Capítulo 2

Cálculo Matricial

$\mathbb{K}$ designa $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

2.1 Notação matricial

Uma matriz do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ é uma tabela com mn elementos de $\mathbb{K}$, elementos esses dispostos em m linhas e n colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Os elementos a_{ij} dizem-se os elementos ou componentes da matriz. A matriz diz-se do tipo $m \times n$ se tiver m linhas e n colunas.

O conjunto de todas as matrizes (do tipo) $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ou por $\mathbb{K}^{m\times n}$, e o conjunto de todas as matrizes (finitas) sobre $\mathbb{K}$ por $\mathcal{M}(\mathbb{K})$.
$\mathbb{K}^m$ denota $\mathbb{K}^{m\times 1}$.

Alguns exemplos de matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Quando conveniente, escrevemos a matriz A da definição anterior como

$$[a_{ij}],$$

e referimos a_{ij} como o elemento (i,j) de A, isto é, o elemento na linha i e na coluna j de A. Iremos também usar a notação $(A)_{ij}$ para indicar o elemento na linha i e coluna j de A.

Duas matrizes $[a_{ij}], [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ são iguais se $a_{ij} = b_{ij}$, para $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$. Ou seja, duas matrizes são iguais se têm o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas, e que os elementos na mesma linha e coluna são iguais.

Uma matriz do tipo m por n diz-se *quadrada* de ordem n se $m = n$, ou seja, se o número de linhas iguala o de colunas; diz-se *rectangular* caso contrário. Por exemplo, são quadradas as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

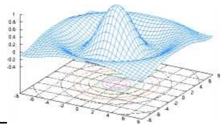
e rectangulares as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Os *elementos diagonais* de $[a_{ij}]_{i,j=1,\ldots n}$ são $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Por exemplo, os elementos diagonais de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ são 1 e -2, e os da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ são 1 e 5.

Nos exemplos atrás apresentados, apenas a matriz A é quadrada, sendo as restantes rectangulares. Os elementos diagonais de A são $1, 3$.



Octave

Suponha que se pretende definir a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Para tal, faz-se

```
> A=[1 2;2 3]
A =

  1  2
  2  3
```

A entrada $(1, 2)$ é mostrada através do comando

```
> A(1,2)
ans = 2
```

A primeira linha e a segunda coluna da matriz são mostradas com, respectivamente,

```
> A(1,:)
ans =

  1  2

> A(:,2)
```

```
ans =

  2
  3
```

Considere agora a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2-i & 3i \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$:

```
> B=[1 2-i 3i; 0 sqrt(2) -1]
B =

   1.00000 + 0.00000i   2.00000 - 1.00000i   0.00000 + 3.00000i
   0.00000 + 0.00000i   1.41421 + 0.00000i  -1.00000 + 0.00000i
```

No Octave, todas as constantes numéricas são representadas no formato de vírgula flutuante com dupla precisão (as constantes complexas são memorizadas como pares de valores de vírgula flutuante de dupla precisão). O Octave, por defeito, apenas mostra uma parte do valor que armazenou.

```
> format long
> B=[1, 2-i, 3i; 0, sqrt(2), -1]
B =

 Column 1:

   1.000000000000000 + 0.000000000000000i
   0.000000000000000 + 0.000000000000000i

 Column 2:

   2.000000000000000 - 1.000000000000000i
   1.414213562373095 + 0.000000000000000i

 Column 3:

   0.000000000000000 + 3.000000000000000i
  -1.000000000000000 + 0.000000000000000i

> format
> B
B =

   1.00000 + 0.00000i   2.00000 - 1.00000i   0.00000 + 3.00000i
   0.00000 + 0.00000i   1.41421 + 0.00000i  -1.00000 + 0.00000i
```

Suponhamos agora que se pretende definir C como a matriz constituída pelos elementos que estão nas linhas de B e que estão nas colunas 1 e 2 de B. Para tal, usa-se o comando `B(:,1:2)`. Aqui, o primeiro `:` indica que se pretender usar todas as linhas de B. O argumento `1:2` indica que consideram da primeira à segunda colunas de B.

```
> C=B(:,1:2)
ans =

  1.00000 + 0.00000i  2.00000 - 1.00000i
  0.00000 + 0.00000i  1.41421 + 0.00000i
```

Se se pretender a coluna 1 e 3, então usa-se a instrução `B(:,[1,3])`. Uma forma mais rebuscada seria usar o argumento `1:2:3`. A sintaxe é simples: *início:incremento:final*. Assim sendo,

```
> B(:,1:2:3)
ans =

   1 + 0i   0 + 3i
   0 + 0i  -1 + 0i
```

Finalmente, podemos concatenar a matriz A definida atrás, por colunas e por linhas, respectivamente,

```
> [B(:,1:2:3) A]
ans =

   1 + 0i   0 + 3i   1 + 0i   2 + 0i
   0 + 0i  -1 + 0i   2 + 0i   3 + 0i

> [B(:,1:2:3); A]
ans =

   1 + 0i   0 + 3i
   0 + 0i  -1 + 0i
   1 + 0i   2 + 0i
   2 + 0i   3 + 0i
```

Preste atenção que nem sempre estas operações são possíveis. Uma das causas de falha é o número de linhas ou colunas não compatível.

Finalmente, obtém-se a conjugada de uma matriz conjugando as componentes da matriz dada. Ou seja, a *matriz conjugada* de $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, denotada como $\bar{A}$, é a matriz $m \times n$ definida por $(\bar{A})_{ij} = \overline{a_{ij}}$. Por exemplo,

```
> conj (B)
ans =
```

```
1.00000 - 0.00000i   2.00000 + 1.00000i   0.00000 - 3.00000i
0.00000 - 0.00000i   1.41421 - 0.00000i  -1.00000 - 0.00000i
```

Apresentamos, de seguida, alguns tipos especiais de matrizes.

1. Uma matriz diz-se *diagonal* se for da forma
$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} = diag\,(d_1, d_2, \ldots, d_n)\,,$$
ou seja, o elemento (i,j) é nulo, se $i \neq j$. Portanto, uma matriz quadrada é diagonal se os únicos elementos possivelmente não nulos são os diagonais.

2. A *matriz identidade* de ordem n, I_n, é a matriz diagonal de ordem n, com os elementos diagonais iguais a 1; ou seja,
$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Uma matriz $A = [a_{ij}]$ diz-se *triangular superior* se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$, e *triangular inferior* se $a_{ij} = 0$ quando $i < j$. Ou seja, são respectivamente triangulares superiores e inferiores as matrizes
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

4. Matrizes circulantes
$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}.$$

5. Matrizes companheiras, com $v \in \mathbb{K}^{n-1}$,
$$\begin{bmatrix} 0 & a_0 \\ I_{n-1} & v \end{bmatrix}.$$

6. Matrizes de Hankel

$$H_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & * & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & * & * & a_n \\ a_2 & * & * & * & * \\ * & a_{n-1} & a_n & * & * \\ a_{n-1} & a_n & * & * & a_{2(n-1)} \end{bmatrix}.$$

7. Matrizes de Toeplitz

$$T_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & * & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & * & * & * \\ * & a_{-1} & * & * & * \\ a_{-n+2} & * & * & * & a_1 \\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & * & a_{-1} & a_0 \end{bmatrix}.$$

2.2 Operações matriciais

Vejamos agora algumas operações definidas entre matrizes, e algumas propriedades que estas satisfazem.

2.2.1 Soma e produto escalar

Sejam $A = [a_{ij}]\,, B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

1. A soma entre matrizes $A + B$ é a matriz $m \times n$ cujo elemento (i, j) é $a_{ij} + b_{ij}$. Ou seja, $(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$.

2. O produto de uma matriz com um escalar αA é a matriz $m \times n$ cujo elemento (i, j) é $\alpha\, a_{ij}$. Ou seja, $(\alpha A)_{ij} = \alpha(A)_{ij}$.

Repare que a soma de duas matrizes, da mesma ordem, é feita elemento a elemento, e o produto escalar de uma matriz por $\alpha \in \mathbb{K}$ é de novo uma matriz da mesma ordem da dada, onde cada entrada surge multiplicada por α. Ou seja,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

e

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1m} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \dots & \alpha a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix}$$

e

$$5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 2 \\ 5\cdot 3 & 5\cdot 4 \end{bmatrix}.$$

Como é fácil de compreender, a soma e o produto escalar são comutativos.

De ora em diante, 0 representa uma qualquer matriz cujos elementos são nulos, e se $A = [a_{ij}]$ então $-A = [-a_{ij}]$.

Estas operações satisfazem as propriedades que de seguida se descrevem, onde $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

1. A soma de matrizes é associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

2. A soma de matrizes é comutativa: $A + B = B + A$

3. A matriz nula é o elemento neutro da adição: $A + 0 = 0 + A$.

4. Existe o simétrico de cada matriz $A + (-A) = (-A) + A = 0$.

5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

7. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

8. $1 \cdot A = A$.

2.2.2 Produto

Resta-nos definir o produto matricial.

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $m \times p$ e $B = [b_{ij}]$ uma matriz $p \times n$. O produto de A por B, denotado por AB, é a matriz $m\times n$ cujo elemento (i, j) é $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$. Assim,

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right]_{m\times p} \text{ e portanto } (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p}(A)_{ik}(B)_{kj}.$$

Atente-se nas dimensões de A e B na definição anterior.

Antes de fazermos referência a algumas propriedades, vejamos uma outra forma exprimir o produto de duas matrizes. Para tal, assuma que $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, sendo a primeira do tipo $1 \times n$ e a segunda do tipo $n \times 1$. Pelo que acabámos de referir, o produto de X por Y está bem definido, sendo a matriz produto do tipo 1×1, e portanto, um elemento de $\mathbb{K}$. Esse elemento é $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_ny_n$. Voltemos agora ao produto de $A_{m\times p}$ por $B_{p\times n}$, e fixemos a linha i de A e a coluna j de B. Ou seja, a matriz linha $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{bmatrix}$ e a matriz coluna $\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix}$. O produto da primeira pela segunda é o elemento de $\mathbb{K}$ dado por $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$. Ora, este elemento não é mais nem menos que a entrada (i,j) da matriz produto AB. Ou seja, a entrada (i,j) de AB é o produto da linha i de A pela coluna j de B.

Vejamos algumas propriedades deste produto de matrizes, onde as dimensões das matrizes $A, B, C, I, 0$ são tais que as operações indicadas estão definidas, e $\alpha \in \mathbb{K}$:

1. O produto de matrizes é associativo $(AB)C = A(BC)$;
2. O produto de matrizes é distributivo em relação à soma $A(B+C) = AB + AC, (A+B)C = AC + BC$;
3. A matriz identidade é o elemento neutro para o produto: $AI = A, IA = A$;
4. A matriz nula é o elemento absorvente para o produto: $0A = 0, A0 = 0$;
5. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Façamos a verificação da primeira igualdade de (1). A verificação de que as matrizes são do mesmo tipo fica ao cargo do leitor. Iremos apenas verificar que a entrada (i,j) de $A(B+C)$ iguala a entrada (i,j) de $AB + AC$. Ora, supondo que A tem p colunas, e portanto que B e C têm p linhas,

$$\begin{aligned}
(A(B+C))_{ij} &= \sum_{k=1}^{p}(A)_{ik}((B)_{kj} + (C)_{kj}) \\
&= \sum_{k=1}^{p}((A)_{ik}(B)_{kj} + (A)_{ik}(C)_{kj}) \\
&= \sum_{k=1}^{p}(A)_{ik}(B)_{kj} + \sum_{k=1}^{p}(A)_{ik}(C)_{kj} \\
&= (AB)_{ij} + (AC)ij = (AB + AC)_{ij}.
\end{aligned}$$

Verifiquemos também a propriedade (3). Note-se que $(I)_i = 1$ e $(I)_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Ora $(AI)_{ij} = \sum_{k=1}^{p}(A)_{ik}(I)_{kj} = (A)_{ij}$.

É importante notar que o produto matricial <u>não é</u>, em geral, comutativo. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. A lei do anulamento do produto também não é válida, em geral, no produto matricial. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$, sem que um dos factores seja nulo. Ou seja, $AB = 0 \not\Rightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$. De uma forma mais geral, $(AB = AC \text{ e } A \neq 0) \not\Rightarrow (B = C)$, já que, por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Como é fácil de observar, a soma de duas matrizes triangulares inferiores [resp. triangulares superiores] é de novo triangular inferior [resp. triangular superior]. O que se pode dizer em relação ao produto?

Teorema 2.2.1. *O produto de matrizes triangulares inferiores [resp. triangulares superiores] é de novo uma matriz triangular inferior [resp. triangular superior].*

Demonstração. Sejam A, B duas matrizes triangulares inferiores de tipo apropriado. Ou seja, $(A)_{ij}, (B)_{ij} = 0$, para $i < j$. Pretende-se mostrar que, para $i < j$ se tem $(AB)_{ij} = 0$. Ora, para $i < j$, e supondo que A tem p colunas, $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (A)_{ik}(B)_{kj} = \sum_{k=1}^{i} (A)_{ik}(B)_{kj} = 0$. $\square$

Por vezes é conveniente considerar-se o produto matricial por blocos. Para tal, considere as matrizes A e B divididas em submatrizes

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

de forma conforme as operações descritas de seguida estejam definidas, então

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

De uma forma mais geral, se

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mp} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{pn} & B_{pn} & \cdots & B_{pn} \end{bmatrix}$$

em que as submatrizes são tais que as operações seguintes estão bem definidas, então

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} A_{1k}B_{k1} & \sum_{k=1}^{p} A_{1k}B_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} A_{1k}B_{kn} \\ \sum_{k=1}^{p} A_{2k}B_{k1} & \sum_{k=1}^{p} A_{2k}B_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} A_{2k}B_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} A_{mk}B_{k1} & \sum_{k=1}^{p} A_{mk}B_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} A_{mk}B_{kn} \end{bmatrix}.$$

2.2.3 Transposição

A *transposta* de uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, é a matriz $A^T = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ cuja entrada (i, j) é a_{ji}, para $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$. Ou seja, $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$. A matriz é *simétrica* se $A^T = A$.

Como exemplo, a transposta da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, e a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica.

Repare que a coluna i de A^T é a linha i de A, e que uma matriz é simétrica se e só se for quadrada e forem iguais os elementos situados em posições simétricas relativamente à diagonal principal.

A transposição de matrizes goza das seguintes propriedades:

1. $\left(A^T\right)^T = A$;

2. $(A+B)^T = A^T + B^T$;

3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, para $\alpha \in \mathbb{K}$;

4. $(AB)^T = B^T A^T$;

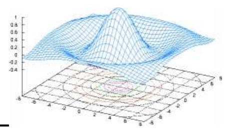
5. $\left(A^k\right)^T = \left(A^T\right)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

A afirmação (1) é válida já que $((A^T)^T)_{ij} = (A^T)_{ji} = (A)_{ij}$.

Para (2), $((A+B)^T)_{ij} = (A+B)_{ji} = (A)_{ji} + (B)_{ji} = (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij}$.

Para (4), $((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k (A)_{jk}(B)_{ki} = \sum_k (B)_{ki}(A)_{jk} = \sum_k (B^T)_{ik}(A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}$.

Para (5), a prova é feita por indução no expoente. Para $k = 1$ a afirmação é trivialmente válida. Assumamos então que é válida para um certo k, e provemos que é válida para $k+1$. Ora $(A^{k+1})^T = (A^k A)^T =_{(4)} A^T (A^k)^T = A^T (A^T)^k = (A^T)^{k+1}$.



Octave

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Note que são do mesmo tipo, pelo que a soma está bem definida. Verifica-se a comutatividade destas matrizes para a soma.

```
> A=[1 2; 2 3]; B=[0 1; -1 1];
> A+B
ans =

  1  3
  1  4

> B+A
ans =

  1  3
  1  4
```

Façamos o produto de A pelo escalar 2:

```
> 2*A
ans =

  2  4
  4  6
```

Note ainda que o número de colunas de A iguala o número de linhas de B, pelo que o produto AB está bem definido.

```
> A*B
ans =

  -2   3
  -3   5
```

Verifique que também o produto BA está bem definido. Mas

```
> B*A
ans =

  2  3
  1  1
```

$BA \neq AB$, pelo que o produto de matrizes não é, em geral, comutativo.

Considere agora a matriz C cujas colunas são as colunas de A e a terceira coluna é a segunda de B:

```
> C=[A B(:,2)]
C =

  1  2  1
  2  3  1
```

Como C é uma matriz 2×3, a sua transposta, C^T, é do tipo 3×2:

```
> C'
ans =

  1  2
  2  3
  1  1

> size(C')
ans =
```

```
   3   2
```

2.2.4 Invertibilidade

Uma matriz A quadradada de ordem n diz-se *invertível* se existir uma matriz B, quadrada de ordem n, para a qual

$$AB = BA = I_n.$$

Teorema 2.2.2. *Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se existe uma matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AB = BA = I_n$ então ela é única.*

Demonstração. Se B e B' são matrizes quadradas, $n \times n$, para as quais

$$AB = BA = I_n = AB' = B'A$$

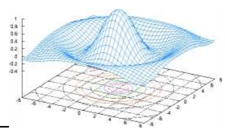
então

$$B' = B'I_n = B'(AB) = (B'A)B = I_nB = B.$$

$\square$

A matriz B do teorema, caso exista, diz-se a *inversa* de A e representa-se por A^{-1}.

Por exemplo, a matriz $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ não é invertível. Por absurdo, suponha que existe T, de ordem 2, tal que $ST = I_2 = TS$. A matriz T é então da forma $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$. Ora $ST = \begin{bmatrix} x & y \\ x & y \end{bmatrix}$, que por sua vez iguala I_2, implicando por sua vez $x = 1$ e $y = 0$, juntamente com $x = 0$ e $y = 1$.



Octave

Considere a matriz real de ordem 2 definida por $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Esta matriz é invertível. Mais adiante, forneceremos formas de averiguação da invertibilidade de uma matriz, bem como algoritmos para calcular a inversa. Por enquanto, deixemos o Octave fazer esses cálculos, sem quaisquer justificações:

```
> A=[1,2;2,3];
> X=inv(A)
X =

  -3   2
```

```
   2  -1
```

Ou seja, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Façamos a verificação de que $AX = XA = I_2$:

```
> A*X
ans =

  1  0
  0  1

> X*A
ans =

  1  0
  0  1
```

Uma forma um pouco mais rebuscada é a utilização de um operador boleano para se aferir da veracidade das igualdades. Antes de nos aventurarmos nesse campo, e sem pretender deviarmo-nos do contexto, atribua a a e a b os valores 2 e 3, respectivamente:

```
> a=2;b=3;
```

Suponha agora que se pretende saber se os quadrados de a e de b são iguais. Em linguagem matemática, tal seria descrito por $a^2 = b^2$. Como é óbvio, no Octave tal seria sujeito de dupla significação: o símbolo = refere-se a uma atribuição à variável ou parte de uma proposição? Como vimos anteriormente, = tem sido repetidamente usado como símbolo de atribuição (como por exemplo em a=2); se se pretende considerar = enquanto símbolo de uma proposição, então usa-se ==. O resultado será 1 se a proposição é verdadeira e 0 caso contrário. Por exemplo,

```
> a^2==b^2
ans = 0
> a^2!=b^2
ans = 1
```

Usou-se[1] `!=` para indicar $\neq$.

Voltemos então ao nosso exemplo com as matrizes. Recorde que se pretende averiguar sobre a igualdade $AX = I_2$. O Octave tem uma função pré-definida que constrói a matriz identidade de ordem n: `eye(n)`. Por exemplo, a matriz I_3 é obtida com

```
> eye(3)
ans =
```

[1]De facto poder-se-ia ter usado também $\sim$=, estando esta palavra também em consonância com a sintaxe do MatLab.

```
  1  0  0
  0  1  0
  0  0  1
```

Portanto, a verificação de $AX = I_2$ é feita com:

```
> A*X==eye(2)
ans =

  1  1
  1  1
```

A resposta veio em forma de tabela 2×2: cada entrada indica o valor boleano da igualdade componente a componente. Suponha que as matrizes têm ordem suficientemente grande por forma a tornar a detecção de um 0 morosa e sujeita a erros. Uma alternativa será fazer

```
> all(all(A*X==eye(2)))
ans = 1
```

Teorema 2.2.3. *Dadas duas matrizes U e V de ordem n, então UV é invertível e*

$$(UV)^{-1} = V^{-1}U^{-1}.$$

Demonstração. Como

$$(UV)\left(V^{-1}U^{-1}\right) = U\left(VV^{-1}\right)U^{-1} = UI_nU^{-1} = UU^{-1} = I_n$$

e

$$\left(V^{-1}U^{-1}\right)(UV) = V^{-1}\left(U^{-1}U\right)V = V^{-1}I_nV = V^{-1}V = I_n,$$

segue que UV é invertível e a sua inversa é $V^{-1}U^{-1}$. □

Ou seja, o produto de matrizes invertíveis é de novo uma matriz invertível, e iguala o produto das respectivas inversas por ordem inversa.

Duas matrizes A e B, do mesmo tipo, dizem-se *equivalentes*, e denota-se por $A \sim B$, se existirem matrizes U, V invertíveis para as quais $A = UBV$. Repare que se $A \sim B$ então $B \sim A$, já que se $A = UBV$, com U, V invertíveis, então também $B = U^{-1}AV^{-1}$. Pelo teorema anterior, se $A \sim B$ então A é invertível se e só se B é invertível.

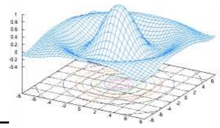
As matrizes A e B são *equivalentes por linhas* se existir U invertível tal que $A = UB$. É óbvio que se duas matrizes A e B são equivalentes por linhas, então são equivalentes, ou seja, $A \sim B$.

Se uma matriz U for invertível, então a sua transposta U^T também é invertível e $\left(U^T\right)^{-1} = \left(U^{-1}\right)^T$. A prova é imediata, bastando para tal verificar que $\left(U^{-1}\right)^T$ satisfaz as condições de inversa, seguindo o resultado pela unicidade.

Segue também pela unicidade da inversa que

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A,$$

isto é, que a inversa da inversa de uma matriz é a própria matriz.



Octave

Façamos a verificação desta propriedade com a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$:

```
> B=A';
> inv(A')==(inv(A))'
ans =

  1  1
  1  1
```

Vimos, atrás, que o produto de matrizes triangulares inferiores [resp. superiores] é de novo uma matriz triangular inferior [resp. superior]. O que podemos dizer em relação à inversa, caso exista?

Teorema 2.2.4. *Uma matriz quadrada triangular inferior [resp. superior] é invertível se e só se tem elementos diagonais não nulos. Neste caso, a sua inversa é de novo triangular inferior [resp. superior].*

Antes de efectuarmos a demonstração, vejamos a que se reduz o resultado para matrizes (quadradas) de ordem de 2, triangulares inferiores. Seja, então, $L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, que assumimos invertível. Portanto, existem $x, y, z, w \in \mathbb{K}$ para os quais $I_2 = L \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, donde segue, em particular, que $a_{11}x = 1$, e portanto $a_{11} \neq 0$ e $x = \frac{1}{a_{11}}$. Assim, como $a_{11}y = 0$ e $a_{11} \neq 0$ tem-se que $y = 0$. Ou seja, a inversa é triangular inferior. Como $y = 0$, o produto da segunda linha de L com a segunda coluna da sua inversa é $a_{22}w$, que iguala $(I)_{22} = 1$. Portanto, $a_{22} \neq 0$ e $w = \frac{1}{a_{11}}$. O produto da segunda linha de L com a primeira coluna da sua inversa é $a_{21}\frac{1}{a_{11}} + a_{22}z$, que iguala $(I)_{21} = 0$. Ou seja, $z = -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22}}$.

Demonstração. A prova é feita por indução no número de linhas das matrizes quadradas.

Para $n = 1$ o resultado é trivial. Assuma, agora, que as matrizes de ordem n triangulares inferiores invertíveis são exactamente aquelas que têm elementos diagonais não nulos. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz triangular inferior, quadrada de ordem $n + 1$. Particione-se a matriz por blocos da forma seguinte:

$$\left[\begin{array}{c|c} a_{11} & O \\ \hline b & \widetilde{A} \end{array}\right],$$

onde b é $n \times 1$, O é $1 \times n$ e $\widetilde{A}$ é $n \times n$ triangular inferior.

Por um lado, se A é invertível então existe $\left[\begin{array}{c|c} x & Y \\ \hline Z & W \end{array}\right]$ inversa de A, com $x_{1\times 1}, Y_{1\times n}, Z_{n\times 1}$, $W_{n\times n}$. Logo $a_{11}x = 1$ e portanto $a_{11} \neq 0$ e $x = \frac{1}{a_{11}}$. Assim, como $a_{11}Y = 0$ e $a_{11} \neq 0$ tem-se que $Y = 0$. O bloco $(2,2)$ do produto é então $\widetilde{A}W$, que iguala I_n. Sabendo que $\left[\begin{array}{c|c} x & Y \\ \hline Z & W \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & O \\ \hline b & \widetilde{A} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right]$, tem-se que também $W\widetilde{A} = I_n$, e portanto $\widetilde{A}$ é invertível, $n \times n$, com $(\widetilde{A})^{-1} = W$. Usando a hipótese de indução aplicada a $\widetilde{A}$, os elementos diagonais de $\widetilde{A}$, que são os elementos diagonais de A à excepção de a_{11} (que já mostrámos ser não nulo) são não nulos.

Reciprocamente, suponha que os elementos diagonais de A são não nulos, e portanto que os elementos diagonais de $\widetilde{A}$ são não nulos. A hipótese de indução garante-nos a invertibilidade de $\widetilde{A}$. Basta verificar que $\left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ \hline -\frac{1}{a_{11}}\widetilde{A}^{-1}b & \widetilde{A}^{-1} \end{array}\right]$ é a inversa de A. □

Para finalizar esta secção, e como motivação, considere a matriz $V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Esta matriz é invertível, e $V^{-1} = V^T$ (verifique!). Este tipo de matrizes denominam-se por ortogonais. Mais claramente, uma *matriz ortogonal* é uma matriz (quadrada) invertível, e cuja inversa iguala a sua transposta. De forma equivalente, uma matriz A invertível diz-se ortogonal se $AA^T = A^TA = I$.

Teorema 2.2.5. *1. A inversa de uma matriz ortogonal é também ela ortogonal.*

2. O produto de matrizes ortogonais é de novo uma matriz ortogonal.

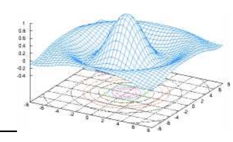
Demonstração. (1) Seja A uma matriz ortogononal, ou seja, para a qual a igualdade $A^T = A^{-1}$ é válida. Pretende-se mostrar que A^{-1} é ortogonal; ou seja, que $\left(A^{-1}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$. Ora $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{-1}$.

(2) Sejam A, B matrizes ortogonais. Em particular são matrizes invertíveis, e logo AB é invertível. Mais,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^TA^T = (AB)^T .$$

□

Impõe-se aqui uma breve referência aos erros de arredondamento quando se recorre a um sistema computacional numérico no cálculo matricial. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$. A matriz é ortogonal já que $AA^T = A^TA = I_2$.



Octave

Definamos a matriz A no Octave:

```
> A=[sqrt(2)/2 sqrt(2)/2; -sqrt(2)/2 sqrt(2)]
A =

   0.70711   0.70711
  -0.70711   1.41421
```

Verifique-se se $AA^T = A^T A$:

```
> all(all(A*A'==A'*A))
ans = 0
```

A proposição é falsa! Calcule-se, então, $AA^T - A^T A$:

```
> A*A'-A'*A
ans =

    0.0000e+00   -8.5327e-17
   -8.5327e-17    0.0000e+00
```

É premente alertar para o facto de erros de arredondamento provocarem afirmações falsas. Teste algo tão simples como

```
> (sqrt(2))^2==2
```

A *transconjugada* de A é a matriz $A^* = \bar{A}^T$. Ou seja, $(A^*)_{ij} = \overline{(A)_{ji}}$. Esta diz-se *hermítica* (ou *hermitiana*) se $A^* = A$.

Sejam A, B matrizes complexas de tipo apropriado e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então

1. $(A^*)^* = A$;
2. $(A+B)^* = A^* + B^*$;
3. $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$;
4. $(AB)^* = B^* A^*$;
5. $(A^n)^* = (A^*)^n$, para $n \in \mathbb{N}$;

A prova destas afirmações é análoga à que apresentámos para a transposta, e fica ao cuidado do leitor.

Uma *matriz unitária* é uma matriz (quadrada) invertível, e cuja inversa iguala a sua transconjugada. De forma equivalente, uma matriz A invertível diz-se unitária se $AA^* = A^* A = I$.

Teorema 2.2.6. *1. A inversa de uma matriz unitária é também ela unitária.*

2. O produto de matrizes unitárias é de novo uma matriz unitária.

Remetemos o leitor ao que foi referido no que respeitou as matrizes ortogonais para poder elaborar uma prova destas afirmações.

2.3 Um resultado de factorização de matrizes

2.3.1 Matrizes elementares

Nesta secção, iremos apresentar um tipo de matrizes que terão um papel relevante em resultados vindouros: as matrizes elementares. Estas dividem-se em três tipos:

$$a \neq 0; D_k(a) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & a & & \\ & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & & \uparrow & & \\ & & & & k & & \end{array} & \end{array}$$

$$i \neq j; E_{ij}\,(a) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & a & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & & \uparrow & & \\ & & & & j & & \end{array} & \end{array}$$

$$
P_{ij} = \begin{array}{cl}
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & \cdots & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & \uparrow & & & & \uparrow & & & \\
 & & & i & & & & j & & &
\end{array}
&
\end{array}
$$

Ou seja, as matrizes elementares de ordem n são obtidas da matriz identidade I_n fazendo:

- para $D_k(a)$, substituindo a entrada (k, k) por a;
- para $E_{ij}(a)$, substituindo a entrada (i, j) por a;
- para P_{ij}, trocando as linhas i e j (ou de outra forma, as colunas i e j).

É óbvio que $D_\ell(1) = E_{ij}(0) = P_{kk} = I_n$.

A primeira propriedade que interessa referir sobre estas matrizes é que são invertíveis. Mais, para $a, b \in \mathbb{K}, a \neq 0$,

$$(D_k(a))^{-1} = D_k\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$(E_{ij}(b))^{-1} = E_{ij}(-b), \text{ para } i \neq j$$

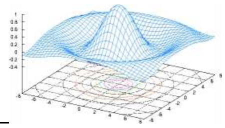
$$(P_{ij})^{-1} = P_{ij}$$

A segunda, relevante para o que se segue, indica outro o modo de se obter as matrizes $D_k(a)$ e $E_{ij}(a)$ da matriz identidade, cujas linhas são denotadas por $l_1, l_2, \ldots, l_n$:

- para $D_k(a)$, substituindo a linha k por $a\, l_k$;
- para $E_{ij}(a)$, substituindo a linha i por $l_i + a\, l_j$.

Aplicando o mesmo raciocínio, mas considerando as colunas $c_1, c_2, \ldots, c_n$ da matriz identidade:

- para $D_k(a)$, substituindo a coluna k por $a\, c_k$;
- para $E_{ij}(a)$, substituindo a coluna j por $c_j + a\, c_i$.



Octave

Considere as matrizes 3×3 elementares $D = D_2(5); E = E_{23}(3); P = P_{13}$. Recorde que a matriz I_3 é dada por `eye(3)`.

```
> D=eye(3);
> D(2,2)=5;
> D
D =

  1  0  0
  0  5  0
  0  0  1

> E=eye(3);
> E(2,3)=3;
> E
E =

  1  0  0
  0  1  3
  0  0  1

> I3=eye(3);
> P=I3;
> P(1,:)=I3(3,:); P(3,:)=I3(1,:);
> P
P =

  0  0  1
  0  1  0
  1  0  0
```

Nesta última matriz, as instruções `P(1,:)=I3(3,:); P(3,:)=I3(1,:);` indicam que a primeira linha de P é a terceira de I_3 e a terceira de P é a primeira de I_3.

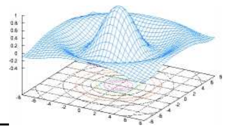
O que sucede se, dada uma matriz A, a multiplicarmos à esquerda ou à direita[2] por uma

[2] Recorde que o produto matricial não é, em geral, comutativo, pelo que é relevante a distinção dos dois casos.

matriz elementar? Vejamos com alguns exemplos, tomando

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, P = P_{12}, E = E_{31}(-2), D = D_2\left(\frac{1}{2}\right).$$

Vamos usar o Octave para determinar o produto $DEPA$. Para tal, faremos primeiro PA, a este produto fazemos a multiplicação, à esquerda, por E, e finalmente ao produto obtido a multiplicação por D, de novo à esquerda.



Octave

Vamos então definir as matrizes `A,P,E,D` no Octave:

```
> A=[4 2 0; 1 1 0; 2 -1 4];
> I3=eye(3);
> E=I3; E(3,1)=-2;
> P=I3; P(1,:)=I3(2,:); P(2,:)=I3(1,:);
> D=I3; D(2,2)=1/2;
```

Façamos o produto PA:

```
> P*A
ans =

   1   1   0
   4   2   0
   2  -1   4
```

Qual a relação entre A e PA? Repare que ocorreu uma troca da primeira e da segunda linha de A. Que por sinal foram as mesmas trocas que se efectuaram a I_3 de forma a obtermos P_{12}.

À matriz PA, multiplicamo-la, à esquerda, por E:

```
> E*P*A
ans =

   1   1   0
   4   2   0
   0  -3   4
```

```
> D*E*P*A
ans =

   1   1   0
```

```
2   1   0
0  -3   4
```

Uma *matriz permutação* de ordem n é uma matriz obtida de I_n à custa de trocas de suas linhas (ou colunas). Aqui entra o conceito de permutação. Uma permutação no conjunto $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ é uma bijecção (ou seja, uma aplicação simultaneamente injectiva e sobrejectiva) de N_n em N_n. Uma permutação $\varphi : N_n \to N_n$ pode ser representada pela tabela $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \cdots & \varphi(n) \end{pmatrix}$. Para simplificar a escrita, é habitual omitir-se a primeira linha, já que a posição da imagem na segunda linha indica o (único) objecto que lhe deu origem.

Definição 2.3.1. *O conjunto de todas as permutações em N_n é denotado por S_n e denominado por* grupo simétrico.

Como exemplo, considere a permutação $\gamma = (2, 1, 5, 3, 4) \in S_5$. Tal significa que

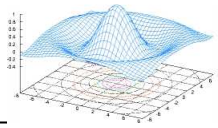
$$\gamma(1) = 2, \gamma(2) = 1, \gamma(3) = 5, \gamma(4) = 3, \gamma(5) = 4.$$

Note que S_n tem $n! = n(n-1)(n-2) \ldots 2 \cdot 1$ elementos. De facto, para $\gamma = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in S_n$, i_1 pode tomar n valores distintos. Mas i_2 apenas pode tomar um dos $n-1$ restantes, já que não se podem repetir elementos. E assim por diante. Obtemos então $n!$ permutações distintas.

Dada a permutação $\varphi = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in S_n$, se $1 \leq j < k \leq n$ e $i_j > i_k$ então $i_j > i_k$ diz-se uma *inversão* de φ. Na permutação $\gamma = (2, 1, 5, 3, 4)$ acima exemplificada existem três inversões, já que $\gamma(1) > \gamma(2), \gamma(3) > \gamma(4), \gamma(3) > \gamma(5)$. O *sinal* de uma permutação φ, denotado por $sgn(\varphi)$, toma o valor $+1$ caso o número de inversões seja par, e -1 caso contrário. Portanto, $sgn(\gamma) = -1$. As permutações com sinal $+1$ chamam-se *permutações pares* (e o conjunto por elas formado chama-se grupo alterno, A_n), e as cujo sinal é -1 denominam-se por *permutações ímpares*.

Uma *transposição* é uma permutação que fixa todos os pontos à excepção de dois. Ou seja, $\tau \in S_n$ é uma transposição se existirem i, j distintos para os quais $\tau(i) = j, \tau(j) = i$ e $\tau(k) = k$ para todo o k diferente de i e j. Verifica-se que toda a permutação φ se pode escrever como composição de transposições $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$. Ou seja, $\varphi = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_r$. Esta decomposição não é única, mas quaisquer duas decomposições têm a mesma paridade de transposições. Ou seja, se existe uma decomposição com um número par [resp. ímpar] de intervenientes, então qualquer outra decomposição tem um número par [resp. ímpar] de transposições. Mais, esse número tem a mesma paridade da do número de inversões. Por consequência, o sinal de qualquer transposição é -1. A permutação γ definida atrás pode-se decompor como $(2, 1, 5, 3, 4) = (2, 1, 5, 3, 4) \circ (1, 2, 5, 4, 3) \circ (1, 2, 4, 3, 5)$.

O conjunto das permutações S_n pode ser identificado com o conjunto das matrizes permutação de ordem n, em que a composição de permutação é de uma forma natural identificado com o produto de matrizes. A matriz permutação P associada à permutação γ é a matriz obtida de I_5 realizando as trocas de linhas segundo γ. Para fácil compreensão, vamos recorrer ao Octave.



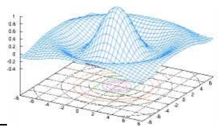
Octave

```
> I5=eye(5);
> P=I5([2 1 5 3 4], :)
P =

  0  1  0  0  0
  1  0  0  0  0
  0  0  0  0  1
  0  0  1  0  0
  0  0  0  1  0
```

Na primeira linha de P surge a segunda de I_3, na segunda a primeira, na terceira a quinta de I_3, e assim por diante.

De facto, toda a matriz permutação pode-se escrever como produto de matrizes da forma P_{ij}, tal como definidas atrás. Tal é consequência da existência de uma decomposição da permutação em transposições. Note que as transposições se identificam com as matrizes P_{ij}. Voltemos ao Octave e ao exemplo acima:



Octave

Em primeiro lugar, definamos as matrizes associadas às transposições, e façamos o seu produto:

```
> P1=I5([2 1 3 4 5], :);
> P2=I5([1 2 5 4 3], :);
> P3=I5([1 2 4 3 5], :);
> P1*P2*P3
ans =

  0  1  0  0  0
  1  0  0  0  0
  0  0  0  0  1
  0  0  1  0  0
  0  0  0  1  0
```

O produto iguala a matriz P associada à permutação escolhida:

```
> all(all(P==P1*P2*P3))
ans = 1
```

Operações elementares sobre as linhas de A são as que resultam pela sua multiplicação à esquerda por matrizes elementares. Ou seja, são operações elementares por linhas de uma matriz

- a troca de duas linhas,
- a multiplicação de uma linha por um escalar não nulo,
- a substituição de uma linha pela sua sua com um múltiplo de outra linha.

De forma análoga se definem as operações elementares sobre as colunas de uma matriz, sendo a multiplicação por matrizes elementares feita à direita da matriz. Na prática, tal resulta em substituir a palavra "linha" pela palavra "coluna" na descrição acima.

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Em primeiro lugar, e efectuando operações elementares nas linhas de A, tentaremos obter zeros por debaixo da entrada $(A)_{11}$. Ou seja, pretendemos obter algo como $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{bmatrix}$. Substitua-se a segunda linha, l_2, pela sua soma com o simétrico de metade da primeira. Ou seja,

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftarrow l_2 - \frac{1}{2} l_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tal corresponde a multiplicar à esquerda a matriz A por $E_{21}(-\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Façamos o mesmo raciocínio para a terceira linha:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftarrow l_2 - \frac{1}{2} l_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 + \frac{1}{2} l_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Tal correspondeu a multiplicar o produto obtido no passo anterior, à esquerda, por $E_{31}(\frac{1}{2})$. Ou seja, e até ao momento, obteve-se

$$E_{31}(\frac{1}{2})E_{21}(-\frac{1}{2})A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = B.$$

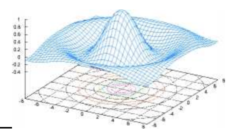
Todos os elementos na primeira coluna de B, à excepção de $(B)_{11}$, são nulos. Concentremo-nos agora na segunda coluna, e na segunda linha. Pretendem-se efectuar operações elementares nas linhas de B por forma a obter uma matriz da forma $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$. Para tal,

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 - l_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U.$$

Ou seja, multiplicou-se B, à esquerda, pela matriz $E_{32}(-1)$. Como $B = E_{31}(\frac{1}{2})E_{21}(-\frac{1}{2})A$ e $E_{32}(-1)B = U$ podemos concluir que

$$E_{32}(-1)E_{31}(\frac{1}{2})E_{21}(-\frac{1}{2})A = U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Repare que U é uma matriz triangular superior, e que neste exemplo tem elementos diagonais não nulos, e portanto é uma matriz invertível. Como as matrizes elementares são invertíveis e $(E_{32}(-1)E_{31}(\frac{1}{2})E_{21}(-\frac{1}{2}))^{-1}U = A$, segue que a matriz A é também ela invertível. Note ainda que $(E_{32}(-1)E_{31}(\frac{1}{2})E_{21}(-\frac{1}{2}))^{-1} = E_{21}(\frac{1}{2})E_{31}(-\frac{1}{2})E_{32}(1)$. A estratégia descrita acima aplicada à matriz A é denominada por *algoritmo de eliminação de Gauss*. O resultado final foi a factorização $A = LU$, onde U é uma matriz triangular superior (veremos mais adiante que de facto pertence a uma subclasse desse tipo de matrizes) e L é uma matriz invertível triangular inferior (por ser a inversa de produto de matrizes invertíveis triangulares inferiores). Nem sempre é possível percorrer estes passos do algoritmo, para uma matriz dada arbitrariamente. Veremos, na próxima secção, que modificações se realizam na estratégia apresentada acima por forma a que se garanta algum tipo de factorização.



Octave

Consideremos a matriz A dada por

```
> A=[2 4 6;2 2 2;-1 0 1];
```

À segunda linha de A soma-se o simétrico da primeira linha:

```
> I3=eye(3); E21=I3; E21(2,1)=-1;
> A2=E21*A
A2 =

   2   4   6
   0  -2  -4
  -1   0   1
```

À terceira, somamos a primeira multiplicada por $\frac{1}{2}$:

```
> E31=I3; E31(3,1)=0.5;
> A3=E31*A2
ans =

   2   4   6
   0  -2  -4
   0   2   4
```

Finalmente, à terceira somamos a segunda linha:

```
> E32=I3; E32(3,2)=1;
> A4=E32*A3
A4 =

   2   4   6
   0  -2  -4
   0   0   0
```

A matriz A4 obtida é triangular superior, com um elemento diagonal nulo. Logo, a matriz inicial A não é invertível.

O Octave contém o algoritmo numa sua rotina:

```
> [l,u,p]=lu(A)
l =

   1.00000   0.00000   0.00000
   1.00000   1.00000   0.00000
  -0.50000  -1.00000   1.00000

u =

   2   4   6
   0  -2  -4
   0   0   0

p =

  1  0  0
  0  1  0
  0  0  1
```

Aqui, `u` indica a matriz final do algoritmo e `l` a inversa do produto das matrizes elementares da forma $E_{ij}(\alpha)$ envolvidas:

```
> (E32*E31*E21)^-1
```

A matriz `p` é neste caso a identidade, e não tem nenhum papel. Mais à frente veremos a importância desta matriz (quando não é a identidade).

Obtivemos, então, a factorização `lu=A`.

O exemplo escolhido foi, de facto, simples na aplicação. Alguns passos podem não ser possíveis, nomeadamente o primeiro. Repare que o primeiro passo envolve uma divisão (no nosso caso, dividimos a linha 1 por $(A)_{11}$). A propósito, os elementos-chave na divisão, ou de forma mais clara, o primeiro elemento não nulo da linha a que vamos tomar um seu múltiplo denomina-se por *pivot*. Ora esse pivot tem que ser não nulo. E se for nulo? Nesse caso, trocamos essa linha por outra mais abaixo que tenha, nessa coluna, um elemento não nulo. E se *todos* forem nulos? Então o processo terminou para essa coluna e consideramos a coluna seguinte. Apresentamos dois exemplos, um para cada um dos casos descritos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 9 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

No primeiro caso, a troca da primeira linha pela linha dois ou três resolve o problema. No segundo caso, aplicamos a estratégia a partir da segunda coluna. Recorde que a troca da linha i pela linha j é uma operação elementar de linhas que corresponde à multiplicação, à esquerda, por P_{ij}.

Apresentamos, de seguida, o *algoritmo de eliminação de Gauss* de uma forma mais formal.

2.3.2 O Algoritmo de Eliminação de Gauss

O *Algoritmo de Eliminação de Gauss*, (*abrev.* AEG), segue os passos que em baixo se descrevem:

Seja A uma matriz $m \times n$ não nula.

1. Assuma que $(A)_{11} \neq 0$. Se tal não acontecer, então troque-se a linha 1 com uma linha i para a qual $(A)_{i1} \neq 0$. Ou seja, multiplique A, à esquerda, por P_{1i}. Para simplificar a notação, A denotará tanto a matriz original como a obtida por troca de duas das suas linhas. A $(A)_{11}$ chamamos *pivot* do algoritmo. Se todos os elementos da primeira coluna são nulos, use 2.

2. Se a estratégia indicada no passo 1 não for possível (ou seja, os elementos da primeira coluna são todos nulos), então aplique de novo o passo 1 à submatriz obtida de A retirando a primeira coluna.

3. Para $i = 2, \ldots, m$, e em A, substitua a linha i pela sua soma com um múltiplo da linha 1 por forma a que o elemento obtido na entrada $(i, 1)$ seja 0. Tal corresponde a multiplicar a matriz A, à esquerda, por $E_{i1}\left(-\frac{(A)_{i1}}{(A)_{11}}\right)$.

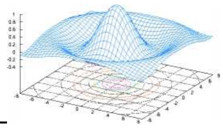
4. Repita os passos anteriores à submatriz da matriz obtida pelos passos descritos, a que se retirou a primeira linha e a primeira coluna.

Após se aplicar o passo 3 em todas as linhas e na primeira coluna, e supondo que $(A)_{11} \neq 0$, a matriz que se obtem tem a forma seguinte:

$$\begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & (A)_{13} & (A)_{1n} \\ 0 & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? \\ \vdots & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? \end{bmatrix}.$$

Ou seja, e por operações elementares de linhas, podemos obter de A uma matriz com a forma $\left[\begin{array}{c|c} (A)_{11} & * \\ \hline 0 & \widetilde{A} \end{array}\right]$. O algoritmo continua agora aplicado à matriz $\widetilde{A}$ segundo os passos 1, 2 e 3. Note que as operações elementares operadas nas linhas de $\widetilde{A}$ são também elas operações elementares realizadas nas linhas de $\left[\begin{array}{c|c} (A)_{11} & * \\ \hline 0 & \widetilde{A} \end{array}\right]$. As operações elementares efectuadas em $\widetilde{A}$ dão origem a uma matriz da forma $\left[\begin{array}{c|c} (\widetilde{A})_{11} & * \\ \hline 0 & \widetilde{\widetilde{A}} \end{array}\right]$, onde assumimos $(\widetilde{A})_{11} \neq 0$. Essas operações elementares aplicadas às linhas de $\left[\begin{array}{c|c} (A)_{11} & * \\ \hline 0 & \widetilde{A} \end{array}\right]$ dão lugar à matriz $\left[\begin{array}{cc|c} (A)_{11} & \dots & (A)_{1m} \\ 0 & (\widetilde{A})_{11} & * \\ \hline 0 & 0 & \widetilde{\widetilde{A}} \end{array}\right]$. Note que se assumiu que as entradas (i,i) são não nulas, ou que existe uma troca conveniente de linhas por forma a se contornar essa questão. Como é óbvio, tal pode não ser possível. Nesse caso aplica-se o passo 2. Ou seja, e quando tal acontece, tal corresponde à não existência de pivots em colunas consecutivas. Como exemplo, considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Multiplicando esta matriz, à esquerda, por $E_{31}(-\frac{1}{2})E_{21}(-1)$, ou seja, substiuindo a linha 2 pela sua soma com o simétrico da linha 1, e a linha 3 pela sua soma com metade do simétrico da linha 1, obtemos a matriz $M_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$.

Aplicamos agora o algoritmo à submatriz $\widetilde{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Note que a esta submatriz teremos que aplicar (2) por impossibilidade de se usar (1); de facto, não há elementos não nulos na primeira coluna de $\widetilde{M}$. Seja, então, $\widetilde{M_2}$ a matriz obtida de $\widetilde{M}$ a que retirou a primeira coluna; ou seja, $\widetilde{M_2} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. É necessário fazer a troca das linhas por forma a obtermos um elemento não nulo que terá as funções de pivot. Essa troca de linhas é uma operação elementar também na matriz original $M_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$. Tal corresponde a multiplicá-la, à esquerda, por P_{23}. Repare que, sendo os elementos nas linhas 2 e 3 e nas colunas 1 e 2 nulos, a troca das linhas de facto apenas altera as entradas que estão simultaneamente nas linhas envolvidas e nas entradas à direita do novo pivot. Obtemos, assim, a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. A matriz obtida tem uma particularidade: debaixo de cada pivot todos os elementos são nulos.



Octave

I3 indica a matriz identidade de ordem 3.

```
> M=[2 2 2 2;2 2 2 0;1 1 0 1]
> P23=I3([1 3 2],:);
> E31=I3; E31(3,1)=-0.5;
> E21=I3; E21(2,1)=-1;
> P23*E31*E21*M
U =

   2   2   2   2
   0   0  -1   0
   0   0   0  -2
```

Como foi referido, a matriz obtida por aplicação dos passos descritos no Algoritmo de Eliminação de Gauss tem uma forma muito particular. De facto, debaixo de cada pivot todos os elementos são nulos. A esse tipo de matriz chamamos *matriz escada (de linhas)*. Uma matriz $A = [a_{ij}]$ é matriz escada (de linhas) se

(i) se $a_{ij} \neq 0$ com $a_{ik} = 0$, para $k < j$, então $a_{lk} = 0$ se $k \leq j$ e $l > i$;

(ii) as linhas nulas surgem depois de todas as outras.

Sempre que o contexto o permita, diremos matriz escada para significar matriz escada de linhas.

A matriz $U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz escada (de linhas) que se obteve de M por aplicação dos passos (1)–(4). É óbvio que uma matriz escada é triangular superior, mas o recíproco não é válido em geral. Como exemplo, considere a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Teorema 2.3.2 (Factorização $PA = LU$)**.** *Dada uma matriz A, existem matrizes P permutação, L triangular inferior com 1's na diagonal principal e U matriz escada para as quais $PA = LU$.*

Ou seja, a matriz A iguala $P^{-1}LU$. Portanto, toda a matriz é equivalente por linhas a uma matriz escada de linhas.

Antes de procedermos à prova deste resultado, abrimos um parênteses para apresentarmos dois exemplos que servem de motivação ao lema que se segue.

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$. A troca da primeira com a segunda linhas dá origem à matriz $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$, a qual, e usando o AEG descrito atrás, satisfaz $E_{32}(-3)E_{31}(2)\widetilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ou seja, existem matrizes P permutação, L triangular inferior com 1's na diagonal e U matriz escada para as quais $PA = LU$. Para tal, basta tomar $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $L = (E_{32}(-3)E_{31}(2))^{-1} = E_{31}(-2)E_{32}(3)$, e $U = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Considere agora a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ora $E_{31}(-1)M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, o que força a troca da segunda pela terceira linha. Obtemos, assim, $P_{23}E_{31}(-1)M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, que é uma matriz escada. Neste caso, como se obtêm as matrizes P, L, U do teorema? Ao contrário do exemplo anterior, a realização matricial das operações elementares por linhas do AEG não nos fornece, de forma imediata, essa factorização. No entanto, poder-se-ia escrever $E_{31}(-1)M = P_{23}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, já que $P_{23}^{-1} = P_{23}$, e portanto $M = E_{31}(1)P_{23}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, pois $E_{31}(-1)^{-1} = E_{31}(1)$. Note que $E_{31}(1)P_{23} \neq P_{23}E_{31}(1)$. Não obstante, repare que $E_{31}(1)P_{23} = P_{23}E_{21}(1)$, donde $M = P_{23}E_{21}(1)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, e portanto $PA = LU$, com $P = P_{23}, L = E_{21}(1)$ e $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Lema 2.3.3. *Para $i, k, l > j$, e para todo o $a \in \mathbb{K}$, é válida a igualdade $E_{ij}(a)P_{kl} = P_{kl}E_{lj}(a)$.*

Demonstração. Se $k \neq i$, então a igualdade é óbvia.

Suponha que $k = i$. Pretende-se mostrar que $E_{ij}(a)P_{il} = P_{il}E_{lj}(a)$, com $i, l > j$. Sendo $P_{il}E_{lj}(a)$ a matriz obtida de $E_{lj}(A)$ trocando as linhas i e l, e visto a linha l de $E_{lj}(a)$ ser

$$\begin{array}{ccccccccccc} [0 & \cdots & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0] \\ & & & \uparrow & & & & \uparrow & & & \\ & & & j & & & & l & & & \end{array}$$

então a linha i de $P_{il}E_{lj}(a)$ é

$$\begin{array}{ccccccccccc} [0 & \cdots & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0] \\ & & & \uparrow & & & & \uparrow & & & \\ & & & j & & & & l & & & \end{array}.$$

$E_{ij}(a)P_{il}$ é a matriz obtida de P_{il} a que à linha i se somou a linha j de P_{il} multiplicada por a. Sendo a linha i de P_{il}

$$\begin{array}{ccccccccc} [0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0] \\ & & & & & \uparrow & & & \\ & & & & & l & & & \end{array}$$

e a linha j de P_{il}, e já que $j < i, l$,

$$\begin{array}{ccccccccc} [0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0] \\ & & & & & \uparrow & & & \\ & & & & & j & & & \end{array}$$

segue que a linha i de $E_{ij}(a)P_{il}$ é a soma

$$\begin{array}{ccccccccc} [0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0] \\ & & & & & \uparrow & & & \\ & & & & & l & & & \end{array} + \; a \begin{array}{ccccccccc} [0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0] \\ & & & & & \uparrow & & & \\ & & & & & j & & & \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccccccccccc} [0 & \cdots & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0] \\ & & & \uparrow & & & & \uparrow & & & \\ & & & j & & & & l & & & \end{array}$$

Para $k \neq i$, a linha k de $E_{ij}(a)P_{il}$ é a linha k de P_{il}, sendo esta a linha k da matriz identidade se $k \neq l$, ou a linha i da identidade se $k = l$. Por sua vez, a linha k de $P_{il}E_{lj}(a)$ é a linha k da ientidade se $k \neq l$, ou é a linha i de I_n se $k = l$. □

Demonstração do teorema 2.3.2. A prova segue da aplicação do algoritmo de eliminação de Gauss, fazendo-se uso do lema para se obter a factorização da forma $U = PLA$, onde os pivots do algoritmo são o primeiro elemento não nulo de cada linha (não nula) de U. □

A *característica* de uma matriz A, denotada por $\mathrm{car}(A)$, por $c(A)$ ou ainda por $\mathrm{rank}(A)$, é o número de linhas não nulas na matriz escada U obtida por aplicação do Algoritmo de Eliminação de Gauss. Ou seja, e sabendo que toda a linha não nula de U tem exactamente 1 pivot que corresponde ao primeiro elemento não nulo da linha, a característica de A é o número de pivots no algoritmo (ainda que o último possa não ser usado, por exemplo, no caso de estar na última linha). Note ainda que car$(A) = $ car(U). Por exemplo, car $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$, já que a matriz escada obtida desta tem 3 linhas não nulas.

Uma matriz quadrada A de ordem n diz-se *não-singular* se car$(A) = n$. Ou seja, A é não-singular se forem usados n pivots no algoritmo de eliminação de Gauss. Uma matriz é *singular* se não for não-singular.

Teorema 2.3.4. *As matrizes não-singulares são exactamente as matrizes invertíveis.*

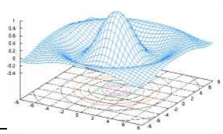
Demonstração. Seja A uma matriz quadrada, e U a matriz escada obtida de A por Gauss.

Por um lado, se A é invertível, e como $A \sim U$, segue que U é invertível, quadrada. Como U é triangular superior, não pode ter linhas nulas caso constrário teria um elemento diagonal nulo, o que contraria a invertibilidade de U.

Por outro lado, se A é não-singular então U não tem linhas nulas. Como cada coluna de U tem no máximo 1 pivot, e existem n linhas e n pivots, então cada linha tem exactamente 1 pivot. Ou seja, os elementos diagonais de U são não nulos. Como U é triangular superior, segue que U é invertível, e portanto A é invertível visto $A \sim U$. $\square$

Teorema 2.3.5. *Se A é uma matriz não-singular, então existe uma matriz P permutação tal que PA é factorizável, de forma única, como $PA = LU$, onde L é triangular inferior com 1's na diagonal e U é uma matriz triangular superior com elementos diagonais não nulos.*

Demonstração. A existência de tal factorização é consequência do teorema 2.3.2. Repare que, sendo a matriz não singular, tal significa que os pivots estão presentes em todas as colunas de U. Assim, os elementos diagonais de U são os pivots, sendo estes não nulos. Resta-nos provar a unicidade. Para tal, considere as matrizes L_1, L_2 triangulares inferiores com 1's na diagonal, e as matrizes U_1, U_2 triangulares superiores com elementos diagonais diferentes de zero, matrizes essas que satisfazem $PA = L_1U_1 = L_2U_2$. Portanto, $L_1U_1 = L_2U_2$, o que implica, e porque L_1, U_2 são invertíveis (porquê?), que $U_1U_2^{-1} = L_1^{-1}L_2$. Como L_1, U_2 são, respectivamente, triangulares inferior e superior, então L_1^{-1} e U_2^{-1} são também triangulares inferior e superior, respectivamente. Recorde que sendo a diagonal de L_1 constituida por 1's, então a diagonal da sua inversa tem também apenas 1's. Daqui segue que $L_1^{-1}L_2$ é triangular inferior, com 1's na diagonal, e que $U_1U_2^{-1}$ é triangular superior. Sendo estes dois produtos iguais, então $L_1^{-1}L_2$ é uma matriz diagonal, com 1's na diagonal; ou seja, $L_1^{-1}L_2 = I$, e portanto $L_1 = L_2$. Tal leva a que $L_1U_1 = L_1U_2$, o que implica, por multiplicação à esquerda por L_1^{-1}, que $U_1 = U_2$. $\square$



Octave

Ao se usar uma ferramenta computacional numérica é necessário algum cuidado nos erros de truncatura. Como exemplo, considere a matriz `A=[1E-5 1E5; 1E5 1E-5]`. Esta matriz é não-singular, e a única (porquê?) matriz escada obtida, sem quaisquer trocas de linhas, é $\begin{bmatrix} 10^{-5} & 10^{5} \\ 0 & 10^{-5}-10^{15} \end{bmatrix}$. Usando o Octave,

```
> format long
> E=eye (2); E(2,1)=-A(2,1)/A(1,1)
E =

            1             0
 -10000000000             1

> E*A
ans =

    1.00000000000000e-05    1.00000000000000e+05
   -1.45519152283669e-11   -1.00000000000000e+15
```

Repare que a matriz não é triangular inferior, e que o elemento $(2,2)$ dessa matriz deveria ser $10^{-5}-10^{15}$ e não -10^{15} como indicado.

```
> (E*A)(2,2)==-1E15
ans = 1
> -1E15==-1E15+1E-5
ans = 1
```

Para o Octave, não existe distinção entre os dois números, por erro de arrondamento.

Embora o AEG seja pouco eficiente neste tipo de questões, existem algumas alterações que são efectuadas por forma a contornar este problema. Um exemplo é a *pivotagem parcial*. Este algoritmo será descrito com detalhe noutra unidade curricular de MiEB. A ideia é, quando se considera um pivot na entrada (i,j), percorrer os outros elementos que estão por baixo dele e trocar a linha i com a linha do elemento que seja maior, em módulo. Tal corresponde a multiplicar, à esquerda, por uma matriz da forma P_{ij}. Esse algorimto está implementado no Octave, sendo chamado pela instrução `lu(A)`.

```
> [L,U,P]=lu (A)
L =

  1.000000000000000  0.000000000000000
  0.000000000100000  1.000000000000000

U =
```

```
   1.00000000000000e+05   1.00000000000000e-05
   0.00000000000000e+00   1.00000000000000e+05

P =

  0  1
  1  0
```

A matriz L indica a inversa do produto das matrizes elementares, U é a matriz escada, e P é a matriz permutação. Obtemos, deste forma, a factorização $PA = LU$.

```
> all(all(P*A==L*U))
ans = 1
```

2.4 Determinantes

2.4.1 Definição

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e assuma $a \neq 0$. Aplicando o AEG, obtemos a factorização $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -\frac{bc}{a} + d \end{bmatrix}$. Ou seja, a matriz A é equivalente por linhas à matriz $U = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -\frac{bc}{a} + d \end{bmatrix}$, que é uma matriz triangular superior. Recorde que A é invertível se e só se U for invertível. Ora, a matriz U é invertível se e só se $-\frac{bc}{a} + d \neq 0$, ou de forma equivalente, se $ad - bc \neq 0$. Portanto, A é invertível se e só se $ad - bc \neq 0$.

Este caso simples serve de motivação para introduzir a noção de determinante de uma matriz.

Na definição que se apresenta de seguida, S_n indica o grupo simétrico (ver Definição 2.3.1).

Definição 2.4.1. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. O* determinante *de A, denotado por* $\det A$ *ou* $|A|$*, é o escalar definido por*

$$\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Vejamos o que resulta da fórmula quando consideramos matrizes 2×2 e matrizes 3×3.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Neste caso, o grupo simétrico S_2 tem apenas as permutações $\sigma_1 = (1\,2)$ e $\sigma_2 = (2\,1)$, sendo que $sgn(\sigma_1) = 1$ e que $sgn(\sigma_2) = -1$. Recorde que $\sigma_1(1) = 1, \sigma_1(2) = 2, \sigma_2(1) = 2$ e $\sigma_2(2) = 1$. Obtemos, então, $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

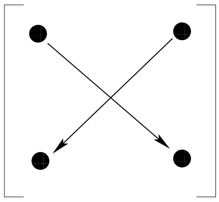


Figura 2.1: Esquema do cálculo do determinante de matrizes de ordem 2

Seja agora $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Recorde que S_3 tem 6 elementos. No quadro seguinte, indicamos, respectivamente, a permutação $\sigma \in S_3$, o seu sinal, e o produto $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$.

Permutação $\sigma \in S_3$	$sgn(\sigma)$	$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$
$(1\,2\,3)$	$+1$	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$(2\,3\,1)$	$+1$	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$(3\,1\,2)$	$+1$	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$(1\,3\,2)$	-1	$a_{11}a_{23}a_{32}$
$(2\,1\,3)$	-1	$a_{12}a_{21}a_{33}$
$(3\,2\,1)$	-1	$a_{11}a_{22}a_{31}$

Obtemos, assim,

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Para fácil memorização, pode-se recorrer ao esquema apresentado de seguida.

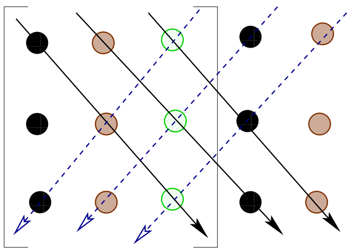


Figura 2.2: Esquema do cálculo do determinante de matrizes de ordem 3, ou a Regra de Sarrus

2.4.2 Propriedades

São consequência da definição os resultados que de seguida apresentamos, dos quais omitimos a demonstração.

Teorema 2.4.2. *Seja A uma matriz quadrada.*

1. *Se A tem uma linha ou uma coluna nula então* $|A| = 0$.

2. $|A| = |A^T|$.

3. *Se A é triangular (inferior ou superior) então* $|A| = \prod_{i=1,\dots,n} (A)_{ii}$.

4. $|P_{ij}| = -1, |D_k(a)| = a, |E_{ij}(a)| = 1,$ *com* $i \neq j$.

Daqui segue que $|I_n| = 1$. Segue também que dada uma matriz tringular (inferior ou superior) que esta é invertível se e só se tiver determinante não nulo. Mais adiante, apresentaremos um resultado que generaliza esta equivalência para matrizes quadradas não necessariamente triangulares.

Teorema 2.4.3. *Dada uma matriz A quadrada, $a \in \mathbb{K}$,*

1. $|D_i(a)A| = a|A| = |AD_i(a)|$;

2. $|P_{ij}A| = |AP_{ij}| = -|A|$;

3. $|E_{ij}(a)A| = |A| = |AE_{ij}(a)|$.

Como $|D_i(A)| = a, |P_{ij}| = -1$ e $|E_{ij}(a)| = 1$, segue que $|D_i(a)A| = |D_i(a)||A|$, $|P_{ij}A| = |P_{ij}||A|$ e que $|E_{ij}(a)A| = |E_{ij}(a)||A|$. Repare ainda que, se A é $n \times n$, é válida a igualdade $|\alpha A| = \alpha^n|A|$, já que $\alpha A = \prod_{i=1}^n D_i(\alpha)A$. De forma análoga, dada uma matriz diagonal D com elementos diagonais $d_1, d_2, \dots, d_n$, tem-se $|DA| = d_1 d_2 \cdots d_n |A| = |D||A|$.

Corolário 2.4.4. *Uma matriz com duas linhas/colunas iguais tem determinante nulo.*

Demonstração. Se a matriz tem duas linhas iguais, digamos i e j, basta subtrair uma à outra, que corresponde a multiplicar à esquerda pela matriz $E_{ij}(-1)$. A matriz resultante tem uma linha nula, e portanto tem determinante zero. Para colunas iguais, basta aplicar o mesmo raciocínio a A^T. □

O corolário anterior é passível de ser generalizado considerando não linhas iguais, mas tal que uma linha se escreva como soma de múltiplos de outras linhas. O mesmo se aplica a colunas.

Corolário 2.4.5. *Tem determinante nulo uma matriz que tenha uma linha que se escreve como a soma de múltiplos de outras das suas linhas.*

Demonstração. Suponha que a linha i, ℓ_i, de uma matriz A se escreve como a soma de múltiplos de outras das suas linhas, ou seja, que $\ell_i = \sum_{j \in J} \alpha_j \ell_j = \alpha_{j1}\ell_{j_1} + \alpha_{j_2}\ell_{j_2} + \cdots + \alpha_{j_s}\ell_{j_s}$. A linha i de $E_{ij_1}(-\alpha_{j_1})A$ é a matriz obtida de A substituindo a sua linha i por $\ell_i - \alpha_{j_1}\ell_{j_1} = \alpha_{j_2}\ell_{j_2} + \cdots + \alpha_{j_s}\ell_{j_s}$. Procedemos ao mesmo tipo de operações elementares por forma a obtermos uma matriz cuja linha i é nula. Como o determinante de cada uma das matrizes obtidas por operação elementar de linhas iguala o determinante de A, e como a última matriz tem uma linha nula, e logo o seu determinante é zero, segue que $|A| = 0$. □

Corolário 2.4.6. *Seja U a matriz obtida da matriz quadrada A por Gauss. Então $|A| = (-1)^r |U|$, onde r indica o número de trocas de linhas no algoritmo.*

Sabendo que uma matriz é invertível se e só se a matriz escada associada (por aplicação de Gauss) é invertível, e que esta sendo triangular superior é invertível se e só se os seus elementos diagonais são todos nulos, segue que, e fazendo uso de resultados enunciados e provados anteriormente,

Corolário 2.4.7. *Sendo A uma matriz quadrada de ordem n, as afirmações seguintes são equivalentes:*

1. *A é invertível;*
2. *$|A| \neq 0$;*
3. *$\operatorname{car}(A) = n$;*
4. *A é não-singular.*

Portanto, uma matriz com duas linhas/colunas iguais não é invertível. Mais, uma matriz que tenha uma linha que se escreva como soma de múltiplos de outras das suas linhas não é invertível.

Teorema 2.4.8. *Seja A e B matrizes $n \times n$.*

$$|AB| = |A||B|.$$

Demonstração. Suponha que A é invertível.

Existem matrizes elementares $E_1, \dots, E_s$ e uma matriz escada (de linhas) U tal que $A = E_1 E_2 \dots E_s U$. Ora existem também $E_{s+1}, \dots, E_r$ matrizes elementares, e U_1 matriz escada de linhas para as quais $U^T = E_{s+1} \dots E_r U_1$. Note que neste último caso se pode assumir que não houve trocas de linhas, já que os pivots do AEG são os elementos diagonais de U já que U^T é triangular inferior, que são não nulos por A ser invertível. Ora U_1 é então uma matriz triangular superior que se pode escrever como produto de matrizes triangulares inferiores, e portanto U_1 é uma matriz diagonal. Seja $D = U_1$. Resumindo, $A = E_1 E_2 \dots E_s (E_{s+1} \dots E_r D)^T = E_1 E_2 \dots E_s D E_r^T E_{r-1}^T \dots E_{s+1}^T$. Recorde que, dada uma matriz elementar E, é válida $|EB| = |E||B|$. Então,

$$\begin{aligned}
|AB| &= |E_1 E_2 \dots E_s D E_r^T E_{r-1}^T \dots E_{s+1}^T B| \\
&= |E_1||E_2 \dots E_s D E_r^T E_{r-1}^T \dots E_{s+1}^T B| \\
&= |E_1||E_2||E_3 \dots E_s D E_r^T E_{r-1}^T \dots E_{s+1}^T B| \\
&= \cdots \\
&= |E_1||E_2||E_3| \dots |E_s||D||E_r^T||E_{r-1}^T| \dots |E_{s+1}^T||B| \\
&= |E_1 E_2 E_3 \dots E_s D E_r^T E_{r-1}^T \dots E_{s+1}^T||B| \\
&= |A||B|.
\end{aligned}$$

Se A não é invertível, e portanto $|A| = 0$, então AB não pode ser invertível, e portanto $|AB| = 0$. □

Como $|I_n| = 1$, segue do teorema anterior a relação entre o determinante uma matriz invertível com o da sua inversa.

Corolário 2.4.9. *Se A é uma matriz invertível então*

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Recorde que para que uma matriz A seja invertível exige-se a existência de uma outra X para a qual $AX = I_n = XA$. O resultado seguinte mostra que se pode prescindir da verificação de uma das igualdades.

Corolário 2.4.10. *Seja A uma matriz $n \times n$. São equivalentes:*

1. *A é invertível*
2. *existe uma matriz X para a qual $AX = I_n$*
3. *existe uma matriz Y para a qual $YA = I_n$*

Nesse caso, $A^{-1} = X = Y$.

Demonstração. As equivalências são imediatas, já que se $AX = I_n$ então $1 = |I_n| = |AX| = |A||X|$ e portanto $|A| \neq 0$.

Para mostrar que $A^{-1} = X$, repare que como $AX = I_n$ então A é invertível, e portanto $A^{-1}AX = A^{-1}$, donde $X = A^{-1}$. $\square$

Faça a identificação dos vectores $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ com as matrizes coluna $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. O produto interno usual $(u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2)$ em $\mathbb{R}^2$ pode ser encarado como o produto matricial $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$. Ou seja, $u \cdot v = u^T v$. Esta identificação e noção pode ser generalizada de forma trivial para $\mathbb{R}^n$. Dois vectores u e v de $\mathbb{R}^n$ dizem-se ortogonais, $u \perp v$, se $u \cdot v = u^T v = 0$. A norma usual em $\mathbb{R}^n$ é definida por $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$, com $u \in \mathbb{R}^n$

Corolário 2.4.11. *Seja A uma matriz real $n \times n$ com colunas $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Então A é ortogonal se e só se $c_i \perp c_j = 0$ se $i \neq j$, e $\|c_i\| = 1$, para $i, j = 1, \ldots, n$.*

Demonstração. Condição suficiente: Escrevendo $A = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$, temos que

$$I_n = A^T A = \begin{bmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ \vdots \\ c_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}.$$

Como o elemento (i,j) de $\begin{bmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ \vdots \\ c_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$ é $c_i^T c_j$, obtemos o resultado.

Condição necessária: Ora $c_i^T c_j = 0$ se $i \neq j$, e $c_i^T c_i = 1$ é o mesmo que $A^T A = I_n$, e pelo corolário anterior implica que A é invertível com $A^{-1} = A^T$, pelo que A é ortogonal. $\square$

Ou seja, as colunas das matrizes ortogonais são ortogonais duas a duas. O mesmo se pode dizer acerca das linhas, já que a transposta de uma matriz ortogonal é de novo uma matriz ortogonal.

2.4.3 Teorema de Laplace

Dada uma matriz A, quadrada de ordem n, denota-se por $A(i|j)$ a submatriz de A obtida por remoção da sua linha i e da sua coluna j.

Definição 2.4.12. *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada.*

1. *O* complemento algébrico *de a_{ij}, ou* cofactor *de a_{ij}, denotado por A_{ij}, está definido por*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i|j)|$$

2. *A* matriz adjunta *é a transposta da matriz dos complementos algébricos*

$$Adj(A) = [A_{ij}]^T .$$

Teorema 2.4.13 (Teorema de Laplace I)**.** *Para $A = [a_{ij}]$, $n \times n$, $n > 1$, então, e para $k = 1, \ldots, n$,*

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{jk} A_{jk} \end{aligned}$$

O teorema anterior é o caso especial de um outro que enunciaremos de seguida. Para tal, é necessário introduzir mais notação e algumas definições (cf. [8]).

Seja A uma matriz $m \times n$. Um *menor de ordem p de A*, com $1 \leq p \leq \min\{m,n\}$, é o determinante de uma submatriz $p \times p$ de A, obtida de A eliminando $m-p$ linhas e $n-p$ colunas de A.

Considere duas sequências crescentes de números

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq m, \ 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq n,$$

e o determinante da submatriz de A constituida pelas linhas $i_1, i_2, \ldots i_p$ e pelas colunas $j_1, j_2, \ldots, j_p$. Este determinate vai ser denotado por $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_p \end{pmatrix}$. Ou seja,

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_p \end{pmatrix} = |\,[a_{i_k j_k}]_{k=1,\ldots p}\,|.$$

Paralelamente, podemos definir os *menores complementares* de A como os determinantes das submatrizes a que se retiraram linhas e colunas. Se A for $n \times n$,

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_p \end{pmatrix}^c$$

denota o determinante da submatriz de A após remoção das linhas $i_1, i_2, \ldots i_p$ e das colunas $j_1, j_2, \ldots, j_p$ de A. O *cofactor complementar* está definido como

$$A^c\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_p \end{pmatrix} = (-1)^s A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_p \end{pmatrix}^c,$$

onde $s = (i_1 + i_2 + \cdots i_p) + (j_1 + j_2 + \cdots j_p)$.

O caso em que $p = 1$ coincide com o exposto no início desta secção.

Teorema 2.4.14 (Teorema de Laplace II)**.** *Sejam $A = [a_{ij}]$, $n \times n$, $1 \leq p \leq n$. Para qualquer escolha de p linhas $i_1, i_2, \ldots, i_p$ de A, ou de p colunas $j_1, j_2, \ldots, j_p$ de A,*

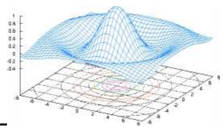
$$|A| \quad = \quad \sum_j A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_p \end{pmatrix} A^c\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_p \end{pmatrix}$$

onde a soma percorre todos os menores referentes à escolha das linhas [resp. colunas].

Para finalizar, apresentamos um método de cálculo da inversa de uma matriz não singular.

Teorema 2.4.15. *Se A é invertível então*

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}.$$



Octave

Vamos agora apresentar uma pequena função que tem como entrada uma matriz quadrada e como saída sua matriz adjunta.

```
function ADJ=adjunta(A)

% sintaxe: adjunta(A)
```

```
% onde A e' uma matriz quadrada
% use-a por sua propria conta e risco
% copyleft ;-) Pedro Patricio


n=size(A)(1,1); % n e' o numero de linhas da matriz
ADJ= zeros (n); % inicializacao da matriz ADJ
for i=1:n       % i denota a linha
        for j=1:n       % j denota a coluna
                submatriz=A([1:i-1 i+1:n],[1:j-1 j+1:n]); % submatriz e' a
submatriz de A a que se lhe retirou a linha i e a coluna j
                cofactor=(-1)^(i+j)* det(submatriz);    % calculo do cofactor
                ADJ(j,i)=cofactor;      % ADJ é a transposta da matriz dos
cofactores; repare que a entrada (j,i) e' o cofactor (i,j) de A
        end;    % fim do ciclo for em j
end             % fim do ciclo for em i
```

Grave a função, usando um editor de texto, na directoria de leitura do Octave. No Octave, vamos criar uma matriz 4×4:

```
> B=fix(10*rand(4,4)-5)
B =

   0  -2   3  -2
  -2   3   1  -1
  -3   0   4   3
  -4   4   0   4
> adjunta(B)
ans =

   76.0000  -36.0000  -48.0000   65.0000
   48.0000  -32.0000  -28.0000   37.0000
   36.0000  -24.0000  -32.0000   36.0000
   28.0000   -4.0000  -20.0000   17.0000
```

Pelo teorema, como $B^{-1} = \frac{Adj(B)}{|B|}$ segue que $B\,Adj(B) = |B|I_4$.

```
> B*adjunta(B)
ans =

  -44.00000   -0.00000    0.00000    0.00000
    0.00000  -44.00000   -0.00000    0.00000
    0.00000   -0.00000  -44.00000    0.00000
    0.00000   -0.00000    0.00000  -44.00000
```