01/09/2015 especial

# Análise Complexa

**Nome** ............................................................................................**N$^o$** ................. ☐ ENGFIS ☐ FIS

`Instruções: responda nesta folha de enunciado e justifique as suas resposta numa folha de exame.`

1. *(2 valores)* Verifique se a seguinte função, definida no plano complexo $\mathbb{C}$, é holomorfa:

$$f(x+iy) = e^{-y}\cos(x) + ie^{-y}\sin(x)\,.$$

2. *(2 valores)* Calcule o seguinte integral, ao longo do contorno $\gamma = \{z(t) = e^{it} \,:\, t \in [0, \pi/2]\}$:

$$\int_\gamma e^z\, dz\,.$$

3. *(2 valores)* Determine a série de Laurent em torno de $p = 0$, e o seu anel de convegência, da função

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z^2}\,.$$

4. *(2 valores)* Determine e classifique as singularidade isoladas e calcule os respetivos resíduos da função

$$f(z) = \frac{1}{z^2\,(z^2-4)}\,.$$

5. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2(z^2-4)}\, dz\,.$$

6. *(2 valores)* Calcule o integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos(\theta)}\,.$$

7. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier de senos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ da função definida, no intervalo $[0,\pi]$, por $f(x) = x - \pi/2$.

8. *(2 valores)* Determine a solução formal da equação de calor $u_t = u_{xx}$ no intervalo $[0,\pi]$ com condições de fronteira nulas, ou seja, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para todo tempo $t \geq 0$, e condição inicial $u(x,0) = x - \pi/2$ se $0 < x < \pi$.

9. *(2 valores)* Determine uma função harmónica conjugada da função $u(x,y) = x - xy$.

10. *(2 valores)* Determine uma equivalência conforme $f : Q \to \mathbb{H}$ entre o primeiro quadrante $Q := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0 \text{ e } \Im(z) > 0\}$ e o semi-plano superior $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} :, \Im(z) > 0\}$.