Universidade do Minho
Departamento de Matemática

MiEB

Álgebra Linear C

folha vi — 2007/2008

1. Diga quais dos conjuntos seguintes são subespaços vectoriais do espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$:

   (a) $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = 0 \text{ e } x_2 + 2x_4 = 0\}$.

   (b) $W_2 = \{(0, a, b, -1) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

   (c) $W_3 = \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

   (d) $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 \in \mathbb{Q}\}$.

2. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, os vectores

   $v_1 = (1, -1, 1), \quad v_2 = (2, 1, -2), \quad u_1 = (-1, 0, 1), \quad u_2 = (1, 0, 0), \quad u_3 = (1, 0, 1).$

   Verifique se

   (a) $(1, -4, 5)$ é combinação linear de v_1, v_2.

   (b) $(1, 2, 1)$ é combinação linear de v_1, v_2.

   (c) $(3, 0, 2)$ é combinação linear de u_1, u_2, u_3.

   (d) $(0, 2, 1)$ é combinação linear de u_1, u_2, u_3.

3. Verifique se $(2, 5, -3) \in \langle (1, 4, -2), (-2, 1, 3) \rangle$.

4. Determine α, β de forma a que $(1, 1, \alpha, \beta) \in \langle (1, 0, 2, 1), (1, -1, 2, 2) \rangle$.

5. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são linearmente dependentes:

   (a) $\{(0, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, -1)\}$ no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$.

   (b) $\{(1, 2, 1), (-2, 3, 1)\}$ no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$.

   (c) $\{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ no espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$.

   (d) $\{x^2 + x, x^2 + 1, x, x^3\}$ no espaço vectorial real $\mathbb{R}_3[x]$.

   (e) $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ no espaço vectorial real $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ onde

   $$g_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos^2 x \end{array}, \quad g_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin^2 x \end{array}, \quad g_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + 1 \end{array}, \quad g_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{array}$$

6. Considere os seguintes subespaços vectoriais do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$:

   $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$, $\quad V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0, y - z = 0\}$,

   $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0, 2y + z = 0\}$, $\quad V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$.

   Indique a dimensão e uma base para cada um deles.

7. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, os subespaços

   $U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 : a_1 - a_4 = 0, a_4 - a_3 = 0\}$

   $W_1 = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 + 2b_3 = 0, b_1 + 2b_3 - b_4 = 0\}$

   $W_2 =< (1, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1), (1, 3, 2, 1), (-3, 1, -1, 2) >.$

   (a) Diga, justificando, se $\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1)\}$ é uma base de U.

   (b) Determine uma base de i. W_1. ii. W_2.

8. Considere os seguintes vectores do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$:

   $$v_1 = (\alpha, 6, -1),\ v_2 = (1, \alpha, -1),\ v_3 = (2, \alpha, -3).$$

   (a) Determine os valores do parâmetro real α para os quais o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Para um dos valores de α determinados na alínea anterior, calcule as coordenadas do vector $v = (-1, 1.2)$ em relação à base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

9. Considere os seguintes elementos de $\mathbb{R}^3$:

   $$v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (1, -1, 1), v_3 = (0, -1, 1), v_4 = (1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}).$$

   Verifique se $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_3, v_4\rangle$.

10. Considere os elementos de $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (2, -3, 1), v_2 = (0, 1, 2), v_3 = (1, 1, -2)$.

    (a) Mostre que são uma base de $\mathbb{R}^3$.

    (b) Determine as coordenadas de $(3, 2, 1)$ relativamente a esta base.

11. Mostre que os vectores $(a, b), (c, d)$ são uma base de $\mathbb{R}^2$ se e só se $ad - bc \neq 0$.

12. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

    $$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0\}, \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_2 = 0\},$$

    $$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

    Para cada um deles, determine a dimensão e indique uma base.

13. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

    $$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_3 \wedge x_4 = 2x_2\}, G = \langle(1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 1), (-1, 2, -1, 1)\rangle.$$

    Determine a dimensão e indique uma base para F e para G.

14. Encontre uma base para o espaço das colunas das matrizes seguintes:

    (a) $\begin{bmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 1 & -17 & 6 \\ 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -7 & 3 & -8 & -1 \\ -1 & 6 & -8 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -8 \end{bmatrix}$

15. Indique, justificando convenientemente, o valor lógico da seguinte afirmação:

    `‘‘Se as colunas da matriz quadrada` A `são linearmente independentes, então as colunas de` A^2 `são também elas linearmente independentes.’’`

16. Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mostre que

    (a) se $A^2 = A$ e $car(A) = n$ então $A = I_n$;

    (b) se $A^2 = A$ então $CS(A) \cap N(A) = \{0\}$.

17. Calcule a projecção ortogonal do vector $(2, -1, 1)$ sobre o espaço gerado por $(1, 1, 1), (0, 1, 3)$.

18. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -1 \end{bmatrix}^T$ e $b = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 10 \end{bmatrix}^T$, determine a solução no sentido dos mínimos quadrados de $Ax = b$.

19. Determine a solução no sentido dos mínimos quadrados de

    (a) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 = 2 \end{cases}$

20. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

    (a) Calcule a projecção ortogonal de $b = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}^T$ sobre $CS(A)$.

    (b) O que pode dizer sobre o sistema $Ax = b$?