

## Matemática Discreta

Época normal – 1ª chamada 16 de Junho de 2006

A duração do exame é de 2 (duas) horas.

O exame consiste em duas partes. Resolva-as em folhas de exame distintas. Caso pretenda manter a sua classificação referente ao teste intermédio, **não** resolva a parte II, caso contrário a sua classificação anterior perderá a validade. Entregue **ambas** as folhas de exame, ainda que vazias.

Justifique todas as suas respostas convenientemente.

### Parte I

- Indique o valor lógico das proposições seguintes, justificando convenientemente, onde  $a, b, c \in \mathbb{Z}, n, m \in \mathbb{N}$ .
  - $a^2 \equiv b^2 \pmod{n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$
  - $a \equiv b \pmod{n}$  e  $n \mid m \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$
  - $a \equiv b \pmod{n}$  e  $m \mid n \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$
  - $ca \equiv cb \pmod{n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$
- Mostre detalhadamente que  $\sqrt{2}$  é um número irracional.
- Determine as soluções inteiras da equação diofantina  $56x + 72y = 40$ .
- Resolva a congruência linear  $9x \equiv 21 \pmod{30}$ .
- Faça uso do Pequeno Teorema de Fermat para mostrar que, dados  $a, b \in \mathbb{Z}$  e  $p$  primo, é válida a congruência  $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ .
- O Coro Académico da Universidade do Minho cobra, por cada actuação, 3 euros por adulto e 1,5 euros por criança. O Concerto do Enterro da Gata rendeu 675 euros. Sabendo que estiveram presentes mais adultos do que crianças, diga quantas pessoas (adultos e crianças) assistiram a esse Concerto.  
[Como sugestão, resolva o problema utilizando cêntimos.]

Cotação:

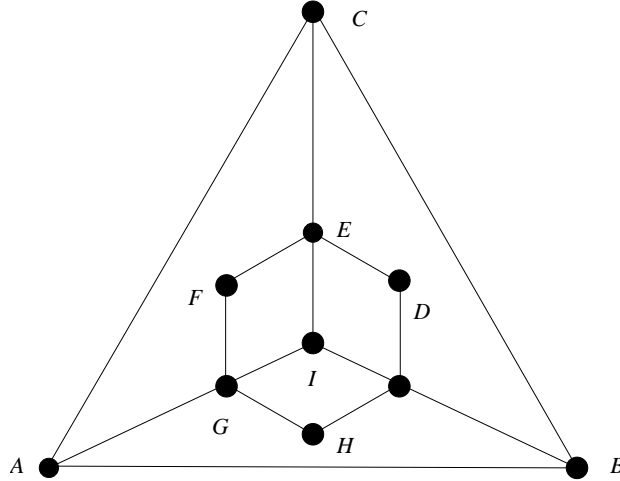
$1 \sim (1 + 1 + 1 + 1)$ ;  $2, 3, 4, 5, 6 \sim 2$

## Parte II

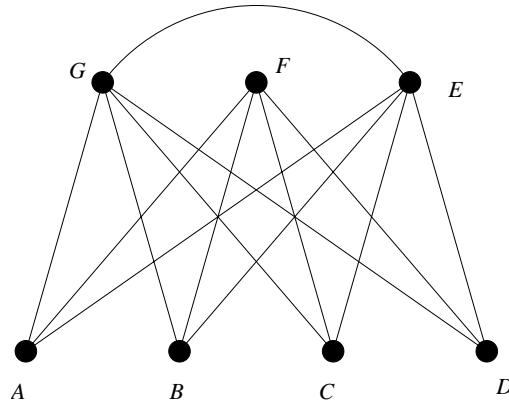
Resolva esta parte **apenas** se prescinde da classificação que obteve no teste intermédio, caso contrário esta perderá a sua validade.

Justifique todas as suas respostas.

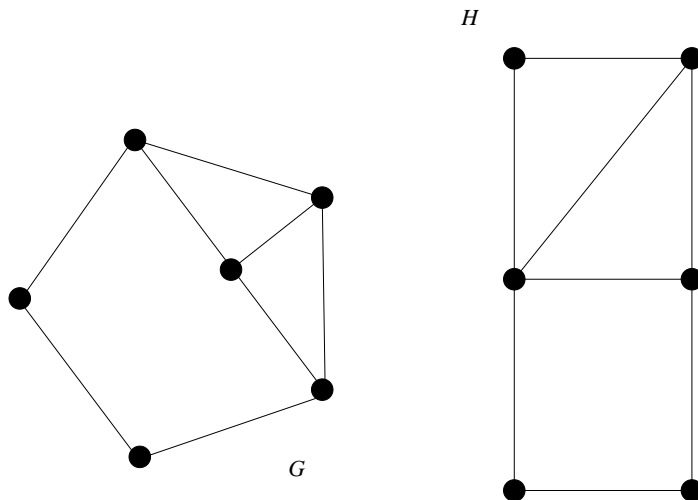
1. Verifique se é hamiltoniano o grafo



2. Verifique se é planar o grafo



3. Verifique se são isomorfos os grafos  $G$  e  $H$  representados por



Cotação:

1, 2, 3 ~ 2