

Matemática Discreta

Época normal – 2ª chamada 30 de Junho de 2006

A duração do exame é de 2 (duas) horas.

O exame consiste em duas partes. Resolva-as em folhas de exame distintas. Caso pretenda manter a sua classificação referente ao teste intermédio, **não** resolva a parte II, caso contrário a sua classificação anterior perderá a validade. Entregue **ambas** as folhas de exame, ainda que vazias.

Justifique todas as suas respostas convenientemente.

Parte I

- Mostre que, para $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, k, m \in \mathbb{N}$, sabendo que $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$, são válidas as congruências
 - $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
 - $a^k \equiv b^k \pmod{m}$
[Como sugestão, considere a igualdade $a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$]
- Use o Algoritmo de Euclides para determinar o máximo divisor comum entre 12378 e 3054.
- Use o Crivo de Eratóstenes, explicitando o raciocínio que efectuou, para indicar os números primos entre 1 e 70.
- Para $a \in \mathbb{Z}$, mostre que $a^2 \equiv 0 \pmod{4}$ ou $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$.
- Um empresário japonês regressou de uma viagem de negócios à Comunidade Europeia e aos Estados Unidos da América, e cambiou¹ os euros e dólares que trazia consigo em iens. Sabendo que recebeu 15286 iens que 1 euro e 1 dólar correspondem, respectivamente, a 122 iens e a 112 iens, calcule a quantia correspondente a cada moeda que ele cambiou.
- Resolva o seguinte sistema de congruências:

$$\begin{cases} x \equiv 2 & \pmod{7} \\ x \equiv 7 & \pmod{9} \\ x \equiv 3 & \pmod{4} \end{cases}$$

Cotação:

1(a, b), 2, 3, 4, 5, 6 ~ 2

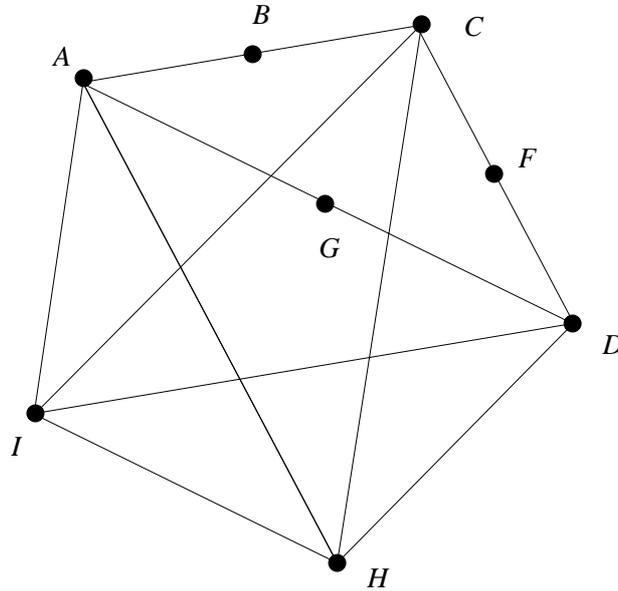
¹Assuma que não trazia consigo cêntimos.

Parte II

Resolva esta parte **apenas** se prescindir da classificação que obteve no teste intermédio, caso contrário esta perderá a sua validade.

Justifique todas as suas respostas.

Considere o grafo G representado por



1. Verifique se G é hamiltoniano.
2. Verifique se G é planar.
3. Mostre que é euleriano e decomponha o grafo em ciclos disjuntos.

Cotação:

1, 2, 3 ~ 2