0 \leq \theta < \pi/2 \\ \pi - \theta & \text{se } \pi/2 \leq \theta < \pi \end{cases}$$

- Determine as séries de Fourier de cosenos (ou seja, da extensão par e  $2\pi$ -periódica) das seguintes funções definidas no intervalo  $0 \leq \theta < \pi$  (algumas soluções estão no formulário!):

$$1 \quad \sin(2\theta) \quad \pi - \theta$$

9. (derivadas e decaimento dos coeficientes) A convergência da série de Fourier de uma função  $f(x)$  depende do decaimento dos coeficientes  $c_n = \hat{f}(n)$ , e o decaimento dos coeficientes depende da regularidade da função  $f(x)$ .

As noções convenientes de “regularidade” neste contexto são as seguintes. Uma função  $f$ , definida num intervalo  $[a, b]$ , é *seccionalmente contínua* se é contínua em todos os pontos do intervalo exceto num número finito de pontos  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ , onde admite limites laterais  $f(x^\pm) = \lim_{x \rightarrow x_k^\pm} f(x)$  finitos. Por exemplo, uma função seccionalmente contínua é integrável. Uma função  $f$  é *seccionalmente regular* se  $f$  e  $f'$  são seccionalmente contínuas.

A primeira observação trivial é que se a função é limitada,  $|f(x)| \leq M$ , então os coeficientes de Fourier também são limitados,  $|c_n| \leq M$ . Se  $f$  é contínua, a intuição sugere que os coeficientes  $c_n$  com  $|n|$  grande sejam pequenos. A ideia é que as harmónicas  $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$  com  $|n| \gg 1$  oscilam rapidamente em intervalos pequenos, onde  $f$  não varia muito por ser contínua, e portanto acontecem cancelações entre termos positivos e termos negativos.

**Teorema 9.3** (lema de Riemann-Lebesgue). *Se  $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  é integrável (por exemplo, seccionalmente contínua), então os seus coeficientes de Fourier  $c_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \pm\infty$ .*

*Demonstração.* A desigualdade de Bessel diz que se  $f$  é uma função integrável então a série  $\sum_n |c_n|^2$  é convergente. Mas os termos de uma série convergentes decrescem para 0 quando  $n \rightarrow \pm\infty$ .  $\square$

O decaimento é mais rápido quando  $f$  admite derivadas.

**Teorema 9.4.** *Se a  $k$ -ésima derivada de  $f$  existe e é integrável, por exemplo se  $f$  é de classe  $C^k$ , então os coeficientes de Fourier da  $k$ -ésima derivada de  $f$  são*

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \widehat{f}(n)$$

*Demonstração.* Se derivada  $f'$  existe e é integrável, então os coeficientes de Fourier da derivada são

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} [f(x)e^{-inx}]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (-in)e^{-inx} dx \\ &= in \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = in \widehat{f}(n) \end{aligned}$$

O teorema segue por indução.  $\square$

Esta relação simples entre coeficientes de Fourier e derivadas é a razão principal da utilidade das séries de Fourier na análise das equações diferenciais. Diz é que a “transformada de Fourier”, o operador  $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ , que envia uma função  $f(x)$  na sucessão  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  dos seus coeficientes de Fourier, transforma derivadas  $f \mapsto f'$  em produtos pontuais  $c_n \mapsto in c_n$ . De consequência, no espaço dos coeficientes de Fourier, uma equação diferencial é uma equação algébrica!

O lema de Riemann-Lebesgue, ou seja, a desigualdade de Bessel, aplicado à  $k$ -ésima derivada, então implica que

**Teorema 9.5.** *Os coeficientes de Fourier de uma função de classe  $C^k$  decrescem mais rapidamente de  $|n|^{-k}$ , ou seja,*

$$\widehat{f}(n) = o(|n|^{-k})$$

quando  $n \rightarrow \pm\infty$ .

De consequência, os coeficientes de Fourier de uma função de classe  $C^\infty$  decrescem mais rapidamente do inverso de qualquer potência  $|n|^k$ .

Em particular,

**Teorema 9.6.** *A série de Fourier de uma função seccionalmente regular, por exemplo, de classe  $C^1$ , é absolutamente e uniformemente convergente.*

*Demonstração.* Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, e depois pela desigualdade de Bessel, a série dos módulos é limitada por

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| = |c_0| + \sum_{n \neq 0} \frac{|c'_n|}{|n|} \leq |c_0| + \left( \sum_{n \neq 0} 1/|n|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n \neq 0} |c'_n|^2 \right)^{1/2} \leq |c_0| + C \|f'\|_2,$$

onde os  $c'_n$  são os coeficientes de Fourier de  $f'$ , e  $C = 2 \sum_1^\infty 1/n^2 < \infty$ .  $\square$

Logo a série de Fourier converge uniformemente e a sua soma  $\sum_n c_n e^{inx}$  é uma função contínua. Esta soma tem grandes probabilidades de ser a própria  $f$ .

- Determine a série de Fourier de uma função periódica de período  $2\pi$  (i.e uma função  $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ) e de classe  $\mathcal{C}^1$  que resolva a “equação cohomológica”

$$f' = 0$$

ou a equação de Laplace  $f'' = 0$ .

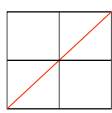
## Séries de Fourier em $[-\pi, \pi]$

	função $\sim$ série de Fourier ( $x \in [-\pi, \pi]$ )	coeficientes de Fourier ( $n \in \mathbb{Z}$ )
complexa	$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$	$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx$
real	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$	$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ $b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$

## Algumas séries de Fourier em $[-\pi, \pi]$

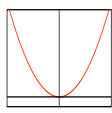
função em  $[-\pi, \pi]$

$\sim$  série de Fourier



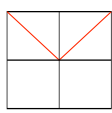
$x$

$$\sim 2 \left( \sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{4} \sin(4x) + \dots \right)$$



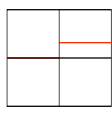
$x^2$

$$\sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \cos(x) - \frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{9} \cos(3x) - \frac{1}{16} \cos(4x) + \dots \right)$$



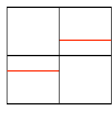
$|x|$

$$\sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + \frac{1}{49} \cos(7x) + \dots \right)$$



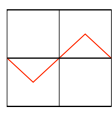
$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots \right)$$



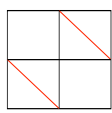
$$2\Theta(x) - 1 := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\sim \frac{4}{\pi} \left( \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots \right)$$



$$Z(x) := \begin{cases} \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ x & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -\pi - x & \text{se } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sim \frac{4}{\pi} \left( \sin(x) - \frac{1}{9} \sin(3x) + \frac{1}{25} \sin(5x) - \frac{1}{49} \sin(7x) + \dots \right)$$



$$S(x) := \begin{cases} \pi - x & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ -\pi - x & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\sim 2 \left( \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(4x) + \dots \right)$$

## 10 Convergência das séries de Fourier

1. (**produto de convolução**) O produto de convolução entre as funções integráveis  $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ , pensadas como funções periódicas de período  $2\pi$  na reta, é a função

1 dez 2014

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x - y) dy.$$

também periódica de período  $2\pi$ . Um interpretação é que o valor de  $f * g$  num ponto  $x$  é uma “média” pesada dos valores  $f(y)$ , os pesos sendo os valores  $g(x - y)$  da função  $g$ .

O produto de convolução é simétrico, i.e.  $f * g = g * f$ , e linear nas duas variáveis, ou seja, que  $f * (\lambda g) = \lambda(f * g)$  para todos os  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e que  $f * (g + h) = f * g + f * h$ . É também associativo, ou seja,  $(f * g) * h = f * (g * h)$ . As demonstrações são elementares.

Outro fenômeno importante é que o produto de convolução de duas funções integráveis é uma função contínua! Ou seja, a convolução melhora a regularidade das funções (mas a prova não é elementar).

**Teorema 10.1.** *Os coeficientes de Fourier de um produto de convolução são iguais aos produtos dos coeficientes de Fourier dos fatores, i.e.*

$$\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n)$$

*Demonstração.* Se  $f$  e  $g$  são contínuas

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x - y) dy \right) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x - y) e^{-in(x-y)} dx \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx \right) dy \\ &= \widehat{f}(n) \widehat{g}(n) \end{aligned}$$

O caso geral usa o seguinte teorema de aproximação: se  $f$  é uma função integrável e limitada por  $M$ , existe uma sucessão  $(f_k)$  de funções contínuas limitadas por  $M$  e tais que os integrais das diferenças  $|f - f_k|$  tendem para 0 quando  $k \rightarrow \infty$ . Os detalhes estão em [SS03I].  $\square$

2. (**convergência pontual das séries de Fourier**) Seja  $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função integrável e  $c_n$  os seus coeficientes de Fourier. As somas parciais da série de Fourier de  $f$  podem ser representadas como o produto de convolução

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{-N}^N c_n e^{inx} = \sum_{-N}^N \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left( \sum_{-N}^N e^{in(x-y)} \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x - y) dy \end{aligned} \tag{10.1}$$

da própria função com o núcleo de Dirichlet, definido por

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^x - 1} \tag{10.2}$$

**Teorema 10.2.** *Se  $f(x)$  é uma função seccionalmente regular, então as somas parciais  $S_N f(x)$  da sua série de Fourier convergem em cada ponto  $x$  para o valor médio dos limites laterais  $f(x^\pm)$ , ou seja,*

$$S_N f(x) \rightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

quando  $N \rightarrow \infty$ . Em particular, convergem para  $f(x)$  nos pontos onde  $f$  é contínua.

*Demonstração.* O núcleo de Dirichlet pode ser representado como

$$D_N(x) = 1 + \frac{1}{2} \sum_1^N \cos(nx)$$

e portanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_N(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi D_N(x) dx = \frac{1}{2} \quad (10.3)$$

Usando (10.1) e as (10.3), e depois (10.2), podemos representar a diferença entre as somas parciais  $S_N f(x)$  e o valor médio  $(f(x^+) + f(x^-))/2$  como um integral

$$\begin{aligned} S_N f(x) - \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (f(x+y) - f(x^-)) D_N(y) dy + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x+y) - f(x^+)) D_N(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi F(x, y) \left( e^{i(N+1)y} - e^{iNy} \right) dy \end{aligned}$$

onde  $F$  é a função definida por

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x+y) - f(x^-)}{e^{iy} - 1} & \text{se } -\pi < y < 0 \\ \frac{f(x+y) - f(x^+)}{e^{iy} - 1} & \text{se } 0 < y < \pi \end{cases}$$

Se  $f$  é seccionalmente regular, então  $F(x, y)$  admite limites laterais quando  $y \rightarrow 0^\pm$ , pela regra de l'Hôpital, e portanto é seccionalmente contínua. Então os integrais de  $F(x, y)$  vezes  $e^{iNy}$  convergem para zero quando  $N \rightarrow \infty$  pelo lema de Riemann-Lebesgue.  $\square$

Em particular, pelo teorema 9.6, a série de Fourier de uma função  $f(x)$  contínua e seccionalmente regular converge para  $f(x)$  na norma uniforme, ou seja,  $\|f - S_N f\|_\infty \rightarrow 0$  quando  $N \rightarrow \infty$ .

A hipótese no teorema 10.2 não é a melhor possível. Para a convergência no ponto  $x$  é suficiente que a função  $F(x, y)$ , definida na demonstração, seja integrável, em quanto função de  $y$ , numa vizinhança de  $y = 0$ . Esta é chamada “condição de Dini”.

Também é possível ler a regularidade de uma função no decaimento dos seus coeficientes de Fourier.

**Teorema 10.3.** *Se os coeficientes de Fourier  $c_n$  de uma função  $f$  decaem como*

$$\|c_n\| \leq C |n|^{-(k+\alpha)}$$

com  $\alpha > 1$ , uma constante  $C > 0$  e um natural  $k$ , então a função  $f$  é de classe  $C^k$ .

*Demonstração.* Para cada  $0 \leq k' \leq k$ , a série de Fourier  $\sum_n (in)^{k'} c_n e^{inx}$  é absolutamente e uniformemente convergentes, pois

$$\sum_n |n|^{k'} |c_n| \leq \sum_n |n|^\alpha < \infty$$

se  $\alpha > 1$ . A sua soma é uma função contínua, igual a  $k'$ -ésima derivada de  $f(x) = \sum_n c_n e^{inx}$ .  $\square$

- Verifique a fórmula (10.2) para o núcleo de Dirichlet (use as somas parciais da série geométrica), e deduza a expressão

$$D_N(x) = \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}$$

- Calcule as séries de Fourier de  $|x|$  em  $x=0$  e de  $x^2$  em  $x=\pi$ , e deduza as identidades

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

e

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. (**delta de Dirac e identidades aproximadas**) A “função” delta de Dirac em  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  é definida pela identidade formal

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \delta(x-y) dy = f(x),$$

se  $f(x)$  é uma função contínua. De facto,  $\delta$  não é uma função, mas uma “medida”, um funcional linear definido no espaço  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  das funções contínuas na circunferência, que associa à função  $f(x)$  o valor  $\langle \delta, f \rangle := f(0)$ . Pode ser definida/pensada como sendo um limite (no sentido das distribuições) de uma família de funções satisfazendo as propriedades codificadas na definição de “identidade aproximada”.

Uma *identidade aproximada* (ou *good kernels*) na circunferência  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  é uma sucessão  $(K_n)$  de funções integráveis  $K_n(x)$  de massa total unitária, i.e.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1, \quad (10.4)$$

uniformemente integráveis, i.e. tais que existe  $M > 0$  tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)| dx \leq M \quad (10.5)$$

para todos os  $n \in \mathbb{N}$  (esta condição é uma consequência de (10.4) se  $K_n(x) \geq 0$ ), e tais que, para cada  $\delta > 0$ , o integral

$$I_n(\delta) := \int_{|x| \geq \delta} |K_n(x)| dx \rightarrow 0 \quad (10.6)$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Teorema 10.4.** *Se  $f$  é uma função contínua e  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma identidade aproximada, então*

$$(f * K_n)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) K_n(y-x) dy \rightarrow f(x)$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$ . Pela continuidade uniforme de  $f$  (contínua e periódica), existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/M$  se  $|x-y| < \delta$ . Seja  $m = \sup_x |f(x)|$ . Usando (10.4),

$$\begin{aligned} f(x) - (f * K_n)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x+y)) K_n(y) dy \\ &= \int_{|y| < \delta} (f(x) - f(x+y)) K_n(y) dy + \int_{|x| \geq \delta} (f(x) - f(x+y)) K_n(y) dy \end{aligned}$$

O módulo do primeiro integral é limitado por  $\varepsilon$ , pela (10.5). O módulo do segundo integral é limitado por  $m I_n(\delta)$ , definido na (10.6). Como  $I_n(\delta) \rightarrow 0$ , existe  $\bar{n}$  tal que  $I_n(\delta) \leq \varepsilon/m$  se  $n \geq \bar{n}$ . De consequência, se  $n \geq \bar{n}$  a distância entre  $f(x)$  e  $(f * K_n)(x)$  é limitada por  $2\varepsilon$ .  $\square$



A delta de Dirac pode então ser interpretada/definida como o limite  $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$ , ou seja, pela seguinte identidade formal:  $f * \delta := \lim_{n \rightarrow \infty} f * K_n$ .

- Verifique que a família de funções definidas por  $K_n(x) = n/2$  se  $|x| \leq 1/n$  e  $K_n(x) = 0$  se  $|x| > 1/n$ , forma uma identidade aproximada.

4. (somas de Fejer e teorema de aproximação de Weierstrass) As somas de Cesàro de uma série  $\sum_n a_n$  são as médias aritméticas

$$S_n := \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$$

das somas parciais  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . A sucessão das  $S_n$  pode ser convergente também quando a série  $\sum a_n$  é divergente.

As somas de Cesàro da série de Fourier de uma função integrável  $f$  são chamadas *somas de Fejer*. Um cálculo mostra que são dadas pela convolução

$$\begin{aligned} F_N f(x) &:= \frac{1}{N} (S_0 f(x) + S_1 f(x) + S_2 f(x) + \dots + S_{N-1} f(x)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left( \frac{1}{N} \sum_1^N D_N(x-y) \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) F_N(x-y) dy \end{aligned}$$

da própria função com o núcleo de Fejer, definido por

$$F_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)} \quad (10.7)$$

Acontece que os núcleos de Fejer formam uma identidade aproximada. Portanto

**Teorema 10.5** (Fejer). *Se  $f(x)$  é contínua, então as somas de Fejer convergem uniformemente para  $f$ .*

O teorema de Fejer dá uma prova construtiva do teorema de aproximação de Weierstrass.

**Teorema 10.6** (Weierstrass). *Os polinômios trigonométricos são densos no espaço  $C^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  das funções contínuas  $f: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  munido da norma do sup.*

- Verifique a expressão (10.7) (calcule  $NF_N(x)$ ).
- Verifique que os núcleos de Fejer são uma identidade aproximada (para estimar os integrais  $\int_{|x|>\varepsilon}$ , use a desigualdade elementar  $\sin(x/2) \geq 2\varepsilon/\pi$  se  $\varepsilon < x \leq \pi$ ).

5. (convergência em média quadrática) Uma função integrável  $f: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  pode ser aproximada com precisão arbitrária na norma do sup por funções contínuas (ou até  $C^\infty$ ). Pelo teorema de Weierstrass 10.6, as funções contínuas podem ser aproximadas com precisão arbitrária na norma do sup por polinômios trigonométricos. Portanto, existe uma família  $(T_n)$  de polinômios trigonométricos tais que  $\|f - T_n\|_\infty \rightarrow 0$ . A convergência na norma do sup implica, sendo o comprimento da circunferência finito, a convergência na norma  $L^2$ . Pela (prova da) desigualdade de Bessel 9.2,  $\|f - S_N\|_2 \leq \|f - T_n\|_2$  se  $N$  é superior ou igual ao grau de  $T_n$ . Portanto,

**Teorema 10.7.** *A série de Fourier de uma função integrável converge para a própria função em média quadrática, ou seja,*

$$\|f - S_N f\|_2 \rightarrow 0$$

quando  $N \rightarrow \infty$ .

Em geral, sendo os produtos internos determinados pelas normas (usando as identidades de polarização), é usual enunciar este resultado na forma seguinte.

**Teorema 10.8** (teorema de Parseval). *Se  $f$  e  $g$  são funções integráveis na circunferência  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , e  $c_n = \langle f, e_n \rangle$  e  $d_n = \langle g, e_n \rangle$  são os seus coeficientes de Fourier, respetivamente, então*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \overline{d_n} = \langle f, g \rangle_2$$

Em particular, a desigualdade de Bessel é uma igualdade, dita “identidade de Parseval”

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \|f\|_2^2$$

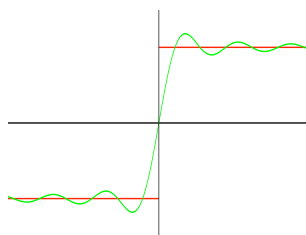
A identidade de Parseval é uma versão do teorema de Pitágoras em dimensão infinita. Do ponto de vista físico, é um teorema de conservação, chamado *teorema da energia de Rayleigh* (*Rayleigh energy theorem*).

O teorema de Parseval diz que a “transformada de Fourier”, o operador  $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$  que envia uma função integrável na sucessão dos seus coeficientes de Fourier, é um operador unitário de  $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  em  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

6. (**fenómeno de Gibbs**) Uma série de Fourier  $\sum_n c_n e^{inx}$  não pode ser convergente nos pontos de descontinuidade de  $f(x)$ . Se  $f$  tem um salto de amplitude  $\delta := |f(x^+) - f(x^-)|$  no ponto  $x$ , então os gráficos das somas parciais da série de Fourier convergem para um segmento vertical que excede o salto de aproximadamente

$$-\frac{\delta}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \simeq \frac{0.28}{\pi} \delta \simeq 0.09 \delta$$

em cada lado.



Soma parcial de grau 17 (verde) da série de Fourier da função  $2\Theta(x) - 1$  (vermelho), numa vizinhança da origem.

## 11 Aplicações das séries de Fourier às EDPs

1. (condução de calor com temperatura constante na fronteira) A solução formal do problema da condução de calor

3 dez 2014

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

no intervalo  $[0, \pi]$  com condições de fronteira nulas  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ , e com condição inicial

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

é dada pela série

$$u(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\beta n^2 t} \sin(nx).$$

- Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx).$$

- Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial

$$u(x, 0) = 1 \quad \text{se } 0 < x < \pi.$$

- Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial

$$u(x, 0) = x \quad \text{se } 0 < x < \pi.$$

- Determine a solução formal do problema com condições de fronteira  $u(0, t) = 0$  e  $u(\pi, t) = 200$ , e condição inicial

$$u(x, 0) = 100 \quad \text{se } 0 < x < \pi.$$

- Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial concentrada num ponto  $\beta \in (0, \pi)$ , ou seja,

$$u(x, 0) \sim \mu \cdot \delta(x - \beta).$$

- Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial concentrada numa vizinhança dum ponto  $\beta \in (0, \pi)$ , ou seja,

$$u(x, 0) = \begin{cases} \lambda & \text{se } |x - \beta| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \beta| > \varepsilon \end{cases},$$

com  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. Calcule o limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  mantendo constante o produto  $2\varepsilon\lambda = \mu$ , e compare com o exercício anterior.

2. (condução de calor num condutor isolado) A solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, \ell],$$

no intervalo  $[0, \pi]$  com fluxo nulo na fronteira (i.e. condutor isolado)  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ , e com condição inicial

$$u(x, 0) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

é dada pela série

$$u(x, t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\beta n^2 t} \cos(nx)$$

- Determine a solução formal do problema com condição inicial

$$u(x, 0) = x^2 .$$

- Determine a solução formal do problema com condição inicial

$$u(x, 0) = \sin(x) .$$

- Determine a solução formal do problema com condição inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} 10 & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ 20 & \text{se } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases} .$$

- Determine a solução formal do problema com condição inicial

$$u(x, 0) \simeq \begin{cases} 1 & \text{se } |x - \beta| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \beta| > \varepsilon \end{cases} ,$$

onde  $0 < \beta < \pi$  e  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno.

### 3. (corda vibrante) A solução formal do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

de comprimento  $\pi$ , i.e.  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ , com condições iniciais (deslocamento/perfil e velocidade)

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

é dada pela série

$$u(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos(cnt) + \frac{b_n}{cn} \sin(cnt) \right) \sin(nx)$$

- Determinar a solução formal do problema com condições iniciais

$$u(x, 0) = \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin(4x) - \sin(5x) .$$

- Determinar a solução formal do problema com condições iniciais (deslocamento inicial “triangular”)

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 .$$

- Determinar a solução formal do problema com condições iniciais

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1 .$$

- Determinar a solução formal do problema com condições iniciais (impulso inicial concentrado no ponto médio)

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \sim \delta(x - \pi/2) .$$

4. (**timbres**) Considere uma corda de um instrumento musical, de comprimento  $\ell$ , densidade linear  $\rho$  e afinada com tensão  $k$ . As pequenas vibrações são modeladas pela equação da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in [0, \ell], \quad u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \quad \forall t,$$

onde  $c = \sqrt{k/\rho}$ .

Ao tocar um cavaquinho, a corda é excitada com velocidade inicial desprezável e deslocamento inicial aproximadamente triangular, ou seja, da forma

$$u(x, 0) \simeq \begin{cases} h \frac{x}{\alpha} & \text{se } 0 \leq x < \alpha \\ \frac{h}{\ell - \alpha} (\ell - x) & \text{se } \alpha \leq x < \ell \end{cases}$$

onde  $0 < \alpha < \ell$  é o ponto onde dedilhamos a corda, e  $h$  é o máximo do deslocamento inicial.

Ao tocar um piano, a corda é excitada utilizando um martelo. Numa primeira aproximação, podemos imaginar que o deslocamento inicial é desprezável e que o martelo transmite à corda apenas um impulso instantâneo localizado num intervalo de comprimento pequeno  $2\varepsilon \ll \ell$  à volta de um ponto)  $0 < \beta < \ell$  da corda, e portando a velocidade inicial da corda é

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \simeq \begin{cases} v & \text{se } |x - \beta| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \beta| > \varepsilon \end{cases}$$

- Determine as vibrações, ou seja, as amplitudes das harmónicas excitadas, da corda do cavaquinho e da corda do piano.
- Calcule o limite das amplitudes da corda do piano quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  mantendo constante o impulso transferido  $p = v\varepsilon$ .
- Determine as energias  $E_n$  das  $n$ -ésimas harmónicas nos dois casos. Explique porque o som do piano é mais “cheio” do que o som do cavaquinho.

## 12 Transformada de Fourier

1. (transformada de Fourier de funções integráveis) A transformada de Fourier da função absolutamente integrável  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  (ou seja, tal que exista o integral impróprio  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ , por exemplo, uma função contínua que decai como  $|f(x)| \leq C/(1 + |x|^2)$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ ) é a função  $\mathcal{F}f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{C}$ , definida pelo integral impróprio

10 dez 2014

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \quad (12.1)$$

onde  $\mathbb{R}^* \approx \mathbb{R}$  é o espaço onde vive a “variável conjugada”  $\xi$  (o dual de Pontryagin do corpo dos reais, isomorfo ao próprio  $\mathbb{R}$ ). Uma notação tradicional é  $\mathcal{F}f = \hat{f}$ . Se a variável independente da função  $f(t)$  é um “tempo”  $t$ , então a variável conjugada  $\xi$  representa uma “frequência” (pois o produto deve ser adimensional). Uma definição alternativa usa a “frequência angular”  $\omega = 2\pi\xi$ , e é

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (12.2)$$

na notação dos engenheiros. Se a variável independente da função  $f(x)$  é uma “posição”  $x$ , então a variável conjugada  $\xi$  representa um “momento”  $p$  sobre uma unidade de “ação” (como, por exemplo, a constante de Planck  $h$  no contexto da mecânica quântica, assim que  $e^{2\pi i \xi x} = e^{ipx/\hbar}$ , onde  $\hbar = h/2\pi$ )

A transformada e Fourier é linear, ou seja,

$$\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}f + \mathcal{F}g \quad \text{and} \quad \mathcal{F}(\lambda f) = \lambda(\mathcal{F}f)$$

se  $f$  e  $g$  são funções integráveis e  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

A transformada de Fourier intercambia translações com modulações. A transformada de Fourier de uma translação  $(T_a f)(t) := f(t - a)$  no espaço dos tempos é uma modulação

$$\widehat{(T_a f)}(\xi) = e^{-2\pi i a \xi} \hat{f}(\xi)$$

no espaço das frequências. Vice-versa, a transformada de Fourier de uma modulação  $(M_b f)(t) := e^{2\pi i b t} f(t)$  no espaço dos tempos é uma translação

$$\widehat{(M_b f)}(\xi) = \hat{f}(\xi - b)$$

no espaço das frequências. Ou seja,

$$\boxed{\mathcal{F} \circ T_a = M_{-a} \circ \mathcal{F}} \quad \text{e} \quad \boxed{\mathcal{F} \circ M_b = T_b \circ \mathcal{F}} \quad (12.3)$$

A transformada de Fourier de uma homotetia  $(H_\lambda f)(t) = f(\lambda t)$  no espaço dos tempos, com  $\lambda > 0$ , é

$$\widehat{(H_\lambda f)}(\xi) = \lambda^{-1} \hat{f}(\xi/\lambda)$$

ou seja,

$$\boxed{\mathcal{F} \circ H_\lambda = \lambda^{-1} H_{\lambda^{-1}} \circ \mathcal{F}} \quad (12.4)$$

A transformada de Fourier da função complexa conjugada  $\bar{f}(t) := \overline{f(t)}$  é

$$\widehat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)} \quad (12.5)$$

- Calcule a transformada de Fourier da função característica do intervalo  $[-\ell, \ell]$ .
- Calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2} \quad \text{e} \quad f(x) = e^{-a|x|}.$$

2. **(transformada de Fourier no espaço de Schwartz)** O *espaço de Schwartz* (da reta real) é o espaço  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  das funções infinitamente diferenciáveis na reta real que decrescem, com todas as suas derivadas, mais rápido que o inverso de qualquer polinómio. Ou seja, o espaço das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tais que  $\|f\|_{n,m} < \infty$  para todos os  $n, m \in \mathbb{N}$ , onde as semi-normas  $\|\cdot\|_{n,m}$  são definidas por

$$\|f\|_{n,m} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n f^{(m)}(x)|$$

Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , então pertencem ao espaço de Schwartz, e em particular são integráveis, também todas as derivadas  $f^{(k)}(x)$  e os produtos  $p(x)f^k(x)$ , onde  $p \in \mathbb{C}[t]$  é um polinómio arbitrário.

A transformada de Fourier intercambia derivadas com multiplicações. O operador derivação é definido por  $(Df)(x) := f'(x)$ , e o operador multiplicação é definido por  $(Xf)(x) := x f(x)$ . Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , então

$$\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi) \quad \text{e} \quad \widehat{(-2\pi i x f)}(\xi) = \widehat{f'}(\xi)$$

Ou seja,

$$\boxed{\mathcal{F} \circ D = 2\pi i X \circ \mathcal{F}} \quad \text{e} \quad \boxed{-2\pi i \mathcal{F} \circ X = D \circ \mathcal{F}} \quad (12.6)$$

Em particular, a transformada de Fourier envia o espaço de Schwartz em si próprio, i.e. é um operador linear  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

O *produto de convolução* das funções  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  é a função  $(f * g)(x)$  definida por

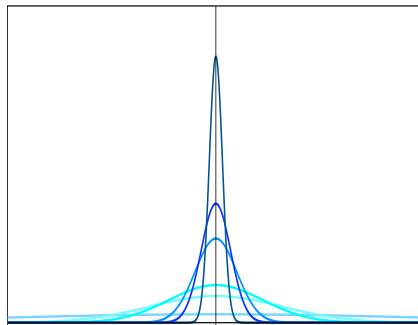
$$\boxed{(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy}$$

Se  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , então também  $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . O produto de convolução é simétrico e associativo.

**Teorema 12.1.** *A transformada de Fourier de um produto de convolução é o produto pontual das transformadas de Fourier dos fatores, ou seja,*

$$\boxed{\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)} \quad (12.7)$$

3. **(Gaussianas e identidades aproximadas)** As *gaussianas* são as função de Schwartz  $Ce^{-\gamma x^2}$ , onde  $C$  e  $\gamma$  são parâmetros reais positivos.



Gaussianas  $G_\tau$  com  $\tau = 1, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001$ .

Em particular, a gaussiana  $G(x) := e^{-\pi x^2}$  é “auto-dual”, ou seja é igual à sua transformada de Fourier:

$$\widehat{G}(\xi) = G(\xi)$$

Dado  $\tau > 0$ , seja  $G_\tau$  a gaussiana

$$G_\tau(x) := \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\pi x^2/\tau} \quad (12.8)$$

Um cálculo mostra que

$$\widehat{G_\tau}(\xi) = e^{-\pi\tau\xi^2}$$

A família das  $G_\tau$ 's forma uma “identidade aproximada” quando  $\tau \rightarrow 0$ , ou seja, é uma família de funções não-negativas com massa total unitária, i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_\tau(x) dx = 1, \quad (12.9)$$

e tais que, para cada  $\delta > 0$ , o integral

$$I_\tau(\delta) := \int_{|x| \geq \delta} G_\tau(x) dx \rightarrow 0 \quad (12.10)$$

quando  $\tau \rightarrow 0$ . Essencialmente a mesma prova do teorema 10.4 mostra que

**Teorema 12.2.** *Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e a família das  $G_\tau$  forma uma identidade aproximada quando  $\tau \rightarrow 0$  (ou seja, satisfaz (12.9) e (12.10)), então*

$$(f * G_\tau)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) G_\tau(y-x) dy \rightarrow f(x)$$

uniformemente em  $x$  quando  $\tau \rightarrow 0$ .

- Mostre que a Gaussiana  $g(x) = e^{-\pi x^2}$  é solução da equação diferencial

$$g' + (2\pi x)g = 0.$$

Observe que a transformada de Fourier da Gaussiana,  $G(\xi) := (\mathcal{F}g)(\xi)$ , satisfaz a equação diferencial

$$G' + (2\pi\xi)G = 0.$$

Deduzza que a Gaussiana é um ponto fixo da transformada de Fourier.

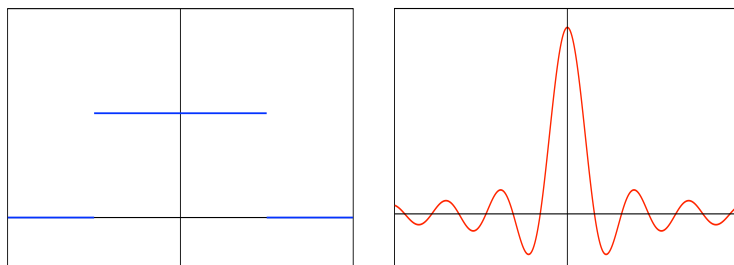
- Verifique que  $G_\tau * G_{\tau'} = G_{\tau+\tau'}$ .

4. (pulso e sinc) O pulso é a função característica do intervalo de comprimento um à volta da origem, ou seja,

$$\text{rect}(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } |t| \leq 1/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

A transformada de Fourier do pulso é a função

$$\begin{aligned} \widehat{\text{rect}}(\xi) &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} =: \text{sinc}(\xi) \end{aligned}$$





5. (teorema de inversão) O teorema de Fubini implica a “fórmula de multiplicação” seguinte.

**Teorema 12.3.** Se  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \widehat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) g(y) dy \quad (12.11)$$

Uma consequência é a fórmula de inversão de Fourier.

**Teorema 12.4** (inversão de Fourier). Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e  $\widehat{f} = \mathcal{F}f$  é a sua transformada de Fourier, então

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad (12.12)$$

*Demonstração.* O núcleo do calor  $G_\tau(x)$ , definido em (12.8), é a transformada de Fourier da gaussiana  $e^{-\pi\tau\xi^2}$ . Pela fórmula de multiplicação 12.11,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G_\tau(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi\tau\xi^2} d\xi$$

Quando  $\tau \rightarrow 0$ , o primeiro integral tende para  $f(0)$  pelo teorema 12.2, e o segundo integral tende para  $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) d\xi$ . Isto prova a fórmula (12.12) no ponto  $x = 0$ . Para provar a fórmula de inversão para  $x$  arbitrário, basta considerar a função  $g(y) = f(x + y)$  e observar que

$$f(x) = g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

pelas (12.3). □

Portanto, a transformada de Fourier é uma bijeção linear  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  do espaço de Schwartz, cuja inversa é a transformada de Fourier inversa  $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , definida pelo integral impróprio

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \check{g}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

Na notação (12.2), e fórmula de inversão é escrita

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

6. (teorema de Plancherel) O produto interno e a norma  $L^2$  no espaço de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  são definidos por

$$\langle f, g \rangle_2 := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \text{e} \quad \|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2}}$$

respetivamente.

**Teorema 12.5** (Plancherel). Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , então  $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ , ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

*Demonstração.* Se  $g(x) := \overline{f(-x)}$ , então  $\widehat{g} = \widehat{\widehat{f}}$ , pela (12.5). Seja  $h = f * g$ . Então  $h(0) = \|f\|_2^2$ , e, pela (12.7),  $\widehat{h}(\xi) = |\widehat{f}(\xi)|^2$ . Então, pelo teorema de inversão 12.12,

$$\|f\|_2^2 = h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\widehat{f}\|_2^2.$$

□

- Calcule a norma  $L^2$  da gaussiana  $e^{-x^2/2}$ .

## Transformadas de Fourier

	(espaço do tempo $t$ )	(espaço da frequência angular $\omega = 2\pi\xi$ )
	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$
(linearidade ( $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ))	$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda F(\omega) + \mu G(\omega)$
(conjugação)	$\overline{f(t)}$	$\overline{F(-\omega)}$
(homotetia ( $\lambda \neq 0$ ))	$f(t/\lambda)$	$\lambda F(\lambda\omega)$
(translação/modulação)	$f(t - a)$	$e^{-ia\omega} F(\omega)$
(modulação/translação)	$e^{ibt} f(t)$	$F(\omega - b)$
(derivação/multiplicação)	$f'(t)$	$i\omega F(\omega)$
(multiplicação/derivação)	$-it f(t)$	$F'(\omega)$
(convolução/produto)	$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau$	$F(\omega) G(\omega)$
(produto/convolução)	$f(t) g(t)$	$\frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - \nu) G(\nu) \frac{d\nu}{2\pi}$
(energia)	$E = \ f\ ^2 = \int_{-\infty}^{\infty}  f(t) ^2 dt$	$E = \ F\ ^2/2\pi = \int_{-\infty}^{\infty}  F(\omega) ^2 \frac{d\omega}{2\pi}$
(pulso/sinc)	$\chi_a(t) := \begin{cases} 1 & \text{se }  t  < a \\ 0 & \text{se }  t  \geq a \end{cases}$	$\frac{\sin(a\omega)}{\omega/2}$
(sinc/pulso)	$\frac{\sin(bt)}{\pi t}$	$\chi_b(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{se }  \omega  < b \\ 0 & \text{se }  \omega  \geq b \end{cases}$
(gaussiana)	$e^{-at^2/2}$	$\sqrt{2\pi/a} e^{-\omega^2/2a}$
(exponencial em $t$ , $a > 0$ )	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
(exponencial em $\omega$ , $b > 0$ )	$\frac{b/\pi}{t^2 + b^2}$	$e^{-b \omega }$

### 13 Aplicações da transformada de Fourier às EDPS

1. (difusão na reta e núcleo do calor) Considere a equação de calor

11 dez 2014

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (13.1)$$

na reta real  $x \in \mathbb{R}$ , com condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ . Se  $u(x, t)$  é suficientemente regular, a sua transformada de Fourier (apenas na variável  $x$ ),

$$\widehat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -4\pi^2 \xi^2 \widehat{u}$$

com condição inicial

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x, 0) e^{-2\pi i \xi x} dx = \widehat{f}(\xi)$$

A solução é

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-4\pi^2 \xi^2 t} \widehat{f}(\xi)$$

A função  $e^{-4\pi^2 \xi^2 t}$  é a transformada de Fourier do núcleo do calor (heat kernel)

$$H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

e podemos escrever  $\widehat{u}(x, t) = \widehat{H}_t(\xi) \widehat{f}(\xi)$ . Portanto, um candidato para a solução da equação de calor na reta real com condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$  é o produto de convolução

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (H_t * f)(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4t} f(y) dy \end{aligned}$$

da condição inicial com o núcleo de calor.

**Teorema 13.1.** *Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , então  $u(x, t) = (H_t * f)(x)$  é uma solução de classe  $C^\infty$  da equação de calor (13.1) na região  $x \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$ , que verifica  $\|u(\cdot, t) - f\|_\infty \rightarrow 0$  e  $\|u(\cdot, t) - f\|_2 \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0$ .*

*Demonstração.* A função  $u(x, t)$  está no espaço de Schwartz para todo tempo  $t > 0$ , pois é um produto de convolução de duas funções do espaço de Schwartz, e resolve a equação de calor (13.1) se  $t > 0$ , pelos cálculos acima. O núcleo do calor  $H_t(x)$  é uma identidade aproximada para  $t \rightarrow 0$ , logo, pelo teorema 12.2,  $(H_t * f)(x) \rightarrow f(x)$  uniformemente em  $x$  quando  $t \rightarrow 0$ . A convergência na norma  $L^2 \dots$   $\square$

- Mostre que se  $u(x, t)$  é uma solução da equação de calor (13.1) que está no espaço de Schwartz para todos os tempos  $t > 0$ , então a “energia”

$$E(t) := \|u(\cdot, t)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|^2 dx$$

é não-crescente, i.e. satisfaz  $dE/dt \leq 0$  se  $t > 0$ .

- Use a transformada de Fourier para determinar a solução formal da equação de calor com dissipação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\alpha u$$

com condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$  no espaço de Schwartz.

- Use a transformada de Fourier para determinar a solução formal da equação de calor com convecção

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x}$$

com condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$  no espaço de Schwartz.

2. (equação de ondas) Use a transformada de Fourier para mostrar que a solução formal do problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\alpha u$$

com condições iniciais  $u(x, 0) = f(x)$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$  no espaço de Schwartz.

3. (fórmula integral de Poisson no semi-plano) Considere o problema de determinar uma extensão harmônica  $u(x, y)$ , ou seja, uma solução da equação de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (13.2)$$

no semi-plano superior  $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y > 0\}$  de uma função  $f(x)$  definida na fronteira  $\partial\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y = 0\} \approx \mathbb{R}$ . Se  $u(x, y)$  é suficientemente regular, a sua transformada de Fourier (apenas na variável  $x$ ),

$$\hat{u}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi x} u(x, y) dx$$

satisfaz a equação diferencial

$$-4\pi^2 \xi^2 \hat{u} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = 0$$

com condição inicial

$$\hat{u}(\xi, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx = \hat{f}(\xi)$$

A solução limitada em  $y \geq 0$  é

$$\hat{u}(\xi, y) = e^{-2\pi|\xi|y} \hat{f}(\xi)$$

A função  $e^{-2\pi|\xi|y}$  é a transformada de Fourier do núcleo de Poisson em  $\mathbb{H}$ , definido por

$$P_y(x) := \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Então  $\hat{u}(\xi, y) = \widehat{P_y}(\xi) \hat{f}(\xi)$ . Portanto, um candidato para a extensão harmônica de  $f(x)$  no semi-plano superior  $\mathbb{H}$  é o produto de convolução

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (P_y * f)(x) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-z)^2 + y^2} f(z) dz \end{aligned}$$

de  $f$  com o núcleo de Poisson. O núcleo de Poisson não está no espaço de Schwartz, mas decresce (apenas) como  $\leq C/(1 + |x|^2)$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ . É possível mostrar que é uma identidade aproximada quando  $y \rightarrow 0$ .

**Teorema 13.2.** *Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , então  $u(x, y) = (P_t * f)(x)$  é uma solução de classe  $\mathcal{C}^2$  da equação de Laplace (13.2) no semi-plano superior  $\mathbb{H}$ , que verifica  $\|u(\cdot, y) - f\|_{\infty} \rightarrow 0$  e  $\|u(\cdot, y) - f\|_2 \rightarrow 0$  quando  $y \rightarrow 0$ .*

4. (**oscilador harmônico quântico e funções de Hermite**) A equação de Schrödinger para a função de onda  $\psi(x, t)$  de uma partícula de massa  $m = 1$  num potencial  $V(x) = x^2/2$  (oscilador harmônico), em unidades tais que a constante de Planck reduzida é  $\hbar = 1$ , é

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} x^2 \psi.$$

As soluções separáveis são  $\psi_n(x, t) = e^{-iE_n t} f_n(x)$ , onde as  $f_n(x)$  são funções próprias do operador de Hermite  $H : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , definido por

$$2H := -D^2 - X^2,$$

com valores próprios  $E_n$  (umas energias), i.e.  $Hf_n = E_n f_n$ . Os operadores de *destruição* (*annihilation*) e de *criação* (*creation*) são os operadores

$$Z := X + D \quad \text{e} \quad Z^* := X - D,$$

respetivamente, que agem no espaço de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . É imediato verificar que  $[D, X] = I$  (o operador identidade), e que  $2H = Z^*Z + I$ . O operador de criação é o “adjunto” do operador de destruição, no sentido em que se  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  então

$$\langle Zf, g \rangle_2 = \langle f, Z^*g \rangle_2$$

Isto implica que  $\langle Z^*Zf, f \rangle_2 = \|Zf\|_2^2 \geq 0$  para todo  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , ou seja, que  $2H \geq I$ . O produto  $N := Z^*Z$  é chamado operador *número*, e satisfaz a relação de comutação  $[N, Z^*] = 2Z^*$ . Se  $f$  é um vetor próprio de  $N$  com valor próprio  $\lambda$ , então  $Z^*f$  é um vetor próprio de  $N$  com valor próprio  $\lambda + 2$ . De fato, se  $Nf = \lambda f$ ,

$$N(Z^*f) = (Z^*N + [N, Z^*])f = (Z^*N + Z^*)f = Z^*(N + 2I)f = (\lambda + 2)Z^*f$$

A gaussiana  $g(x) = e^{-x^2/2}$  está no núcleo do operador de destruição, ou seja, satisfaz a equação diferencial  $Zg = 0$ , e portanto  $\phi_0 := g/\|g\|_2$  é um vetor próprio unitário do operador  $N$  com valor próprio  $N\phi_0 = 0$ . Então as funções de Hermite, definidas por

$$\phi_n := \frac{1}{\|(Z^*)^n \phi_0\|_2} (Z^*)^n \phi_0$$

se  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , formam uma família ortonormada de vetores próprios do operador número  $N$  com valores próprios  $2n$  (os  $\phi_n$  com  $n$ 's diferentes são ortogonais porque  $N^* = N$ ), e de consequência do operador de Hermite  $H$  com valores próprios  $(n + 1/2)$ , i.e.

$$H\phi_n = (n + 1/2)\phi_n$$

5. (**princípio de indeterminação de Heisenberg**) Acontece que uma função e a sua transformada de Fourier não podem ser, contemporaneamente, muito concentradas.

Se fixamos a energia  $\|\psi\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$ , e portanto também  $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi = 1$  pelo teorema de Plancherel, podemos interpretar  $|\psi(x)|^2$  e  $|\widehat{\psi}(\xi)|^2$  como sendo umas densidades de probabilidades. Este é o caso da função de onda  $\psi(x)$  de uma partícula quântica na representação de Schrödinger, onde  $\int_a^b |\psi(x)|^2 dx$  é a probabilidade de observar a posição da partícula no intervalo  $[a, b]$ . Uma medida natural da “concentração” é a “variância”

$$\text{Var}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 |\psi(x)|^2 dx$$

onde o “valor médio” é definido por

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx.$$

(em mecânica quântica, o valor médio do observável “posição” no estado  $\psi$ ). Analogamente definimos a variância  $\text{Var}(\xi)$  da transformada de Fourier e o valor médio  $\bar{\xi}$  da variável conjugada  $\xi$  (em mecânica quântica, o valor médio do observável “momento”).

**Teorema 13.3** (princípio de indeterminação de Heisenberg). *Se  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tem norma  $\|\psi\|_2 = 1$ , e  $\widehat{\psi}(\xi)$  é a sua transformada de Fourier, então*

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{\xi})^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq 1/4 \quad (13.3)$$

*Demonstração.* Para  $\lambda \in \mathbb{R}$ , consideramos os operadores de destruição e criação deformados  $Z_\lambda := \lambda X + D$  e  $Z_\lambda^* = \lambda X - D$ , respetivamente. Fixado  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , o polinómio quadrático

$$Q(\lambda) := \langle Z_\lambda^* Z_\lambda \psi, \psi \rangle = \lambda^2 \langle X\psi, X\psi \rangle - \lambda \langle \psi, \psi \rangle + \langle D\psi, D\psi \rangle$$

é não-negativo, pois é igual a  $\langle Z_\lambda \psi, Z_\lambda \psi \rangle = \|Z_\lambda \psi\|_2^2 \geq 0$ . Se  $\|\psi\| = 1$ , isto implica que  $\langle X\psi, X\psi \rangle \cdot \langle D\psi, D\psi \rangle \geq 1/4$ . O primeiro fator é  $\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx$ . Pelas (12.6) e pelo teorema de Plancherel, o segundo fator é  $\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$ . Portanto,

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq 1/4.$$

A desigualdade (13.3) é obtida substituindo  $\psi(x)$  por  $e^{-2\pi i x \bar{\xi}} \psi(x - \bar{x})$ .  $\square$

Este é apenas um exemplo de uma série de princípios de indeterminação relevantes em diferentes contextos (ver [http://en.wikipedia.org/wiki/Uncertainty\\_principle](http://en.wikipedia.org/wiki/Uncertainty_principle)).

- Mostre que valor médio minimiza o desvio quadrático  $a \mapsto \int_{\mathbb{R}} (x - a)^2 |\psi(x)|^2 dx$ .
  - Verifique que o mínimo em (13.3) é atingido quando  $\psi(x)$  é uma gaussiana.
6. (**função caraterística e teorema limite central**) A *função caraterística* de uma variável aleatória real  $X$ , com lei  $\mathbf{P}$ , é a média/esperança da variável  $e^{i\xi X}$ , com  $\xi \in \mathbb{R}$ , ou seja,

$$\phi_X(\xi) = \mathbf{E} e^{i\xi X} = \int e^{i\xi x} \mathbf{P}(dx).$$

Em particular, se  $X$  é absolutamente contínua com lei  $\mathbf{P}(X \in A) = \int_A p(x) dx$ , então a função caraterística  $\phi_X(\xi)$  é a transformada de Fourier da densidade de  $X$ , pois

$$\phi_X(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} p(x) dx = \sqrt{2\pi} \cdot \widehat{p}(\xi).$$

O *teorema de Lévy* afirma que uma sequência de variáveis aleatórias  $(X_n)$  converge “em lei”<sup>11</sup> para a variável  $X$  quando  $n \rightarrow \infty$ , i.e.  $X_n \rightarrow^{\mathcal{L}} X$ , sse  $\phi_{X_n}(\xi) \rightarrow \phi_X(\xi)$  para cada  $\xi \in \mathbf{R}$ .

- Verifique que as derivadas da função caraterística na origem são

$$\phi_X(0) = 1 \quad \phi_X'(0) = i\mathbf{E}X \quad \phi_X''(0) = -\mathbf{E}X^2 \quad \dots$$

(desde que os momentos da variável  $X$  sejam finitos).

- Mostre que, se a variável aleatória  $X$  tem média  $\mathbf{E}X = m$  e variância  $\mathbf{V}X = \mathbf{E}(X - m)^2 = \sigma^2$ , e se  $Y = \frac{X - m}{\sigma}$ , então<sup>12</sup>

$$\phi_Y(\xi) = 1 - \frac{1}{2}\xi^2 + o(\xi^2)$$

numa vizinhança da origem.

<sup>11</sup> *Convergência em lei:*  $X_n \rightarrow^{\mathcal{L}} X$  se, para cada função  $f(x)$  contínua e limitada,  $\mathbf{E}f(X_n) \rightarrow \mathbf{E}f(X)$ , ou seja, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n \leq x) = \mathbf{P}(X \leq x).$$

para cada ponto de continuidade  $x$  da função de repartição de  $X$ .

<sup>12</sup>Notação de Landau:  $f(\xi) = o(\xi^k)$  quando  $\xi \rightarrow 0$  significa que  $\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi)/\xi^k = 0$ .

- Sejam  $X_1, X_2, X_3, \dots$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média  $m$  e variância  $\sigma^2$ , seja  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , e seja

$$S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - m}{\sigma}$$

Verifique que

$$\phi_{S_n^*}(\xi) = (\phi_Y(\xi/\sqrt{n}))^n$$

onde  $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ , e portanto

$$\phi_{S_n^*}(\xi) \rightarrow e^{-\xi^2/2} \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

- Deduza o *teorema limite central*, que afirma que a sequência de variáveis  $(S_n^*)$  converge em lei para uma variável normal  $N(0, 1)$ , ou seja,

$$\mathbf{P}(S_n^* \leq x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$



## 14 Funções harmônicas

1. (**funções harmônicas**) Uma função  $u(x, y)$ , real ou complexa, definida num domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  do plano euclidiano, é dita *harmônica* se é de classe  $C^2$  e satisfaz a *equação de Laplace*

15 dez 2014

$$\Delta u = 0 \quad \text{ou seja,} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

nos pontos de  $\Omega$ , onde o *Laplaciano* é o operador diferencial  $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

Os físicos também usam a notação formal  $\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ , onde  $\nabla := (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ . Uma função harmônica real  $u$  define um campo vetorial  $\mathbf{v} = \nabla u$ , e portanto gera um fluxo, solução da EDO autônoma  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ , que preserva os volumes, pois  $\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla u = 0$ , e tem rotacional nulo, pois  $\text{curl } \mathbf{v} = \nabla \times \nabla u = 0$ .

Na identificação  $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$  definida por  $(x, y) \approx x + iy$ , o Laplaciano  $\Delta$  é o operador  $4\partial\bar{\partial}$ . Portanto, se  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  é uma função holomorfa num domínio  $\Omega \subset \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ , então  $u$  e  $v$  são funções harmônicas reais, ditas funções “harmônicas conjugadas”. As curvas de nível de  $u$  e  $v$  formam duas famílias de curvas ortogonais (se  $u = c$  são as curvas “equipotenciais”, então  $v = c$  são as “linhas de força”).

Vice-versa, se  $u(x, y)$  é uma função harmônica real, então um cálculo mostra que

$$g(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

é uma função holomorfa (se  $u$  é a parte real de  $f = u + iv$ , então  $g = f'$ ). A forma  $g(z) dz = g(z) (dx + idy)$  pode então ser representada como soma

$$\begin{aligned} g(z) dz &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + i \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \\ &= du + i^* du, \end{aligned}$$

do diferencial  $du$  e  $i$  vezes a forma  $*du$ , onde o *operador “estrela” de Hodge* é definido por  $*dx = dy$  e  $*dy = -dx$ . A forma  $*du = -(\partial u/\partial y)dx + (\partial u/\partial x)dy$  é fechada. Se  $u$  é definida numa região  $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$  simplesmente conexa (por exemplo, um disco), então

$$\oint_{\gamma} *du = 0$$

para todo contorno  $\gamma \subset \Omega$ , sendo igual ao integral de  $f(z)dz$ , com  $f$  holomorfa, menos o integral do diferencial exato  $du$ . Fisicamente, este integral é o integral  $\oint_{\gamma} \nabla u \cdot \mathbf{n}$  da derivada normal  $\nabla u \cdot \mathbf{n}$  de  $u$ , onde o vetor normal à curva  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  é  $\mathbf{n} = (\dot{y}, -\dot{x})$ . Então é possível definir uma função harmônica  $v$ , conjugada de  $u$  e definida a menos de uma constante aditiva, por meio do integral de linha

$$v(x, y) = \int_{\gamma} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

onde  $\gamma$  é um contorno arbitrário entre um ponto fixado  $p \in \Omega$  e o ponto variável  $z = x + iy$ . A função  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$  é holomorfa em  $\Omega$ , e a sua derivada é  $f' = g$ .

**Teorema 14.1.** *Uma função harmônica  $u$  é localmente (em cada região simplesmente conexa) a parte real de uma função holomorfa  $f = u + iv$ , definida a menos de uma constante aditiva imaginária  $ic$ .*

Uma primeira consequência é que uma função harmônica é infinitamente diferenciável. Outra consequência importante é que se  $u$  é harmônica, logo localmente a parte real de uma função holomorfa  $f = u + iv$ , e se  $g$  é uma função holomorfa, então a composição  $u \circ g$  (numa região onde faz sentido) é harmônica, sendo localmente a parte real de  $f \circ g$ .

- Verifique que  $\Delta = 4\bar{\partial}\partial = 4\partial\bar{\partial}$ .
- Verifique que, se  $f = u + iv$  é holomorfa, então  $\nabla u$  e  $\nabla v$  são ortogonais.
- Verifique que  $z^n$  e  $\bar{z}^n$  são funções harmônicas (complexas).
- Esboce as curvas de nível das funções harmônicas conjugadas definidas pelas partes real e imaginária das seguintes funções holomorfas

$$f(z) = z^2 \quad f(z) = z^3 \quad f(z) = 1/z \quad f(z) = z + 1/z$$

- Determine, em domínios apropriados, umas funções harmônicas conjugadas de

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad u(x, y) = x - xy$$

$$u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

2. (Laplaciano em coordenadas polares) A equação de Laplace em coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ , definidas por  $\rho e^{i\theta} = x + iy$ , é

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

Em particular, as funções harmônicas que apenas dependem de  $\rho$  são

$$a \log(\rho) + b$$

Por exemplo, em unidades convenientes, o potencial elétrico gerado por uma carga unitária colocada na origem do plano é a função  $V(z) = -\log|z|$ , harmônica no plano perfurado  $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Em uma região simplesmente conexa  $\Omega$  que não contém a origem é possível definir um logaritmo  $\log(z) = \log \rho + i\theta$ , e em particular um argumento  $\theta(z)$ . Então

$$a\theta(z) + b$$

é uma função harmônica em  $\Omega$ , que não depende de  $|z|$  (ou seja, constante nas semi-retas que saem da origem). Por exemplo, o argumento principal  $\theta(z)$  é uma função harmônica no semi-plano superior  $\mathbb{H}$ , com limites  $\theta(x + i0^+) = 0$  se  $x > 0$  e  $\theta(x + i0^+) = \pi$  se  $x < 0$ .

- Verifique que  $\rho^{|n|} e^{in\theta}$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , é uma função harmônica no disco unitário  $\mathbb{D}$ .
  - Determine uma função harmônica  $u(z)$  no semi-plano superior  $\mathbb{H}$  tal que  $u(x + iy) \rightarrow 1$  quando  $y \rightarrow 0$  e  $x > 0$  e tal que  $u(x + iy) \rightarrow -1$  quando  $y \rightarrow 0$  e  $x < 0$ .
3. (princípio do valor médio) O valor de uma função harmônica num ponto do seu domínio é igual à média aritmética dos seus valores numa circunferência suficientemente pequena à volta deste ponto.

**Teorema 14.2** (princípio do valor médio). *Se  $u$  é harmônica numa região  $\Omega$  que contém o disco  $\overline{D_\rho(p)}$ , então*

$$u(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + \rho e^{i\theta}) d\theta. \quad (14.1)$$

*Demonstração.* Pelo teorema 14.1,  $u$  é a parte real de uma função holomorfa  $f = u + iv$  num disco  $D_r(p)$  com  $r > \rho$ . Então pela fórmula de Cauchy

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\rho} \frac{f(z)}{z-p} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

A parte real é a fórmula (14.1). □

Uma consequência é o

**Teorema 14.3** (princípio do máximo). *Uma função harmônica e não constante não pode atingir máximo e mínimo na região (aberta) onde está definida. O máximo e o mínimo de uma função harmônica num domínio fechado  $K \subset \mathbb{C}$  são atingidos na fronteira  $\partial K$ .*

Outra consequência é que as únicas funções harmônicas e limitadas no plano complexo são as constantes (versão do teorema de Liouville para funções harmônicas).

- Uma função  $f(t)$  de uma variável real  $t$  é harmônica, ou seja, é solução de  $f'' = 0$ , sse é afim, ou seja, é da forma  $f(t) = a + bt$ . Enuncie e prove o princípio do valor médio neste contexto.
  - Look at Nelson's wonderful proof<sup>13</sup> of Liouville theorem.
4. **(Dirichlet principle)** The *Dirichlet energy* of a differentiable real valued function  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  defined in a domain  $\Omega \subset \mathbb{C}$  (which we may assume connected) is

$$\mathcal{E}[u] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx dy$$

You may think that the graph of  $u$  describes a surface in  $\mathbb{R}^3 \approx \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ . The energy is zero iff  $u$  is constant, hence if the surface is flat. More interesting is trying to minimize the Dirichlet energy for fixed “boundary value”  $u|_{\partial\Omega} = g$ , given some well behaved function  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Consider a one-parameter perturbation of  $u$  of the form  $u + t\phi$  with  $t \in \mathbb{R}$  and  $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ . If  $u$  minimizes the Dirichlet energy, then the function of a real variable  $t \mapsto \mathcal{E}[u + t\phi]$  must have a minimum at  $t = 0$ . The derivative of the Dirichlet energy w.r.t.  $t$  is

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}[u + t\phi] = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \phi + t \|\nabla \phi\|^2) dx dy$$

and therefore its value at  $t = 0$  is

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \mathcal{E}[u + t\phi] \right|_{t=0} &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \phi) dx dy \\ &= - \int_{\Omega} (\Delta u) \phi dx dy \end{aligned}$$

where the last line follows integrating by parts and using the vanishing of  $\phi$  on the boundary  $\partial\Omega$ . Thus, the derivative is zero for all variations  $\phi$  iff  $\Delta u = 0$ , i.e. the function  $u$  is harmonic on  $\Omega$ .

What is not obvious, and indeed not true (as Weierstrass discovered) for a generic region  $\Omega$ , is that such a minimum of the Dirichlet energy exists.

5. **(fórmula integral de Poisson no disco unitário)** Uma consequência importante do princípio do máximo é que uma função harmônica num domínio fechado e limitado  $D$  é determinada apenas pelos seus valores na fronteira  $\partial D$ . De fato, a diferença  $u = u_1 - u_2$  entre duas funções harmônicas,  $u_1$  e  $u_2$ , que coincidem em  $\partial D$  é uma função harmônica igual a zero em  $\partial D$ , logo identicamente nula pelo princípio do máximo.

Isto sugere a existência de uma fórmula que relaciona  $u(p)$ , com  $p$  no interior de  $D$ , aos valores  $u(z)$  com  $z \in \partial D$ . Uma fórmula simples pode ser obtida para a extensão harmônica no disco unitário  $\mathbb{D}$  de uma função contínua  $u$  definida na circunferência unitária  $\mathbb{S} = \partial\mathbb{D} \approx \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Seja  $u(e^{i\theta}) \sim \sum_n c_n e^{in\theta}$  a série de Fourier de  $u(e^{i\theta})$ . Uma extensão harmônica de  $e^{in\theta}$  no disco unitário é  $\rho^{|n|} e^{in\theta}$ . Portanto, um candidato para a extensão harmônica de  $u$  no interior do disco unitário, i.e. nos pontos  $\rho e^{i\theta}$  com  $0 \leq \rho < 1$ , é a série

$$(\mathcal{P}u)(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \rho^{|n|} e^{in\theta},$$

<sup>13</sup>E. Nelson, A proof of Liouville's theorem, *Proceedings of the AMS* **12** (1961), 995.

se convergente. Usando a definição dos coeficientes de Fourier,

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}u)(\rho e^{i\theta}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\phi}) e^{-in\phi} d\phi \right) \rho^{|n|} e^{in\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\phi}) \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} e^{in(\theta-\phi)} \right) d\phi \end{aligned}$$

é possível representar  $\mathcal{P}u$  como um produto de convolução (*fórmula integral de Poisson*)

$$\boxed{(\mathcal{P}u)(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\phi}) P_{\rho}(\theta - \phi) d\phi} \quad (14.2)$$

dos valores de  $u$  na circunferência unitária com o *núcleo de Poisson* no disco unitário, definido por

$$P_{\rho}(\theta) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} e^{in\theta}.$$

O núcleo de Poisson admite as seguintes expressões,

$$\begin{aligned} P_{\rho}(\theta) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n \\ &= 1 + \frac{z}{1-z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} \\ &= \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \end{aligned}$$

onde  $z = \rho e^{i\theta}$ , e portanto

$$\boxed{P_{\rho}(\theta) = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta)}}.$$

A série de Fourier da função contínua  $u(e^{i\theta})$  pode não ser convergente na circunferência unitária, mas a série  $\sum c_n \rho^{|n|} e^{in\theta}$  é absolutamente convergente se  $\rho < 1$ . A convergência é uniforme em cada disco  $D_r(0)$  com  $r < 1$ , e portanto a (14.2) define uma função harmônica no disco unitário. Acontece que o núcleo de Poisson é uma identidade aproximada quando  $\rho \rightarrow 1$ , e portanto  $\lim_{\rho \rightarrow 1} (\mathcal{P}u)(\rho e^{i\theta}) = u(e^{i\theta})$  nos pontos de continuidade de  $u(e^{i\theta})$ .

**Teorema 14.4.** *Existe uma única transformação linear  $\mathcal{P} : C^0(\mathbb{S}) \rightarrow C^0(\overline{\mathbb{D}})$  tal que  $\mathcal{P}u|_{\mathbb{S}} = u$  e tal que  $\mathcal{P}u$  é harmônica em  $\mathbb{D}$ . Esta transformação pode ser definida pela fórmula de Poisson (14.2).*

6. (campos planares e potenciais complexos) ([LC72], Chapitre III, §2, e [Sm03]) Seja  $\mathbf{V}(x, y)$  um campo vetorial estacionário (i.e. independente do tempo) definido numa região do plano. Sejam  $A$  e  $B$  as suas coordenadas, assim que  $\mathbf{V} = (A, B)$ , ou, na identificação  $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{V} = A + iB$ . Exemplos típicos são: o campo de velocidades de um fluido estacionário, um campo de forças, como um campo elétrico ou um campo magnético, um campo térmico, ...

17 dez 2014

A *circulação* do campo  $\mathbf{V}$  ao longo do contorno simples  $\gamma$  é o integral  $C := \oint_{\gamma} \mathbf{V} \cdot ds$ . Se  $\gamma$  é a fronteira da região  $\Omega$ , então o teorema de Green diz que

$$C = \oint_{\gamma} A dx + B dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy \quad (14.3)$$

ou seja, a circulação é o integral do *rotacional*  $\nabla \times \mathbf{V} := \partial B / \partial x - \partial A / \partial y$  na região  $\Omega$ . O campo é *irrotacional*, ou *potencial*, i.e. se  $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ . Então a forma  $A dx + B dy$  é localmente o diferencial de uma função  $u(x, y)$ , i.e.

$$du = A dx + B dy.$$

A função  $u$  é chamada *potencial* do campo, pois  $\mathbf{V} = \nabla u$ , e as suas curvas de nível *curvas equipotenciais*.

O *fluxo* de  $\mathbf{V}$  através da curva  $\gamma$  é o integral  $F := \int_{\gamma} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ , onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à curva. Se  $\gamma$  é um contorno simples, fronteira da região  $\Omega$ , então o teorema da divergência de Gauss diz que

$$F = \oint_{\gamma} -Bdx + Ady = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) dx dy \quad (14.4)$$

ou seja, o fluxo é o integral da *divergência*  $\nabla \cdot \mathbf{V} := \partial A/\partial x + \partial B/\partial y$  na região  $\Omega$ . O campo é dito *solenoidal* (*incompressível*, se representa o campo de velocidade de um fluido) se  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ . Então a forma  $-Bdx + Ady$  é localmente o diferencial de uma função  $v(x, y)$ , i.e.

$$dv = -Bdx + Ady.$$

A função  $v$  é chamada *função de corrente*, e as suas curvas de nível são chamadas *linhas de corrente* (*streamlines*).

Se o campo vetorial  $\mathbf{V}$  é irrotacional e solenoidal (como, por exemplo o campo de velocidades de um “fluido ideal”), então  $u$  e  $v$  satisfazem as condições de Cauchy-Riemann, como é possível ver comparando as expressões dos diferenciais  $du$  e  $dv$ . Portanto,

**Teorema 14.5.** *Num campo planar irrotacional e solenoidal, o potencial  $u(x, y)$  e a função corrente  $v(x, y)$  são funções harmônicas conjugadas.*

Então um campo irrotacional e solenoidal pode ser descrito, localmente (ou seja, numa região simplesmente conexa), por meio de uma função holomorfa

$$f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$$

chamada *potencial complexo*. Em particular, as linhas de corrente  $v = c$  e as linhas equipotenciais  $u = c$  são ortogonais. A derivada do potencial complexo é  $f' = A - iB$ . De consequência, o campo é

$$\mathbf{V} = \overline{f'}$$

e o fluxo  $F$  e a circulação  $C$ , através e ao longo de um contorno  $\gamma$ , são parte real e parte imaginária de um único integral de contorno:

$$F + iC = \oint_{\gamma} f'(z) dz.$$

- Para cada potencial complexo  $f(z)$ , definido em um domínio conveniente, calcule o campo  $\mathbf{V}$ , e esboce algumas linhas de corrente  $v(x, y) = c$  e alguma curvas equipotenciais  $u(x, y) = c$ .

$$f(z) = z \quad f(z) = (1+i)z \quad f(z) = z^2 \quad f(z) = z + 1/z$$

- Repita o exercício anterior (pode ser útil usar coordenadas polares, ou usar uma calculadora gráfica), e calcule também a circulação e o fluxo ao longo de contornos à volta das singularidades do campo, com os seguintes potenciais complexos.

$$f(z) = \log(z) \quad f(z) = i \log(z) \quad f(z) = (a+ib) \log(z) \quad f(z) = \log(z+1) \pm \log(z-1)$$

## 15 Transformações conformes

1. (**pontos críticos e teorema da função inversa**) Os *pontos críticos* de uma função holomorfa  $f$  são os pontos  $c$  onde  $f'(c) = 0$ . Os outros pontos do domínio, onde  $f'(p) \neq 0$ , são chamados *regulares*.

**Teorema 15.1** (teorema da função inversa). *Uma função holomorfa é localmente invertível numa vizinhança de um ponto regular.*

Ou seja, se  $p$  é um ponto regular da função holomorfa  $f$ , então existe uma vizinhança aberta (um disco suficientemente pequeno)  $D$  de  $p$  tal que  $f|_D : D \rightarrow f(D)$  é uma função holomorfa e injetiva cuja função inversa  $g : f(D) \rightarrow D$  é também holomorfa. A função inversa pode ser representada pelo integral de contorno

$$g(w) = \oint_{|z-p|=\rho} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz$$

se  $\rho > 0$  é suficientemente pequeno.

Este é um resultado local. Uma função holomorfa pode não ser (globalmente) invertível numa região sem pontos críticos. Por exemplo,  $f(z) = z^2$  não é invertível no plano perfurado  $\mathbb{C}^\times$ , mas é invertível no semi-plano superior  $\mathbb{H}$ .

Por outro lado, uma função holomorfa  $f(z)$  não pode ser injetiva numa vizinhança de um ponto crítico. A menos de translações (no domínio e no contradomínio), podemos assumir que o ponto crítico é  $c = 0$ , e que é um zero de ordem  $\text{ord}(f, 0) = n \geq 2$  da função  $f$ . Então  $f(z) = a_n z^n (1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots)$  com  $a_n \neq 0$  numa vizinhança da origem, e portanto (usando a fórmula do binômio)  $f(z) = (bz(1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots))^n$  com  $b^n = a_n$ , e, em particular,  $b \neq 0$ . Pelo teorema da função inversa, existe uma função holomorfa  $w = g(z)$ , invertível numa vizinhança da origem, tal que  $f(z) = w^n$ . De consequência, a equação  $f(z) = \varepsilon$  admite  $n$  soluções distintas se  $\varepsilon \neq 0$  é suficientemente pequeno.

2. (**equivalências conformes**) Uma função holomorfa é também conforme (i.e. preserva os ângulos) fora dos pontos críticos. Uma função holomorfa e bijetiva  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ , cuja inversa é necessariamente holomorfa pelo teorema da função inversa, é chamada *equivalência conforme* (ou *isomorfismo analítico*) entre a região  $\Omega$  e a região  $f(\Omega) = \Omega'$ . Um exemplo trivial é a função identidade  $\text{id}_\Omega : \Omega \rightarrow \Omega$ , definida por  $\text{id}_\Omega(z) = z$ . Uma equivalência conforme pode ser pensada com uma mudança de variável conforme, da variável  $z \in \Omega$  à variável  $w = f(z) \in \Omega'$ . Duas regiões equivalentes têm as mesmas funções holomorfas, e portanto as mesmas funções harmônicas, a menos de uma mudança de coordenadas.

Por exemplo,  $f(z) = z^2$  define uma equivalência conforme do primeiro quadrante  $Q_1 := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0 \text{ e } \Im(z) > 0\}$  sobre o semi-plano superior  $\mathbb{H}$ . As potências  $f(z) = z^n$ , com  $n$  inteiro positivo, definem equivalências conformes dos ângulos  $A_{\pi/n} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg(z) < \pi/n\}$  sobre  $\mathbb{H}$ , cujas inversas são as raízes  $g(z) = z^{1/n}$ , definidas usando o ramo principal do logaritmo.

Em geral, as potências fracionárias  $f(z) = z^{1/\alpha}$ , com  $0 < \alpha < 2$  (definidas usando o ramo apropriado do logaritmo), definem equivalências conformes de  $A_{\alpha\pi} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg(z) < \alpha\pi\}$  sobre  $\mathbb{H}$ .

A função exponencial  $f(z) = e^z$  define uma equivalência conforme da região  $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im(z) < \pi\}$  sobre o semi-plano superior  $\mathbb{H}$ , e da região  $B_- = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im(z) < \pi \text{ e } \Re(z) < 0\}$  sobre o semi-disco superior  $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}$ . Vice-versa, o ramo principal do logaritmo,  $g(z) = \log(z)$ , envia  $\mathbb{H}$  sobre  $B$  e  $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}$  sobre  $B_-$ .

A composição de duas equivalências conformes  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  e  $g : \Omega' \rightarrow \Omega''$  é uma equivalência conforme  $g \circ f : \Omega \rightarrow \Omega''$ . Em particular, fixada uma região  $\Omega$ , a família das transformações conformes invertíveis  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  forma um grupo, o produto sendo a composição e o elemento neutro sendo  $I_\Omega$ , chamado grupo dos *automorfismos* (conformes) da região  $\Omega$ , e denotado por  $\text{Aut}(\Omega)$ .

- Determine regiões simples (ou seja, discos, semi-discos, semi-planos, quadrantes, ângulos, ...) onde as seguintes expressões definem funções injetivas, logo equivalências conformes, e determine as respectivas imagens:

$$iz \quad z^2 \quad e^z \quad \log(z) \quad \sin(z) \quad e^{iz} \quad 1/z$$

- Esboce as imagens das famílias de retas ortogonais  $x = c$  e  $y = c$  pela transformações  $f(z) = z^2$  e  $f(z) = 1/z$ .
  - Determine uma equivalência conforme entre o primeiro quadrante  $Q_1 := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0 \text{ e } \Im(z) > 0\}$  e o semi-plano inferior  $-\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) < 0\}$ ,
  - Determine uma equivalência conforme entre segundo quadrante  $Q_2 := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0 \text{ e } \Im(z) > 0\}$  e o semi-plano superior  $\mathbb{H}$ .
  - Determine a imagem de  $B_+ = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im(z) < \pi \text{ e } \Re(z) > 0\}$  pela transformação conforme  $f(z) = e^z$ .
  - Deduza do teorema de Liouville 5.8 que não existe uma equivalência conforme  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ .
3. (automorfismos do plano complexo: grupo afim) A região mais simples é o próprio plano complexo  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 15.2.** O grupo  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  dos automorfismos do plano complexo é  $\text{Aff}(\mathbb{C})$ , i.e. o grupo das transformações afins

$$f(z) = az + b$$

com  $a \in \mathbb{C}^\times$  e  $b \in \mathbb{C}$ .

*Demonstração.* Um automorfismo do plano complexo é uma função inteira  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . O ponto  $w = 0$  não pode ser uma singularidade essencial de  $g(w) := f(1/w)$ . De fato, pelo teorema de Casorati-Weierstrass 6.2,  $f(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D})$  seria um subconjunto denso em  $\mathbb{C}$ , mas também fechado porque  $f$  é um homeomorfismo, e portanto necessariamente igual ao próprio  $\mathbb{C}$ , o que é impossível se  $f$  é invertível. Então existe um inteiro  $k \geq 0$  tal que  $g(w)/w^k$  tem uma singularidade removível em  $w = 0$ , e portanto  $f(z)z^k$  é limitada numa vizinhança de  $z = \infty$ . A desigualdade de Cauchy (5.5) então implica que  $f(z)$  é um polinômio (de grau  $\leq k$ ). Mas os únicos polinômios invertíveis são os polinômios de grau um, ou seja  $f(z) = az + b$ , com derivada  $f'(z) = a$  diferente de zero.  $\square$

4. (automorfismos da esfera de Riemann: grupo de Möbius) O grupo de Möbius é o grupo das transformações  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  do género

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{15.1}$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tais que  $ad - bc \neq 0$ . Cada matriz  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$  define uma transformação linear invertível de  $\mathbb{C}^2$ , que envia  $(z_0, z_1)$  em  $(z'_0, z'_1) = (az_0 + bz_1, cz_0 + dz_1)$ . Em particular, envia retas que passam pela origem em retas que passam pela origem: as imagens das retas  $z_0/z_1 = z$ , parametrizadas por  $z \in \mathbb{C}$ , são as retas  $z'_0/z'_1 = f(z)$ , e a imagem da reta  $z_1 = 0$ , que corresponde a  $z = \infty$ , é a reta  $z'_0/z'_1 = a/c$ . O espaço  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  das retas que passam pela origem de  $\mathbb{C}^2$  é isomorfo à esfera de Riemann  $\overline{\mathbb{C}}$ . Duas matrizes invertíveis proporcionais,  $M$  e  $\lambda M$  com  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ , induzem a mesma transformação de  $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \approx \overline{\mathbb{C}}$ , e portanto o grupo de Möbius é isomorfo ao quociente  $\text{GL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$ , ou também ao quociente  $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) := \text{SL}(2, \mathbb{C})/\pm I$ . Em particular, a inversa da transformação de Möbius (15.1) é a transformação induzida por qualquer matriz proporcional a  $M^{-1}$ , por exemplo  $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ , e a composição  $f \circ g$  de duas transformações de Möbius, induzidas pelas matrizes invertíveis  $M$  e  $N$ , respetivamente, é a transformação induzida pelo produto  $MN$ .

Toda transformação de Möbius é uma composição de transformações afins e uma inversão  $I(z) = 1/z$ . De fato, a transformação (15.1) pode ser obtida como

$$z \mapsto cz + d \mapsto \frac{1}{cz + d} \mapsto \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d}$$

**Teorema 15.3.** *O grupo  $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$  dos automorfismos da esfera de Riemann é o grupo de Möbius  $\text{Mob} \approx \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ .*

*Demonstração.* Seja  $f$  um automorfismo da esfera de Riemann, tal que  $f(\infty) = d$ . Então a composição  $h = g \circ f$  de  $f$  com a transformação de Möbius  $g(z) = 1/(z-d)$  é um automorfismo do plano complexo, pois fixa o ponto  $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ . Pelo teorema 15.2,  $h$  é uma transformação afim  $h(z) = az + b$ , e portanto  $f = g^{-1} \circ h \in \text{Mob}$ .  $\square$

Uma “circunferência da esfera de Riemann” é uma circunferência ou uma reta euclidiana.

**Teorema 15.4.** *Uma transformação de Möbius envia circunferência em circunferências (da esfera de Riemann).*

*Demonstração.* A propriedade é óbvia para transformações afins, portanto é suficiente provar o teorema para a inversão  $I(z) = 1/z$ . Mas a equação de uma circunferência da esfera de Riemann é

$$a|z|^2 + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$$

com  $c \neq 0$  se  $b = 0$ , ou  $b \neq 0$  se  $a = 0$ . Na variável  $w = 1/z$  esta equação é transformada em

$$a + \bar{b}\bar{w} + bw + c|w|^2 = 0,$$

que é também a equação de uma circunferência da esfera de Riemann.  $\square$

5. (**razão cruzada e circunferências**) Dados três pontos distintos  $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$ , existe uma única transformação de Möbius  $f \in \text{Mob}$  que envia  $a, b, c$  em  $1, 0, \infty$ , nesta ordem (ou seja,  $f(a) = 1$ ,  $f(b) = 0$  e  $f(c) = \infty$ ). Esta transformação é

$$f(z) = \frac{(z-b)(a-c)}{(z-c)(a-b)}$$

(é única porque a única transformação de Möbius que fixa  $1, 0$  e  $\infty$  é identidade). Em particular, o grupo de Möbius age “triplamente transitivamente” na esfera de Riemann: para cada  $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$  distintos e  $a', b', c' \in \overline{\mathbb{C}}$  distintos, existe uma única  $f \in \text{Mob}$  tal que  $f(a) = a'$ ,  $f(b) = b'$  e  $f(c) = c'$ .

A *razão cruzada (cross-ratio)* dos quatro pontos distintos  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$  é a imagem de  $z_1$  pela única  $f \in \text{Mob}$  que envia  $z_2, z_3, z_4$  em  $1, 0, \infty$ , e é denotada por

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := f(z_1) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

Em particular,  $(z, 1, 0, \infty) = z$ . A razão cruzada é invariante pelas transformações de Möbius. Ou seja,

**Teorema 15.5.** *Se  $g \in \text{Mob}$ , e  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$  são quatro pontos distintos, então*

$$(g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

*Demonstração.* Se  $f \in \text{Mob}$  envia  $z_2, z_3, z_4$  em  $1, 0, \infty$ , então  $fg^{-1}$  envia  $g(z_2), g(z_3), g(z_4)$  em  $1, 0, \infty$ . Então  $(g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)) = fg^{-1}(g(z_1)) = f(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ .  $\square$



Os três pontos  $1, 0, \infty$  determinam uma única reta, a reta real, que deve ser pensada como uma circunferência de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Um ponto  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  pertence a esta circunferência sse  $z = (z, 1, 0, \infty) \in \mathbb{R}$ .

A imagem da reta real por uma transformação de Möbius arbitrária  $f \in \text{Mob}$  é uma circunferência (uma reta ou uma circunferência euclidiana em  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ ), e todas as circunferências são assim obtidas. Pela invariância da razão cruzada podemos concluir que

**Teorema 15.6.** *Quatro pontos distintos  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$  estão numa circunferência sse a razão cruzada  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  é real.*

De consequência, a (única) circunferência que passa pelos pontos (distintos)  $a, b$  e  $c$  de  $\overline{\mathbb{C}}$  pode ser definida pela equação cartesiana  $\Im((z, a, b, c)) = 0$ .

- Determine uma equação cartesiana da circunferência que passa pelos pontos  $1, -1$  e  $i$ .

6. (Schwarz lemma) The key to understand conformal isomorphisms of the unit disk is the following application of the maximum modulus principle.

**Teorema 15.7** (Schwarz lemma). *Let  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  be a holomorphic function of the unit disk into itself fixing the origin, i.e. such that  $f(0) = 0$ . Then*

$$|f(z)| \leq |z|$$

for all  $z \in \mathbb{D}$ , and  $|f'(0)| \leq 1$ . If, moreover, there exists a point  $p \in \mathbb{D}$  where  $|f(p)| = |p|$ , then the function is a rotation, i.e.

$$f(z) = \lambda z$$

for some constant  $\lambda = e^{i\theta}$  of absolute value 1.

*Demonstração.* The Taylor series of  $f$ , which converges in  $\mathbb{D}$ , is  $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ , and therefore  $g(z) := f(z)/z = a_1 + a_2 z + \dots$  is holomorphic too, if we define  $g(0) = f'(0)$ . Since  $|f(z)| < 1$ , we have  $|g(z)| < 1/r$  if  $|z| = r < 1$ . By the maximum modulus principle the same holds for all  $|z| \leq r$ , and therefore, letting  $r \rightarrow 1$ , we conclude that  $|g(z)| \leq 1$ . If  $|g(p)| = 1$  for some  $p \in \mathbb{D}$ , by the maximum modulus principle the function  $g(z)$  must be a constant with absolute value 1.  $\square$

7. (automorfismos do disco unitário e do semi-plano superior) Se  $\alpha \in \mathbb{D}$ , então a transformação de Möbius

$$f_\alpha(z) := \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$$

define uma transformação invertível  $f_\alpha : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , que envia o ponto  $\alpha$  na origem, i.e.  $f_\alpha(\alpha) = 0$ . A inversa de  $f_\alpha$  é a própria  $f_\alpha$ , i.e.  $f_\alpha \circ f_\alpha$  é a transformação identidade. Um automorfismo do disco  $\mathbb{D}$  que fixa a origem é, pelo lema de Schwarz, uma rotação  $g(z) = e^{i\theta}z$ . De consequência,

**Teorema 15.8.** *O grupo  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  dos automorfismos conformes do disco unitário é o grupo das transformações*

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} \quad (15.2)$$

com  $\alpha \in \mathbb{D}$  e  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ .

A transformação

$$w = h(z) := \frac{z - i}{z + i} \quad (15.3)$$

define uma equivalência conforme  $h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$  do semi-plano superior sobre o disco unitário, cuja inversa é a transformação  $h^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ , definida por

$$z = h^{-1}(w) = -i \frac{w + 1}{w - 1} \quad (15.4)$$

Observe que a restrição de  $h^{-1}$  à circunferência unitária é  $h^{-1}(e^{i\theta}) = \tan(\theta/2)$ .

O grupo  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  dos automorfismos do semi-plano superior é portanto o grupo  $h^{-1} \circ \text{Aut}(\mathbb{D}) \circ h \approx \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , grupo das transformações de Möbius

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad (15.5)$$

com coeficientes reais, i.e.  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  (e determinante  $ad - bc \neq 0$ ).

- Verifique que, se  $\alpha \in \mathbb{D}$  e  $|z| = 1$  então  $|f_\alpha(z)| = 1$ .
- Verifique que  $(f_\alpha \circ f_\alpha)(z) = z$ .
- Verifique que uma transformação de Möbius (15.5) com coeficientes reais fixa a reta real  $\Im(z) = 0$  e envia  $\mathbb{H}$  em  $\mathbb{H}$ .
- Determine um automorfismo do semi-plano superior  $\mathbb{H}$  que envia o ponto  $i$  no ponto  $a \in \mathbb{H}$ .
- Determine uma equivalência conforme do primeiro quadrante  $Q_1$  no disco unitário  $\mathbb{D}$ .
- Verifique que

$$f(z) = \frac{1 + z}{1 - z}$$

define uma equivalência conforme do semi-disco superior  $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}$  sobre o primeiro quadrante  $Q_1 = \mathbb{H} \cap \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ , e calcule a transformação inversa.

8. **(Riemann mapping theorem and Dirichlet problem)** Any simply connected region  $\Omega \subset \mathbb{C}$  different from  $\mathbb{C}$  itself is conformally equivalent to the unit disk. The existence of such a conformal equivalence  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$  is the content of the famous *Riemann mapping theorem*, conjectured by Riemann in 1851 and proved by Carathéodory and Koebe sixty years later.

**Teorema 15.9** (Riemann mapping theorem). *Let  $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$  be a simply connected region whose boundary contains at least two points. Then there exists a conformal isomorphism  $R : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ . The Riemann map  $R$  is unique once we fix the image of 0 and the argument of  $R'(0)$ .*

Uniqueness follows from Schwarz's lemma. The hard part is existence, and you may find proofs in [Ah78, La03, Ru87, SS03II]. Here is Riemann's idea of the proof when the boundary of  $\Omega$  is a regular curve, based on his Dirichlet principle. We are looking for a holomorphic function  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  (the inverse of  $R$  in the theorem) which is continuous on  $\overline{\Omega}$ , sending  $f(p) = 0$  and taking value  $f(z) = 1$  if  $z \in \partial\Omega$ . By the maximum principle, such a map, if it exists, sends  $\Omega$  inside  $\mathbb{D}$ . A natural guess, if we want an injective map, is

$$f(z) = (z - p) e^{g(z)}$$

for some holomorphic function  $g(z)$ . If we write  $g(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  with  $u$  and  $v$  real valued, then the boundary condition reads

$$\log |z - p| + u(z) = 0$$

for  $z \in \partial\Omega$ . Thus, the real part of  $g(z)$  must be a harmonic function  $u(x, y)$  with prescribed value  $\log |z - p|$  on the boundary of the domain. The harmonic function

$$G(p, z) := \log |z - p| + u(z),$$

with a logarithmic singularity at  $p$  and vanishing at the boundary, is called "Green function" of the region  $\Omega$  at the point  $p$ . If we believe, with Riemann, that such Dirichlet problem has a solution, we may then find a conjugated harmonic function  $v$  (since  $\Omega$  is simply connected) and hence the required  $g(z)$ .

On the other side, the Riemann mapping theorem may be used to solve the Dirichlet problem in a generic simply connected region: find a harmonic extension  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  of a continuous function  $h_0 : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . If we assume that the Riemann map extends to a continuous bijection  $R : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\Omega$ , we may use Poisson formula to extend  $H_0 = h_0 \circ R$  to a harmonic function  $H : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  inside the unit disk. The solution of the Dirichlet problem is then  $h = H \circ R^{-1}$ .

9. (luas) Uma lua, ou *biângulo*, é uma interseção  $L = D_1 \cap D_2$  entre dois discos da esfera de Riemann (cada circunferência da esfera de Riemann divide a esfera em dois discos, cujas fronteira comum é a circunferência), ou seja, uma região  $L \subset \overline{\mathbb{C}}$  limitada entre dois arcos de circunferência que formam dois ângulos iguais, de uma certa amplitude  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , nos vértices  $a$  e  $b$ . Usando uma transformação de Möbius (a transformação  $z \mapsto (z-a)/(z-b)$ ), podemos assumir que os vértices são os pontos  $0$  e  $\infty$ , e portanto, depois de uma rotação, que  $L$  é um ângulo  $L = \{0 < \arg(z) < \varphi\}$ . Então a transformação conforme  $f(z) = z^\alpha$ , com  $\alpha = \pi/\varphi$ , envia  $L$  sobre  $\mathbb{H}$ .

Um caso particular é a lua  $A = \mathbb{H} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ , limitada pelas circunferências  $\Im(z) = 0$  e  $|z| = 1$ , que é enviada conformemente no semi-plano superior  $\mathbb{H}$  pela aplicação de Levi-Civita  $J(z) := z + 1/z$ .

Um caso limite é quando o ângulo entre as duas circunferência é nulo, ou seja, as circunferências são tangentes. Uma transformação de Möbius envia o ponto de tangência em  $\infty$ , e portanto podemos considerar, depois de uma transformação afim, que  $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im(z) < \pi\}$ . Então a transformação conforme  $f(z) = e^z$  envia  $B$  sobre  $\mathbb{H}$ .

10. (transformação Levi-Civita ou Jukovski) A transformação de Levi-Civita<sup>14 15</sup>, ou de Jukovski, é a função racional de grau 2 definida por

7 jan 2015

$$w = J(z) := z + \frac{1}{z}.$$

É injetiva em  $\mathbb{D}$  e em  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ , e envia cada uma destas regiões em  $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ . A imagem da circunferência unitária é o segmento  $[-2, 2]$ . As outras circunferências  $|z| = \rho$ , com  $\rho \neq 1$ , são enviadas nas ‘elipses de Jukovski’

$$\frac{\Re(w)^2}{\rho + \rho^{-1}} + \frac{\Im(w)^2}{\rho - \rho^{-1}} = 1$$

centradas em  $0$  com focos  $\pm 2$  e semi-eixos  $\rho \pm \rho^{-1}$ . Os raios  $\text{Arg}(z) = \theta$  são enviados nas hipérbolas

$$\frac{\Re(w)^2}{4 \cos^2 \theta} - \frac{\Im(w)^2}{4 \sin^2 \theta} = 1$$

com focos  $\pm 2$ .

Em particular,  $J(z)$  define uma equivalência conforme de  $\mathbb{H} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  sobre  $\mathbb{H}$ , e de consequência as curvas de nível  $\Im(z + 1/z) = c$  são as linhas de corrente de um fluido ideal que corre horizontalmente no semi-plano superior quando encontra um obstáculo descrito pela metade superior do disco unitário.

- Verifique que  $-J(z) = -(z + 1/z)$  define uma equivalência conforme do semi-disco superior  $\mathbb{D}_+ = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}$  sobre o semi-plano superior  $\mathbb{H}$ .
- Observe que  $\sin(z)$  é a composição

$$z \mapsto e^{iz} \mapsto ie^{iz} \mapsto -J(ie^{iz})/2$$

Deduza que  $\sin(z)$  define uma equivalência conforme de  $B_+ = \{z \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \Re(z) < \pi/2 \text{ e } \Im(z) > 0\}$  sobre  $\mathbb{H}$ .

<sup>14</sup>V.I. Arnold, *Huyghens & Barrow, Newton & Hooke*, Birkhäuser, 1990.

<sup>15</sup>T. Levi-Civita, Sur la régularisation du problème des trois corps, *Acta Math.* 42 (1920), 99-144.

## Referências

- [Ah78] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979.
- [Ap76] T.M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, 1976.
- [Ar04] V.I. Arnold, *Lectures on Partial Differential Equations*, Springer - PHASIS, 2004.
- [AS64] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, 1964.
- [Ba09] L. Barreira, *Análise Complexa e Equações Diferenciais*, IST Press, 2009.
- [BDP92] W.E. Boyce and R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley, 1992.
- [Be62] C. Kittel, W.D. Knight and M.A. Ruderman, *Berkeley Physics, Mechanics*, McGraw-Hill, 1962.
- [Bi80] A.V. Bitsadze, *Equations of Mathematical Physics*, MIR, 1980.
- [Ca95] H. Cartan, *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*, Dover, 1995. [*Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1961]
- [Ch00] T.L. Chow, *Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction*, Cambridge University Press, 2000.
- [Co73] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, Graduate Texts in Mathematics **11**, Springer Verlag, 1973.
- [CR48] R. Courant and H. Robbins, *What is mathematics?*, Oxford University Press, 1948. [*O que é Matemática?*, Editora Ciência Moderna, 2000].
- [FLS63] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley, Reading, 1963.
- [Gam01] T.W. Gamelin, *Complex analysis*, Springer, 2001.
- [GdF87] D. Guedes de Figueiredo, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Projeto Euclides, IMPA, 1987.
- [Fo92] G.B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, American Mathematical Society, 1992.
- [HC89] D. Hilbert and R. Courant, *Methoden der Mathematischen Physik*, Verlag 1924 [*Methods of mathematical physics*, Wiley-VCH, 1989].
- [HW59] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, fourth edition, Oxford University Press, 1959.
- [KF83] A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Elementos de Teoria das Funções e de Análise Funcional*, MIR, 1983.
- [Io05] V. Iório, *EDP, um Curso de Graduação*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2005.
- [La03] S. Lang, *Complex Analysis*, GTM **103**, Springer Verlag, 2003.
- [LC72] M. Laurentiev et B. Chabat, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*, Éditions de Moscou MIR, 1972.
- [LL78] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Mecânica*, MIR, 1978.
- [LN96] A. Lins Neto, *Funções de uma variável complexa*, Projeto Euclides IMPA, 1996.

- [Ma99] J.E. Marsden, *Basic complex analysis*, W.H. Freeman, 1999.
- [McM11] C.T. McMullen, *Complex Analysis*, Course Notes, Harvard University, 2011.
- [MF05] P.M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, 1953 [Feshbach Publishing, 2005].
- [MG14] P. Martins Girão, *Introdução à Análise Complexa, Séries de Fourier e Equações Diferenciais*, IST Press, 2014.
- [Na06] P.J. Nahin, *Dr. Euler's fabulous formula: cures many mathematical ills*, Princeton University Press, 2006.
- [O'N99] P.V. O'Neil, *Beginning Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1999.
- [Pi91] M.A. Pinsky, *Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications*, McGraw-Hill, 1991.
- [RHB06] K.F. Riley, M.P. Hobson and S.J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Third Edition, Cambridge University Press, 2006.
- [Ru87] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- [Sm03] G. Smirnov, *Análise Complexa e Aplicações*, Escolar Editora, 2003.
- [SS03I] E.M. Stein and R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton Lectures in Analysis I, Princeton University Press, 2003.
- [SS03II] E.M. Stein and R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton Lectures in Analysis II, Princeton University Press, 2003.
- [ST71] A.G. Svesnikov and A.N. Tichonov, *The Theory of Functions of a Complex Variable*, MIR, 1971.
- [TS81] A.N. Tichonov e A.A. Samarskij, *Equazioni della fisica matematica*, MIR, 1981.