

Cálculo EC_(Tópicos teóricos e exercícios)

Lic. em Biologia-Geologia e Lic. em Optometria e Ciências da Visão

2021/2022

Docente: José Joaquim Oliveira

Departamento de Matemática

Universidade do Minho

Conteúdo

1	Corpo ordenado e completo dos números reais: $\mathbb{R}$	2
2	Topologia da recta real	8
3	Noções base sobre funções reais de variável real	10
4	Funções reais de variável real: Limites e continuidade	19
5	Funções exponencial, hiperbólicas, trigonométricas e suas inversas	28
6	Derivada de uma função real de variável real	40
7	Integral indefinido de uma função real de variável real	51
8	Integral definido de uma função real de variável real	61
9	Equações diferenciais	69

1 Corpo ordenado e completo dos números reais: $\mathbb{R}$

AXIOMAS

Seja $\mathbb{R}$ munido das operações, adição e multiplicação,

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto +(x, y) = x + y & (x, y) \mapsto \cdot(x, y) = x \cdot y \end{array}$$

respectivamente, verificando:

$$\mathbf{C1} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x + y = y + x; \quad (\text{comutatividade da } +)$$

$$\mathbf{C2} \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x + (y + z) = (x + y) + z; \quad (\text{associatividade da } +)$$

$$\mathbf{C3} \quad \exists 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad x + 0 = x; \quad (\text{existência de elemento neutro da } +)$$

$$\mathbf{C4} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \exists (-x) \in \mathbb{R}, \quad x + (-x) = 0; \quad (\text{existência de simétrico})$$

$$\mathbf{C5} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \cdot y = y \cdot x; \quad (\text{comutatividade da } \cdot)$$

$$\mathbf{C6} \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z; \quad (\text{associatividade da } \cdot)$$

$$\mathbf{C7} \quad \exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \cdot 1 = x; \quad (\text{existência de elemento neutro da } \cdot)$$

$$\mathbf{C8} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists x^{-1} \in \mathbb{R}, \quad x \cdot x^{-1} = 1; \quad (\text{existência de inverso})$$

$$\mathbf{C9} \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z; \quad (\text{distributividade da } + \text{ em relação à } \cdot)$$

$$\mathbf{O} \quad \text{Existe } \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}, \text{ conjunto dos números positivos tal que} \quad (\text{Axioma de ordem})$$

$$\mathbf{O1} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+, \quad x + y \in \mathbb{R}^+, \quad \text{e} \quad x \cdot y \in \mathbb{R}^+;$$

$$\mathbf{O2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ acontece uma e uma só das situações:}$$

$$x = 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad -x \in \mathbb{R}^+;$$

$$\mathbf{S} \quad \text{Todo o subconjunto majorado de } \mathbb{R} \text{ tem supremo.} \quad (\text{Axioma do supremo})$$

Propriedades do corpo dos números reais

Proposição 1.1. *Sejam $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Então:*

1. *O elemento neutro da adição é único;*
2. *O elemento neutro da multiplicação é único;*
3. *O simétrico de x é único;*
4. *Se $x \neq 0$, então o inverso de x é único;*
5. $x + z = y + z \Rightarrow x = y;$ *(lei do corte na soma)*
6. $(x \cdot z = y \cdot z, z \neq 0) \Rightarrow x = y;$ *(lei do corte no produto)*
7. $-(-x) = x;$
8. $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y);$
9. $(x^{-1})^{-1} = x;$
10. $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0;$ *(zero elemento absorvente na multiplicação)*
11. $x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0);$ *(lei do anulamento do produto)*
12. $(x \leq y \text{ e } y \leq z) \Rightarrow x \leq z;$ *(a ordem nos números reais é transitiva)*
13. $(x \leq y \text{ e } z \geq 0) \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z;$
14. $(x \leq y \text{ e } z < 0) \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z;$
15. $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0;$
16. $(x \leq y \text{ e } z \leq w) \Rightarrow x + z \leq y + w;$
17. $(x \leq y \text{ e } 0 \leq z \leq w) \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot w.$

Princípio de indução Matemática

O conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N}$, é o subconjunto dos números reais definido recursivamente por

$$\begin{cases} 1 \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Proposição 1.2 (Princípio de indução matemática).

Seja $\mathcal{P}(n)$ uma condição dependente de $n \in \mathbb{N}$. Se

$$\begin{cases} \mathcal{P}(1) \text{ é verdadeira} \\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases},$$

então $\mathcal{P}$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\{n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(n)\} = \mathbb{N}.$$

Conjuntos

Definem-se o conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

e o conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \{m.n^{-1} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposição 1.3 (Densidade). *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x < y$. Então:*

- i) *existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$;*
- ii) *existe $i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < i < y$.*

Notação:(Intervalos) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq b$:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\};$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\};$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\};$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\};$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\};$
- $] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\};$
- $] - \infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}.$

Definição 1.1. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$ tal que $X \neq \emptyset$. Diz-se que:*

- α é majorante de X se:
$$\forall x \in X, x \leq \alpha;$$
- α é minorante de X se:
$$\forall x \in X, \alpha \leq x;$$
- α é máximo de X se α é majorante de X e $\alpha \in X$;
- α é mínimo de X se α é minorante de X e $\alpha \in X$;
- α é supremo de X se α é menor dos majorantes de X ;
- α é ínfimo de X se α é maior dos minorantes de X .

Definição 1.2. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ não vazio.*

1. *O conjunto X diz-se majorado se possui majorantes;*
2. *O conjunto X diz-se minorado se possui minorantes;*
3. *O conjunto X diz-se limitado se for majorado e minorado.*

Por convenção, considera-se que o conjunto $\emptyset$ é um conjunto limitado.

Valor Absoluto

$$\text{Para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ define-se } |x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Proposição 1.4. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Então:*

1. $|x| \geq 0$ e $(|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$;
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
4. $||x| - |y|| \leq |x - y|$;
5. Para todo $r > 0$, $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$;
6. Para todo $r > 0$, $|x| \geq r \Leftrightarrow (x \leq -r \text{ ou } x \geq r)$

Potências e raízes

Definição 1.3. *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.*

- Se n é par e $a \in [0, +\infty[$, então chama-se raiz índice n de a ao único número real $x \in [0, +\infty[$ que é solução da seguinte equação

$$x^n = a.$$

- Se n é ímpar, então chama-se raiz índice n de a ao único número real $x \in \mathbb{R}$ que é solução da seguinte equação

$$x^n = a.$$

A raiz índice n de $a \in \mathbb{R}$, nas situações em que existe, representa-se por $\sqrt[n]{a}$.

Exercícios

1. Para cada um dos conjuntos que se segue, identifique, caso exista, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo:

- | | |
|--|--|
| (a) $A = [3, +\infty[;$ | (e) $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\};$ |
| (b) $B = [2, 5[;$ | (f) $F = \{x \in \mathbb{N} : x < 5\};$ |
| (c) $C =]-\infty, 2[\cup \{3\};$ | (g) $G = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \leq 3\};$ |
| (d) $D = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq \pi\};$ | (h) $H = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \geq 3\}.$ |

2. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $n, m \in \mathbb{N}$.

Para cada uma das afirmações que se segue, identifique e justifique as falsas apresentando um contra-exemplo:

- | | |
|----------------------------|---|
| (a) $(xy)^n = x^n y^n;$ | (e) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y};$ |
| (b) $(x+y)^n = x^n + y^n;$ | (f) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y};$ |
| (c) $(x^n)^m = x^{nm};$ | (g) $\sqrt{x^2} = x;$ |
| (d) $(x^n)^m = x^{n+m};$ | (h) $(\sqrt{x})^2 = x.$ |

3. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x \leq y$.

Para cada uma das afirmações que se segue, justifique as verdadeiras e apresente um contra-exemplo nas falsas:

- | | |
|---------------------------|-------------------------------------|
| (a) $1 \in \mathbb{R}^+;$ | (d) $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y};$ |
| (b) $2x \leq 2y;$ | (e) $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x};$ |
| (c) $x^3 \leq y^3;$ | (f) $2x \leq x + y.$ |

4. Use indução matemática para demonstrar as seguintes propriedades:

- (a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
 (b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
 (c) dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, tem-se

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^n = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A(n)$ a seguinte afirmação: $A(n) := 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{8}(2n+1)^2$.

- (a) Prove que

$$A(n) \Rightarrow A(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

- (b) Mostre que a seguinte afirmação é falsa:

$$A(n) \text{ Verdadeira, } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Binómio de Newton

Dados $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tais que $k \leq n$, define-se:

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 & \text{se } n \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

a) Mostre que, para quaisquer $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $k < n$ se tem

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

b) Mostre que a seguinte fórmula, conhecida por *Binómio de Newton*, é verdadeira:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

2 Topologia da recta real

Noções topológicas da recta real

Definição 2.1. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Diz que:*

1. o número y é ponto interior de X se

$$\exists \varepsilon > 0,]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\subseteq X;$$

2. o número y é ponto aderente de X se

$$\forall \varepsilon > 0,]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\cap X \neq \emptyset;$$

3. o número y é ponto de acumulação de X se

$$\forall \varepsilon > 0, (]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\setminus \{y\}) \cap X \neq \emptyset;$$

4. o número y é ponto fronteiro de X se

$$\forall \varepsilon > 0, \begin{cases}]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\cap X \neq \emptyset \\]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\cap (\mathbb{R} \setminus X) \neq \emptyset \end{cases};$$

5. o número y é ponto isolado de X se

$$\exists \varepsilon > 0,]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\cap X = \{y\}.$$

Definição 2.2. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Designa-se por:*

1. interior de X , denota-se por $\overset{\circ}{X}$, o conjunto dos pontos interiores de X ;
2. aderência de X , denota-se por $\overline{X}$, o conjunto dos pontos aderentes de X ;
3. derivado de X , denota-se por X' , o conjunto dos pontos de acumulação de X ;
4. fronteira de X , denota-se por $fr(X)$, o conjunto dos pontos fronteiros de X .

Definição 2.3. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$.*

1. Diz-se que X é aberto se $X = \overset{\circ}{X}$.
2. Diz-se que X é fechado se $X = \overline{X}$.

Propriedades topológicas (algumas)

Proposição 2.1. *Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Então:*

1. $\overset{\circ}{X} \subseteq X$;
2. $X \subseteq \overline{X}$;
3. $fr(X) = \overline{X} \setminus \overset{\circ}{X}$;
4. $\mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{X} = \mathbb{R} \setminus \overline{X}$;
5. X é fechado $\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus X$ é aberto;
6. $X \subseteq Y \Rightarrow \overset{\circ}{X} \subseteq \overset{\circ}{Y}$;
7. $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y}$.

Exercícios

1. Demonstre cada uma das propriedades apresentadas na proposição anterior.
2. Para cada um dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que se seguem determine o *interior*, a *aderência*, o *derivado* e a *fronteira*.
 - (a) $A =] - \infty, 2]$;
 - (b) $B = [2, 3[\cup \{\pi\}$;
 - (c) $C = [0, 3[\setminus \mathbb{Q}$;
 - (d) $D = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$;
 - (e) $E = (] - \infty, -1] \setminus \{-3\}) \cup ([0, 1[\cap \mathbb{Q})$;
 - (f) $F = \mathbb{N}$.
3. Para cada um dos conjuntos da alínea anterior, identifique os abertos e os fechados.
4. Apresente um exemplo, caso exista, de:
 - (a) Um subconjunto de $\mathbb{R}$ que não seja aberto nem fechado;
 - (b) Um subconjunto de $\mathbb{R}$ simultaneamente aberto e fechado;
 - (c) Um subconjunto de $\mathbb{R}$ com um único ponto interior;
 - (d) Um subconjunto de $\mathbb{R}$ cuja fronteira seja o intervalo $[1, +\infty[$.
5. Mostre que:
 - (a) a união e a intersecção de dois conjuntos abertos é um conjunto aberto;
 - (b) a união e a intersecção de dois conjuntos fechados é um conjunto fechado.

3 Noções base sobre funções reais de variável real

Definição 3.1 (Função). Chama-se *função real de variável real* a um terno $(D, E, f(x))$, onde D e E são subconjuntos de $\mathbb{R}$ não vazios e $f(x)$ é uma regra de correspondência que a cada elemento de D , $x \in D$, faz corresponder um só elemento de E , $f(x) \in E$. Denota-se por

$$\begin{array}{ccc} f : & D & \rightarrow E \\ & x & \mapsto f(x) \end{array} .$$

Chama-se:

- domínio de f ao conjunto D ;
- conjunto de chegada de f ao conjunto E ;
- objecto a cada $x \in D$;
- imagem de x por f , onde $x \in D$, ao elemento $f(x) \in E$;
- contradomínio de f ao conjunto das imagens de f , isto é, $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$;
- gráfico de f ao conjunto $Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq D \times E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

São **exemplos de funções** reais de variável real:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$;
- $h : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x}$;
- $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$
 $x \mapsto x^2$;
- $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto \frac{1}{n}$.

São **não exemplos de funções** reais de variável real:

- $: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x}$;
- $: \emptyset \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$;
- $: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \pm x$;
- $: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$
 $x \mapsto x^2$.

Exemplo: Considere a função f acima, isto é

$$\begin{array}{ccc} f : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto x^2 \end{array} .$$

Tem-se que o domínio $D = \mathbb{R}$, o conjunto de chegada é $E = \mathbb{R}$, o contradomínio é

$$f(\mathbb{R}) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x^2 : x \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty[,$$

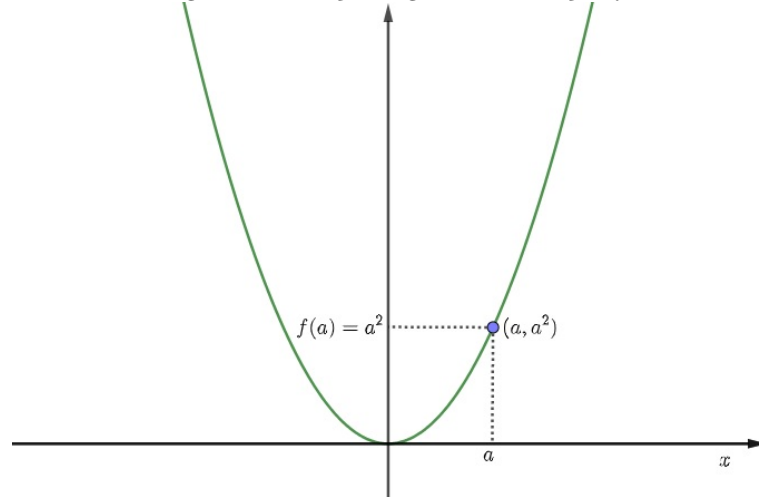
e finalmente, o gráfico de f é

$$Gr(f) = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Usualmente utiliza-se um plano cartesiano, plano no qual se encontra fixado um sistema de eixos ortonormados, para representar o gráfico de uma função real de variável real (ver Figura 1).

Por vezes, refere-se uma função apenas pela sua regra de correspondência. Nestas situações, considera-se que o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$ e que o domínio é o conjunto dos números reais, $x \in \mathbb{R}$, tais que a imagem, $f(x)$, está bem definida.

Figura 1: Esboço do gráfico da função f



Exemplo: Ao escrever-se “Considere-se a função $g(x) = \sqrt{x}$ ”, está-se a referir à função

$$\begin{array}{ccc} g : & [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto \sqrt{x} \end{array}.$$

Características gerais das funções

Apresentam-se de seguida características gerais sobre funções. Características essas que, sendo estudadas, contribuem decididamente para se entender o seu comportamento.

Definição 3.2. *Seja $f : D \rightarrow E$ uma função real de variável real. Diz-se que:*

- a função f é injectiva se, para quaisquer elementos x_1, x_2 de D tais que as imagens $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são o mesmo elemento em E , então x_1 e x_2 são o mesmo objecto, ou seja:

$$\forall x_1, x_2 \in D : (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2).$$

Equivalentemente

$$\forall x_1, x_2 \in D : (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Informalmente, uma função é injectiva se a objectos diferentes correspondem imagens diferentes.

- a função f é sobrejectiva se, para qualquer elemento $y \in E$, existe pelo menos um objecto x tal que $y = f(x)$, ou seja:

$$\forall y \in E, \exists x \in D : y = f(x).$$

Informalmente, uma função é sobrejectiva se todo o elemento do conjunto de chegada é imagem de algum objecto.

- a função f é bijectiva se a função é injectiva e sobrejectiva, ou seja:

$$\forall y \in E, \exists^1 x \in D : y = f(x).$$

Exemplo:

- A função $\begin{array}{ccc} g : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto x^3 \end{array}$ é bijectiva;

- A função $Exp_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2^x$ é injectiva mas não sobrejectiva;
- A função $sen : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$
 $x \mapsto \sin(x)$ é sobrejectiva, mas não injectiva;
- a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$ não é injectiva nem sobrejectiva.

Para definir a *paridade de uma função*, é necessário introduzir a noção de conjunto simétrico relativamente a zero.

Definição 3.3 (Conjunto simétrico). *Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ diz-se simétrico relativamente a zero se $X = -X$, onde*

$$-X = \{-x : x \in X\}.$$

Por outras palavras, um conjunto de números reais simétrico relativamente a zero é um conjunto que verifica a seguinte propriedade:

$$x \in X \Rightarrow -x \in X.$$

Definição 3.4 (Paridade). *Seja $f : D \rightarrow E$ uma função real de variável real em que o domínio, D , é um conjunto simétrico relativamente a zero. Diz-se que:*

- a função f é par se

$$\forall x \in D : f(x) = f(-x);$$

- a função f é ímpar se

$$\forall x \in D : f(x) = -f(-x).$$

As noções de função par e de função ímpar não são contrárias nem complementares, isto é existem funções pares que não são ímpares, existem funções ímpares que não são pares, existem funções que não são pares nem ímpares e existem funções que são pares e são ímpares. Atenda ao exemplo que se segue.

Exemplo:

1. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto |x|$ é par, mas não é ímpar;
2. A função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin x$ é ímpar, mas não é par;
3. A função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x + 1$ não é par e não é ímpar;
4. A função $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 0$ é par e é ímpar.

Segue a apresentação dos diferentes tipos de *monotonia de uma função*

Definição 3.5 (Monotonia). *Seja $f : D \rightarrow E$ uma função real de variável real. Diz-se que*

- a função f é crescente se

$$\forall x, y \in D, \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y);$$

- a função f é estritamente crescente se

$$\forall x, y \in D, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y);$$

- a função f é decrecente se

$$\forall x, y \in D, \quad x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y);$$

- a função f é estritamente decrecente se

$$\forall x, y \in D, \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y);$$

- a função f é monótona se f é crescente ou decrecente.

Exemplo:

1. A função $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x + 1$ é estritamente crescente;
2. A função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto -x + 1$ é estritamente decrecente;
3. A função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 4$ é crescente e decrecente;
4. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$ não é crescente nem decrecente.

Definem-se de seguida os diferentes tipos de *extremos* de uma função.

Definição 3.6. [*Extremos*] *Seja $f : D \rightarrow E$ uma função real de variável real.*

Um número $x_0 \in D$ diz-se

- ponto de máximo local de f se

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap D : \quad f(x) \leq f(x_0),$$

e à imagem $f(x_0)$ chama-se máximo local de f ;

- ponto de mínimo local de f se

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap D : \quad f(x) \geq f(x_0),$$

e à imagem $f(x_0)$ chama-se mínimo local de f ;

- ponto de máximo absoluto de f se

$$\forall x \in D : \quad f(x) \leq f(x_0),$$

e à imagem $f(x_0)$ chama-se máximo absoluto de f ;

- ponto de mínimo absoluto de f se

$$\forall x \in D : \quad f(x) \geq f(x_0),$$

e à imagem $f(x_0)$ chama-se mínimo absoluto de f ;

- ponto de extremo (local ou absoluto) se x_0 for ponto de máximo ou ponto de mínimo (local ou absoluto) de f .

Definição 3.7. Seja $f : D \rightarrow E$ uma função real de variável real. Diz-se que

- a função f é minorada se o contradomínio, $f(D)$, for um conjunto minorado, ou seja

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D : \quad m \leq f(x);$$

- a função f é majorada se o contradomínio, $f(D)$, for um conjunto majorado, ou seja

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D : \quad f(x) \leq M;$$

- a função f é limitada se o contradomínio, $f(D)$, for um conjunto limitado, ou seja

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in D : \quad m \leq f(x) \leq M.$$

Como consequência imediata das definições 3.6 e 3.7, tem-se a Proposição que se segue:

Proposição 3.1. Seja $f : D \rightarrow E$ uma função real de variável real.

1. Se f possui um máximo absoluto, então f é majorada;
2. Se f possui um mínimo absoluto, então f é minorada.

O recíproco dos pontos 1. e 2. da proposição anterior não é válido.

Exemplo:

1. A função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$ é minorada, mas não tem mínimo;

2. A função $f : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$ é majorada, mas não tem máximo;

3. A função

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} -x + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$$

tem um ponto de máximo local em $x = 0$ ($h(0) = 1$ é máximo local de h), mas h não tem máximo absoluto. A função h não tem mínimo local nem absoluto.

Construção de funções

As noções apresentadas até aqui são relativas a características de funções. As definições que se seguem apresentam diversas formas de definir outras funções com base em funções previamente conhecidas.

Definição 3.8. *Sejam $f : D \rightarrow E$ e $g : Z \rightarrow E$ duas funções reais de variável real tais que $Z \subseteq D$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in Z$. Então*

1. a função g diz-se uma restrição de f , denotando-se por $f|_Z$;
2. a função f diz-se um prolongamento de g .

Exemplo: Considere a função

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} .$$

Considerando $X \subseteq \mathbb{R}^+$ tal que $X \neq \emptyset$, a restrição $f|_X$ é única. Por exemplo, tomado $X = [1, +\infty[$, tem-se

$$\begin{array}{ccc} f|_{[1, +\infty[} : & [1, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

O prolongamento de funções não é único, pois

$$\begin{array}{ccc} h : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} l : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2, & x > -1 \\ x+1, & x \leq -1 \end{cases} \end{array}$$

são exemplos de prolongamentos da função f .

Definição 3.9 (Aritmética de funções).

Sejam $f : D \rightarrow E$ e $g : D \rightarrow E$ funções reais de variável real. Defina-se:

1. soma de f com g como sendo a função

$$\begin{array}{ccc} f + g : & D & \rightarrow E \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} ;$$

2. produto de f com g como sendo a função

$$\begin{array}{ccc} f \cdot g : & D & \rightarrow E \\ x & \mapsto & f(x) \cdot g(x) \end{array} ;$$

3. quociente de f com g como sendo a função

$$\begin{array}{ccc} \frac{f}{g} : & D & \rightarrow E \\ x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array} ,$$

caso $g(x) \neq 0, \forall x \in D$.

Definição 3.10 (Composição). *Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Z \rightarrow W$ duas funções reais de variável real tais que $f(X) \subseteq Z$.*

Defina-se função composta de g com f , ou equivalentemente g após f , denotando-se por $g \circ f$, como sendo a função

$$\begin{array}{ccc} g \circ f : & X & \rightarrow W \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array} .$$

Exemplo: Considere as funções $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \sin(x) \quad \text{e} \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Tem-se que

$$f(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R},$$

e o domínio da função g é $\mathbb{R}$, logo é possível construir a função composta $g \circ f$, tendo-se

$$g \circ f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Contudo não existe a composta de f com g porque o contradomínio da função g , não está contido no domínio da função f , isto é,

$$g(\mathbb{R}) = [-1, 1] \not\subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Definição 3.11. *Seja $f: X \rightarrow Y$ uma função real de variável real.*

Uma função $g: Y \rightarrow X$ diz-se função inversa de f se

$$f \circ g = id_Y \quad \text{e} \quad g \circ f = id_X.$$

Duas propriedades surgem imediatamente das definições 3.11 e 3.2.

Proposição 3.2. *Uma função $f: X \rightarrow Y$ é invertível se e só se f é uma função bijectiva.*

Proposição 3.3. *Seja $f: X \rightarrow Y$ uma função que admite inversa.*

Então existe uma única inversa de f .

Como consequência da Proposição 3.3, uma função $f: X \rightarrow Y$ que admite inversa diz-se invertível e a sua inversa representa-se por f^{-1} .

Exemplo:

- A função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é bijectiva, logo admite função inversa, sendo esta $g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
$$x \mapsto x^3 \quad \quad \quad x \mapsto \sqrt[3]{x}.$$
- A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não é bijectiva, consequentemente não admite função inversa.
$$x \mapsto x^2 - 1$$
- A função $h: [0, +\infty[\rightarrow [-1, +\infty[$ é bijectiva, logo admite função inversa, sendo esta
$$x \mapsto x^2 - 1$$

$$h^{-1}: [-1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$$

$$x \mapsto \sqrt{x+1}.$$

Exercício 3.1.

1. Identifique o domínio de cada uma das seguintes funções:

$$(a) f(x) = \frac{x-1}{x^2-1};$$

$$(b) f(x) = \sqrt{x^2-1};$$

$$(c) f(x) = \sqrt[3]{x^2-1};$$

$$(d) f(x) = \frac{(\sqrt{x})^2}{x-1};$$

2. Para cada uma das funções que se segue, identifique a sua paridade:

$$(a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } f(x) = 3x;$$

$$(b) f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } f(x) = 3x;$$

$$(c) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } f(x) = \cos(x);$$

$$(d) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } f(x) = 3x + 2;$$

$$(e) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } f(x) = 3.$$

3. Sejam $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais de variável real tais que $g(X) \subseteq X$.

Estude, em função das paridades (par ou ímpar) das funções f e g , a paridade da função $f \circ g$.

4. Para cada uma das funções que se segue, identifique os seus extremos (caso existam) e estude a monotonia.

$$(a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } f(x) = 3x;$$

$$(b) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } f(x) = |x^2 + x - 2|;$$

$$(c) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } f(x) = \frac{|x|}{x};$$

$$(d) f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } f(x) = \frac{1}{x};$$

$$(e) f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } f(x) = \frac{1}{x}.$$

5. Classifique, quanto à injectividade e sobrejectividade, cada uma das seguintes funções:

$$(a) \quad f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array};$$

$$(c) \quad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, 2] \\ x & \mapsto & \begin{cases} x, & x \in]0, 2] \\ 2, & x \in \mathbb{R} \setminus]0, 2] \end{cases} \end{array};$$

$$(b) \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2 \end{array};$$

$$(d) \quad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}.$$

6. Determine, ou justifique que não existe, as funções $f \circ g$ e $g \circ f$ quando:

$$(a) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{x^2 + 2} \quad e \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2 ;$$

$$(b) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2 + 1 \quad e \quad g: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x}{x+2} ;$$

$$(c) \quad f: [3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{x-3} \quad e \quad g: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x}{x+2} ;$$

$$(d) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x-1, & x > 0 \\ 3, & x \leq 0 \end{cases} \quad e \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ 4, & x < 0 \end{cases} .$$

7. Para cada uma das funções h que se seguem, indique duas funções, f e g (diferentes da identidade) tais que $h = g \circ f$:

$$(a) \quad h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \cos\left(\frac{x}{|x|+1}\right) ;$$

$$(b) \quad h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{x^2 + 2} + \frac{3}{x^2 + 2} .$$

8. Considere a $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Esboce o gráfico da cada função g definida por

$$(a) \quad g(x) = f(x) + 1;$$

$$(b) \quad g(x) = f(x+1);$$

$$(c) \quad g(x) = \max\{f(x), 1\};$$

$$(d) \quad g(x) = \min\{f(x), 1\}.$$

9. Considere a função polinomial $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $p(x) = x^2 - 3x + 2$.

(a) Justifique a função p não admite inversa.

(b) Defina intervalos de números reais, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ tais que a função

$$p^*: I \rightarrow J \quad x \mapsto p(x)$$

é invertível.

(c) Determine a função inversa da função obtida na alínea anterior.

4 Funções reais de variável real: Limites e continuidade

Limites

Definição 4.1 (Limite segundo Cauchy). *Sejam $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real, $a \in D'$ e $L \in \mathbb{R}$.*

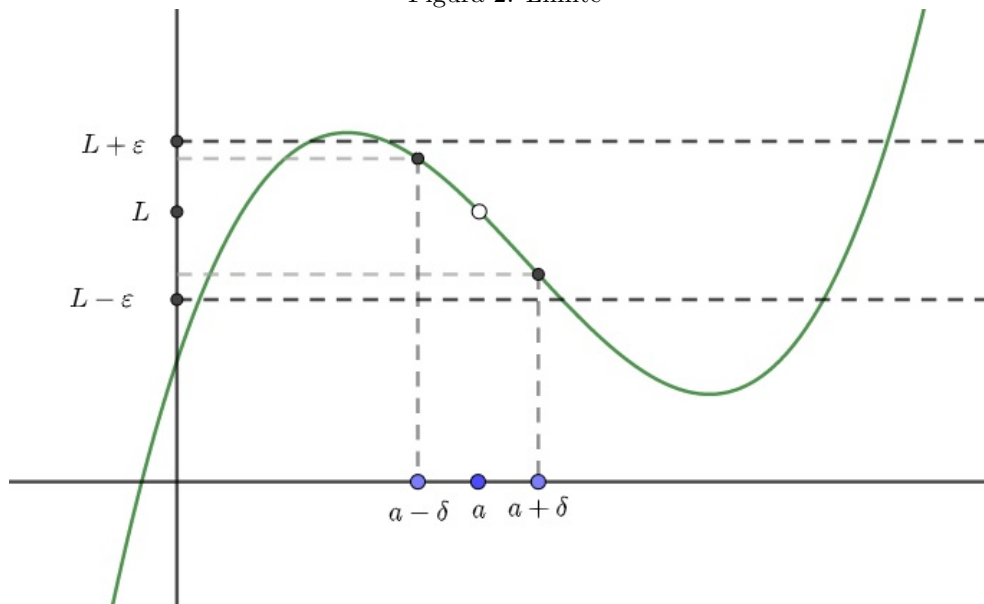
Diz-se que L é limite de f quando x tende para a se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon, \quad (1)$$

denotando-se por

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Figura 2: Limite



De observar que, na definição de limite de uma função num ponto a , não se exige que esse ponto pertença ao domínio da função, mas sim que seja ponto de acumulação do domínio da função. Sendo a ponto de acumulação do domínio, então existem objectos arbitrariamente próximos de a .

Interpretando a condição de limite de uma função num ponto, (1), (observe Figura 2), um número real L é limite de uma função f num ponto a (pertencente ao derivado do domínio) se objectos arbitrariamente próximos do ponto a têm imagens arbitrariamente próximas de L .

A condição (1) é equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : \left(x \in]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\} \right) \Rightarrow \left(f(x) \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[\right) \quad (2)$$

Exemplo: Considere a função

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Pretende-se mostrar, por definição, que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Seja $\varepsilon > 0$.

Escolha-se $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$. (escolha feita após os cálculos abaixo apresentados)

Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x - 0| < \delta$. Consequentemente,

$$0 < |x - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |x| < \delta \Rightarrow (x^2 < \delta^2 \text{ e } x \neq 0).$$

Assim,

$$|f(x) - 0| = |x^2 - 0| = x^2 < \delta^2 = (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon,$$

donde se conclui que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Proposição 4.1. *Tem-se*

1. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$;
2. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$, para quaisquer $a, c \in \mathbb{R}$.

Proposição 4.2 (Unicidade de limite).

O limite de uma função real de variável real num ponto, quando existe, é único.

Definição 4.2 (Limites laterais). *Sejam $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $a \in D'$ e $L \in \mathbb{R}$.*

Diz-se que

- o número L é o limite de f à direita de a se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : x \in]a, a + \delta[\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

denotando-se por

$$L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x);$$

- o número L é o limite de f à esquerda de a se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : x \in]a - \delta, a[\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

denotando-se por

$$L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

Proposição 4.3. *Sejam $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $a \in D'$ e $L \in \mathbb{R}$.*

Tem-se

$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \right) \text{ se e só se } \left(\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right)$$

Exemplos:

1. Pretende-se estudar

$$\lim_{x \rightarrow 0} (|x| + 2).$$

Tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (|x| + 2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2) = 2$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (|x| + 2) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x + 2) = 2.$$

Consequentemente $\lim_{x \rightarrow 0} (|x| + 2) = 2$.

2. Pretende-se estudar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

Tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Consequentemente não existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$.

Limites envolvendo o ∞

Definição 4.3. *Sejam $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real e $a \in D'$. Define-se:*

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ por

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M;$$

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ por

$$\forall M < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M.$$

Definição 4.4. *Sejam $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real e $L \in \mathbb{R}$.*

1. *Quando D não é majorado, define-se*

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ por

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall x \in D : x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon;$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ por

$$\forall M > 0, \exists N > 0, \forall x \in D : x > N \Rightarrow f(x) > M;$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ por

$$\forall M < 0, \exists N > 0, \forall x \in D : x > N \Rightarrow f(x) < M.$$

2. *Quando D não é minorado, define-se:*

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ por

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N < 0, \forall x \in D : x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon;$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ por

$$\forall M > 0, \exists N < 0, \forall x \in D : x < N \Rightarrow f(x) > M;$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ por

$$\forall M < 0, \exists N < 0, \forall x \in D : x < N \Rightarrow f(x) < M.$$

Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3 + 3x + 1}{x^3}}{\frac{2x^3 + x^2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1 + 0 + 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}.$$

Técnicas para o cálculo de limites

Teorema 4.1 (Aritmética de limites). *Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções reais de variável real e $a \in X'$.*

Se existem

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

então

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x);$
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right);$
3. Se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$

Exemplo: Para calcular o limite de

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x + 3},$$

usam-se as propriedades da aritmética de limites, obtendo-se

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x + 3} = \frac{2^3 - 1}{2 + 3} = \frac{7}{5}.$$

Atenção: É importante ter presente que, no geral, a aritmética de limites não funciona quando se trabalha com limites infinitos.

Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0,$$

tendo-se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|x|} \cdot |x| \right) = 1.$$

Mas,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

não existindo o limite (verifique)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|x|} \cdot x \right).$$

O exemplo prévio ilustra o porquê de se dizer que $0 \cdot \infty$ é uma indeterminação. Outros tipos de indeterminação são:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad \infty^0, \quad 0^0$$

Teorema 4.2 (Enquadramento).

Sejam $f, g, h : X \rightarrow Y$ funções reais de variável real, $a \in X'$ e $L \in \mathbb{R}$ tais que

1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in X;$
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L.$

Então existe $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, tendo-se

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Exemplo: Pretende-se calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2}.$$

Para todo $x \in [-1, 1]$ tem-se

$$x^2 \leq x^{\frac{3}{2}} \leq x,$$

e já se verificou anteriormente que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x$. Pelo Teorema 4.2, conclui-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2} = 0.$$

Proposição 4.4. *Sejam $f, g : D \rightarrow Y$ funções reais de variável real e $a \in D'$.*

Se

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0;$

2. g é limitada,

então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0.$$

Exemplo: Pretende-se calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nota: A função cosseno não foi ainda aqui abordada. Contudo, os conhecimentos adquiridos nos estudos pré-universitários são suficientes para o aluno entender os raciocínios desenvolvidos neste exemplo.

Como $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2} = 0$ (ver exemplo anterior), a Proposição 4.4 permite concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Funções contínuas

* Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se contínua em $a \in D$ se:

a não é ponto de acumulação de D ;

ou

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Equivalentemente, f é contínua em $a \in D$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

* A função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se contínua à direita de $a \in D$ se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

* A função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se contínua à esquerda de $a \in D$ se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a).$$

* Um função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se descontínua em $a \in D$ se não for contínua em a .

Teoremas sobre continuidade

Teorema 4.3. *Sejam $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $a \in X'$, $g(X) \subseteq D$, f é contínua e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$, com $L \in D$.*

Então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right).$$

Demonstração. Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$, fazendo a mudança de notação $y = g(x)$, tem-se que se $x \rightarrow a$, então $y = g(x) \rightarrow L$. Consequentemente, pelo facto de f ser contínua, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow L} f(y) = f(L) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right).$$

□

Exemplo: Pretende-se calcular

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{4x^2 - 12}{x + 3}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 12}{x + 3}} = \sqrt{\frac{36 - 12}{3 + 3}} = \sqrt{4} = 2.$$

Corolário 4.4 (Composta de funções contínuas). *Sejam $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $g(X) \subseteq D$. Se g é contínua em $a \in X$ e f é contínua em $g(a) \in D$, então*

$$f \circ g : X \rightarrow \mathbb{R}$$

é contínua em $a \in X$.

Teorema 4.5 (Teorema do valor intermédio). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.*

Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = d$

Corolário 4.6. *O contradomínio de uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo) é um intervalo.*

Se $f(a).f(b) < 0$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Corolário 4.7 (Teorema de Bolzano-Cauchy). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.*

Se $f(a).f(b) < 0$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema 4.8 (Weierstrass). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.*

Então o contradomínio $f([a, b])$ tem máximo e tem mínimo.

Teorema 4.9. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e injectiva (I é um intervalo).*

Então f é estritamente monótona.

Teorema 4.10. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona com $f(I)$ um intervalo (I é um intervalo).*

Então f é contínua.

Teorema 4.11. *Se $f : I \rightarrow J$, onde I e J são intervalos, é uma função contínua e bijectiva, então $f^{-1} : J \rightarrow I$ é uma função contínua.*

Exercício 4.1. 1. *Determine, caso exista, o valor de cada um dos seguintes limites:*

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1};$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x};$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1};$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} |x|;$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x};$

- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$;
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x^2}}$;
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{sen}(4x)}$;
- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 4x - 7}$;
- (j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{8+x^2}{x(x+1)}}$;
- (k) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$;
- (l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$;
- (m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$;
- (n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \left(\cos \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right)$;
- (o) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x}$;
- (p) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x)$;
- (q) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$;
- (r) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$;
- (s) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$;
- (t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{e^x}$;
- (u) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x \operatorname{sen} x)$;
- (v) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$, quando $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 4 \\ x, & x = 4 \end{cases}$;
- (w) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, quando $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$;
- (x) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, quando $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$;

2. Apresente um exemplo de uma função tal que:

- (a) $f(1) = 4$ e $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$;
- (b) $f(1) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$.

3. Apresente um exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 1.$$

4. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2x_0} f(x) = 2 \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
- (b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(2x) = 2 \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
- (c) $\lim_{x \rightarrow x_0} 2f(x) = 2 \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
- (d) $\lim_{x \rightarrow 2x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(2x)$.

5. Determine os valores de a e b para que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x < -1 \\ ax + b & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

seja contínua.

6. Estude a continuidade, em todos os pontos do domínio, de cada uma das seguintes funções:

$$(a) f(x) = \begin{cases} 2e^x + 1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \in [0, 2] \\ \operatorname{sen} x & \text{se } x > 2 \end{cases};$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{x};$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases};$$

$$(d) f(x) = \log(|x|).$$

7. Estude a continuidade da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é racional} \\ x^2 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases},$$

em todos os pontos do seu domínio.

8. Estude a continuidade da função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

em todos os pontos do seu domínio.

9. Apresente um exemplo, ou justifique que não existe, de uma função f tal que:

(a) f é contínua em 0, mas $|f|$ é descontínua em 0;

(b) $|f|$ é contínua em 0, mas f é descontínua em 0;

(c) f tem domínio $\mathbb{R}$, é contínua em 1 e descontínua em todos os pontos de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;

(d) $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in [0, 1]$;

(e) f é contínua, mas o seu contradomínio não é um intervalo;

(f) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada, mas não possui máximo.

10. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e f e g funções contínuas em $[a, b]$ tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Mostre que existe $x \in]a, b[$ tais que $f(x) = g(x)$.

11. Dada $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, com $D \subseteq \mathbb{R}$, diz-se que $x \in D$ é uma raíz de f se verificar a equação:

$$f(x) = 0.$$

Mostre que, cada uma das seguintes funções possui pelo menos uma raíz:

$$f(x) = x^5 + 3x^2 - 3x + 1; \quad g(x) = \operatorname{sen}^3(x) + \cos(x); \quad h(x) = \operatorname{tg}(x) + x - 1.$$

12. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua não constante tal que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

- (a) Mostre que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
- (b) Calcule $f(0)$;
- (c) Mostre que $f(1) > 0$;
- (d) Calcule $f(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, em função de $f(1)$.

13. Para cada uma das seguintes funções determine, caso exista, a sua inversa:

a)

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \rightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \mapsto & \frac{x}{x+1} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} ;$$

c)

$$\begin{array}{ccc} h : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x - 2 \end{array} ;$$

d)

$$\begin{array}{ccc} k : [1, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x-1} \end{array} .$$

14. Seja $f : X \rightarrow Y$, com $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, uma função estritamente monótona.

Mostre que se f é sobrejectiva, então f admite função inversa, f^{-1} , e f^{-1} é estritamente monótona.

5 Funções exponencial, hiperbólicas, trigonométricas e suas inversas

Função exponencial e função logarítmica

Definição 5.1. Seja $a \in \mathbb{R}^+$.

Define-se função exponencial de base a , com sendo a função

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto a^x \end{aligned} ,$$

onde

$$a^x := \begin{cases} a^x, & x \in \mathbb{Q} \\ \lim_{\substack{r \rightarrow x \\ (r \in \mathbb{Q})}} a^r, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Propriedades: Seja $a \in \mathbb{R}^+$.

- Se $a \neq 1$, então $\exp_a$ é contínua e bijetiva;
- Se $a > 1$, então $\exp_a$ é uma função estritamente crescente;
- Se $a < 1$, então $\exp_a$ é uma função estritamente decrescente;
- Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, são válidas as seguintes igualdades:

$$a^{x+y} = a^x a^y; \quad a^{xy} = (a^x)^y.$$

Para $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, a função $\exp_a$ é uma função bijetiva e conseqüentemente admite função inversa, $\exp_a^{-1}$, à qual se chama função *logaritmo de base a* e representa-se por $\log_a$. Assim, por definição, a função

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x \end{aligned} , \quad \text{com } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},$$

verifica

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{e} \quad a^{\log_a y} = y, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^+.$$

Notação: Quando $a = e$, sendo e o número de Neper, a função $\log_e$ representa-se apenas por $\log$ e diz-se que é a função logaritmo.

Propriedades: Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

- Se $a > 1$, então $\log_a$ é uma função estritamente crescente;
- Se $a < 1$, então $\log_a$ é uma função estritamente decrescente;
- Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{R}$, são válidas as seguintes igualdades:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y; \quad \log_a x^r = r \log_a x; \quad (\log_a b)(\log_b x) = \log_a x.$$

Exercício 5.1. Prove as igualdades apresentadas no último ponto das propriedades anteriores.

Funções hiperbólicas

Definição 5.2. *Definem-se as funções que se seguem (chamadas de funções hiperbólicas):*

- Chama-se seno hiperbólico à função

$$\begin{aligned} \text{sh} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} . \end{aligned}$$

- Chama-se cosseno hiperbólico à função

$$\begin{aligned} \text{ch} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} . \end{aligned}$$

- Chama-se tangente hiperbólica à função

$$\begin{aligned} \text{th} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} . \end{aligned}$$

- Chama-se cotangente hiperbólica à função

$$\begin{aligned} \text{coth} : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} . \end{aligned}$$

- Chama-se secante hiperbólica à função

$$\begin{aligned} \text{sech} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\text{ch}(x)} . \end{aligned}$$

- Chama-se cossecante hiperbólica à função

$$\begin{aligned} \text{cosech} : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\text{sh}(x)} . \end{aligned}$$

Propriedades: Para qualquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:

- $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$;
- $\text{th}^2 x + \text{sech}^2 x = 1$;
- $\text{coth}^2 x - \text{cosech}^2 x = 1$, para $x \neq 0$;
- $\text{ch } x + \text{sh } x = e^x$;
- $\text{sh}(-x) = -\text{sh}(x)$; (o seno hiperbólico é uma função ímpar)
- $\text{ch}(-x) = \text{ch}(x)$; (o cosseno hiperbólico é uma função par)
- $\text{sh}(x+y) = \text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(y)\text{ch}(x)$;
- $\text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(y)\text{sh}(x)$;

Exercício 5.2. *Prove cada uma das igualdades anteriores.*

Funções hiperbólicas inversas

Propriedade: A função seno hiperbólico é uma função bijectiva.

Exercício 5.3. Prove que a função seno hiperbólico é uma função bijectiva.

Sugestão: Siga as seguintes etapas:

a) Mostre que $\operatorname{sh} x$ é estritamente crescente (use a definição);

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh} x$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh} x$;

c) Conclua que $\operatorname{sh} x$ é uma função bijectiva.

O seno hiperbólico é uma função bijectiva, logo possui função inversa. Mais, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se (verifique)

$$\operatorname{sh} x = y \Leftrightarrow x = \log \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right).$$

Definição 5.3. Chama-se argumento do seno hiperbólico, à função inversa do seno hiperbólico, ou seja à função

$$\begin{aligned} \operatorname{argsh} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) . \end{aligned}$$

A função cosseno hiperbólico não é bijectiva (verifique que ch não é injectiva nem sobrejectiva) e como tal não tem inversa. Contudo, a função

$$\begin{aligned} : [0, +\infty[&\rightarrow [1, +\infty[\\ x &\mapsto \operatorname{ch} x \end{aligned} \tag{3}$$

é bijectiva (verifique) e como tal tem inversa.

Definição 5.4. Define-se argumento do cosseno hiperbólico como sendo a função inversa da função definida em (3), isto é

$$\begin{aligned} \operatorname{argch} : [1, +\infty[&\rightarrow [0, +\infty[\\ x &\mapsto \log \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) . \end{aligned}$$

A função tangente hiperbólica não é bijectiva, porque não é sobrejectiva, (verifique que th é injectiva e tem contradomínio $] -1, 1[$), e como tal não tem inversa. Contudo, a função

$$\begin{aligned} : \mathbb{R} &\rightarrow] -1, 1[\\ x &\mapsto \operatorname{th} x \end{aligned} \tag{4}$$

é bijectiva e como tal tem inversa.

Definição 5.5. Define-se argumento da tangente hiperbólica como sendo a função inversa da função definida em (4), isto é

$$\begin{aligned} \operatorname{argth} :] -1, 1[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) . \end{aligned}$$

A função cotangente hiperbólica não é bijectiva, porque não é sobrejectiva, (verifique que $\coth$ é injectiva e tem contradomínio $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$), e como tal não tem inversa. Contudo, a função

$$\begin{aligned} : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \\ x &\mapsto \coth x \end{aligned} \quad (5)$$

é bijectiva e como tal tem inversa.

Definição 5.6. *Define-se argumento da cotangente hiperbólica como sendo a função inversa da função definida em (5), isto é*

$$\begin{aligned} \operatorname{argcoth} :]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x &\mapsto \frac{1}{2} \log \left(\frac{x+1}{x-1} \right) . \end{aligned}$$

A função secante hiperbólica não é bijectiva, porque não é sobrejectiva nem injectiva, (verifique), e como tal não tem inversa. Contudo, a função

$$\begin{aligned} : [0, +\infty[&\rightarrow]0, 1] \\ x &\mapsto \operatorname{sech} x \end{aligned} \quad (6)$$

é bijectiva e como tal tem inversa.

Definição 5.7. *Define-se argumento da secante hiperbólica como sendo a função inversa da função definida em (6), isto é*

$$\begin{aligned} \operatorname{argsech} :]0, 1] &\rightarrow [0, +\infty[\\ x &\mapsto \log \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right) . \end{aligned}$$

A função cossecante hiperbólica não é bijectiva, porque não é sobrejectiva (verifique), e como tal não tem inversa. Contudo, a função

$$\begin{aligned} : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x &\mapsto \operatorname{cosech} x \end{aligned} \quad (7)$$

é bijectiva e como tal tem inversa.

Definição 5.8. *Define-se argumento da cossecante hiperbólica como sendo a função inversa da função definida em (7), isto é*

$$\begin{aligned} \operatorname{argcosech} : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x &\mapsto \log \left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right) . \end{aligned}$$

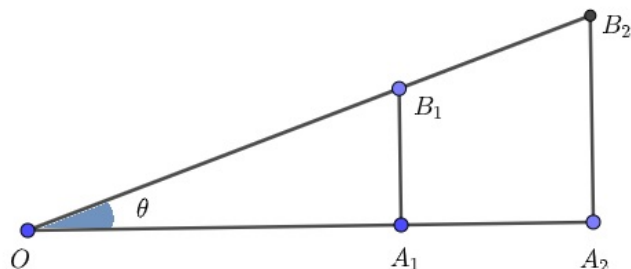
Exercício 5.4. *Demonstre a regra de correspondência de cada uma das funções hiperbólicas inversas.*

Exercício 5.5. *Justifique que as funções hiperbólicas e as hiperbólicas inversas são funções contínuas.*

Funções trigonométricas

Considere os triângulos rectângulos, $\triangle OA_1B_1$ e $\triangle OA_2B_2$ apresentados no figura 3.

Figura 3: Triângulos rectângulos semelhantes



Uma vez que os triângulos $\triangle OA_1B_1$ e $\triangle OA_2B_2$ têm os ângulos $\angle OB_1A_1$ e $\angle OB_2A_2$ congruentes (com a mesma medida), o ângulo de medida $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ e o ângulo recto, conclui-se que $\triangle OA_1B_1$ e $\triangle OA_2B_2$ são triângulos semelhantes. Consequentemente, ângulos correspondentes têm a mesma medida e lados correspondentes são proporcionais, donde

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}}, \quad (8)$$

onde $\overline{XY}$ represente o comprimento de um segmento de recta $[XY]$. Por (8) obtêm-se as razões

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} &= \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}; & \bullet \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} &= \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}; & \bullet \frac{\overline{OB_2}}{\overline{A_2B_2}} &= \frac{\overline{OB_1}}{\overline{A_1B_1}}; \\ \bullet \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}} &= \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}}; & \bullet \frac{\overline{OA_2}}{\overline{A_2B_2}} &= \frac{\overline{OA_1}}{\overline{A_1B_1}}; & \bullet \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} &= \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}. \end{aligned}$$

que, por dependerem apenas do ângulo θ e não dos triângulos rectângulos $\triangle OA_1B_1$ e $\triangle OA_2B_2$ considerados, se designam por *razões trigonométricas*.

Definição 5.9. *Seja $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.*

1. *Define-se seno de θ , denotando-se por $\sin(\theta)$, como sendo a razão $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}$;*
2. *Define-se coseno de θ , denotando-se por $\cos(\theta)$, como sendo a razão $\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}}$;*
3. *Define-se tangente de θ , denotando-se por $\operatorname{tg}(\theta)$, como sendo a razão $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}$;*
4. *Define-se cotangente de θ , denotando-se por $\operatorname{cotg}(\theta)$, como sendo a razão $\frac{\overline{OA_1}}{\overline{A_1B_1}}$;*
5. *Define-se secante de θ , denotando-se por $\sec(\theta)$, como sendo a razão $\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}$;*
6. *Define-se cossecante de θ , denotando-se por $\operatorname{cosec}(\theta)$, como sendo a razão $\frac{\overline{OB_1}}{\overline{A_1B_1}}$.*

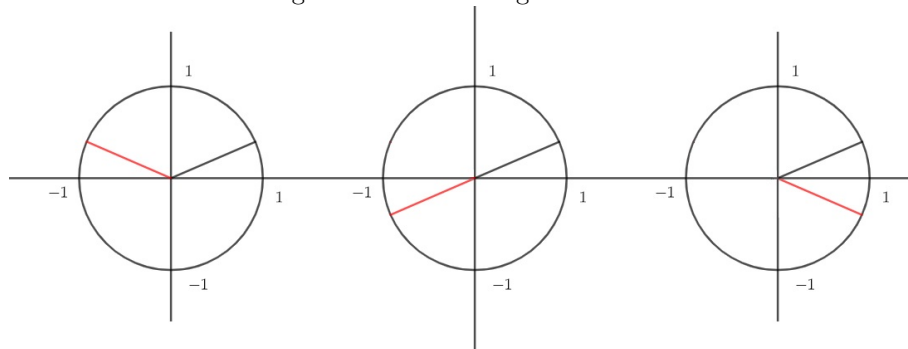
Uma vez que as razões trigonométricas não dependem do triângulo rectângulo, mas apenas do ângulo, por simplicidade de cálculo, pode-se considerar sempre um triângulo rectângulo onde a hipotenusa tem comprimentos igual à unidade.

Exercício 5.6. Seja $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

1. Mostre que $\sin(\theta) = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$.
2. Existe uma relação análoga para as restantes razões trigonométricas? Justifique a resposta.

Para $\theta \notin]0, \frac{\pi}{2}[$ já não é possível (em geometria euclidiana) construir um triângulo rectângulo onde θ é a medida de um ângulo que não o recto. No entanto é possível definir funções (e não razões) trigonométricas por forma a estender as propriedades verificadas para $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ a outros números reais θ .

Figura 4: Círculos trigonométricos



Definição 5.10. Define-se:

1. $\sin(0) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\cos(0) = 1$ e $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$;
2.
$$\sin(\theta) = \begin{cases} \sin(\pi - \theta), & \theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \\ -\sin(\theta - \pi), & \theta \in]\pi, \frac{3\pi}{2}] \\ -\sin(2\pi - \theta), & \theta \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases} ; \cos(\theta) = \begin{cases} -\cos(\pi - \theta), & \theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \\ -\cos(\theta - \pi), & \theta \in]\pi, \frac{3\pi}{2}] \\ \cos(2\pi - \theta), & \theta \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases} ;$$
3. $\sin(\theta) = \sin(\varphi)$, onde $\theta = (\varphi + 2k\pi) \in \mathbb{R} \setminus [0, 2\pi]$ com $\varphi \in [0, 2\pi]$ e $k \in \mathbb{Z}$;
4. $\cos(\theta) = \cos(\varphi)$, onde $\theta = (\varphi + 2k\pi) \in \mathbb{R} \setminus [0, 2\pi]$ com $\varphi \in [0, 2\pi]$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 5.7. Seja $x \in \mathbb{R}$. Mostre que:

1. $\sin(x) \in [-1, 1]$;
2. $\cos(x) \in [-1, 1]$;
3. $(\sin(x) + \cos(x)) \in]-2, 2[$.

Da Definição 5.9 e 5.10 é possível definir todas as seis funções trigonométricas:

Seno

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

Cosseno

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$$

Tangente

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \end{aligned}$$

Cotangente

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

Secante

$$\begin{aligned} \operatorname{sec} : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{sec} x = \frac{1}{\operatorname{cos} x} \end{aligned}$$

Cossecante

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

Segue-se uma lista com propriedades relevantes verificadas pelas funções trigonométricas.

Proposição 5.1. *Para qualquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:*

1. $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$;
2. $\operatorname{sec}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$, para $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$;
3. $\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x = 1$, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;
4. $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$; (o seno é uma função ímpar)
5. $\operatorname{cos}(-x) = \operatorname{cos}(x)$; (o cosseno é uma função par)
6. $\operatorname{cos}(x+y) = \operatorname{cos}(x)\operatorname{cos}(y) - \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x)$;
7. $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{cos}(y) + \operatorname{sen}(y)\operatorname{cos}(x)$;
8. $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x)$ (a função seno é periódica de período 2π);
9. $\operatorname{cos}(x+2\pi) = \operatorname{cos}(x)$ (a função cosseno é periódica de período 2π);
10. $\operatorname{cos}(x) - \operatorname{cos}(y) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)$;
11. $\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\operatorname{cos}\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Demonstração. As propriedades de 1. a 5., 8. e 9. são de verificação elementar (na prova da propriedade 1. faz-se uso do Teorema de Pitágoras), pelo que são deixadas ao estudante como exercício. Após aprova da propriedade 6., a prova da propriedade 7. faz-se recorrendo a 6., pelo que é igualmente deixado ao cuidado do estudante.

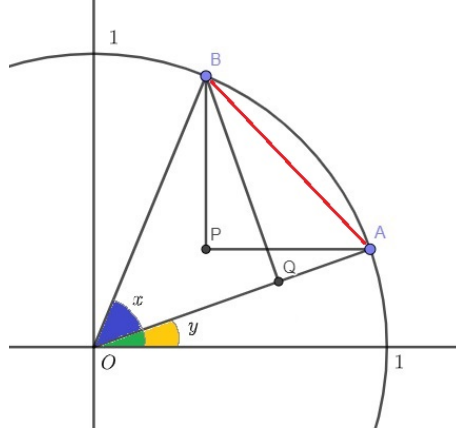
6. Para $x, z \in \mathbb{R}$, das propriedades anteriores tem-se

$$\begin{aligned} &(\operatorname{cos}(x+z) = \operatorname{cos}(x)\operatorname{cos}(z) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(x)) \\ &\Leftrightarrow (\operatorname{cos}(x-(-z)) = \operatorname{cos}(x)\operatorname{cos}(-z) + \operatorname{sen}(-z)\operatorname{sen}(x)), \end{aligned} \tag{9}$$

ou seja (fazendo $y = -z$), é necessário e suficiente provar que

$$\operatorname{cos}(x-y) = \operatorname{cos}(x)\operatorname{cos}(y) + \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Figura 5: Imagem de auxílio à prova da propriedade 6.



Aqui apresenta-se apenas a prova de (10) para $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$, pois a prova para $x \in \mathbb{R} \setminus [0, \frac{\pi}{2}]$ ou $y \in \mathbb{R} \setminus [0, \frac{\pi}{2}]$ segue directamente da Definição 5.10.

Sejam $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Sem perda de generalidade, assumamos que $x > y$. Note que a situação $x = y$ corresponde ao ponto 1..

Considere a Figura 5, onde $\angle BPA$ e $\angle BQA$ são rectos.

Uma vez que o raio da circunferência é igual a 1, da definição do seno e do cosseno conclui-se que

$$\overline{PA} = \cos y - \cos x \quad \text{e} \quad \overline{PB} = \sin x - \sin y.$$

Por aplicação do Teorema de Pitágoras ao $\triangle PAB$ e ao $\triangle QAB$ obtém-se

$$\begin{cases} \overline{AB}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = (\cos y - \cos x)^2 + (\sin x - \sin y)^2 \\ \overline{AB}^2 = \overline{QA}^2 + \overline{QB}^2 = (1 - \cos(x - y))^2 + \sin^2(x - y) \end{cases}$$

Consequentemente,

$$(\cos y - \cos x)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = (1 - \cos(x - y))^2 + \sin^2(x - y),$$

ou seja

$$\begin{aligned} & \cos^2 y + \cos^2 x - 2 \cos y \cos x + \sin^2 x + \sin^2 y - 2 \sin x \sin y \\ = & 1 + \cos^2(x - y) - 2 \cos(x - y) + \sin^2(x - y), \end{aligned}$$

donde

$$-2 \cos y \cos x + 2 - 2 \sin x \sin y = 2 - 2 \cos(x - y)$$

e finalmente

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

10. Pelo ponto 6. tem-se, para todo $z, w \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w \\ \cos(z - w) = \cos z \cos w + \sin z \sin w \end{cases},$$

donde

$$\cos(z + w) - \cos(z - w) = -2 \sin z \sin w.$$

Fazendo $x = z + w$ e $y = z - w$, tem-se

$$\begin{cases} x = z + w \\ y = z - w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2w \\ z = y + w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = \frac{x-y}{2} \\ z = \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

donde

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

11. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$.

Pela completude do conjunto dos números reais, existem $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi]$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $x = \varphi_1 + 2k_1\pi$ e $y = \varphi_2 + 2k_2\pi$, donde, pelo ponto 3. da Definição 5.10 tem-se

$$\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(\varphi_1) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(y) = \operatorname{sen}(\varphi_2). \quad (11)$$

Consequentemente, pela propriedade apresentada no Exercício 5.6 e pelo ponto 2. da Definição 5.10 obtém-se

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\varphi_1) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x + 2k_1\pi\right) \\ \text{e} \quad \operatorname{sen}(y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - y + 2k_2\pi\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Das igualdades (11) e (12), e de a função seno ser periódica de período 2π (ponto 8.), conclui-se que

$$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$$

Finalmente, pelo ponto 10. e por o seno ser uma função ímpar (ponto 4.), obtém-se

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \\ &= -2\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{2}-y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x-\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{2}\right) \\ &= -2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(-\frac{x-y}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right). \end{aligned}$$

□

Funções trigonométricas inversas

Nota As funções trigonométricas não são bijetivas, como tal não têm inversas. Contudo, considerando restrições, quer no domínio quer no conjunto de chegada, em cada uma das funções trigonométricas é possível construir funções bijetivas e assim definir as chamadas “funções trigonométricas inversas”.

Arco-seno :

Sendo a função

$$\begin{array}{ccc} : & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \rightarrow [-1, 1] \\ & x & \mapsto \operatorname{sen} x \end{array}$$

bijetiva, a sua inversa chama-se *arco-seno*, isto é:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{arcsen} : & [-1, 1] & \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \mapsto \operatorname{sen}^{-1} x \end{array}.$$

Arco-cosseno :

Sendo a função

$$\begin{array}{ccc} : & [0, \pi] & \rightarrow [-1, 1] \\ & x & \mapsto \operatorname{cos} x \end{array}$$

bijetiva, a sua inversa chama-se *arco-cosseno*, isto é:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{arccos} : & [-1, 1] & \rightarrow [0, \pi] \\ & x & \mapsto \operatorname{cos}^{-1} x \end{array}.$$

Arco-tangente :

Sendo a função

$$\begin{array}{ccc} : & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto \operatorname{tg} x \end{array}$$

bijetiva, a sua inversa chama-se *arco-tangente*, isto é:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{arctg} : & \mathbb{R} & \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \mapsto \operatorname{tg}^{-1} x \end{array}.$$

Arco-cotangente :

Sendo a função

$$\begin{array}{ccc} : &]0, \pi[& \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto \operatorname{cotg} x \end{array}$$

bijetiva, a sua inversa chama-se *arco-cotangente*, isto é:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{arccotg} : & \mathbb{R} & \rightarrow]0, \pi[\\ & x & \mapsto \operatorname{cotg}^{-1} x \end{array}.$$

Arco-secante :

Sendo a função

$$\begin{array}{ccc} : & \left[0, \frac{\pi}{2}\right[& \rightarrow [1, +\infty[\\ & x & \mapsto \operatorname{sec} x \end{array}$$

bijetiva, a sua inversa chama-se *arco-secante*, isto é:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{arcsec} : & [1, +\infty[& \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \mapsto \operatorname{sec}^{-1} x \end{array}.$$

Arco-cossecante :

Sendo a função

$$\begin{array}{ccc} :]0, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & \operatorname{cosec} x \end{array}$$

bijetiva, a sua inversa chama-se *arco-cossecante*, isto é:

$$\operatorname{arccosec} : \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \rightarrow &]0, \frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto & \operatorname{cosec}^{-1} x \end{array} .$$

Exercício 5.8.

1. Determine o domínio e o contradomínio das seguintes funções:

$$(a) f(x) = \frac{1}{1 + e^x};$$

$$(d) f(x) = \operatorname{th}(\operatorname{sen}(x));$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{1 - e^x};$$

$$(e) f(x) = \operatorname{argth}(\operatorname{sen}(x));$$

$$(c) f(x) = \operatorname{argch}\left(x + \frac{1}{x}\right);$$

$$(f) f(x) = \operatorname{argcoth}(\cos x);$$

2. Para cada uma das funções apresentadas no exercício anterior, identifique a sua paridade (caso exista).

3. Mostre que

$$(a) \operatorname{th}(\log x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \forall x \in \mathbb{R}^+;$$

$$(b) \frac{1 + \operatorname{th}(x)}{1 - \operatorname{th}(x)} = e^{2x}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Resolva cada uma das seguintes equações:

$$(a) \log(x^2 - 1) + 2 \log 2 = \log(4x - 1);$$

$$(d) \log(x) + \log(x - 1) = 1;$$

$$(b) e^x = e^{1-x};$$

$$(e) e^x - 2e^{-x} = 0;$$

$$(c) 2^{x-3} = 6;$$

$$(f) \frac{e^{2x} + 1 + 4e^x}{e^x} = 0.$$

5. Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}.$$

6. Sejam $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Fazendo uso do limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

calcule

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}.$$

7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha - \operatorname{th}(x), & \text{se } x < 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x) + \beta, & \text{se } x > 0 \end{cases},$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Determine α e β por forma a que f seja uma função contínua;

(b) Calcule

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x} \quad e \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{e^x}.$$

8. Determine o domínio e o contradomínio das seguintes funções:

$$(i) f(x) = 1 + 2 \cos x; \quad (ii) f(x) = \operatorname{sen} x - 2; \quad (iii) f(x) = 1 + \operatorname{tg} x;$$

$$(iv) f(x) = \operatorname{arcsen} \left(\frac{3x+2}{x+1} \right); \quad (v) f(x) = \arccos \left(\frac{x-3x^2}{x^2+1} \right); \quad (vi) f(x) = \operatorname{argch} \left(x + \frac{1}{x} \right);$$

$$(vii) f(x) = \operatorname{th}(\operatorname{sen} x); \quad (viii) f(x) = \operatorname{argth}(\operatorname{sen} x) \quad (ix) f(x) = \operatorname{argcoth}(\cos x).$$

9. Para cada uma das funções apresentadas anteriormente, identifique a sua paridade (caso exista).

10. Calcule:

$$(i) \operatorname{sen} \left(\arccos \frac{1}{2} \right); \quad (ii) \operatorname{sen}(\operatorname{arctg} 1); \quad (iii) \arccos \left(\operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \right);$$

$$(iv) \cos(\operatorname{arctg} \sqrt{3}); \quad (v) \cos \left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \right); \quad (vi) \arccos \left(\cos \frac{7\pi}{3} \right).$$

11. Resolva cada uma das seguintes equações:

$$(a) \operatorname{sen}(x+1) = -\frac{1}{2};$$

$$(e) 2\operatorname{sen}(2x) = -\sqrt{3};$$

$$(b) \sec(3x) = \sqrt{2};$$

$$(f) \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x;$$

$$(c) \operatorname{arcsen}(2x\sqrt{1-x^2}) + \operatorname{arcsen}(-2x) = 0;$$

$$(g) \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x} = 2e^x;$$

$$(d) \operatorname{tg}(\arccos x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x);$$

$$(h) \sqrt{\operatorname{ch}(2x)+1} = \operatorname{ch} x.$$

6 Derivada de uma função real de variável real

Definição 6.1. Uma função $f : X \rightarrow Y$, com $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, diz-se derivável em $a \in X \cap X'$ se existe e é finito o seguinte limite:

$$\frac{df}{dx}(a) = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \quad (13)$$

Observação: Fazendo $x = a + h$, o limite (13) pode ser escrito na forma

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (14)$$

Demonstração. Ver aula. □

Teorema 6.1. Se f é uma função derivável em a , então f é contínua em a .

Observações:

1. O recíproco do teorema anterior é falso. Por exemplo, a função $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, é contínua em $x = 0$, mas não é derivável em $x = 0$.
2. Como consequência do teorema anterior tem-se que, se f é uma função descontínua num ponto a , então f não é derivável nesse ponto a .

Regras de derivação

Neste momento, e em virtude dos estudos pré-universitários que realizou, assume-se que o estudante já se encontra familiarizado com as regras de derivação. Assim, passo a listar essas mesmas regras sem as respectivas provas. Contudo, constitui trabalho do estudante a procura e compreensão das provas aqui omitidas.

Álgebra das derivadas

Sendo f e g duas funções reais deriváveis em $x \in \mathbb{R}$ e c uma constante real tem-se:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$;
- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, caso $g(x) \neq 0$.

Função potencial, exponencial e logarítmica

Seja c uma constante real positiva, tem-se:

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $(c^x)' = c^x \log_e c$;
- $(\log_c x)' = \frac{1}{x \log_e c}$.

Funções trigonométricas e suas inversas

- $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$;
- $(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
- $(\operatorname{cos} x)' = -\operatorname{sen} x$;
- $(\operatorname{arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$;
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

Exercício 6.1. Prove as regras de derivação das funções trigonométricas e trigonométricas inversas.

Teorema 6.2 (Derivada da função composta).

Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $f(X) \subseteq Y$.

Se f é derivável em $a \in X$ e g é derivável em $f(a) \in Y$, então $g \circ f$ é derivável em a , tendo-se

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Demonstração. Ver aula

□

Teorema 6.3 (Derivada da função inversa).

Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função real bijetiva.

Se f é derivável em $x_0 \in X$, f^{-1} contínua em $y_0 = f(x_0) \in Y$ e $f'(x_0) \neq 0$, então f^{-1} é derivável em y_0 , tendo-se

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Demonstração. Ver aula

□

Exercício 6.2. Prove as regras de derivação das funções hiperbólicas.

1. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;
5. $(\operatorname{argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
2. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
6. $(\operatorname{argch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;
3. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
7. $(\operatorname{argth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$;
4. $(\operatorname{coth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;

$$8. (\operatorname{argcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Teoremas de derivabilidade

Teorema (Teorema de Rolle)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração Se f é constante, o resultado é imediato.

Se f não é constante, então uma das situações acontece:

i) Existe $d \in]a, b[$ tal que $f(d) > f(a)$;

ii) Existe $d \in]a, b[$ tal que $f(d) < f(a)$;

Suponha-se i), o caso ii) é análogo. Pelo Teorema de Weierstrass, existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f(x) \leq f(c), \quad \forall x \in [a, b].$$

Logo, para todo $x \in [a, b]$,

$$f(x) - f(c) \leq 0.$$

Assim,

$$f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad \text{e} \quad f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

donde, uma vez que f é derivável em c , $f'(c) = 0$. $\square$

Teorema (Teorema de Lagrange)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

Então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração Seja $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ e defina-se a função

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - \lambda x \end{aligned}.$$

Como $g(a) = g(b)$, aplicando o teorema de Rolle à função g , conclui-se que existe $c \in]a, b[$ tal que $g'(c) = 0$. Mas $g'(x) = f'(x) - \lambda$, logo

$$f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \square$$

Teorema (Teorema de Cauchy)

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em $]a, b[$.

Se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in]a, b[$, então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Demonstração Observe-se que $g(b) - g(a) \neq 0$. Se $g(b) = g(a)$, então o teorema de Rolle garante a existência de $c \in]a, b[$ tal que $g'(c) = 0$, o que é absurdo pois contradiz a hipótese.

Seja $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ e defina-se a função

$$\begin{aligned} h : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - \lambda g(x) \end{aligned} .$$

Como $h(a) = h(b)$, do teorema de Rolle conclui-se a existência de $c \in]a, b[$ tal que

$$0 = h'(c) = f'(c) - \lambda g'(c).$$

Como $g'(c) \neq 0$, conclui-se que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \square$$

Corolário (Regra de L'Hopital)

Sejam $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ e $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ duas funções deriváveis em $]a, b[$, com $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$. Seja $c \in \{a, b\}$ tal que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ e existe $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Então também existe $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ e

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração Suponha-se que $c = b$ (o caso $c = a$ prova-se da mesma forma).

Considerem-se as funções

$$\begin{aligned} F :]a, b] &\rightarrow \mathbb{R} & G :]a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in]a, b[\\ 0 & \text{se } x = b \end{cases} & x &\mapsto \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in]a, b[\\ 0 & \text{se } x = b \end{cases} \end{aligned}$$

Observe-se que F e G funções contínuas em $[x, b]$ e deriváveis em $]x, b[$, para qualquer $x \in]a, b[$. Pelo teorema de Cauchy conclui-se que, para cada $x \in]a, b[$, existe $c_x \in]x, b[$ tal que

$$\frac{F'(c_x)}{G'(c_x)} = \frac{F(b) - F(x)}{G(b) - G(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Como existe $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, então também existe $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ e com o mesmo valor. Consequentemente, da igualdade anterior, conclui-se que

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \square$$

Nota: A regra de L'Hopital, também é válida nas seguintes situações:

- Em limites com $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$;
- Em situações

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty,$$

com $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Exercício 6.3. 1. Use a regra de L'Hopital, caso seja possível, para obter o valor de cada um dos seguintes limites:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}; \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}, \text{ com } n \in \mathbb{N};$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}; \quad (iv) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\log_e x} - \frac{x}{\log_e x} \right);$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}; \quad (vi) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x + \operatorname{sen} x}.$$

2. Obtenha o valor de cada um dos limites anteriores, nos quais não foi possível aplicar a regra de L'Hopital.

Propriedades gráficas das funções reais

Teorema 6.4.

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$ com $f'(x) > 0$, para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente em $[a, b]$.

Demonstração. Seja $x, y \in [a, b]$ tais que $x < y$. Pelo teorema de Lagrange, conclui-se que existe $\alpha \in]x, y[$ tal que

$$f'(\alpha) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Leftrightarrow f(y) = f(x) + (y - x)f'(\alpha).$$

Como $f'(\alpha) > 0$, conclui-se que $f(y) > f(x)$. Consequentemente f é estritamente crescente. □

De forma análoga se provam os seguintes resultados:

Teorema 6.5. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

- Se $f'(x) \geq 0$, para todo $x \in]a, b[$, então f é crescente em $[a, b]$;
- Se $f'(x) < 0$, para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $[a, b]$;
- Se $f'(x) \leq 0$, para todo $x \in]a, b[$, então f é decrescente em $[a, b]$.

Demonstração. Exercício □

Teorema 6.6. Se f é uma função real derivável e $f(c)$ um extremo local de f , então $f'(c) = 0$.

Demonstração. Omitida □

Observação:

O recíproco do teorema anterior não é verdadeiro.

Por exemplo, $f(x) = x^3$ verifica $f'(0) = 0$ e $f(0)$ não é extremo local de f .

Definição 6.2. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real.

Um ponto $c \in X$ diz-se ponto crítico de f se $f'(c) = 0$.

Observação: Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável.

Os pontos de extremos locais de f ocorrem nos pontos críticos de f , mas pode acontecer que nem todos os pontos críticos de f sejam pontos de extremos locais de f .

Derivadas de ordem superior

Seja $f : X \rightarrow Y$, com $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, uma função derivável em todo o seu domínio.

- Chama-se *primeira derivada* de f à função

$$\begin{aligned} f' : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned} .$$

- Se a função f' é derivável em todo o seu domínio, então define-se *segunda derivada* de f como sendo a função

$$\begin{aligned} f'' : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto (f')'(x) \end{aligned} .$$

- ...

- Dado $n \in \mathbb{N}$, se a função f é n vezes derivável em todo o seu domínio, então define-se a *derivada de ordem n* de f como sendo a função

$$\begin{aligned} f^{(n)} : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto (f^{(n-1)})'(x) \end{aligned} .$$

Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se de classe $C^n(X)$, $n \in \mathbb{N}$, se possui e são contínuas todas as suas derivadas até à ordem n . No caso em que a função f é uma função de classe $C^k(X)$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$ diz-se que f é de classe $C^\infty(X)$.

$$C^1(X) \supseteq C^2(X) \supseteq C^3(X) \supseteq \dots \supseteq C^\infty(X).$$

Por exemplo:

- A função $f(x) = \sin x$ é de classe $C^\infty(\mathbb{R})$;
- A função $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$ é de classe $C^1(\mathbb{R})$, mas não é de classe $C^2(\mathbb{R})$.

Teorema 6.7. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas em $[a, b]$ e duas vezes derivável em $]a, b[$. Se $c \in]a, b[$ é ponto crítico, isto é $f'(c) = 0$, então*

(i) *se $f''(c) > 0$, $f(c)$ é um mínimo local de f ;*

(ii) *se $f''(c) < 0$, $f(c)$ é um máximo local de f .*

Demonstração. Omitida

□

Definição 6.3 (Polinómio de Taylor).

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, com I intervalo de $\mathbb{R}$, uma função n vezes derivável no ponto $a \in I$.

Define-se polinómio de Taylor de ordem n da função f no ponto a , como sendo o polinómio

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots + \alpha_n(x-a)^n,$$

de grau $\leq n$, cujas derivadas de ordem $\leq n$ no ponto $x = a$ coincidem com as derivadas de mesma ordem de f no ponto a , isto é:

$$p^{(i)}(a) = f^{(i)}(a), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Como

$$p(a) = \alpha_0;$$

$$p'(a) = \alpha_1;$$

$$p''(a) = 2\alpha_2;$$

$$p'''(a) = 1 \times 2 \times 3\alpha_3;$$

$$p^{(4)}(a) = 1 \times 2 \times 3 \times 4\alpha_4;$$

...

$$p^{(n)}(a) = n!\alpha_n;$$

da igualdade (15) conclui-se que

$$\alpha_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Consequentemente, o polinómio de Taylor de f de ordem n no ponto a é

$$\mathcal{P}_{a,n}^f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Proposição: Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervalo de $\mathbb{R}$, uma função n vezes derivável em $a \in I$.

Se $f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Demonstração Faz-se por indução matemática.

- Para $n = 1$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a) = 0.$$

- Hipótese de indução: $\left(f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0 \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Suponha-se que $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = f^{(n+1)}(a) = 0$. Então

$$f'(a) = (f')'(a) \dots = (f')^{(n)}(a) = 0,$$

e da hipótese de indução conclui-se que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{(x-a)^n} = 0$. Agora, pela regra de L'Hopital, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{(n+1)(x-a)^n} = \frac{1}{n+1} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{(x-a)^n} = 0. \square$$

Teorema (Fórmula de Taylor): Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervalo de $\mathbb{R}$, uma função n vezes derivável em $a \in I$.

Então, para qualquer $x \in I$ tem-se

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathcal{R}_{a,n}^f(x),$$

em que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\mathcal{R}_{a,n}^f(x)}{(x-a)^n} = 0. \quad (16)$$

Demonstração

Designando

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

tem-se

$$\mathcal{R}_{a,n}^f(x) = f(x) - p(x).$$

O resultado é consequência da proposição anterior porque

$$f(a) = p(a), \quad f'(a) = p'(a), \quad f''(a) = p''(a), \quad \dots, \quad f^{(n)}(a) = p^{(n)}(a). \quad \square$$

Proposição: Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervalo de $\mathbb{R}$, uma função n vezes derivável em $a \in I$.

Então o polinómio de Taylor de f de ordem n no ponto a é único, isto é:

Se existe um polinómio $q(x)$ de grau $\leq n$ tal que

$$f(x) = q(x) + R(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

então $q(x)$ é o polinómio de Taylor de f de ordem n no ponto a .

Demonstração Assuma-se que existem $q(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n$, polinómio de grau $\leq n$, e $R(x)$ uma função tais que

$$f(x) = (c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n) + R(x). \quad (17)$$

Pela fórmula de Taylor tem-se ainda

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathcal{R}_{a,n}^f(x). \quad (18)$$

Das igualdades (17) e (18) obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &= (c_0 - f(a)) + (c_1 - f'(a))(x-a) + \left(c_2 - \frac{f''(a)}{2!}\right)(x-a)^2 + \cdots + \left(c_n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right)(x-a)^n \\ &\quad + (R(x) - \mathcal{R}_{a,n}^f(x)), \end{aligned} \quad (19)$$

com

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x) - \mathcal{R}_{a,n}^f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} - \lim_{x \rightarrow a} \frac{\mathcal{R}_{a,n}^f(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

donde

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x) - \mathcal{R}_{a,n}^f(x)}{(x-a)^k} = 0, \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Fazendo $x \rightarrow a$ na igualdade (19) obtém-se $0 = c_0 - f(a) \Leftrightarrow c_0 = f(a)$ e a igualdade (19) assume a forma

$$0 = (c_1 - f'(a))(x - a) + \left(c_2 - \frac{f''(a)}{2!}\right)(x - a)^2 + \cdots + \left(c_n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right)(x - a)^n + (R(x) - \mathcal{R}_{a,n}^f(x)). \quad (20)$$

Dividindo por $(x - a)$ tem-se

$$0 = (c_1 - f'(a)) + \left(c_2 - \frac{f''(a)}{2!}\right)(x - a) + \cdots + \left(c_n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right)(x - a)^{n-1} + \frac{R(x) - \mathcal{R}_{a,n}^f(x)}{x - a}, \quad (21)$$

e fazendo $x \rightarrow a$ conclui-se que $c_1 - f'(a) = 0 \Leftrightarrow c_1 = f'(a)$.

Procedendo da mesma forma mais $n - 2$ vezes obtém-se

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \quad \dots, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

donde finalmente se conclui que $q(x) = \mathcal{P}_{a,n}^f(x)$. $\square$

Exercício 6.4. 1. Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções:

$$(i) f(x) = x \operatorname{tg} x; \quad (ii) f(x) = x^2 \arccos x; \quad (iii) f(x) = 4 \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3};$$

$$(iv) f(x) = 7^{x^2 + sh x}; \quad (v) f(x) = \log_e(ch x); \quad (vi) th(\operatorname{sen} x^2).$$

2. Determine o valor de cada um dos seguintes limites:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^2 - 1}; \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x + 1};$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}; \quad (iv) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{tg} \frac{1}{x};$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^4}; \quad (vi) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{sh x}{th x};$$

$$(vii) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{2x}}; \quad (viii) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x;$$

$$(ix) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}; \quad (x) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}.$$

3. Para $f(x) = |x|$, mostre que $f(-1) = f(1)$, mas $f'(x) \neq 0$ para todo c no intervalo $] -1, 1[$.
Estará este facto em contradição com o teorema de Rolle? Justifique.

4. Mostre que:

$$\frac{x}{1+x} < \log_e(1+x) < x, \quad \forall x > 0.$$

Sugestão: Aplique o teorema de Lagrange à função $\log_e(1+x)$.

5. Um projectil disparado da terra com velocidade v_0 segue uma trajectória parabólica cuja altura $h(t)$, em cada instante t , é dada por $h(t) = v_0 t - 9t^2$ com t em segundos e $h(t)$ em metros.
- (a) Qual a velocidade inicial v_0 a imprimir ao projectil de modo a que regresse à terra ao fim de 10 segundos?
Nas alíneas seguintes considere a velocidade inicial aqui obtida.
- (b) Quanto tempo demora o projectil a atingir a altura máxima?
- (c) Qual é a altura máxima que o projectil atinge?
- (d) Qual é a velocidade média durante a viagem?
- (e) Há algum instante de tempo no qual a velocidade instantânea é de 45 m/s?
6. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável.
Mostre que entre dois zeros consecutivos de f' não existe mais do que um zero de f .
7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 + 4x - 1$.
Mostre que f tem um único zero em $\mathbb{R}$.
8. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.
Identifique os intervalos de monotonia e os extremos locais da função f .
9. Obtenham duas funções, f e g , deriváveis tais que a derivada da função composta $h = f \circ g$ seja dada por
- (a) $h'(x) = 2xe^{x^2}$; (b) $h'(x) = 4 \cos x (\sin x)^3$.
10. Mostre que:
- (a) $\operatorname{tg} x > x$, $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$;
- (b) $\log_e(x+1) - \log_e x < \frac{1}{x}$, $\forall x \in]0, +\infty[$;
- (c) $|\sin x| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
11. Para cada uma das funções que se seguem, determine as derivadas de ordem 1, 2, 3 e 4:
- (a) $f(x) = e^x$;
- (b) $f(x) = \sin x$;
- (c) $f(x) = \cos x$;
- (d) $f(x) = x^5$.
12. Prove que entre todos os rectângulos com a mesma área, o quadrado é o que tem menor perímetro.
13. Dado um número positivo S , prove que entre todos os pares possíveis de números positivos x e y tais que $x + y = S$, o produto xy é máximo quando $x = y = \frac{S}{2}$.
14. Considere a função $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$.
Identifique os intervalos de monotonia de f e, caso existam, os seus máximos e mínimos locais.
15. Para cada uma das funções que se seguem, determine o polinómio de Taylor de ordem 5 nos pontos indicados:
- (a) $f(x) = e^x$, no ponto $x = 0$;
- (b) $f(x) = \sin x$, no ponto $x = 0$;
- (c) $f(x) = \cos x$, no ponto $x = 0$;

(d) $f(x) = x^3 + x^2$, no ponto $x = -1$;

(e) $f(x) = \log_e x$, no ponto $x = 1$.

16. Usando o resultado do exercício anterior, obtenha estimativas para o valor de:

(a) e ;

(b) $\sin 1$;

(c) $\cos 1$;

(d) $\log_e 2$.

17. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^5(\mathbb{R})$ cujo seu polinómio de Taylor de ordem 5 no ponto zero é

$$\mathcal{P}_{0,5}^f(x) = 3x - 4x^2 + 12x^4.$$

Determine $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$ e $f^{(5)}(0)$.

7 Integral indefinido de uma função real de variável real

Definição

Definição 7.1. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, com $X \subseteq \mathbb{R}$, uma função.*

Uma função $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma primitiva de f se F é derivável em todos os elementos de X e

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in X.$$

Observação: No cálculo de primitivas, não nos vamos referir ao domínio das funções, assumindo que se está a trabalhar com os maiores conjuntos (no sentido da inclusão de conjuntos) nos quais as funções fazem sentido.

Exemplo:

$F(x) = \frac{x^2}{2}$ e $G(x) = \frac{x^2}{2} + 3$ são primitivas da função $f(x) = x$ porque

$$F'(x) = G'(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observação: Como consequência do exemplo anterior, observa-se que, quando uma função admite uma primitiva, esta não é única.

Proposição 7.1. *Se F_1 e F_2 são primitivas de f num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$F_1(x) - F_2(x) = c, \quad \forall x \in I.$$

Definição 7.2. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo domínio é um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Chama-se integral indefinido de f ao conjunto de todas as primitivas de f , denotando-se por $\int f(x)dx$.*

Consequentemente,

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

em que $c \in \mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x)$.

Proposição 7.2. *Dadas duas funções primitiváveis (ou seja, que têm primitiva), f e g , e uma constante $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:*

- $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx;$
- $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx.$

Demonstração. Consequência das regras de derivação e da definição de integral indefinido. □

Primitivas imediatas

Primitivas que se obtêm directamente das regras de derivação.

Exemplo:

$$\int \operatorname{sen}(3x)dx = -\frac{1}{3} \int -3\operatorname{sen}(3x)dx = -\frac{1}{3} \cos(3x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercício 7.1. Calcule cada um dos integrais indefinidos que se seguem:

$$(i) \int 2xe^{x^2} dx;$$

$$(ii) \int e^{3x} dx;$$

$$(iii) \int x^3 + 3dx;$$

$$(iv) \int x\sqrt{x^2 + 1}dx;$$

$$(v) \int (x + 4)^{10} dx;$$

$$(vi) \int \operatorname{tg}(x)dx;$$

$$(vii) \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx;$$

$$(viii) \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx;$$

$$(ix) \int \frac{1}{x} \operatorname{sen}(\log_e(3x)) dx;$$

$$(x) \int x^2(x^3 + 1)^7 dx;$$

$$(xi) \int \operatorname{sh}(x) dx;$$

$$(xii) \int e^{3x} \operatorname{ch}(e^{3x}) dx.$$

Primitivação por partes

Método de primitivação baseado na regra de derivação do produto.

Sendo u e v funções deriváveis num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, da regra de derivação do produto tem-se

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \Rightarrow u'(x)v(x) = (u(x)v(x))' - v'(x)u(x),$$

donde

$$\int u'(x)v(x)dx = \int (u(x)v(x))'dx - \int v'(x)u(x)dx$$

e consequentemente

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int v'(x)u(x)dx.$$

Exemplo:

$$\int x \cos(x)dx = x \sin(x) - \int 1 \sin(x)dx = x \sin(x) + \cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercício 7.2. Use integração por partes para calcular cada um dos seguintes integrais indefinidos:

(i) $\int \log_e x dx;$

(ii) $\int x \sin(x) dx;$

(iii) $\int e^x \cos(x) dx;$

(iv) $\int \arctg(x) dx;$

(v) $\int (3x^2 + 1) \log_e(x + 1) dx;$

(vi) $\int x^2 \cos(x) dx;$

(vii) $\int \operatorname{ch}(3x) \cos(2x) dx;$

(viii) $\int (x^2 + x + 1)e^x dx;$

(ix) $\int x \arctg(x) dx;$

(x) $\int x^3(x^2 + 1)^7 dx.$

Primitivação por substituição

Método de primitivação baseado na regra de derivação da composta de funções.

Proposição 7.3. *Sejam I e J dois intervalos de $\mathbb{R}$, $\varphi : J \rightarrow I$ função bijectiva derivável e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ função primitivável, com $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de f . Então*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(y))\varphi'(y)dy = F(\varphi(y)) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Basta provar que $F(\varphi(y))$, em que $y = \varphi^{-1}(x)$, é uma primitiva de $f(x)$.

$$\left[F(\varphi(y)) \right]' = F'(\varphi(y))\varphi'(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y) = f(x) \left[\varphi(\varphi^{-1}(x)) \right]' = f(x)x' = f(x).$$

□

Exemplo:

Com a mudança de variável $x = \text{sen}(y)$ (pense nos domínios), obtém-se a seguinte primitiva:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2}dx &= \int \sqrt{1-\text{sen}^2 y} \cos(y)dy = \int \cos^2(y)dy = \int \frac{1+\cos(2y)}{2}dy = \\ &= \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\text{sen}(2y) + c = \frac{1}{2}\arcsen(x) + \frac{1}{4}\text{sen}(2\arcsen(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercício 7.3. *Utilize as substituições indicadas para calcular os seguintes integrais indefinidos:*

$$(i) \int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx, \quad x = tg(y);$$

$$(ii) \int \frac{\text{sen}(x)\cos(x)}{\cos^2(x)+1}dx, \quad x = \arccos(y);$$

$$(iii) \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx, \quad x = \log_e(y);$$

$$(iv) \int \sqrt{1+x^2}dx, \quad x = sh(y);$$

$$(v) \int \text{sen}(\log_e(x))dx, \quad x = e^y.$$

Primitivação de fracções racionais

Chama-se *fracção racional* a uma fracção $\frac{p(x)}{q(x)}$, em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinómios de coeficientes reais.

Objectivo: Descrever um método de cálculo do integral indefinido de funções do tipo:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

com $p(x)$ e $q(x)$ polinómios de coeficientes reais.

Caso 1: $p(x) = q'(x)$.

Neste caso, tem-se:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \frac{q'(x)}{q(x)} dx = \log_e |q(x)| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemplos:

1. $\int \frac{1}{x+3} dx = \log_e |x+3| + c, \quad c \in \mathbb{R};$
2. $\int \frac{2x}{x^2+3} dx = \log_e (x^2+3) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Caso 2: $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a'(x)}{[a(x)]^2 + 1}$

Neste caso, tem-se:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \frac{a'(x)}{[a(x)]^2 + 1} dx = \arctg(a(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemplos:

1. $\int \frac{2x}{1+x^4} dx = \int \frac{2x}{1+(x^2)^2} dx = \arctg(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R};$
2. $\int \frac{1}{1+x+x^2} dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Caso 3: $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a'(x)}{[a(x)]^\alpha}$, com $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Neste caso, tem-se:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \frac{a'(x)}{[a(x)]^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \int (1-\alpha)a'(x)[a(x)]^{-\alpha} dx = \frac{[a(x)]^{1-\alpha}}{1-\alpha} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemplos:

1. $\int \frac{1}{(x+2)^3} dx = \frac{-1}{2(x+2)^2} + c, \quad c \in \mathbb{R};$
2. $\int \frac{2x}{1+2x^2+x^4} dx = \int \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{-1}{1+x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Caso Geral: Os três casos apresentados anteriormente incluem as chamadas *fracções simples* isto é, fracções do tipo

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}, \quad \text{ou} \quad \frac{Bx+C}{[(x-a)^2+b^2]^\alpha},$$

onde $A, B, C, a, b \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

No caso geral $\frac{p(x)}{q(x)}$, é possível escrever a fracção como soma de um polinómio com fracções simples procedendo da seguinte forma:

1. se $\text{grau } p(x) \geq \text{grau } q(x)$, então faz-se a divisão dos polinómios, obtendo-se

$$\frac{p(x)}{q(x)} = d(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

com $\text{grau } r(x) < \text{grau } q(x)$;

2. obter as raízes reais, $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$, e raízes complexas, $a_1 \pm b_1 i, a_2 \pm b_2 i, \dots, a_l \pm b_l i \in \mathbb{C}$, e suas multiplicidades, do polinómio $q(x)$ para o factorizar na forma:

$$q(x) = (x-c_1)^{\alpha_1} \times (x-c_2)^{\alpha_2} \times \dots \times (x-c_k)^{\alpha_k} \times [(x-a_1)^2 + b_1^2]^{\beta_1} \times \dots \times [(x-a_l)^2 + b_l^2]^{\beta_l}$$

3. Escrever a fracção racional na forma:

$$\begin{aligned}
\frac{r(x)}{q(x)} = & \frac{A_{11}}{x - c_1} + \frac{A_{12}}{(x - c_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - c_1)^{\alpha_1}} + \\
& + \frac{A_{21}}{x - c_2} + \frac{A_{22}}{(x - c_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2\alpha_2}}{(x - c_2)^{\alpha_2}} + \\
& + \cdots + \frac{A_{k1}}{x - c_k} + \frac{A_{k2}}{(x - c_k)^2} + \cdots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x - c_k)^{\alpha_k}} + \\
& + \frac{B_{11}x + C_{11}}{[(x - a_1)^2 + b_1^2]} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{[(x - a_1)^2 + b_1^2]^2} + \cdots + \frac{B_{1\beta_1}x + C_{1\beta_1}}{[(x - a_1)^2 + b_1^2]^{\beta_1}} + \\
& + \cdots + \\
& + \frac{B_{l1}x + C_{l1}}{[(x - a_l)^2 + b_l^2]} + \frac{B_{l2}x + C_{l2}}{[(x - a_l)^2 + b_l^2]^2} + \cdots + \frac{B_{l\beta_l}x + C_{l\beta_l}}{[(x - a_l)^2 + b_l^2]^{\beta_l}}.
\end{aligned}$$

4. obter o integral indefinido recorrendo aos casos descritos anteriormente.

Exemplos:

1. $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = ?$

Como $x^3 - x^2 - x + 1 = (x + 1)(x - 1)^2$, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} &= \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} \\
\Rightarrow x^2 + 2x + 3 &= A(x - 1)^2 + B(x + 1)(x - 1) + C(x + 1) \\
\Leftrightarrow \begin{cases} C = 3 \\ B = \frac{1}{2} \\ A = \frac{1}{2} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{3}{(x - 1)^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \log_e |x + 1| + \frac{1}{2} \log_e |x - 1| + 3 \frac{-1}{x - 1} dx + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$$2. \int \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 - 1} dx = ?$$

Como $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = (x - 1) \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right]$, tem-se

$$\frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2x - 2 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = A + B \\ 2 = A + C - B \\ -2 = A - C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = 3 \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 - 1} dx &= \int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{2x + 3}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \log_e |x - 1| + \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx + \int \frac{2}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \log_e |x - 1| + \log_e |x^2 + x + 1| + \int \frac{2}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \\ &= \log_e |x - 1| + \log_e |x^2 + x + 1| + \frac{4}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx \\ &= \log_e |(x - 1)(x^2 + x + 1)| + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercício 7.4. Calcular os seguintes integrais indefinidos:

$$\begin{array}{lll} (i) \int \frac{x^5}{x^2 - 1} dx; & (ii) \int \frac{x}{(x + 1)(x + 2)^2} dx; & (iii) \int \frac{x}{x^2 + 2x + 3} dx; \\ (iv) \int \frac{1}{x^2 - 1} dx; & (v) \int \frac{2x - 3}{x^2 + 1} dx; & (vi) \int \frac{5x - 3}{x^2 + 5}. \end{array}$$

Exercício 7.5. Calcule cada um dos seguintes integrais indefinidos:

1. $\int \sqrt{2x+1}dx;$
2. $\int x^2\sqrt{x+1}dx;$
3. $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x}}dx;$
4. $\int \cos^2(x)dx;$
5. $\int \operatorname{sen}^3(x)dx;$
6. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}dx;$
7. $\int \cos(2x)\sqrt{4-\operatorname{sen}(2x)}dx;$
8. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx;$
9. $\int x^2(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}dx;$
10. $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x - \cos x}}dx;$
11. $\int \operatorname{sen}(x)\cos(x)dx;$
12. $\int x\operatorname{sen}(x)\cos(x)dx;$
13. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}}dx;$
14. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx;$
15. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx;$
16. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx;$
17. $\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx;$
18. $\int x\operatorname{sen}(x^2)dx;$
19. $\int \frac{1}{\cos x + 2\operatorname{sen} x + 3}dx;$
20. $\int x\operatorname{arctg}(x)dx;$
21. $\int x\log_e^2 x dx;$
22. $\int \frac{1}{x\log_e x}dx;$
23. $\int e^{\sqrt{x}}dx;$
24. $\int x^{-2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}dx;$
25. $\int xe^{-x}dx;$

Exercício 7.6. Calcule o integral indefinido

$$\int \frac{1}{2+\cos x}dx$$

seguintes etapas:

1. Considere $x = 2\operatorname{arctg} t$ e verifique que

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \quad e \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

2. Calcule o integral através da mudança de variável $x = 2\arctgt$ com $x \in \mathbb{R}$ e $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

8 Integral definido de uma função real de variável real

Definição 8.1. *Seja $[a, b]$ um intervalo fechado e limitado de números reais. Chama-se partição do intervalo $[a, b]$ de dimensão $n \in \mathbb{N}$ a qualquer conjunto*

$$\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\} \subseteq [a, b],$$

onde $x_{i-1} < x_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Sendo $\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, representa-se por:

- $\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1} > 0$;
- $m_i = \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$;
- $M_i = \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.

Definição 8.2. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ um função limitada.*

1. *Define-se soma inferior de f relativamente à partição $\mathcal{P}$ como sendo a soma:*

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_{x_i}.$$

2. *Define-se soma superior de f relativamente à partição $\mathcal{P}$ como sendo a soma:*

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_{x_i}.$$

Observe-se que $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \leq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = M_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, donde se conclui que

$$s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}).$$

Se $\mathcal{P}^*$ é uma outra partição de $[a, b]$ tal que

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^*,$$

então, das definições de soma superior e de soma inferior, conclui-se que

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}^*) \leq S(f, \mathcal{P}^*) \leq S(f, \mathcal{P}).$$

Observação: *Note que quanto menores forem os valores de Δ_{x_i} , maiores são os valores de m_i e menores são os valores de M_i . Consequentemente, quanto menores forem os valores de Δ_{x_i} , maiores são as somas inferiores e menores são as somas superiores.*

Consequentemente,

$$\lim_{\substack{\Delta_{x_i} \rightarrow 0^+ \\ (n \rightarrow +\infty)}} \sum_{i=1}^n m_i \Delta_{x_i} \leq \lim_{\substack{\Delta_{x_i} \rightarrow 0^+ \\ (n \rightarrow +\infty)}} \sum_{i=1}^n M_i \Delta_{x_i}.$$

Definição 8.3. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.*

Diz-se que f é uma função integrável em $[a, b]$ se

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

ou seja

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0^+} s(f, \mathcal{P}) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0^+} S(f, \mathcal{P}) = I,$$

com $I \in \mathbb{R}$.

Ao valor do limite, I , chama-se integral definido de f em $[a, b]$ e representa-se por

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Observação: *Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $\mathcal{P} = \{a, x_1, \dots, x_{n-1}, b\}$ de $[a, b]$. Escolhendo $\varepsilon_i \in [x_i, x_{i-1}]$, com $i \in \{1, \dots, n\}$, tem-se*

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

Se f é integrável em $[a, b]$, então conclui-se que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i.$$

Como consequência da definição de função integrável e das propriedades de limites de funções é possível estabelecer as seguintes propriedades do integral definido.

Proposição 8.1. *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis em $[a, b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se*

$$1. \int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$2. \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx;$$

3. *A função $\alpha \cdot f$ é integrável em $[a, b]$ e*

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx;$$

4. *A função $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e*

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

5. Para todo $c \in [a, b]$, as funções $f|_{[a, c]} : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ e $f|_{[c, b]} : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são integráveis e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Definição 8.4. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis tais que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Considere-se $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ definido por

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Define-se área de $\mathcal{A}$, como sendo

$$\text{área}(\mathcal{A}) = \int_a^b g(x) - f(x)dx.$$

Prova-se que toda a função contínua, definida num intervalo fechado e limitado, é integrável, mas esta não é uma condição necessária para a integrabilidade. Por exemplo, a função

$$\begin{aligned} f : [0, 2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 2, & x \in]1, 2] \end{cases} \end{aligned}$$

é integrável, mas não é contínua (verifique o porquê).

Teorema 8.1 (Teorema do valor médio do integral).

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

Então existe $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b - a).$$

Demonstração. Sendo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, o Teorema de Weierstrass garante que f tem máximo e mínimo. Considere-se

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{e} \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Da definição de integral definido, tem-se

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

donde se obtém

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Sendo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, o Teorema de Bolzano-Weierstrass garante que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(x_0),$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x) dx = f(x_0)(b-a).$$

□

Teorema 8.2 (1º Teorema Fundamental do Cálculo).

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

Então a função $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

é derivável e $\Phi'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração. Sejam $x \in [a, b]$ e $h \in \mathbb{R}$ tal que $x+h \in [a, b]$. Pelas propriedades do integral definido, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do valor médio do integral, conclui-se que existe $x_h \in [x, x+h]$ (ou $x_h \in [x+h, x]$, para o caso de $h < 0$) tal que

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = f(x_h)(x+h-x) = f(x_h)h,$$

donde, pelo facto de f ser contínua, obtém-se

$$\Phi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(x_h)h = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_h) = f(x).$$

□

Uma consequência imediata do 1º Teorema Fundamental do Cálculo é que toda a função real de variável real, definida num intervalo, possui primitiva.

Teorema 8.3 (2º Teorema Fundamental do Cálculo).

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

Se $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma primitiva de f , então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração. Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma sua primitiva ($F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$).

Pelo 1º Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se que $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ é também uma primitiva de f . Consequentemente, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi(x) - F(x) = c, \quad \forall x \in [a, b].$$

Consequentemente,

$$\int_a^x f(t)dt - F(x) = c, \quad \forall x \in [a, b],$$

ou seja

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c, \quad \forall x \in [a, b].$$

Para $x = a$, tem-se

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + c \Leftrightarrow 0 = F(a) + c \Leftrightarrow c = -F(a).$$

Consequentemente, para $x = b$ tem-se

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) + c = F(b) - F(a).$$

□

Notação: Usar-se-á a notação $[F(x)]_a^b$ para representa a diferença $F(b) - F(a)$, escrevendo-se

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b,$$

sendo F uma primitiva da função f .

Exemplo: Calcular o integral definido que se segue

$$\int_1^2 3x^2 - 2x + 1dx.$$

Aplicando o 2º Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se

$$\begin{aligned} \int_1^2 3x^2 - 2x + 1dx &= [x^3 - x^2 + x]_1^2 \\ &= (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) \\ &= 6 - 1 = 5. \end{aligned}$$

Como se verificou no exemplo apresentado, o 2º Teorema fundamental do Cálculo fornece um processo para cálculo do integral definido sem recorrer, de uma forma directa, à definição. Com base nas técnicas de cálculo de primitivas, descrevem-se as seguintes situações:

Cálculo, por partes, do integral definido

Dadas $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis, tem-se

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Cálculo, por substituição, do integral definido

Dadas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ uma função bijectiva e derivável tal que $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$, tem-se

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(y))\varphi'(y)dy.$$

Exemplo: Calcular o integral definido

$$\int_0^1 xe^{1+x}dx.$$

Na integração por partes, escolhendo $u(x) = x$ e $v'(x) = e^{1+x}$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^{1+x}dx &= [xe^{1+x}]_0^1 - \int_0^1 e^{1+x}dx = 1 \cdot e^{1+1} - 0 \cdot e^{1+0} - [e^{1+x}]_0^1 \\ &= e^2 - (e^2 - e) = e. \end{aligned}$$

Exemplo: Calcular o integral definido

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x}dx.$$

Para calcular o integral definido por substituição, considere-se a função $\varphi : [1, 2] \rightarrow [0, 1]$ definida por $\varphi(y) = y - 1$.

Tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\sqrt{1+x}dx &= \int_1^2 (y-1)\sqrt{1+y-1}(y-1)'dy = \int_1^2 (y-1)\sqrt{y}dy \\ &= \int_1^2 (y-1)y^{\frac{1}{2}}dy = \int_1^2 y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}}dy = \left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \\ &= \frac{2^3\sqrt{2}}{5} + \frac{2^2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Exercício 8.1. 1. Calcule o valor dos seguintes integrais definidos:

$$\begin{aligned}
 (i) \int_1^4 \sqrt{2x+1} dx; & \quad (ii) \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}(x)| dx; & (iii) \int_0^1 x e^x dx; \\
 (iv) \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(x) dx; & (v) \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx; & (vi) \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx; \\
 (vii) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x) \cos(x) dx; & (viii) \int_1^{10} \frac{1}{2+3x} dx; & (ix) \int_0^1 \frac{1}{x^2-x} dx; \\
 (x) \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx; & (xi) \int_{-2}^2 \operatorname{sh}(x) dx; & (xii) \int_{-2}^2 \operatorname{ch}(x) dx.
 \end{aligned}$$

2. Calcule $\int_0^e f(x) dx$, com $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \cos(\pi x), & 0 \leq x < 1 \\ \log_e \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq e \end{cases}$.

3. Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções:

$$\begin{aligned}
 (a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) &= \int_0^x e^{t^2} dt; \\
 (b) g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } g(x) &= \int_0^{x^3} e^{t^2} + t dt; \\
 (c) h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } h(x) &= \int_{x^2}^{x^3} e^{t^2} + t dt.
 \end{aligned}$$

4. Calcule as áreas das figuras limitadas por:

- (a) a parábola $y = \frac{x^2}{2}$ e as retas $x = 1$, $x = 3$ e $y = 0$;
- (b) a parábola $y = x^2 - 4$ e o eixo das abscissas;
- (c) a parábola $x = 2 - y - y^2$ e o eixo das ordenadas;
- (d) o gráfico $y = \operatorname{sen} x$ e a parábola $y = x^2 - \pi$.

5. Calcule a área da região (limitada) compreendida entre os gráficos das funções f e g definidas por:

- (a) $f(x) = x^3$ e $g(x) = x$;
- (b) $f(x) = 4 - x^2$ e $g(x) = 0$;
- (c) $f(x) = 4 - x^2$ e $g(x) = 8 - 2x^2$;
- (d) $f(x) = |x|$ e $g(x) = -x^2 + x + 4$.

6. Calcule a área de cada uma das regiões:

(a) $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2}x^2 - 1 \leq y \leq \frac{1}{2}x^2 \right\};$

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - 2x \leq y \leq x^2\};$

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x + 3\};$

(d) $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y+1}{2} \geq x \geq y^2 \right\}.$

9 Equações diferenciais

Exercícios:

1. Obtenha a solução geral de cada uma das equações diferenciais lineares que se segue:

$$(i) y' - 3y = e^{5x}; \quad (ii) xy' - 2y = x^5; \quad (iii) y' = \operatorname{sen}(2x) - y \operatorname{tg} x;$$

$$(iv) y' = \log x; \quad (v) x^2 y' + xy = 0; \quad (vi) y' + xy = x^3;$$

$$(vii) y' + y = e^{2x}; \quad (viii) y' \operatorname{sen} x + y \cos x = 1; \quad (ix) y' - 4y = 2e^x;$$

2. Obtenha a solução para cada um dos problemas de valores iniciais que se segue, indicando o domínio da solução:

$$(a) y' = 3y + x, \text{ com } y(0) = 1;$$

$$(b) x(x+1)y' + y = x(x+1)e^{-x^2}, \text{ com } y\left(\frac{1}{2}\right) = 1;$$

$$(c) y' + y \cot x = 2 \cos x, \text{ com } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

3. *Lei de Newton do arrefecimento*: “A variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do meio ambiente e a temperatura do corpo.”

(a) Obtenha a equação diferencial que descreva a *Lei de Newton do arrefecimento*;

(b) Supondo que a constante de proporcionalidade é 3 e a temperatura ambiente se encontra constante igual a 10, determine uma função que descreva a evolução da temperatura de um corpo que seja colocado nesse ambiente (tempo=0) com uma temperatura de -2.

4. Um tanque contém 100 litros de água com uma concentração de sal 2 gr por litro. Uma torneira, da qual sai água (com uma concentração de sal de 3 gr por litro) à razão de 2 litros por minuto, é aberta para o tanque do qual sai igual quantidade de água à que entra. (supõe-se que existe uma mistura uniforme da água que entra com a água existente no tanque).

Determine o total de sal existente no tanque em cada instante.

5. Resolva cada uma das equações diferenciais de variáveis separáveis:

$$(i) y' = \cos x(1 - y^2); \quad (ii) x - yy' = 0; \quad (iii) (x+1)y' + y^2 = 0;$$

$$(iv) xy' + y = \frac{1}{y^2}; \quad (v) y' = y^2; \quad (vi) y' + \operatorname{tg} x \cot y \cos y = 0;$$

$$(vii) y'e^{-3x} = y^2 - 4; \quad (viii) y' + y^2 \cos x = 0; \quad (ix) y' - 4y = y^2.$$