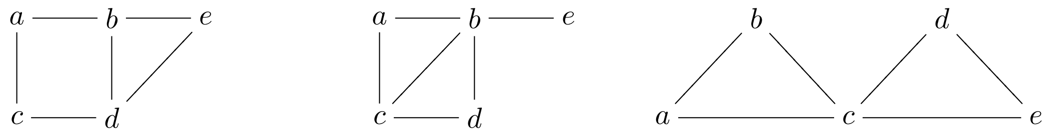
Matemática Discreta

exercícios — 2005/2006

1. Considere os seguintes grafos:



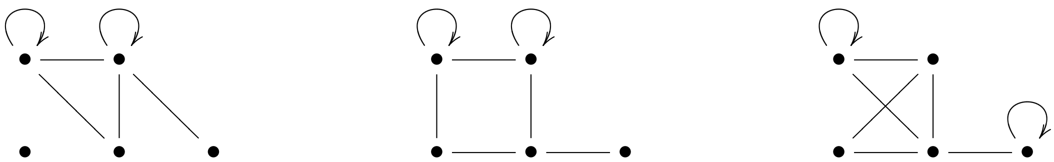
   (a) Para cada um dos grafos, verifique que a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

   (b) Escreva a matriz de adjacência de cada um dos grafos.

   (c) Associe a cada grafo uma das seguintes matrizes de incidência:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Considere os grafos seguintes:



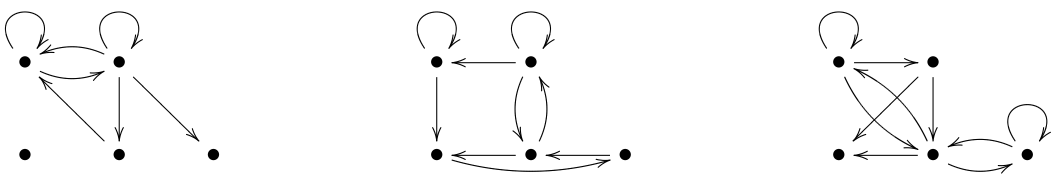
   (a) Indique o conjunto dos vizinhos de cada vértice.

   (b) Para cada vértice, indique o seu grau.

   (c) Para cada um dos grafos, verifique que a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

   (d) Determine as matrizes de adjacência e de incidência de cada grafo.

3. Considere os digrafos seguintes:



   (a) Indique o conjunto dos antecessores e de sucessores de cada vértice.

   (b) Para cada vértice, indique o seu grau interior e exterior.

   (c) Determine as matrizes de adjacência e de incidência de cada grafo.

4. Desenhe um grafo que tenha como matriz de adjacência

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. Desenhe um digrafo que tenha como matriz de adjacência

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. Desenhe um grafo que tenha como matriz de incidência

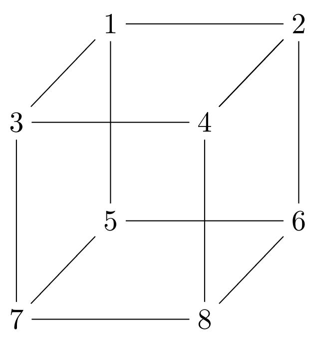
(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

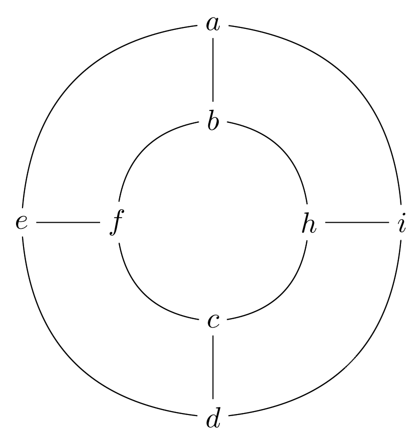
7. Desenhe um digrafo que tenha como matriz de incidência

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

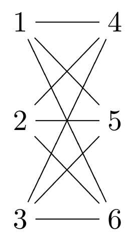
8. A menos de um isomorfismo, represente todos os grafos simples com 3 vértices.

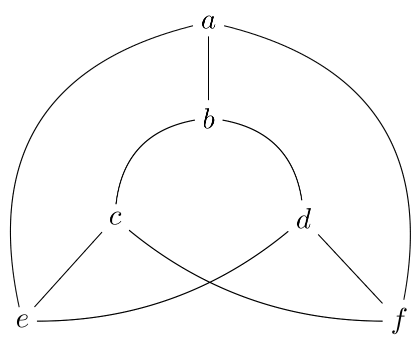
9. Mostre que são isomorfos





10. Mostre que são isomorfos os grafos

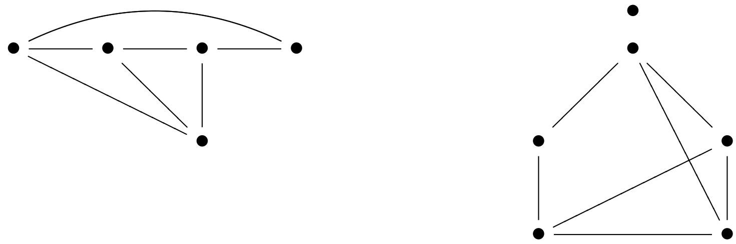




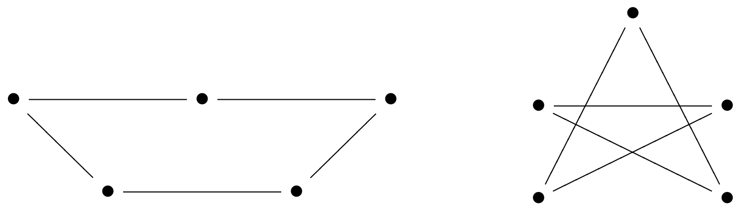
11. Verifique se os grafos são isomorfos:

(a)

(b)



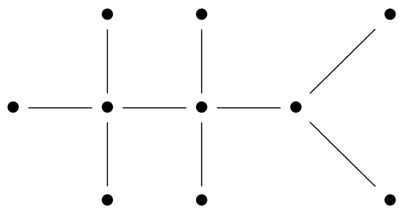
(c)



(d)

12. Represente a lista de subgrafos de vértice eliminado de K_5.

13. Mostre que o grafo seguinte é bipartido:



14. Determine o número de arestas num grafo

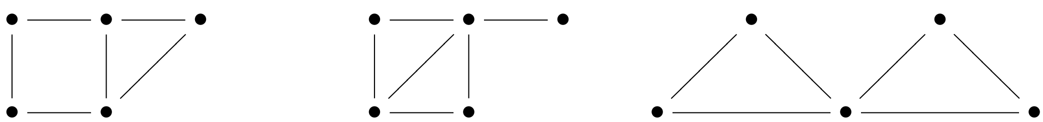
    (a) bipartido completo $K_{m,n}$,

    (b) completo K_m.

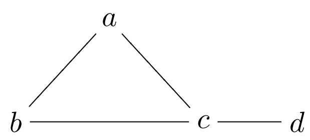
15. Desenhe os grafos completos bipartidos $K_{3,4}$, $K_{5,2}$ e $K_{1,5}$. Determine as respectivas matrizes de adjacência.

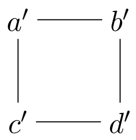
16. Descreva as matrizes de adjacência dos grafos K_n e $K_{m,n}$.

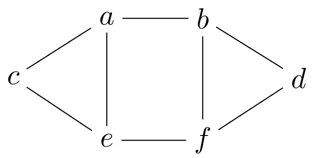
17. Verifique se são isomorfos

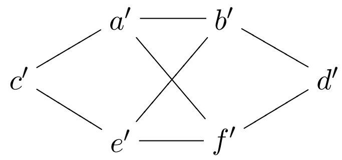


18. Verifique se os seguintes grafos são isomorfos:

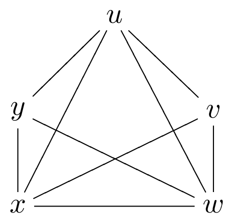
a) 



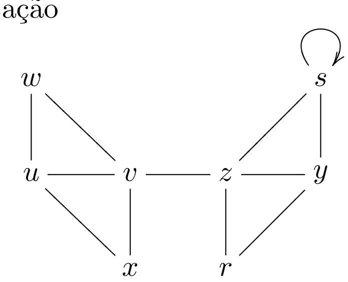
b) 



19. Represente a lista de subgrafos de vértice eliminado do grafo



20. Considere o grafo com a representação



(a) Indique quais das sequências de vértices apresentadas são caminhos:

i. (w, u, v, x)

ii. (x, r)

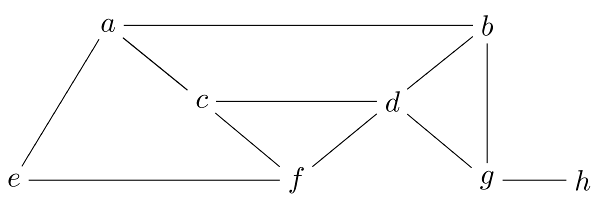
iii. (s, s, y, s)

iv. (y, v, z, y)

v. (s, z, s, y)

(b) Indique todos os caminhos $w - r$ de comprimento 4 ou 5.

21. Considere o seguinte grafo G:



a) Indique um caminho de a a h que não seja simples.

b) Indique um caminho simples de a a h que não seja elementar.

c) Indique um caminho elementar de a a h.

d) Indique um circuito de G que não seja ciclo.

e) Indique um ciclo de G de comprimento 7.

f) Indique um subgrafo de G que seja uma árvore geradora (isto é, um subgrafo gerador sem ciclos conexo).

g) Verifique se os seguintes grafos são subgrafos de G:

i) $G_1 = (\{a, b, e, f\}, \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{e, f\}\})$.
ii) $G_2 = (\{a, b, d, g, h\}, \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, g\}, \{d, g\}, \{g, h\}\})$.
iii) $G_3 = (\{a, c, d, e, f\}, \{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{e, f\}\})$.

h) Determine o subgrafo de G induzidos pelos seguintes subconjuntos de vértices e, em cada caso, indique as suas componentes conexas:

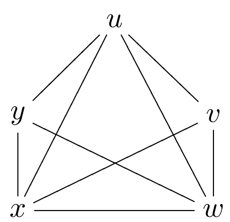
i) $\{a, b, c, d, e\}$ ii) $\{b, c, e, f, g\}$ iii) $\{b, c, e\}$

22. Verifique a validade da proposição 5.5 nas entradas de A^2, onde A indica a matriz de adjacência do exercício 4.

23. Descreva a matriz de adjacência de P_n e de C_n.

24. Calcule o diâmetro do grafo de Petersen.

25. Mostre que não é bipartido o grafo



26. Represente um 6-grafo conexo com 7 arestas e 3 ciclos.

27. Desenhe uma floresta com 12 vértices e 10 arestas.

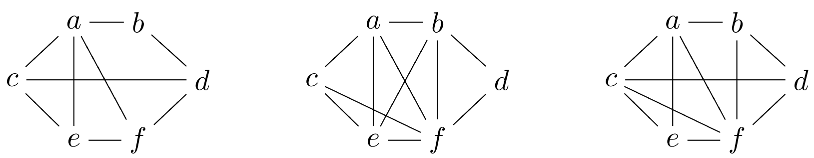
28. Construa todas as possíveis árvores, a menos de isomorfismo, com 6 vértices.

29. Construa uma floresta com 12 vértices e 9 arestas.

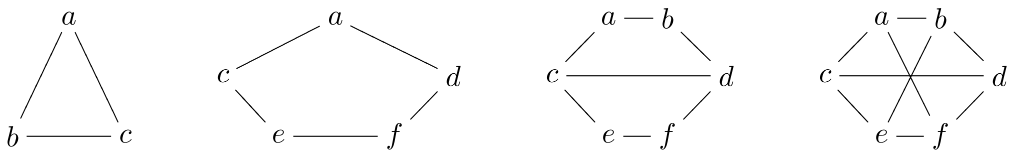
30. Desenhe ou explique por que não existe

(a) um (6,11)-grafo simples com 2 componentes conexas
(b) um (7,10)-grafo simples com 3 componentes conexas
(c) um (10,9)-grafo que seja floresta com 2 componentes conexas
(d) um (10,9)-grafo que seja floresta com 3 componentes conexas

31. Para cada um dos seguintes grafos encontre uma representação planar e indique o número de faces:



32. Verifique se os seguintes grafos são bipartidos:



33. Verifique se os grafos do exercício 18 são bipartidos.

34. Encontre uma representação planar de $K_{2,6}$.

35. Encontre uma representação planar do grafo associado a um cubo.

36. Para cada um dos grafos considerados nos exercícios 1 e 21:

   (a) Identifique as faces dos grafos.

   (b) Verifique a fórmula de Euler.

37. Seja $\mathcal{G}$ o grafo com vértices A, B, C, D, E, F e arestas $AB, AC, AE, BC, BD, CF, DE, DF, EF$.

   (a) Desenhe o grafo $\mathcal{G}$.

   (b) Diga se $\mathcal{G}$ é:

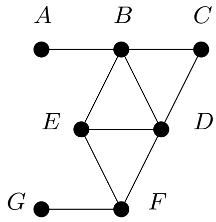
(i) completo	(ii) conexo	(iii) árvore
(iv) regular	(v) bipartido	

   (c) Construa, se possível, uma árvore geradora de $\mathcal{G}$.

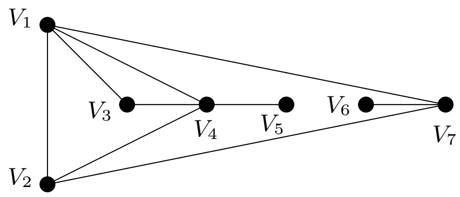
38. Em cada uma das alíneas seguintes, diga se os grafos apresentados são isomorfos

   (a) $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ (b) $\mathcal{G}_3$ e $\mathcal{G}_4$ (c) $\mathcal{G}_5$ e $\mathcal{G}_6$

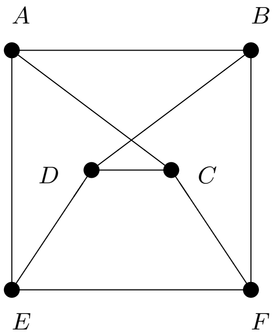
$\mathcal{G}_1$



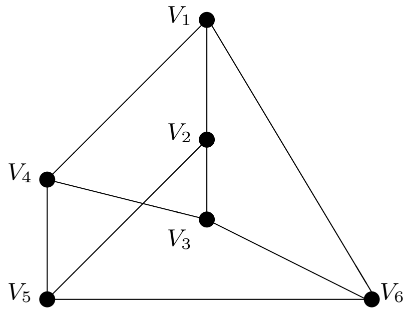
$\mathcal{G}_2$



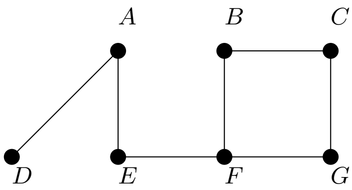
$\mathcal{G}_3$



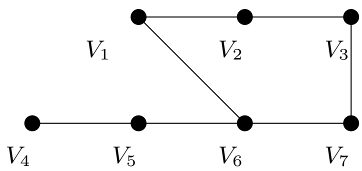
$\mathcal{G}_4$



$\mathcal{G}_5$



$\mathcal{G}_6$



39. Seja $\mathcal{G}$ um grafo com vértices A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e arestas AB, BC, BD, BE, BJ, CG, DG, FD, FE, HB, HF, IA, IH .

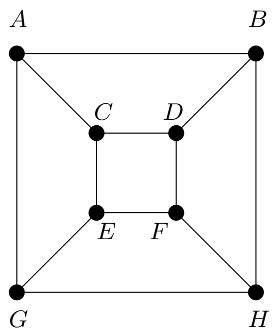
   (a) Represente este grafo.

   (b) Mostre que $\mathcal{G}$ é bipartido, indicando uma partição do conjunto dos seus vértices.

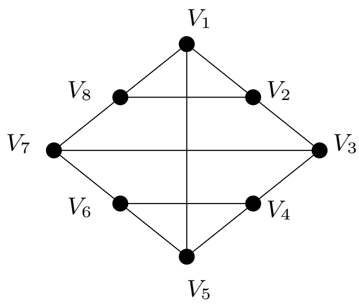
   (c) Diga se $\mathcal{G}$ é também tripartido.

40. Considere os grafos

$\mathcal{G}_1$



$\mathcal{G}_2$



(a) Diga, justificando, se G_1 e G_2 são:

   i. grafos bipartidos;

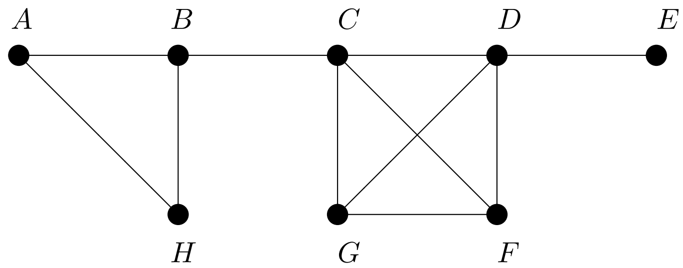
   ii. grafos isomorfos.

(b) Verifique a fórmula de Euler

41. Poderá existir uma árvore com 13 vértices, dois dos quais de grau 7? Justifique.

42. Construa um grafo $\mathcal{G}$, sabendo que $\mathcal{G}$ é uma árvore, possui dois vértices de grau 2, quatro de grau 3, três de grau 4 e nenhum de grau superior a 4.

43. Considere o grafo $\mathcal{G}$ representado na figura.



(a) Diga se $\mathcal{G}$ é:

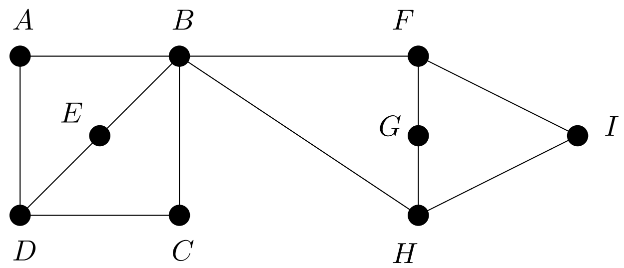
(i) conexo; (ii) árvore; (iii) regular; (iv) completo; (v) bipartido.

(b) Indique o grau de cada vértice de $\mathcal{G}$.

(c) Desenhe, se possível, uma árvore geradora de $\mathcal{G}$.

(d) Apresente dois subgrafos de $\mathcal{G}$ que sejam isomorfos entre si.

44. Considere o seguinte grafo $\mathcal{G}$.



(a) Diga se $\mathcal{G}$ é:

(i) conexo; (ii) árvore; (iii) regular; (iv) completo; (v) bipartido.

(b) Qual o grau mínimo e qual o grau máximo dos vértices de $\mathcal{G}$?

(c) Apresente, em $\mathcal{G}$, um caminho que não seja caminho simples, um caminho simples que não seja caminho elementar, um caminho elementar que não seja ciclo e, por fim, um ciclo.

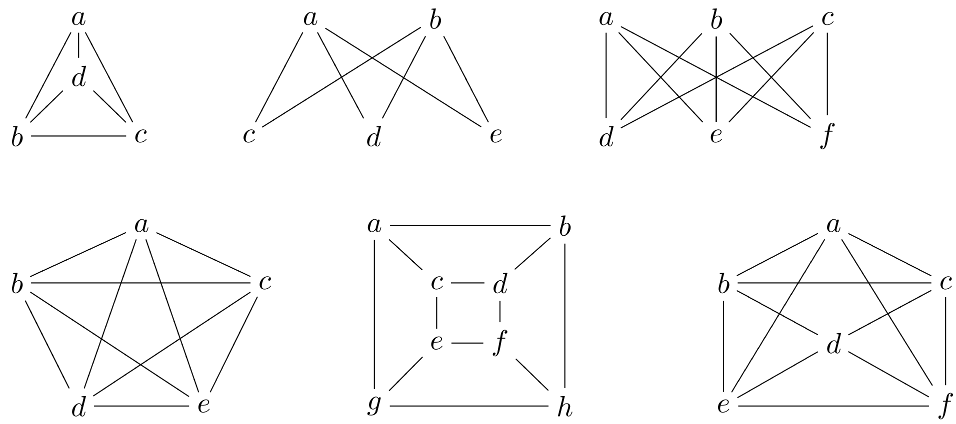
(d) Se disse que sim em v. da alínea (a), junte a $\mathcal{G}$ uma aresta para obter um grafo não bipartido. Se disse que não, remova uma aresta para obter um grafo bipartido.

(e) Se disse que não em i. da alínea (a), acrescente a $\mathcal{G}$ o número mínimo de arestas necessárias para obter um grafo conexo. Se disse que sim, remova o número mínimo de arestas necessárias para obter componentes conexas.

(f) E quantas arestas possui uma árvore geradora de $\mathcal{G}$?

(g) Apresente dois subgrafos de $\mathcal{G}$ que sejam isomorfos entre si.

45. Considere os seguintes grafos:



a) Verifique se os grafos são eulerianos e, em caso afirmativo, indique um circuito euleriano.

b) Para os grafos não eulerianos, verifique se existe um caminho euleriano.

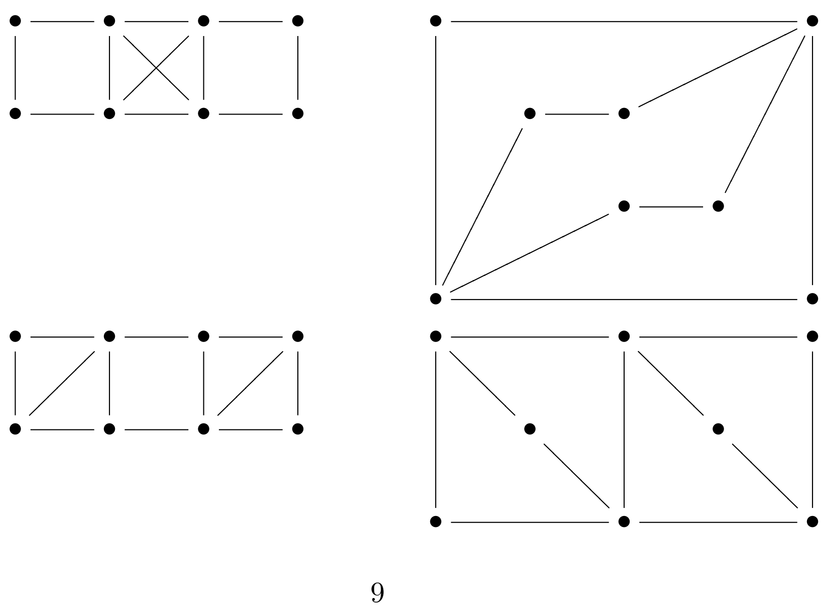
c) Verifique se os grafos são hamiltonianos e, em caso afirmativo, indique um ciclo hamiltoniano.

46. Verifique se os grafos dos exercícios 17, 18 e 21 são eulerianos.

47. Verifique se os grafos dos exercícios 17, 18 e 21 são hamiltonianos.

48. Para cada um dos seguintes grafos, encontre uma decomposição em ciclos disjuntos e use-a para construir um circuito euleriano.

49. Indique quais os grafos eulerianos e quais os hamiltonianos:



50. Determine o número cromático dos grafos indicados no exercício 32.

51. Determine o número cromático dos grafos indicados no exercício 17.

52. Determine o número cromático dos grafos indicados no exercício 18.

53. Determine o número cromático dos grafos indicados no exercício 48.

54. Construa um grafo planar conexo cujo número cromático seja 4.

55. Construa um grafo cujo número cromático seja 6.