Modelos matemáticos com memória

José J. Oliveira

17 de Outubro de 2022

Centro de Matemática (CMAT)
Departamento de Matemática da Universidade do Minho

Lei de crescimento de Malthus(1766-1834)

- Modelo de crescimento exponencial

$$x'(t) = ax(t), \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

- em que
  - t representa o tempo;
  - $x(t)$ número de indivíduos no instante de tempo t;
  - $a \in \mathbb{R}$ é a taxa de variação.

Lei de crescimento de Malthus(1766-1834)

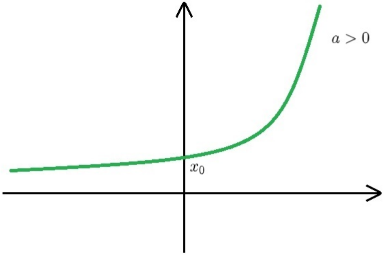
- Modelo de crescimento exponencial

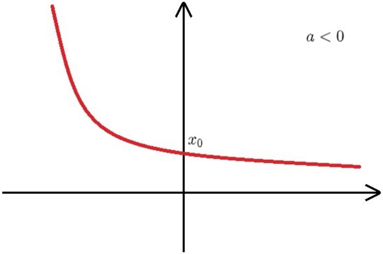
$$x'(t) = ax(t), \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

- em que
  - t representa o tempo;
  - $x(t)$ número de indivíduos no instante de tempo t;
  - $a \in \mathbb{R}$ é a taxa de variação.
- Soluções

$$x(t) = x_0 \, e^{at},$$

onde $x_0 > 0$ corresponde ao estado do modelo no instante de tempo $t = 0$.


$a > 0$
x_0


$a < 0$
x_0

Lei logística, Verhulst(1804-1849)

- Modelo logístico

$$x'(t) = ax(t)[1 - bx(t)], \qquad t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

- em que
  - $a > 0$ representa a taxa de crescimento;
  - $b > 0$, sendo que $1/b$ representa a capacidade máxima do meio ambiente;
  - $x(t)$ número de indivíduos no instante de tempo t.

Lei logística, Verhulst(1804-1849)

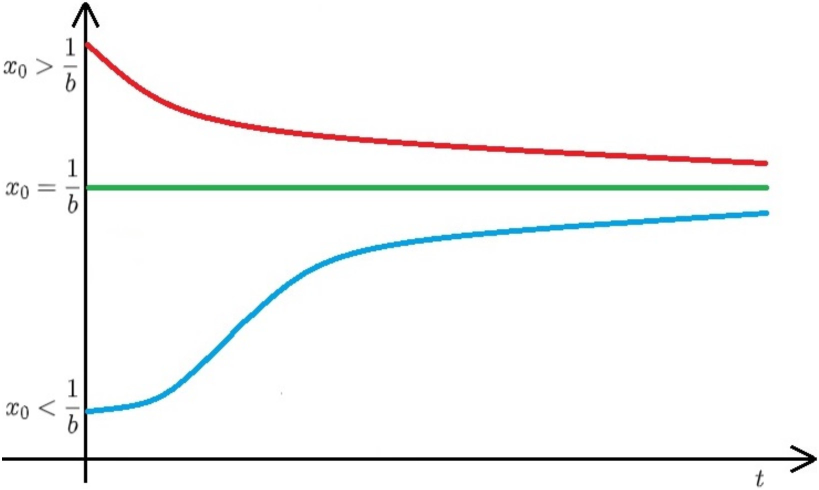
- Modelo logístico

$$x'(t) = ax(t)[1 - bx(t)], \qquad t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

- em que
  - $a > 0$ representa a taxa de crescimento;
  - $b > 0$, sendo que $1/b$ representa a capacidade máxima do meio ambiente;
  - $x(t)$ número de indivíduos no instante de tempo t.
- Soluções

$$x(t) = \frac{x_0}{bx_0 + (1 - bx_0)\, e^{-at}},$$

onde $x_0 >$ corresponde ao estado do modelo no instante de tempo $t = 0$.



Soluções: $x(t) = \dfrac{x_0}{bx_0 + (1 - bx_0)\,\mathrm{e}^{-at}}$,

Sistema Predador-Presa: Lotka(1880-1949) e Volterra (1860-1940)

- Sistema Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) & \text{(presas)} \\ \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) & \text{(predadores)} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

- em que
  - $a > 0$ taxa de crescimento das presas;
  - $b > 0$ taxa de contactos presa-predador;
  - $c > 0$ taxa de mortalidade dos predadores;
  - $d > 0$ taxa de crescimentos dos predadores.

Sistema Predador-Presa: Lotka(1880-1949) e Volterra (1860-1940)

- Sistema Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) & \text{(presas)} \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) & \text{(predadores)} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \qquad (3)$$

- em que
  - $a > 0$ taxa de crescimento das presas;
  - $b > 0$ taxa de contactos presa-predador;
  - $c > 0$ taxa de mortalidade dos predadores;
  - $d > 0$ taxa de crescimentos dos predadores.
- Soluções:
  Não existe um algoritmo que permita obter explicitamente todas as soluções $(x(t), y(t))$ de (3).

Sistema Predador-Presa: Lotka(1880-1949) e Volterra (1860-1940)

- Sistema Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) & \text{(presas)} \\ \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) & \text{(predadores)} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \qquad (3)$$

- em que
  - $a > 0$ taxa de crescimento das presas;
  - $b > 0$ taxa de contactos presa-predador;
  - $c > 0$ taxa de mortalidade dos predadores;
  - $d > 0$ taxa de crescimentos dos predadores.
- Soluções:
  Não existe um algoritmo que permita obter explicitamente todas as soluções $(x(t), y(t))$ de (3).
- As soluções constantes são fáceis de determinar:
  $(x(t), y(t)) = (0, 0)$ e $(x(t), y(t)) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$

Sistema Predador-Presa: Lotka(1880-1949) e Volterra (1860-1940)

- Sistema Lotka-Volterra com limitação no meio ambiente

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - \alpha x(t)^2 - bx(t)y(t) & \text{(presas)} \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) - \beta y(t)^2 & \text{(predadores)} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \qquad (4)$$

- em que $a, b, c, d, \alpha, \beta > 0$

Sistema Predador-Presa: Lotka(1880-1949) e Volterra (1860-1940)

- Sistema Lotka-Volterra com limitação no meio ambiente

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - \alpha x(t)^2 - bx(t)y(t) & \text{(presas)} \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) - \beta y(t)^2 & \text{(predadores)} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{4}$$

- em que $a, b, c, d, \alpha, \beta > 0$
- Nota: Não existindo predadores, as presas respeitam uma equação logística escalar.

Modelos de redes neuronais

Sistemas multidimensionais

- Cohen-Grossberg (1983)

$$x_i'(t) = -a_i(x_i(t))\left(b_i x_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t))\right), \quad i = 1, \dots, n. \qquad (5)$$

- Hopfield (1984)

$$x_i'(t) = -b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)), \qquad i = 1, \dots, n. \qquad (6)$$

onde, $n \in \mathbb{N}$ representa o número de neurónios;
a_i funções de amplificação; b_i taxa de degradação;
f_j funções de activação; $A = [a_{ij}]$ Matriz que expressa a força de conecção entre os neurónios.

Modelos com memória

Modelos com memória

- A introdução de memória nos modelos torna-os mais próximos da realidade.

Modelos com memória

- A introdução de memória nos modelos torna-os mais próximos da realidade.
- A introdução de memória nos modelos torna-os mais complexos e por conseguinte mais difíceis e/ou desafiante estudá-los.

Lei logística com atraso, Hutchinson(1948)

- Modelo logístico com atraso (muito estudado por Wright em 1955)

$$x'(t) = ax(t)[1 - bx(t - \tau)], \qquad t \geq 0 \tag{7}$$

- $\tau > 0$ é o atraso (representa o tempo de maturação da espécie).

Lei logística com atraso, Hutchinson(1948)

- Modelo logístico com atraso (muito estudado por Wright em 1955)

$$x'(t) = ax(t)[1 - bx(t-\tau)], \qquad t \geq 0 \tag{7}$$

- $\tau > 0$ é o atraso (representa o tempo de maturação da espécie).
    - **Teorema (Wright, 1955):**
      Se $a\tau \leq \frac{3}{2}$, então $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \dfrac{1}{b}$,
      para qualquer solução positiva $x(t)$ de (7).

Lei logística com atraso, Hutchinson(1948)

- Modelo logístico com atraso (muito estudado por Wright em 1955)

$$x'(t) = ax(t)[1 - bx(t - \tau)], \qquad t \geq 0 \tag{7}$$

- $\tau > 0$ é o atraso (representa o tempo de maturação da espécie).
  - **Teorema (Wright, 1955):**
    Se $a\tau \leq \frac{3}{2}$, então $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \frac{1}{b}$,
    para qualquer solução positiva $x(t)$ de (7).
  - **Conjetura (Wright, 1955):**
    Se $a\tau \leq \frac{\pi}{2}$, então $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \frac{1}{b}$,
    para qualquer solução positiva $x(t)$ de (7).

- **Teorema (J. Berg e J. Jaquette, 2018):**
  Se $a\tau \leq \frac{\pi}{2}$, então $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \dfrac{1}{b}$,
  para qualquer solução positiva $x(t)$ de

$$x'(t) = ax(t)[1 - bx(t - \tau)], \qquad t \geq 0$$

[1] J. Berg & J. Jaquette, *A proof of Wright's conjecture*, Journal of Differential Equations, Vol.264 (12) (2018), 7412-7462.

Sistema Lotka-Volterra com atraso

- Sistema Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t-\tau_1) & \text{(presas)} \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t-\tau_2)y(t) & \text{(predadores)} \end{cases} \qquad t \geq 0 \quad (8)$$

- em que $a, b, c, d > 0$
  - $\tau_1 > 0$ tempo de maturação dos predadores;
  - $\tau_2 > 0$ tempo de maturação das presas.

Sistema Lotka-Volterra com atraso

- Sistema Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t-\tau_1) & \text{(presas)} \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t-\tau_2)y(t) & \text{(predadores)} \end{cases} \qquad t \geq 0 \quad (8)$$

- em que $a, b, c, d > 0$
    - $\tau_1 > 0$ tempo de maturação dos predadores;
    - $\tau_2 > 0$ tempo de maturação das presas.
- Existem muitos estudos sobre a estabilidade global da solução positiva, $(x(t), y(t)) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$, do sistema (8).

Sistema de redes neuronais com atraso

- Considere o seguinte sistema de redes neuronais do tipo Hopfield com atrasos

$$x_i'(t) = -b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t - \tau_{ij})), \qquad i = 1, \dots, n,\ t \geq 0 \quad (9)$$

com $b_i > 0$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\tau_{ij} \geq 0$ (atrasos) e $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas.

Sistema de redes neuronais com atraso

- Considere o seguinte sistema de redes neuronais do tipo Hopfield com atrasos

$$x_i'(t) = -b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t-\tau_{ij})), \qquad i = 1, \dots, n, \ t \geq 0 \quad (9)$$

  com $b_i > 0$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\tau_{ij} \geq 0$ (atrasos) e $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas.

- Se $f_j(0) = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$, então $x(t) = (0, \dots, 0)$ é solução de (9). (As soluções constantes chamam-se equilíbrios)

Sistema de redes neuronais com atraso

- Considere o seguinte sistema de redes neuronais do tipo Hopfield com atrasos

$$x_i'(t) = -b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t-\tau_{ij})), \qquad i=1,\dots,n,\ t\geq 0 \quad (9)$$

  com $b_i > 0$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\tau_{ij} \geq 0$ (atrasos) e $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas.
- Se $f_j(0) = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$, então $x(t) = (0, \dots, 0)$ é solução de (9). (As soluções constantes chamam-se equilíbrios)
- Um equilíbrio chama-se globalmente atrativo se todas as soluções do sistema convergem para esse equilíbrio quando o tempo converge para o infinito.

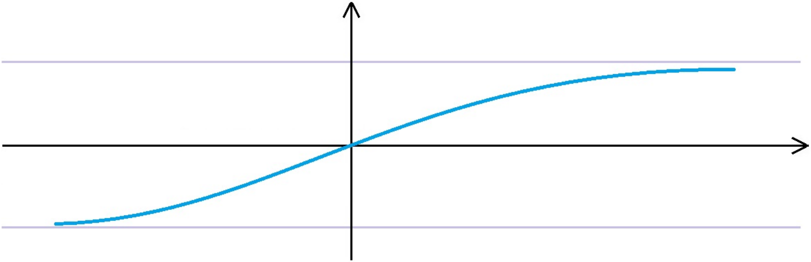
Critérios de estabilidade global

- Assumam-se as hipóteses para as funções de activação f_j:
  (H$_1$) $f_j(0) = 0$, $\lim\limits_{u \to +\infty} f_j(u) = 1$ e $\lim\limits_{u \to -\infty} f_j(u) = -1$;
  (H$_2$) f_j são de classe C^1 verificando $f_j'(u) > 0$, $f_j'(0) = 1$ e

$$f_j(u) < u, \text{ para } u > 0, \text{ e } f_j(u) > u, \text{ para } u < 0.$$

Critérios de estabilidade global

- Assumam-se as hipóteses para as funções de activação f_j:
  (H$_1$) $f_j(0) = 0$, $\lim_{u\to+\infty} f_j(u) = 1$ e $\lim_{u\to-\infty} f_j(u) = -1$;
  (H$_2$) f_j são de classe C^1 verificando $f_j'(u) > 0$, $f_j'(0) = 1$ e
  $$f_j(u) < u, \text{ para } u > 0, \text{ e } f_j(u) > u, \text{ para } u < 0.$$
- Exemplos $f_j(u) = \tanh(u)$; $f_j(u) = \arctan(u)$



- Considere-se a matriz A definida por

$$A = \begin{bmatrix} b_1 - |a_{11}| & -|a_{12}| & \cdots & -|a_{1n}| \\ -|a_{21}| & b_2 - |a_{22}| & \cdots & -|a_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -|a_{n1}| & -|a_{n2}| & \cdots & b_n - |a_{nn}| \end{bmatrix}$$

[2] W. Ma et al. *M-matrix struture and harmless delays in a Hopfield-type neural network*, Applied Mathematics Letters, 22 (2009), 1066-1070.

- Considere-se a matriz A definida por

$$A = \begin{bmatrix} b_1 - |a_{11}| & -|a_{12}| & \cdots & -|a_{1n}| \\ -|a_{21}| & b_2 - |a_{22}| & \cdots & -|a_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -|a_{n1}| & -|a_{n2}| & \cdots & b_n - |a_{nn}| \end{bmatrix}$$

- **Teorema (W. Ma, Y. Saito, Y. Takeuchi, 2009):**
  Assuma-se (H_1) e (H_2).
  O equilíbrio do sistema de rede neural

$$x_i'(t) = -b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t - \tau_{ij})), \qquad i = 1, \ldots, n, \ t \geq 0$$

  é globalmente atrativo se e só se A é uma M-matriz, independentemente do valor dos atrasos $\tau_{ij} \geq 0$.

[2] W. Ma et al. *M-matrix struture and harmless delays in a Hopfield-type neural network*, Applied Mathematics Letters, 22 (2009), 1066-1070.

- **Teorema (J. Zhang (2003):** Assuma-se (H_1) e (H_2).
  Se A é uma M-matriz invertível, então o equilíbrio do sistema de rede neural

$$x_i'(t) = -b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))), \qquad i = 1, \dots, n, \; t \geq 0,$$

é exponencialmente atrativo, quaisquer que sejam as funções limitadas que estabelecem os atrasos $\tau_{ij} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$.

[3] J. Zhang *Global exponential stability of neural networks with variable delays*, IEEE Trans. Circuits Syst. I 50 (2003), 288-291.

- **Teorema (J. Zhang (2003):** Assuma-se (H_1) e (H_2).
  Se A é uma M-matriz invertível, então o equilíbrio do sistema de rede neural

$$x_i'(t) = -b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))), \qquad i = 1, \dots, n, \ t \geq 0,$$

  é exponencialmente atrativo, quaisquer que sejam as funções limitadas que estabelecem os atrasos $\tau_{ij} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$.
- O equilíbrio, $(0, \dots, 0)$, ser exponencialmente atrativo significa que existem constantes $C, \alpha > 0$ tais que

$$\|x(t)\|_\infty \leq C\, e^{-\alpha t}\, \|x_0\|, \qquad \forall t \geq 0,$$

  sendo x_0 o estado inicial da solução $x(t)$ no intervalo $[-\overline{\tau}, 0]$ e $\overline{\tau} = \sup_{i,j,t} \tau_{ij}(t)$.

[3] J. Zhang *Global exponential stability of neural networks with variable delays*, IEEE Trans. Circuits Syst. I 50 (2003), 288-291.

Sistema Hopfield periódico com atraso

- Considere o modelo do tipo Hopfield periódico com atrasos

$$x_i'(t) = -b_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)f_j(x_j(t-\tau_{ij}(t))), \ i = 1, \dots, n, \quad (10)$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ e existe $\omega > 0$ tal que

Sistema Hopfield periódico com atraso

- Considere o modelo do tipo Hopfield periódico com atrasos

$$x_i'(t) = -b_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)f_j(x_j(t-\tau_{ij}(t))), \ i = 1, \dots, n, \quad (10)$$

  onde $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ e existe $\omega > 0$ tal que
- $b_i : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$, $a_{ij} : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $\tau_{ij} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ são funções contínuas ω-periódicas

Sistema Hopfield periódico com atraso

- Considere o modelo do tipo Hopfield periódico com atrasos

$$x_i'(t) = -b_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)f_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))),\ i = 1, \dots, n, \quad (10)$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ e existe $\omega > 0$ tal que

- $b_i : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$, $a_{ij} : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $\tau_{ij} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ são funções contínuas ω-periódicas
- $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de Lipshitz com constante de Lipshitz igual a 1.
- Notação:

$$\underline{b}_i = \min_{t \in [0,\omega]} b_i(t), \qquad \overline{a}_{ij} = \max_{t \in [0,\omega]} |a_{ij}(t)|$$

- **Teorema (S. Esteves, E. Gokmen, J.J. Oliveira, 2013)**
Se a matriz

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1 - \overline{a}_{11} & -\overline{a}_{12} & \cdots & -\overline{a}_{1n} \\ -\overline{a}_{21} & \underline{b}_2 - \overline{a}_{22} & \cdots & -\overline{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\overline{a}_{n1} & -\overline{a}_{n2} & \cdots & \underline{b}_n - \overline{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

é uma M-matriz invertível, então o modelo (10) possui uma única solução ω-periódica, $x^*(t)$, que é exponencialmente atrativa.

[4] S. Esteves et al. *Global exponential stability of nonautonomous neural network models with continuous distributed delays*, Applied Mathematics and Computation, 219 (2013), 9296-9307.

- **Teorema (S. Esteves, E. Gokmen, J.J. Oliveira, 2013)**
Se a matriz

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1 - \overline{a}_{11} & -\overline{a}_{12} & \cdots & -\overline{a}_{1n} \\ -\overline{a}_{21} & \underline{b}_2 - \overline{a}_{22} & \cdots & -\overline{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\overline{a}_{n1} & -\overline{a}_{n2} & \cdots & \underline{b}_n - \overline{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

é uma M-matriz invertível, então o modelo (10) possui uma única solução ω-periódica, $x^*(t)$, que é exponencialmente atrativa.

- Isto significa que existem constantes $C > 0$ e $\alpha > 0$ tais que

$$\|x(t) - x^*(t)\|_\infty \leq C\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\|x_0 - x_0^*\|, \qquad \forall t \geq 0,$$

sendo x_0 o estado inicial da solução $x(t)$ no intervalo $[-\overline{\tau}, 0]$ e x_0^* o estado inicial da solução periódica.

[4] S. Esteves et al. *Global exponential stability of nonautonomous neural network models with continuous distributed delays*, Applied Mathematics and Computation, 219 (2013), 9296-9307.

Questão:

- A condição de $\mathcal{A}$ ser uma M-matriz singular será suficiente para se concluir que o modelo de rede neuronal não autónomo com atrasos

$$x_i'(t) = -b_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)f_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))),\ i = 1, \dots, n,$$

é globalmente atrativo?

Questão:

- A condição de $\mathcal{A}$ ser uma M-matriz singular será suficiente para se concluir que o modelo de rede neuronal não autónomo com atrasos

$$x_i'(t) = -b_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)f_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))),\ i = 1, \dots, n,$$

é globalmente atrativo?

- O modelo diz-se globalmente atrativo se

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - y(t)\| = 0$$

para quaisquer duas soluções, $x(t)$ e $y(t)$, do modelo.

Modelos de redes neuronais de tempo discreto

- Considere o modelo de tempo discreto do tipo Hopfield com atrasos

$$x_i(m+1) = b_i x_i(m) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(m-\tau_{ij})), \; i = 1, \dots, n \quad (11)$$

onde $n \in \mathbb{N}$ (número de neurónios) e $m \in \mathbb{N}_0$ representa o tempo (discreto)

Modelos de redes neuronais de tempo discreto

- Considere o modelo de tempo discreto do tipo Hopfield com atrasos

$$x_i(m+1) = b_i x_i(m) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(m - \tau_{ij})), \ i = 1, \dots, n \quad (11)$$

onde $n \in \mathbb{N}$ (número de neurónios) e $m \in \mathbb{N}_0$ representa o tempo (discreto)

- Em (11), para todo $i, j = 1, \dots, n$, assume-se
  - $b_i \in]-1, 1[$
  - $a_{ij} \in \mathbb{R}$
  - $\tau_{ij} \in \mathbb{N}_0$
  - $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções verificando

    ($\mathbf{H}_1$) $f(0) = 0, \ \lim_{u \to +\infty} f_j(u) = 1$ e $\lim_{u \to -\infty} f_j(u) = -1$;

    ($\mathbf{H}_2^*$) f_j são de classe C^1, $f_j'(u) > 0$, $f_j'(0) = \sup_{u \in \mathbb{R}} f_j'(u) = 1$ e

$$f_j(u) < u, \ \text{para } u > 0, \ \text{e } f_j(u) > u, \ \text{para } u < 0.$$

- Considere-se a matriz B definida por

$$B = \begin{bmatrix} 1-|b_1|-|a_{11}| & -|a_{12}| & \cdots & -|a_{1n}| \\ -|a_{21}| & 1-|b_2|-|a_{22}| & \cdots & -|a_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -|a_{n1}| & -|a_{n2}| & \cdots & 1-|b_n|-|a_{nn}| \end{bmatrix}$$

[5] Y. Hong, W. Ma *Sufficient and necessary conditions for global attractivity and stability of a class of discrete Hopfield-type neural netwoks with time delays*, Mathematical Biosciences and Engineering, 16(5) (2019), 4936-4946.

- Considere-se a matriz B definida por

$$B = \begin{bmatrix} 1-|b_1|-|a_{11}| & -|a_{12}| & \cdots & -|a_{1n}| \\ -|a_{21}| & 1-|b_2|-|a_{22}| & \cdots & -|a_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -|a_{n1}| & -|a_{n2}| & \cdots & 1-|b_n|-|a_{nn}| \end{bmatrix}$$

- **Teorema (Y. Hong, W. Ma, 2019):**
Assuma-se (H_1) e (H_2^*).
O equilíbrio do sistema de rede neural

$$x_i(m+1) = b_i x_i(m) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(m-\tau_{ij})),\ i = 1, \dots, n$$

é globalmente atrativo se e só se B é uma M-matriz, independentemente do valor dos atrasos $\tau_{ij} \geq 0$.

[5] Y. Hong, W. Ma *Sufficient and necessary conditions for global attractivity and stability of a class of discrete Hopfield-type neural netwoks with time delays*, Mathematical Biosciences and Engineering, 16(5) (2019), 4936-4946.

- Considere o modelo de tempo discreto do tipo Hopfield com atrasos infinitos

$$x_i(m+1) = b_i x_i(m) + \sum_{j=1}^{n} \Bigg[a_{ij} f_j(x_j(m-\tau_{ij})) + c_{ij} \sum_{l=1}^{+\infty} \rho_{ijl} f_j(x_j(m-l)) \Bigg], \quad i = 1, \dots, n \quad (12)$$

onde $n \in \mathbb{N}$ (número de neurónios) e $m \in \mathbb{N}_0$ representa o tempo (discreto)

- Considere o modelo de tempo discreto do tipo Hopfield com atrasos infinitos

$$x_i(m+1) = b_i x_i(m) + \sum_{j=1}^{n} \left[a_{ij} f_j(x_j(m-\tau_{ij})) + c_{ij} \sum_{l=1}^{+\infty} \rho_{ijl} f_j(x_j(m-l)) \right], \quad i = 1, \dots, n \quad (12)$$

onde $n \in \mathbb{N}$ (número de neurónios) e $m \in \mathbb{N}_0$ representa o tempo (discreto)

- **(H)**: Assuma-se que para todo $i, j = 1, \dots, n$
  - $b_i \in]-1, 1[$, $a_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$, $\tau_{ij} \in \mathbb{N}_0$
  - $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções verificando $|f_j(u)| \leq |u|$
  - As sucessões $(\rho_{ijl})_{l \in \mathbb{N}}$ são positivas e existe $\xi > 0$ tal que

$$\sum_{l=1}^{+\infty} e^{\xi l} \rho_{ijl} < +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{l=1}^{+\infty} \rho_{ijl} = 1$$

- **Teorema (J.J. Oliveira, 2022):** Assuma-se (H).
  Se

$$C = \begin{bmatrix} 1-|b_1|-|a_{11}|-|c_{11}| & \cdots & -|a_{1n}|-|c_{1n}| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -|a_{n1}|-|c_{n1}| & \cdots & 1-|b_n|-|a_{nn}|-|c_{nn}| \end{bmatrix}$$

  é uma M-matriz invertível, então o equilíbrio zero de (12) é exponencialmente atrativo.

[6] J.J. Oliveira, *Global exponential stability of discrete-time Hopfield neural network models with unbounded delays*, Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 28(5) (2022), 725-751.

- **Teorema (J.J. Oliveira, 2022):** Assuma-se (H).
  Se

$$C = \begin{bmatrix} 1-|b_1|-|a_{11}|-|c_{11}| & \cdots & -|a_{1n}|-|c_{1n}| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -|a_{n1}|-|c_{n1}| & \cdots & 1-|b_n|-|a_{nn}|-|c_{nn}| \end{bmatrix}$$

  é uma M-matriz invertível, então o equilíbrio zero de (12) é exponencialmente atrativo.

- **Questão:**
  Será que C ser uma M-matriz singular é suficiente para garantir a atratividade global do equilíbrio zero de (12)?

[6] J.J. Oliveira, *Global exponential stability of discrete-time Hopfield neural network models with unbounded delays*, Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 28(5) (2022), 725-751.

Sistema Hopfield periódico discreto com atrasos

- Considere o modelo discreto tipo Hopfield periódico com atrasos

$$x_i(m+1) = b_i(m)x_i(m) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(m)f_j(x_j(m - \tau_{ij}(m))), \quad (13)$$

$i = 1, \ldots, n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}_0$ (tempo discreto).

Sistema Hopfield periódico discreto com atrasos

- Considere o modelo discreto tipo Hopfield periódico com atrasos

$$x_i(m+1) = b_i(m)x_i(m) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(m)f_j(x_j(m-\tau_{ij}(m))), \quad (13)$$

  $i = 1, \ldots, n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}_0$ (tempo discreto).
- Existe $\omega \in \mathbb{N}$ tal que $b_i : \mathbb{N}_0 \to]-1,1[$, $a_{ij} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ e $\tau_{ij} : \mathbb{N}_0 \to [0,+\infty[$ são sucessões ω-periódicas.

Sistema Hopfield periódico discreto com atrasos

- Considere o modelo discreto tipo Hopfield periódico com atrasos
$$x_i(m+1) = b_i(m)x_i(m) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(m)f_j(x_j(m-\tau_{ij}(m))), \quad (13)$$
$i = 1, \ldots, n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}_0$ (tempo discreto).
- Existe $\omega \in \mathbb{N}$ tal que $b_i : \mathbb{N}_0 \to]-1, 1[$, $a_{ij} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ e $\tau_{ij} : \mathbb{N}_0 \to [0, +\infty[$ são sucessões ω-periódicas.
- $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de Lipshitz com constante de Lipshitz igual a 1.
- Notação:
$$\overline{b}_i = \max |b_i(m)|, \qquad \overline{a}_{ij} = \max |a_{ij}(m)|$$

- **Teorema (A. Bento, J.J. Oliveira, C. Silva, 2017):**
Se

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1-\overline{b}_1-\overline{a}_{11} & -\overline{a}_{12} & \cdots & -\overline{a}_{1n} \\ -\overline{a}_{21} & 1-\overline{b}_2-\overline{a}_{22} & \cdots & -\overline{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\overline{a}_{n1} & -\overline{a}_{n2} & \cdots & 1-\overline{b}_n-\overline{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

é uma M-matriz invertível, então o modelo (13) possui uma solução ω-periódica exponencialmente atrativa.

[7] A. Bento, J.J. Oliveira, C. Silva *Nonuniform behavior and stability of Hopfield neural networks with delay*, Nonlinearity, 30 (2017), 3088-3103.

- **Teorema (A. Bento, J.J. Oliveira, C. Silva, 2017):**
  Se

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1-\overline{b}_1-\overline{a}_{11} & -\overline{a}_{12} & \cdots & -\overline{a}_{1n} \\ -\overline{a}_{21} & 1-\overline{b}_2-\overline{a}_{22} & \cdots & -\overline{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\overline{a}_{n1} & -\overline{a}_{n2} & \cdots & 1-\overline{b}_n-\overline{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

  é uma M-matriz invertível, então o modelo (13) possui uma solução ω-periódica exponencialmente atrativa.
- **Questão:**
  O que dizer sobre a estabilidade global de (13) quando $\mathcal{B}$ for uma M-matriz singular?

[7] A. Bento, J.J. Oliveira, C. Silva *Nonuniform behavior and stability of Hopfield neural networks with delay*, Nonlinearity, 30 (2017), 3088-3103.

Bibliografia (sugestões)

- Estudar M-matrizes:
  M. Fiedler, *Special matrices and their applications in numerical mathematics*, Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
- Estudar Equações diferenciais retardadas (tempo contínuo):
  J. Hale, V. Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, 1993.
- Estudar Equações às diferenças (tempo discreto):
  S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Springer, 2005.

Muito Obrigado!