Universidade do Minho — L.M.C.C. – 1º ano

Departamento de Matemática

Matemática Discreta

exercícios - teoria de números — 2005/2006

1. Use o método de indução matemática para provar que as seguintes igualdades são válidas para todo o número natural n:

   (a) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

   (b) $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$

   (c) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

   (d) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (e) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

   (f) $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

   (g) $1\times 1!+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\times n!=(n+1)!-1$

2. Use o método de indução matemática para provar as seguintes desigualdades:

   a) $n!>n^2$, para $n\geq 4$

   b) $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\leq 2-\dfrac{1}{n}$, para $n\geq 1$

3. Verifique, recorrendo ao Princípio de Indução, que são válidas as seguintes afirmações, para todo o $n\geq 1$:

   (a) $1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+n\times(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

   (b) $2\times 6\times 10\times 14\times...\times(4n-2)=\frac{(2n)!}{n!}$.

   (c) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. Pelo Segundo Princípio de Indução, prove que

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+...+a+1),$$

   para todo o $n\geq 1$.
   Sugestão: $a^{n+1}-1=(a+1)(a^n-1)-a(a^{n-1}-1)$.

5. Verifique que, para $n\geq 1$,

$$\binom{2n}{n}=\frac{1\times 3\times 5\times...\times(2n-1)}{n!}2^n.$$

6. Mostre que são verdadeiras as seguintes igualdades, para $n\geq 1$:

   (a) $\dbinom{n}{p}+\dbinom{n}{p-1}=\dbinom{n+1}{p}$, para $1\leq p\leq n$.

   (b) $\dbinom{n}{0}+\dbinom{n}{1}+\dbinom{n}{2}+...+\dbinom{n}{n}=2^n$.

(c) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$

(d) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + ... = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + ... = 2^{n-1}.$
Sugestão: Utilize os resultados obtidos em **b**) e **c**).

7. Indique quais das seguintes proposições são verdadeiras:

   $3 \mid 7, \quad 11 \mid 87, \quad 7 \mid 34, \quad 13 \mid 143, \quad -3 \mid 111, \quad -12 \mid 144, \quad 9 \mid -303, \quad 121 \mid 847.$

8. Mostre que, para quaisquer inteiros a, b e c, se tem:

   (a) $a \mid 0, \;\; 1 \mid a, \;\; a \mid a$

   (b) se $a \mid b$ e $c \mid d$ então $ac \mid bd$

   (c) se $a \mid b$ então $ac \mid bc$

   (d) se $a \mid b$ e $b \mid c$ então $a \mid c$

   (e) se $a \mid b$ então $a \mid bc$

   (f) se $a \mid b$ e $b \neq 0$ então $|a| \leq |b|$

   (g) se $a \mid b$ então $(-a) \mid b$, $a \mid (-b)$ e $(-a) \mid (-b)$

9. Dê exemplo de inteiros a, b e c tais que $a \mid bc$ mas $a \not\mid b$ e $a \not\mid c$.

10. Dê exemplo de inteiros a, b e c tais que $a \mid b + c$ mas $a \not\mid b$ e $a \not\mid c$.

11. Mostre que se $a \mid (2x - 3y)$ e $a \mid (4x - 5y)$ então $a \mid y$.

12. Determine o quociente e o resto na divisão de:

a) 743 por 17	b) 234 por 17
c) 27 por 43	d) 0 por 15
e) -28 por 6	f) -813 por -23
g) -9432 por 33	h) 32524 por 197

13. Mostre que, para todo o inteiro a, um dos inteiros a, $a + 2$ ou $a + 4$ é divisível por 3.

14. Mostre que
$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + ... + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3},$$
para $n \geq 2$.
Sugestão: Use indução e a regra de Pascal.

15. Utilizando o Algoritmo da Divisão, mostre que:

    (a) o quadrado de um inteiro é da forma $3k$ ou $3k + 1$.

    (b) o quadrado de um inteiro ímpar é da forma $8k + 1$.

16. Verifique que $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ é um inteiro, para todo o $n \geq 1$.
Sugestão: Pelo Algoritmo da Divisão, n é da forma $6k, 6k+1, ..., 6k+5$; estabeleça o resultado em cada um dos casos.

17. Utilize o algoritmo de Euclides para calcular o máximo divisor comum de cada um dos seguintes pares de inteiros a e b e escreva-o como combinação linear de a e b:

    (a) $a = 56$, $b = 126$
    (b) $a = 1001$, $b = 33$
    (c) $a = 1001$, $b = 357$
    (d) $a = -90$, $b = 1386$
    (e) $a = -2860$, $b = -2310$

18. Determine, usando o Algoritmo de Euclides, inteiros x e y que satisfaçam:

    (a) $(56, 72) = 56x + 72y$.
    (b) $(24, 138) = 24x + 138y$.

19. Mostre que para qualquer inteiro a e para qualquer qualquer inteiro positivo n se tem $(a, a+n) \mid n$. Conclua que $(a, a + 1) = 1$.

20. Sejam a e b inteiros não nulos. Mostre que se x e y são inteiros tais que $(a, b) = ax + by$ então $(x, y) = 1$.

21. Determine o menor inteiro positivo k que se pode escrever na forma $k = 22x + 55y$, com x, y inteiros.

22. Quais das seguintes equações diofantinas têm solução?

    (a) $6x + 51y = 22$.
    (b) $33x + 14y = 115$.
    (c) $14x + 35y = 93$.

23. Determine as soluções inteiras das seguintes equações diofantinas:

    (a) $56x + 72y = 40$.
    (b) $24x + 138y = 18$.
    (c) $221x + 35y = 11$.

24. Determine as soluções inteiras positivas das seguintes equações diofantinas:

    (a) $18x + 5y = 48$.
    (b) $54x + 21y = 906$.

25. Sejam a e b inteiros não negativos. Verifique que as seguintes condições são verdadeiras:

    (a) $m.d.c.(a, b) = m.m.c.(a, b)$ se e só se $a = b$.
    (b) Se $k > 0$, então $m.m.c.(ka, kb) = k \times m.m.c.(a, b)$.

26. Um teatro amador cobra 1 euro e 80 cêntimos de entrada a cada adulto e 75 cêntimos a cada criança. Num espectáculo, as receitas totais somaram 90 euros. Sabendo que estiveram presentes mais adultos que crianças, quantas pessoas estiveram a assistir a esse espectáculo?

27. Conjecturou-se que existe uma infinidade de primos da forma $n^2 - 2$. Indique 5 desses primos.

28. Prove que:

   (a) todo o primo da forma $3n+1$ é da forma $6m+1$.

   (b) se $p \geq 5$ é um número primo, então p^2+2 é um número composto.
   Sugestão: p é da forma $6k+1$ ou $6k+5$.

29. Sejam p um número primo e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que, se $p|a^n$, então $p^n|a^n$.

30. Factorize os inteiros 1234, 10140 e 36000 como produto de números primos.

31. Mostre que um inteiro positivo $a > 1$ é um quadrado se e só se, na forma canónica de a, todos os expoentes dos números primos são inteiros pares.

32. Verifique se 701 é um número primo, testando todos os primos $p \leq \sqrt{701}$ como possíveis divisores.

33. Indique todos os primos entre 100 e 200, utilizando o Crivo de Eratóstenes.

34. Prove que:

   (a) $\sqrt{p}$ é irracional, para todo o primo p.

   (b) se $a > 0$ e $\sqrt[n]{a}$ é racional, então $\sqrt[n]{a}$ é um inteiro.

35. Resolva as seguintes congruências lineares:

   (a) $25x \equiv 15 (\mod 29)$.

   (b) $5x \equiv 2 (\mod 26)$.

   (c) $140x \equiv 133 (\mod 301)$. $[m.d.c.(140, 301) = 7]$

36. Usando congruências, resolva a seguinte equação diofantina: $4x + 51y = 9$.
   Sugestão: $4x \equiv 9 (\mod 51)$ implica que $x = 15+51t$ e $51y \equiv 9 (\mod 4)$ implica que $y = 3+4s$. Encontre a relação entre t e s.

37. Resolva os seguintes sistemas de congruências lineares:

   (a) $x \equiv 1 (\mod 3)$, $x \equiv 2 (\mod 5)$, $x \equiv 3 (\mod 7)$.

   (b) $2x \equiv 1 (\mod 5)$, $3x \equiv 9 (\mod 6)$, $4x \equiv 1 (\mod 7)$, $5x \equiv 9 (\mod 11)$.

38. Resolva a congruência linear $17x \equiv 3 (\mod 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)$ resolvendo o sistema

$$17x \equiv 3 (\mod 2), \quad 17x \equiv 3 (\mod 3), \quad 17x \equiv 3 (\mod 5), \quad 17x \equiv 3 (\mod 7).$$

39. Determine o menor inteiro $a > 2$ tal que

$$2|a, \quad 3|a+1, \quad 4|a+2, \quad 5|a+3, \quad 6|a+4.$$

40. Quando se retiram $2, 3, 4, 5, 6$ ovos de cada vez de um determinado cesto, ficam, respectivamente, $1, 2, 3, 4, 5$ ovos no cesto. Ao retirar 7 de cada vez, não sobra nenhum ovo no cesto. Qual o menor número de ovos que o cesto pode conter?

41. Um bando de 17 piratas roubou um saco de moedas. Ao tentarem dividir igualmente por todos eles a fortuna roubada, deram conta que sobravam 3 moedas. Lutaram, para ver quem ficava com as três moedas, e, nessa luta, morreu um pirata. Distribuíram as moedas igualmente por todos e, desta vez, sobraram 10 moedas. Tendo havido nova luta, mais um pirata morreu. Desta vez, a fortuna pôde ser distribuída, na íntegra, por todos! Qual é o número mínimo de moedas que o saco roubado poderia ter contido?

42. Verifique que $18^6 \equiv 1(\mod 7)$.

43. Mostre que

   (a) $a^{21} \equiv a(\mod 15)$, para todo o inteiro a.
   Sugestão: Pelo Teorema de Fermat, $a^5 \equiv a(\mod 5)$ e $a^3 \equiv a(\mod 3)$.

   (b) $a^{12} \equiv 1(\mod 35)$, para todo o inteiro a tal que $m.d.c.(a, 35) = 1$.
   Sugestão: Pelo Teorema de Fermat, $a^6 \equiv 1(\mod 7)$ e $a^4 \equiv 1(\mod 5)$.

   (c) $a^{13} \equiv a(\mod 3 \cdot 7 \cdot 13)$, para todo o inteiro a.