

Medida e Integração

Mestrado em Matemática

2019/2020

Docente: José Joaquim Oliveira

Departamento de Matemática

Universidade do Minho

Conteúdo

1	Conjuntos e Funções	1
1.1	Generalidades sobre conjuntos	1
1.2	Recta acabada	3
1.3	Generalidades sobre funções	5
1.4	Sucessões	10
2	Espaços Topológicos	13
2.1	Espaços topológicos	13
2.2	Espaços métricos	15
3	Espaços Mensuráveis	19
3.1	σ -álgebra e conjuntos mensuráveis	19
3.2	Funções mensuráveis	26
3.3	Exercícios	36
4	Espaços de Medida	41
4.1	Medida	41
4.2	Conjuntos de medida nula	46
4.3	Exercícios	50
5	Integral de Lebesgue	51
5.1	Integral de Lebesgue	51
5.2	Teoremas de Convergência	63
	Bibliography	69

Capítulo 1

Conjuntos e Funções

1.1 Generalidades sobre conjuntos

Entende-se por conjunto como sendo uma lista de objectos de natureza qualquer na qual é irrelevante a ordem e o número de vezes em que cada objecto é listado. Em lugar de *lista*, pode ser colocada a palavra *colecção*, *família*, *aglomerado*, ou mesmo *class*. Neste sentido, as palavras *lista*, *colecção*, *família*, *aglomerado*, *classe* são aqui nesta sebenta entendidas como sinónimos. Os objectos que compõem os conjuntos designam-se por elementos. Usam-se letras maiúsculas para denotar conjuntos, $A, B, \dots$, e os seus elementos são denotados por letras minúsculas, $a, b, \dots$. A afirmação “o elemento a pertence ao conjunto A ” representa-se por $a \in A$; a afirmação “o elemento a não pertence ao conjunto A ” representa-se por $a \notin A$.

Os conjuntos podem ser representados por extensão

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

em que $x_1, x_2, \dots, x_n$ são os elementos pertencentes ao conjunto X , ou por compreensão

$$B = \{a \in A : \mathcal{P}\} \text{ ou } B = \{a : \mathcal{P}\},$$

em que antes de “:” descreve-se a natureza dos elementos do conjunto B e depois de “:” apresenta-se a propriedade $\mathcal{P}$ que identifica os elementos quer pertencem ao conjunto. Por vezes, em lugar de “:” usa-se uma barra vertical, “|”.

Assume-se que existe um conjunto que não tem elementos, designado por conjunto vazio e representado por $\emptyset$, e usa-se a notação usual para representar os vários conjuntos de números:

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ o conjunto dos números naturais;
2. $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ o conjunto dos números inteiros não negativos;
3. $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ o conjunto dos números inteiros;
4. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ o conjunto dos números racionais;
5. $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais;
6. $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Um conjunto X com um número finito de elementos diz-se finito, representando-se por $\#X$ o número de elementos de X . Caso $\#X = 1$, o conjunto X designa-se por conjunto singular. Um conjunto que não seja finito diz-se infinito.

Diz-se que A é um subconjunto de B se todo o elemento de A é também elemento de B , i.e. $x \in A$ implica que $x \in B$, denotando-se por $A \subseteq B$. Caso $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então os conjuntos A e B são o mesmo, i.e. $A = B$.

Dado um conjunto X , define-se o conjunto das partes de X como sendo

$$\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subseteq X\}.$$

Dados A e B conjuntos, define-se a união, representa-se por $A \cup B$, como sendo o conjunto constituído pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B , e a intersecção, representada por $A \cap B$, como sendo o conjunto constituído pelos elementos que pertencem simultaneamente aos dois conjuntos A e B .

Se $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ é uma colecção de conjuntos e I um conjunto de índices, definem-se a intersecção e a união respectivamente por

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha, \forall \alpha \in I\} \quad \text{e} \quad \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in I, x \in A_\alpha\}.$$

A união anterior diz-se dijunta caso $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ para todo $\alpha, \beta \in I$ com $\alpha \neq \beta$. Caso $I = \mathbb{N}$, usa-se a notação

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{e} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Dada uma colecção de conjuntos, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definem-se:

(a) o limite sup de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right), \quad (1.1)$$

isto é

$$\begin{aligned} a \in \limsup_n A_n &\Leftrightarrow a \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow a \text{ pertence a uma infinidade de conjuntos } A_n; \end{aligned}$$

(b) o limite inf de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right), \quad (1.2)$$

isto é

$$\begin{aligned} a \in \liminf_n A_n &\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : a \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k \\ &\Leftrightarrow a \text{ pertence a todos os conjuntos } A_n \text{ a partir de certa} \\ &\quad \text{ordem, } n_0. \end{aligned}$$

Por último, considerados dois conjuntos A e B , define-se a diferença do conjunto A pelo conjunto B por

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\},$$

a diferença simétrica entre os conjuntos A e B por

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

e o produto cartesiano de A por B por

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Esta última noção pode ser generalizada para uma quantidade maior de conjuntos, a saber, para $n \in \mathbb{N}$ e $A_1, \dots, A_n$ conjuntos, define-se o produto cartesiano dos n conjuntos por

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in A_i, \forall i = 1, \dots, n\}$$

e, caso $A_1 = \dots = A_n = A$, escreve-se apenas $A^n = A \times \dots \times A$ (n factores).

1.2 Recta acabada

Na teoria da integração é inevitável lidar com o infinito. Consequentemente, é importante juntar ao conjunto $\mathbb{R}$ os símbolos $-\infty$ e ∞ de uma maneira relativamente óbvia por forma a não “alterar significativamente” a relação de ordem $\leq$ e

as operação soma, $+$, e produto, $\cdot$, usualmente definidas no conjunto dos números reais.

Define-se recta acabada, denotando-se por $\overline{\mathbb{R}}$, como sendo o conjunto dos números reais em união com os símbolos $-\infty$ e ∞ , $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, respeitando a seguinte ordem

$$-\infty \leq x \leq \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Desta forma o par $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$, com a relação de ordem usual em $\mathbb{R}$ mais (1.3), é um conjunto totalmente ordenado.

Definição 1.1. *Sejam $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Diz-se que:*

1. *o elemento a é ínfimo de X se*

$$\begin{cases} a \leq x, \forall x \in X \\ \forall y \in \overline{\mathbb{R}}, ((y \leq x, \forall x \in X) \Rightarrow y \leq a) \end{cases},$$

denotando-se por $\inf X$;

2. *o elemento a é supremo de X se*

$$\begin{cases} x \leq a, \forall x \in X \\ \forall y \in \overline{\mathbb{R}}, ((x \leq y, \forall x \in X) \Rightarrow a \leq y) \end{cases},$$

denotando-se por $\sup X$;

3. *o elemento a é mínimo de X se $a = \inf X$ e $a \in X$, denotando-se por $\min X$;*
4. *o elemento a é máximo de X se $a = \sup X$ e $a \in X$, denotando-se por $\max X$.*

No conjunto totalmente ordenado $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$, todo o conjunto não vazio $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ possui ínfimo e supremo.

Definição 1.2. *Define-se intervalo em $\overline{\mathbb{R}}$ como sendo um subconjunto X de $\overline{\mathbb{R}}$ para o qual existem $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, com $a \leq b$, tais que X assume uma das seguintes formas:*

1. $X = [a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x \leq b\};$
2. $X =]a, b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x < b\};$
3. $X = [a, b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x < b\};$

$$4. X =]a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x \leq b\}.$$

As usuais operações da aritmética, *soma* e *produto*, em $\mathbb{R}$ são de seguida extendidas aos elementos de $\overline{\mathbb{R}}$ da seguinte forma:

1. Para $a, b \in \mathbb{R}$ a operação soma, $a + b$, e a operação produto, $a.b$ definem-se da forma usual;

2. Para $a \in \mathbb{R}$ define-se

$$\begin{cases} \infty + a = a + \infty = \infty \\ -\infty + a = a - \infty = -\infty \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0;$$

3. Para $a > 0$ define-se

$$\begin{cases} \infty.a = a.\infty = \infty \\ (-\infty).a = a.(-\infty) = -\infty \end{cases};$$

4. Para $a < 0$ define-se

$$\begin{cases} \infty.a = a.\infty = -\infty \\ (-\infty).a = a.(-\infty) = \infty \end{cases};$$

5. Define-se

$$\begin{cases} \infty.0 = 0.\infty = 0 \\ (-\infty).0 = 0.(-\infty) = 0 \end{cases};$$

6. Define-se

$$\begin{cases} \infty.\infty = \infty \\ (-\infty).(-\infty) = \infty \end{cases}; \quad \begin{cases} \infty.(-\infty) = -\infty \\ (-\infty).\infty = -\infty \end{cases}.$$

Não estão definidas as operações $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $\frac{\infty}{-\infty}$, nem $\frac{-\infty}{+\infty}$. De referir que as propriedades comutativa e associativa da adição e do produto são válidas em $\overline{\mathbb{R}}$, assim como a propriedade distributiva. Contudo é importante ter em atenção o facto de as leis de cancelamento não serem válidas em $\overline{\mathbb{R}}$.

1.3 Generalidades sobre funções

Nesta sebenta considera-se a usual definição de função, f , de um conjunto X para um conjunto Y , não vazios, em que a cada elemento $x \in X$, designado por objecto, associa um só elemento $f(x) \in Y$, designado por imagem de x . Usa-se a notação

$$\begin{array}{ccc} f : & X & \longrightarrow Y \\ & x & \mapsto f(x) \end{array},$$

ou simplesmente $f : X \rightarrow Y$ quando não há necessidade de explicitar a regra de correspondência, $f(x)$. Ao conjunto X chama-se domínio de f e ao conjunto Y chama-se conjunto de chegada de f .

Dados $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, define-se imagem de A por f como sendo o conjunto

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq Y,$$

e imagem recíproca de B por f como sendo o conjunto

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X.$$

Ao conjunto $f(X)$ chama-se contradomínio de f .

Para simplificar a notação, caso $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ escrever-se-á $f^{-1}(\mathcal{F})$ para representar o conjunto

$$f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{P}(X),$$

e se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$, então escrever-se-á $f(\mathcal{T})$ para representar o conjunto

$$f(\mathcal{T}) = \{f(A) : A \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(Y).$$

Definição 1.3. Uma função $f : X \rightarrow Y$ diz-se:

1. injectiva se

$$\forall x_1, x_2 \in X : (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2);$$

2. sobrejectiva se

$$f(X) = Y;$$

3. bijectiva se é injectiva e sobrejectiva.

De uma forma sucinta, descrevem-se de seguida processos para operar funções. Começando com a composição, dadas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ funções, define-se a função composta de g após f , como sendo a função

$$\begin{array}{ccc} g \circ f : & X & \longrightarrow Z \\ & x & \mapsto g(f(x)) \end{array} .$$

No caso em que uma função $f : X \rightarrow Y$ é bijectiva, existe a chamada função inversa definida como a única função $g : Y \rightarrow X$ tal que

$$f \circ g = id_Y \quad \text{e} \quad g \circ f = id_X$$

onde $id_X : X \longrightarrow X$ e $id_Y : Y \longrightarrow Y$ são, respectivamente, a função identidade em X e a função identidade em Y . A notação usual para a função

inversa de f é f^{-1} . De referir que, apesar de idênticas, não existe ambiguidade com a notação adoptada para conjunto imagem recíproca de uma função.

Para funções com imagens em $\mathbb{R}$, designadas por funções reais, ou com imagens na recta acabada, de uma forma natural define-se a seguinte relação de ordem parcial.

Definição 1.4. *Seja X um conjunto não vazio.*

Em cada um dos conjuntos

$$F(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é função} \}$$

e

$$F(X, \overline{\mathbb{R}}) = \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ é função} \}$$

define-se a relação de ordem parcial " $\leq$ " por

$$f \leq g \Leftrightarrow (f(x) \leq g(x), \forall x \in X).$$

Quer em $F(X, \mathbb{R})$, quer em $F(X, \overline{\mathbb{R}})$, há a possibilidade de se construírem diversas operações de funções. Neste sentido, apresentam-se as seguintes definições.

Definição 1.5. *Sejam $X \neq \emptyset$ e $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) funções e $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Caso a regra de correspondência esteja bem definida para todo o ponto do domínio, X , define-se:

1. *função máximo de f e g por $\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, para todo $x \in X$;*
2. *função mínimo de f e g por $\min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, para todo $x \in X$;*
3. *função soma de f com g por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in X$;*
4. *função produto de f com g por $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, para todo $x \in X$;*
5. *função quociente de f por g por $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, para todo $x \in X$;*
6. *função módulo de f por $|f|(x) = |f(x)|$, para todo $x \in X$;*
7. *função produto escalar de α com f por $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$, para todo $x \in X$;*
8. *função parte positiva de f por $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, para todo $x \in X$;*
9. *função parte negativa de f por $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$, para todo $x \in X$.*

Seguem-se algumas propriedades da parte positiva e parte negativa de funções que serão utilizadas posteriormente.

Teorema 1.1. *Sejam $X \neq \emptyset$ e $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) funções.*

Então

1. *Se $f \leq g$, então $f^+ \leq g^+$ e $g^- \leq f^-$;*
2. *Tem-se $(-f)^+ = f^-$ e $f^+ = (-f)^-$;*
3. *Tem-se $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$.*

Demonstração. Prove-se cada item separadamente.

1. Seja $x \in X$.

Se $f(x) \geq 0$, então $g(x) \geq f(x) \geq 0$, logo $g^+(x) = g(x) \geq f(x) = f^+(x)$.

Suponha-se que $f(x) < 0$. Se $g(x) \geq 0$, então $g^+(x) = g(x) \geq 0 = f^+(x)$.

Se $g(x) < 0$, então $g^+(x) = 0 = f^+(x)$.

Conclui-se assim que $f^+ \leq g^+$.

De forma análoga se prova que $g^- \leq f^-$.

2. Seja $x \in X$.

Se $f(x) \geq 0$, então $-f(x) \leq 0$, logo $f^-(x) = 0 = (-f)^+(x)$.

Se $f(x) < 0$, então $-f(x) > 0$, logo $f^-(x) = -f(x) = (-f)^+(x)$.

Conclui-se assim que $f^- = (-f)^+$.

De forma análoga se prova que $f^+ = (-f)^-$.

3. Consequência imediata das definições de função parte positiva e de função parte negativa.

□

Definição 1.6. *Sejam $X \neq \emptyset$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma colecção de funções em $F(X, \overline{\mathbb{R}})$.*

Define-se:

1. a função ínfimo de $(f_n)_n$ por

$$\left(\inf_n f_n \right) (x) = \inf \{ f_n(x) \} = \inf \{ f_n(x) : n \in \mathbb{N} \}, \quad \forall x \in X;$$

2. a função supremo de $(f_n)_n$ por

$$\left(\sup_n f_n \right) (x) = \sup \{ f_n(x) \} = \sup \{ f_n(x) : n \in \mathbb{N} \}, \quad \forall x \in X;$$

3. a função limite inferior de $(f_n)_n$ por

$$\left(\liminf_n f_n \right) (x) = \left(\sup_n \left(\inf_{k \geq n} f_k \right) \right) (x), \quad \forall x \in X;$$

4. a função limite superior de $(f_n)_n$ por

$$\left(\limsup_n f_n \right) (x) = \left(\inf_n \left(\sup_{k \geq n} f_k \right) \right) (x), \quad \forall x \in X.$$

A Definição 1.6 também é aplicável quando $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são funções em $F(X, \mathbb{R})$, desde que os ínfimos e/ou supremos existam.

Nota 1.1 É importante notar que as funções $\limsup_n f_n$ e $\liminf_n f_n$ podem também ser obtidas, respectivamente, por

$$\left(\limsup_n f_n \right) (x) = \inf \left\{ \sup \{ f_k(x) : k \geq n \} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \forall x \in X$$

e por

$$\left(\liminf_n f_n \right) (x) = \sup \left\{ \inf \{ f_k(x) : k \geq n \} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \forall x \in X.$$

Umas funções muito usada na teoria de integração são as funções características e as funções simples.

Definição 1.7. *Sejam X um conjunto não vazio e $A \subseteq X$. Define-se função característica de A como sendo a função*

$$\begin{aligned} \chi_A : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Definição 1.8. *Seja X um conjunto não vazio.*

Uma função $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se simples se o seu contradomínio for um conjunto finito.

Sendo $S : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função simples, então, por definição, o seu contradomínio, $s(X)$, é um conjunto finito, logo existem $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que o

$$s(X) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}.$$

Considerando, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, a imagem recíproca de $\{\alpha_i\}$, ou seja

$$A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\}) = \{x \in X : s(x) = \alpha_i\},$$

facilmente se obtém $s(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}(x)$, para qualquer $x \in X$, ou seja, qualquer função simples assume a forma

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}, \tag{1.4}$$

com $A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Com base na forma (1.4), facilmente se conclui que quer a soma, quer o produto de funções simples são também funções simples.

Seguem-se algumas propriedades, facilmente verificáveis, sobre as funções características.

Teorema 1.2. *Sejam X um conjunto não vazio e $A, B \subseteq X$.*

Então

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$;
2. Se $A \cap B = \emptyset$, então $\chi_A + \chi_B = \chi_{A \cup B}$;
3. $\chi_A + \chi_B = \chi_{A \cup B} + \chi_{A \cap B}$;
4. $\chi_A \cdot \chi_B = \chi_{A \cap B}$;
5. $\chi_{(X \setminus A)} = 1 - \chi_A$;
6. $(\chi_A f)^+ = \chi_A \cdot (f^+)$ e $(\chi_A f)^- = \chi_A \cdot (f^-)$;

Demonstração. Proposta de exercício. □

1.4 Sucessões

Dado um conjunto X , designa-se por sucessão em X uma função cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ e o conjunto de chegada é X , isto é

$$\begin{array}{ccc} u : & \mathbb{N} & \longrightarrow & X \\ & n & \mapsto & u(n) \end{array} .$$

Na prática, uma sucessão num conjunto X define uma sequência ordenada de elementos de X ,

$$u(1), u(2), \dots, u(n), \dots,$$

formada pelas imagens. A terminologia usual nas sucessões é a seguinte: para cada $n \in \mathbb{N}$ a imagem de n designa-se por termo de ordem n e denota-se por u_n ; a sucessão u denota-se por $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente por $(u_n)_n$.

Definição 1.9. *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em $\mathbb{R}$, ou em $\overline{\mathbb{R}}$.*

1. Diz-se que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona crescente se

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

2. Diz-se que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona decrescente se

$$a_{n+1} \leq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

3. Diz-se que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada se existe $L > 0$ tal que

$$|a_n| \leq L, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Relembra-se de seguida a noção de limite de uma sucessão real.

Definição 1.10. Um sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ diz-se convergente para $a \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |a_n - a| < \delta.$$

O valor “ a ” designa-se por limite da sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e representa-se por

$$a = \lim_n a_n.$$

De forma natural, as definições 1.9 e 1.10 são estendidas à recta acabada $\overline{\mathbb{R}}$.

Um dos resultados importantes sobre sucessões é o seguinte.

Teorema 1.3. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em $\mathbb{R}$ limitada.

1. se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona crescente, então

$$\lim_n a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\};$$

2. se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona decrescente, então

$$\lim_n a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstração. Consultar prova em [6]. □

Uma vez que qualquer subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$ possui supremo e ínfimo, então imediatamente se observa que qualquer sucessão monótona com valores na recta acabada é convergente.

Não sendo objectivo deste texto fazer um estudo sobre sucessões reais, é importante o leitor estar a par dos resultados relevantes sobre limites de sucessões, destacando as propriedades da aritmética de limites. A referência [6] é certamente uma boa referência para consulta. Uma tarefa importante que deixo aqui ao leitor é de fazer uma análise da aritmética de limites quando as sucessões têm termos na recta acabada.

No que se segue, apresentam-se diversas noções de limite para sucessões de funções, isto é, de sucessões em $F(X, \mathbb{R})$ ou em $F(X, \overline{\mathbb{R}})$.

Definição 1.11. Sejam $X \neq \emptyset$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em $F(X, \mathbb{R})$ (ou em $F(X, \overline{\mathbb{R}})$) e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função (ou $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$).

1. A sucessão de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diz-se pontualmente convergente para a função f se

$$\forall x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

ou seja, para qualquer $x_0 \in X$, tem-se

$$\lim_n f_n(x_0) = f(x_0).$$

A convergência pontual denota-se por $f_n \xrightarrow{p} f$.

2. A sucessão de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diz-se uniformemente convergente para a função f se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

A convergência uniforme denota-se por $f_n \xrightarrow{u} f$.

Das definições de convergência pontual e uniforme de sucessões de funções, imediatamente se observa que a convergência uniforme implica a convergência pontual. O reverso é falso. Para um estudo sobre sucessões de funções, aponta-se a referência [6].

Teorema 1.4. Sejam $X \neq \emptyset$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em $F(X, \mathbb{R})$ (ou em $F(X, \overline{\mathbb{R}})$) e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função (ou $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$) tais que $f_n \xrightarrow{p} f$.

Então

$$\limsup_n f_n = \liminf_n f_n = f.$$

Demonstração. Proposta de exercício. □

Capítulo 2

Espaços Topológicos

Nesta secção apresentam-se noções e resultados sobre espaços topológicos essenciais para se entender os fundamentos básicos dos espaços de medida e a teoria de integração que se pretendem expor nestas notas. Desta forma, estes assuntos são aqui descritos de uma forma muito leve, devendo o leitor colocar-se a par destes assunto em referências complementares. A título exemplificativo são deixadas aqui algumas [?adicionar referências?].

2.1 Espaços topológicos

A apresentação inicia-se com a definição de espaço topológico.

Definição 2.1. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$.*

Diz-se que $\mathcal{T}$ é uma topologia em X se:

1. $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{T}$;
2. Se $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{T}$, então $\left(\bigcap_{i=1}^n V_i\right) \in \mathcal{T}$;
3. Se $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ é uma colecção de conjuntos em $\mathcal{T}$, então $\left(\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha\right) \in \mathcal{T}$.

O par $(X, \mathcal{T})$ designa-se por espaço topológico.

As noções topológicas presentes nestas notas, são aqui descritas.

Definição 2.2. *Considere-se $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.*

1. Um conjunto $A \subseteq X$ diz-se aberto se $A \in \mathcal{T}$;
2. Um conjunto $F \subseteq X$ diz-se fechado se $X \setminus F \in \mathcal{T}$;

3. Para $Y \subseteq X$, designa-se por aderência de Y , denotada por $\overline{Y}$, como o menor fechado em X que contém Y , no sentido da inclusão de conjuntos;
4. Um conjunto $A \subseteq X$ diz-se denso se $\overline{A} = X$;
5. Um conjunto $K \subseteq X$ diz-se compacto se, para qualquer colecção $(V_\alpha)_{\alpha \in I}$ em $\mathcal{T}$ tal que $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$, existe $J \subseteq I$ finito tal que $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha$. Dito de uma forma diferente, toda a cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita;

Com o objectivo de definir subespaço topológico, apresenta-se em seguida um resultado de fácil verificação.

Teorema 2.1. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.*

Se $Y \subseteq X$, então

$$\mathcal{T}|_Y = \{Y \cap V : V \in \mathcal{T}\} \quad (2.1)$$

é uma topologia em Y .

Demonstração. Proposta como exercício. □

Definição 2.3. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.*

Define-se subespaço topológico de $(X, \mathcal{T})$ como sendo um espaço topológico $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ em que $Y \subseteq X$ e a topologia $\mathcal{T}|_Y$ está definida por (2.1).

Com a definição seguinte classificam-se alguns espaços topológicos:

Definição 2.4. *Considere-se $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.*

1. O espaço diz-se de Hausdorff se possui a seguinte propriedade: Se $x, y \in X$ tais que $x \neq y$, então existem $U, V \in \mathcal{T}$ tais que $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ e $y \in V$;
2. O espaço diz-se de localmente compacto se para todo o ponto $x \in X$, existe $V \in \mathcal{T}$ tal que $x \in V$ e $\overline{V}$ é compacto.

Segue-se a importante noção de continuidade de funções entre espaços topológicos.

Definição 2.5. *Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função.*

A função f diz-se contínua se

$$\forall B \in \mathcal{T}_Y, \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$$

Dois espaços topológicos são considerados essencialmente idênticos se a sua natureza topológica for a mesma e diferirem apenas na natureza dos seus elementos. Formalmente isto ocorre quando estamos perante dois espaços topológicos homeomorfos.

Definição 2.6. *Dois espaços topológicos, $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$, dizem-se homeomorfos se existe um homeomorfismo entre eles, ou seja, um função $f : X \rightarrow Y$ contínua, bijectiva cuja função inversa é contínua.*

2.2 Espaços métricos

Os espaços topológicos mais conhecidos são os espaços métricos.

Definição 2.7. *Chama-se espaço métrico a um par (X, d) em que X é um conjunto não vazio e $d : X \times X \rightarrow [0, \infty[$ uma função, designada de métrica ou distância, que verifica as seguintes propriedades: Para quaisquer $x, y, z \in X$,*

1. $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria);
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdade triangular).

Para a construção da topologia induzida por uma métrica, são fundamentais as definições que se seguem.

Definição 2.8. *Chama-se bola de um espaço métrico $(X, \mathcal{T})$ a um conjunto da forma*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\},$$

onde $r > 0$ é o raio e $x_0 \in X$ é o centro.

Definição 2.9. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subseteq X$.*

Diz-se que A é aberto em (X, d) se

$$\forall a \in A, \exists r > 0 : B(a, r) \subseteq A.$$

O resultado que se segue é de fácil verificação, como tal a sua prova é deixada a cargo do leitor.

Teorema 2.2. *Seja (X, d) um espaço métrico.*

Então o conjunto

$$\mathcal{T}_d = \{A \subseteq X : A \text{ é aberto em } (X, d)\} \quad (2.2)$$

é uma topologia em X .

Demonstração. Proposta como exercício. $\square$

Dado um espaço métrico (X, d) , a topologia definida em (2.2) designa-se por topologia induzida em X pela métrica d , $\mathcal{T}_d$. Desta forma $(X, \mathcal{T}_d)$ é o espaço topológico induzido pela métrica d .

Definição 2.10. Duas métricas, d_1 e d_2 , definidas em X dizem-se equivalentes se induzem no conjunto X a mesma topologia.

Teorema 2.3. Seja (X, d) um espaço métrico.

Então o espaço topológico induzido por d , $(X, \mathcal{T}_d)$, é um espaço de Hausdorff.

Demonstração. Proposta como exercício. $\square$

Não sendo uma noção topológica, é importante referir que um conjunto $A \subseteq X$ diz-se limitado, num espaço métrico (X, d) , se existe uma bola $B(x, \delta)$ tal que $A \subseteq B(x, \delta)$.

A noção de continuidade de uma função entre dois espaços métricos pode ser descrita da forma que se segue.

Teorema 2.4. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaço métricos e $f : X \rightarrow Y$ uma função.

A função f é contínua se e só se

$$\forall x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Demonstração. Proposta como exercício. $\square$

No conjunto $\mathbb{R}^k$, com $k \in \mathbb{N}$, está definida a métrica euclidiana $d_e : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty[$, definida por

$$d_e((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)) = \sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2},$$

que induz em $\mathbb{R}^k$ uma topologia, conhecida como a topologia euclidiana, $\mathcal{E}$.

Daqui em diante, não estando explícita qual a topologia considerada em $\mathbb{R}^k$, assume-se sempre o espaço topológico euclidiano $(\mathbb{R}^k, \mathcal{E})$.

Descrevem-se em seguida algumas noções e propriedades do espaço euclidiano relevantes para o estudo que se seguirá.

Definição 2.11. Designa-se por rectângulo aberto em $\mathbb{R}^k$ a qualquer conjunto da forma

$$R = I_1 \times \dots \times I_k$$

em que, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, se tem $I_i =]a_i, b_i[$, para certos $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ com $a_i < b_i$.

Facilmente se verifica que os rectângulos abertos de $\mathbb{R}^k$ são conjuntos abertos no espaço topológico euclidiano $(\mathbb{R}^k, \mathcal{E})$.

Teorema 2.5. *Seja $V \neq \emptyset$ um aberto em $\mathbb{R}^k$.*

Então existe $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de rectângulos abertos em $\mathbb{R}^k$ tal que

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n.$$

Demonstração. Proposta de exercício. □

Com o objectivo de introduzir uma métrica no conjunto $\overline{\mathbb{R}}$, considere-se a função bijectiva

$$\begin{aligned} f: \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \begin{cases} 1, & x = \infty \\ -1, & x = -\infty \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, & x \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

A função

$$\begin{aligned} \bar{d}: \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow [0, \infty[\\ (x, y) &\mapsto |f(x) - f(y)| \end{aligned} \quad (2.4)$$

define em $\overline{\mathbb{R}}$ uma métrica e consequentemente induz uma topologia no conjunto $\overline{\mathbb{R}}$.

Teorema 2.6. *São homeomorfos os espaços topológicos $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{\bar{d}})$ e $([-1, 1], \mathcal{T}_{d_e})$, em que as topologias $\mathcal{T}_{\bar{d}}$ e $\mathcal{T}_{d_e}$ são, respectivamente, as topologias induzidas pelas métricas $\bar{d}$ e d_e .*

Demonstração. Proposta de exercício. Para isso, basta verificar que a função f , definida em (2.3), é um homeomorfismo entre os espaços topológicos $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{\bar{d}})$ e $([-1, 1], \mathcal{T}_{d_e})$. □

Como consequência do resultado anterior, obtém-se que o conjunto das bolas em $(\overline{\mathbb{R}}, \bar{d})$ é

$$\mathcal{A} = \{]a, b[, [-\infty, a[,]a, \infty], \overline{\mathbb{R}} : a, b \in \overline{\mathbb{R}} \text{ com } a < b\}. \quad (2.5)$$

Mais, é válido o seguinte resultado.

Teorema 2.7. *Seja $V \neq \emptyset$ um aberto em $(\overline{\mathbb{R}}, \bar{d})$.*

Então existe $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucessão em $\mathcal{A}$, definida em (2.5), tal que

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Demonstração. Proposta de exercício. Para isso, usa-se o Teorema 2.5 e o homeomorfismo f , definido em (2.3), entre os espaços topológicos $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{\overline{d}})$ e $([-1, 1], \mathcal{T}_{d_e})$. $\square$

Capítulo 3

Espaços Mensuráveis

Neste capítulo introduzem-se os espaços mensuráveis, espaços estes que estão preparados para receberem uma medida. Na prática, ao estabelecer-se um espaço mensurável, está-se a considerar um conjunto X e a identificar quais os seus subconjuntos que serão medidos através de uma qualquer medida que o espaço venha a receber.

3.1 σ -álgebra e conjuntos mensuráveis

Definição 3.1. *Seja X um conjunto e $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$.*

Diz-se que $\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra em X se

- (i) $X \in \mathcal{M}$;
- (ii) Se $A \in \mathcal{M}$, então $(X \setminus A) \in \mathcal{M}$;
- (iii) Se $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, com $A_n \in \mathcal{M}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então $A \in \mathcal{M}$.

Definição 3.2. *Seja X um conjunto e $\mathcal{M}$ um σ -álgebra em X .*

O par $(X, \mathcal{M})$ diz-se espaço mensurável e os elementos de $\mathcal{M}$ chamam-se conjuntos mensuráveis.

Dado um qualquer conjunto X , é imediato verificar que são σ -álgrbras em X , a σ -álgebra trivial, $\{\emptyset, X\}$, e a σ -álgebra grosseira, $\mathcal{P}(X)$.

Teorema 3.1. *Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável. Tem-se:*

1. $\emptyset \in \mathcal{M}$;
2. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão em $\mathcal{M}$, então $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \in \mathcal{M}$;

3. Se $A, B \in \mathcal{M}$, então $(A \setminus B) \in \mathcal{M}$;
4. Se $A, B \in \mathcal{M}$, então $(A \triangle B) \in \mathcal{M}$.

Demonstração. Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável.

1. Pelo ponto (i) da definição de σ -álgebra, Definição 3.1, $X \in \mathcal{M}$ e, pelo ponto (ii) da definição de σ -álgebra, conclui-se que $\emptyset = (X \setminus X) \in \mathcal{M}$;
2. Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em $\mathcal{M}$. Pelo ponto (iii) da definição de σ -álgebra tem-se $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \mathcal{M}$.

Pelas propriedades da teoria de conjuntos e pelo ponto (ii) da definição de σ -álgebra obtém-se

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \left[X \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right] \in \mathcal{M}.$$

3. Sejam $A, B \in \mathcal{M}$. Pelo ponto (ii) da definição de σ -álgebra, $X \setminus B \in \mathcal{M}$ e, pelo ponto demonstrado anteriormente, $(X \setminus B) \cap A \in \mathcal{M}$ (basta considerar $A_1 = A; A_2 = B; A_n = X$, para $n > 2$). Das propriedades da teoria de conjuntos sabe-se que $A \setminus B = (X \setminus B) \cap A$, donde $A \setminus B \in \mathcal{M}$;
4. Por definição tem-se que $(A \triangle B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Pelo ponto anterior tem-se $(A \setminus B), (B \setminus A) \in \mathcal{M}$, donde, considerando $A_1 = (A \setminus B); A_2 = (B \setminus A); A_n = \emptyset$, para $n > 2$, conclui-se que $(A \triangle B) \in \mathcal{M}$ pelo ponto (iii) da definição de σ -álgebra.

□

Teorema 3.2. *Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável.*

Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão em $\mathcal{M}$, então $\limsup_n A_n$ e $\liminf_n A_n$ são conjuntos mensuráveis.

Demonstração. Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em $\mathcal{M}$. Pelo ponto (iii) da definição de σ -álgebra, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \in \mathcal{M}$. Pelo ponto 2. do Teorema 3.1, conclui-se que

$$\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)\right] \in \mathcal{M},$$

ou seja $\left(\limsup_n A_n\right) \in \mathcal{M}$, ver definição (1.1).

De forma análoga se mostra que $\left(\liminf_n A_n\right) \in \mathcal{M}$.

□

Com o objectivo de definir subespaço mensurável, apresenta-se o resultado seguinte, cuja prova é deixada como exercício.

Teorema 3.3. *Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e $Y \subseteq X$.*

Então

$$\mathcal{M}_Y = \{Y \cap M : M \in \mathcal{M}\} \quad (3.1)$$

é uma σ -álgebra em Y .

Demonstração. Proposta de exercício. □

Definição 3.3. *Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável.*

Chama-se subespaço mensurável de $(X, \mathcal{M})$ a um espaço $(Y, \mathcal{M}_Y)$ em que $Y \in \mathcal{M}$ e $\mathcal{M}_Y$ é a σ -álgebra em Y definida em (3.1).

O lema que se segue permite construir uma σ -álgebra a partir de qualquer subconjunto do conjunto das partes de um dado conjunto.

Lema 3.4. *Sejam X um conjunto e $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma colecção de σ -álgebras em X . Então*

$$\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$$

é uma σ -álgebra em X .

Demonstração. Considere-se $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma colecção de σ -álgebras num dado conjunto X e defina-se

$$\mathcal{M} = \left(\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha \right).$$

1. Para cada $\alpha \in I$, $\mathcal{M}_\alpha$ é uma σ -álgebra em X donde $\mathcal{M}_\alpha \subseteq \mathcal{P}(X)$. Consequentemente $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
2. Para todo $\alpha \in I$, $X \in \mathcal{M}_\alpha$ porque cada $\mathcal{M}_\alpha$ é uma σ -álgebra em X . Assim, $X \in \left(\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha \right)$, ou seja $X \in \mathcal{M}$.
3. Seja $A \in \mathcal{M}$. Consequentemente, $A \in \mathcal{M}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$ e, sendo cada $\mathcal{M}_\alpha$ uma σ -álgebra em X , tem-se $(X \setminus A) \in \mathcal{M}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, logo

$$(X \setminus A) \in \left(\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha \right) = \mathcal{M}.$$

4. Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um sucessão em $\mathcal{M}$. Consequentemente $A_n \in \mathcal{M}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Considere-se $\alpha \in I$ fixado arbitrariamente. Desta

forma tem-se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão em $\mathcal{M}_\alpha$ e, sendo $\mathcal{M}_\alpha$ uma σ -álgebra em X , tem-se

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \in \mathcal{M}_\alpha.$$

Como $\alpha \in I$ foi fixado arbitrariamente, conclui-se que

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \in \left(\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha \right) = \mathcal{M}.$$

Dos pontos anteriores conclui-se que $\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra em X . □

O Lema 3.4 dá consistência à definição que se segue.

Definição 3.4. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$.*

Define-se σ -álgebra gerada por $\mathcal{F}$ como sendo a σ -álgebra em X ,

$$\mathcal{M}^*(\mathcal{F}) = \bigcap_{\mathcal{M} \in \mathcal{X}} \mathcal{M},$$

onde $\mathcal{X} = \{\mathcal{M} \text{ é } \sigma\text{-álgebra em } X : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}\}$

Concretizando, dado um conjunto X , a σ -álgebra gerada por um subconjunto das partes de X , $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, é a menor σ -álgebra em X , no sentido da inclusão de conjuntos, que contém $\mathcal{F}$. A sua existência está garantida pelo Lema 3.4 caso o conjunto $\mathcal{X}$ presente na Definição 3.4 seja não vazio. Claramente $\mathcal{X}$ é não vazio porque a σ -álgebra grosseira em X é um seu elemento independentemente de qual seja o conjunto $\mathcal{F}$.

Da Definição 3.4, imediatamente se obtêm as seguintes propriedades.

Teorema 3.5. *Seja X um conjunto.*

1. *Se $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$, então $\mathcal{M}^*(\mathcal{F}_1) \subseteq \mathcal{M}^*(\mathcal{F}_2)$;*
2. *Se $\mathcal{M}$ é um σ -álgebra em X , então $\mathcal{M}^*(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$;*
3. *Se $\mathcal{M}$ é um σ -álgebra em X e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$, então $\mathcal{M}^*(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{M}$.*

Demonstração. Consequência imediata da Definição 3.4. □

Um exemplo de uma σ -álgebra gerada importante na teoria de integração é a σ -álgebra de Borel cuja definição se apresenta de seguida.

Definição 3.5. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.*

Chama-se σ -álgebra de Borel à σ -álgebra gerada pela topologia $\mathcal{T}$, ou seja, $\mathcal{M}^(\mathcal{T})$, denotando-se por*

$$\mathcal{B}(\mathcal{T}) = \mathcal{M}^*(\mathcal{T}).$$

Os elementos de $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ designam-se de conjuntos de Borel e o espaço mensurável $(X, \mathcal{B}(\mathcal{T}))$ diz-se espaço de Borel.

Nota 3.1 Sempre que se considerar $\mathbb{R}^k$ (ou um seu subconjunto X) como um espaço mensurável e nada for dito relativamente à σ -álgebra considerada, assume-se que se está a considerar a σ -álgebra de Borel, $\mathcal{B}(\mathcal{E})$, do espaço topológico euclidiano (respectivamente $\mathcal{B}(\{A \cap X : A \in \mathcal{E}\})$).

De igual forma, sempre que se considerar $\overline{\mathbb{R}}$ (ou um seu subconjunto X) como um espaço mensurável e nada for dito relativamente à σ -álgebra considerada, assume-se que se está a considerar a σ -álgebra de Borel, $\mathcal{B}(\mathcal{T}_{\bar{d}})$, do espaço topológico $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{\bar{d}})$, onde $\mathcal{T}_{\bar{d}}$ é a topologia induzida pela métrica $d_{\bar{d}}$ definida em (2.4) (respectivamente $\mathcal{B}(\{A \cap X : A \in \mathcal{T}_{\bar{d}}\})$).

Uma observação importante sobre as σ -álgebras de Borel é que estas também contêm todos os conjuntos fechados como seus elementos. De facto, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 3.6. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : F \text{ é fechado}\}$. Então $\mathcal{B}(\mathcal{T}) = \mathcal{M}^*(\mathcal{F})$.*

Demonstração. Por definição, tem-se que $\mathcal{B}(\mathcal{T}) = \mathcal{M}^*(\mathcal{T})$.

Se A é um aberto, isto é $A \in \mathcal{T}$, então, por definição, $X \setminus A$ é um conjunto fechado. Logo $(X \setminus A) \in \mathcal{F}$ e, por definição de σ -álgebra gerada, tem-se $(X \setminus A) \in \mathcal{M}^*(\mathcal{F})$ e, sendo uma σ -álgebra, obtém-se que $A = (X \setminus (X \setminus A)) \in \mathcal{M}^*(\mathcal{F})$. Consequentemente $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{M}^*(\mathcal{F})$ e pela definição de σ -álgebra gerada conclui-se que $\mathcal{B}(\mathcal{T}) = \mathcal{M}^*(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{M}^*(\mathcal{F})$.

Pelo ponto (ii) da definição de σ -álgebra obtém-se que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{T})$ donde, novamente pela definição de σ -álgebra gerada, se conclui que $\mathcal{M}^*(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{T})$. $\square$

Considerem-se agora dois conjuntos não vazios, X e Y , e uma função $f : X \rightarrow Y$. Se em Y estiver definido um espaço mensurável, $(Y, \mathcal{M}_Y)$, então é possível “transferir” para X o espaço mensurável presente em Y da seguinte forma.

Teorema 3.7. *Sejam X, Y dois conjuntos não vazios, $f : X \rightarrow Y$ uma função e $(Y, \mathcal{M}_Y)$ um espaço mensurável. Então*

$$\mathcal{M}_X = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{M}_Y\} = f^{-1}(\mathcal{M}_Y) \quad (3.2)$$

é uma σ -álgebra em X .

Demonstração. A prova faz-se verificando todos os itens da definição de σ -álgebra, Definição 3.1.

Pela definição de imagem recípra de um subconjunto de Y por f , conclui-se que $\mathcal{M}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1. Tem-se $f^{-1}(Y) = X$, logo $X \in \mathcal{M}_X$;
2. Seja $A \in \mathcal{M}_X$. Por definição, existe $B \in \mathcal{M}_Y$ tal que $A = f^{-1}(B)$. Assim,

$$\begin{aligned} X \setminus A &= X \setminus f^{-1}(B) = \{x \in X : x \notin f^{-1}(B)\} \\ &= \{x \in X : f(x) \notin B\} = \{x \in X : f(x) \in (Y \setminus B)\} \\ &= f^{-1}(Y \setminus B). \end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{M}_Y$ uma σ -álgebra em Y , então $(Y \setminus B) \in \mathcal{M}_Y$, logo $f^{-1}(Y \setminus B) \in \mathcal{M}_X$, ou seja $X \setminus A \in \mathcal{M}_X$.

3. Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em $\mathcal{M}_X$. Por definição, existe uma sucessão $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}_Y$ tal que

$$A_n = f^{-1}(B_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \in B_n\} \\ &= \left\{ x \in X : f(x) \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \right\}. \end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{M}_Y$ uma σ -álgebra em Y e $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em $\mathcal{M}_Y$, então $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \in \mathcal{M}_Y$, donde $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \in \mathcal{M}_X$.

Pelos pontos 1., 2. e 3. anteriores conclui-se que $\mathcal{M}_X$ é uma σ -álgebra em X . $\square$

Definição 3.6. *Sejam X, Y dois conjuntos não vazios, $f : X \rightarrow Y$ uma função e $(Y, \mathcal{M}_Y)$ um espaço mensurável.*

Chama-se σ -álgebra imagem recíproca à σ -álgebra em X definida por (3.2) no Teorema 3.7.

Considerem-se novamente dois conjuntos não vazios, X e Y , e uma função $f : X \rightarrow Y$, mas agora assumindo que é em X que está definido um espaço mensurável, $(X, \mathcal{M}_X)$. Nesta situação também é possível “transferir” para Y o espaço mensurável presente em X , mas não através de

$$\mathcal{F} = \{f(A) : A \in \mathcal{M}_X\}.$$

Facilmente se encontram exemplos de conjuntos X e Y não vazios, $f : X \rightarrow Y$ função e $\mathcal{M}_X$ σ -álgebra em X tal que $\mathcal{F}$ não é uma σ -álgebra em Y .

A forma de transferir a σ -álgebra em X para Y está descrita no teorema que se segue.

Teorema 3.8. *Sejam X, Y dois conjuntos não vazios, $f : X \rightarrow Y$ uma função e $(X, \mathcal{M}_X)$ um espaço mensurável. Então*

$$\mathcal{M}_Y = \{B \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(B) \in \mathcal{M}_X\} \quad (3.3)$$

é uma σ -álgebra em Y .

Demonstração. Mais uma vez, a prova faz-se verificando todos os itens da definição de σ -álgebra, Definição 3.1.

Por definição do conjunto $\mathcal{M}_Y$, (3.3), tem-se $\mathcal{M}_Y \subseteq \mathcal{P}(Y)$.

1. Tem-se $f^{-1}(Y) = X$ e $X \in \mathcal{M}_X$, pois $\mathcal{M}_X$ é uma σ -álgebra em X . Assim $Y \in \mathcal{M}_Y$;
2. Seja $B \in \mathcal{M}_Y$. Das definições obtém-se

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y \setminus B) &= \{x \in X : f(x) \in (Y \setminus B)\} \\ &= \{x \in X : f(x) \notin B\} = \{x \in X : x \notin f^{-1}(B)\} \\ &= X \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Por (3.3) tem-se $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}_X$. Sendo $\mathcal{M}_X$ uma σ -álgebra em X , então $X \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{M}_X$, logo $f^{-1}(Y \setminus B) \in \mathcal{M}_X$, ou seja $Y \setminus B \in \mathcal{M}_Y$.

3. Seja $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em $\mathcal{M}_Y$. Das definições facilmente se verifica que

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \left\{x \in X : f(x) \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \in B_n\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n). \end{aligned}$$

Sendo $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em $\mathcal{M}_Y$, por (3.3), tem-se que $(f^{-1}(B_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão em $\mathcal{M}_X$. Como $\mathcal{M}_X$ uma σ -álgebra em X , obtém-se

$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)\right) \in \mathcal{M}_X$, ou seja $f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in \mathcal{M}_X$, donde se conclui que $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in \mathcal{M}_Y$.

Pelos pontos 1., 2. e 3. anteriores conclui-se que $\mathcal{M}_Y$ é uma σ -álgebra em Y . $\square$

Definição 3.7. *Sejam X, Y dois conjuntos não vazios, $f : X \rightarrow Y$ uma função e $(X, \mathcal{M}_X)$ um espaço mensurável. Chama-se σ -álgebra imagem à σ -álgebra em Y definida por (3.3) no Teorema 3.8.*

Teorema 3.9. *Sejam X, Y dois conjuntos não vazios, $f : X \rightarrow Y$ uma função e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(Y)$. Então*

$$f^{-1}(\mathcal{M}^*(\mathcal{F})) = \mathcal{M}^*(f^{-1}(\mathcal{F})).$$

Demonstração. A demonstração é feita por dúpla inclusão, ou seja, num primeiro momento demonstra-se que $\mathcal{M}^*(f^{-1}(\mathcal{F})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{M}^*(\mathcal{F}))$, e num segundo momento que $f^{-1}(\mathcal{M}^*(\mathcal{F})) \subseteq \mathcal{M}^*(f^{-1}(\mathcal{F}))$.

1. Pela Definição 3.4 tem-se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}^*(\mathcal{F})$ e desta forma obtém-se $f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq f^{-1}(\mathcal{M}^*(\mathcal{F}))$. Como $f^{-1}(\mathcal{M}^*(\mathcal{F}))$ é um σ -álgebra em X , Teorema 3.7, pela definição de σ -álgebra gerada, obtém-se $\mathcal{M}^*(f^{-1}(\mathcal{F})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{M}^*(\mathcal{F}))$.
2. Considere-se o conjunto

$$\mathcal{M}_Y = \{B \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(B) \in \mathcal{M}^*(f^{-1}(\mathcal{F}))\}.$$

Por um lado, o Teorema 3.8 garante que $\mathcal{M}_Y$ é uma σ -álgebra em Y .

Por outro, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}_Y$. Efectivamente dado $B \in \mathcal{F}$ tem-se, pela Definição 3.4, que $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{M}^*(f^{-1}(\mathcal{F}))$ donde se conclui que $B \in \mathcal{M}_Y$.

Pelo ponto 3 do Teorema 3.5, tem-se

$$\mathcal{M}^*(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{M}_Y$$

donde

$$f^{-1}(\mathcal{M}^*(\mathcal{F})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{M}_Y) \subseteq \mathcal{M}^*(f^{-1}(\mathcal{F})),$$

provando o resultado. De reparar que a segunda inclusão é de fácil verificação uma vez que $A \in f^{-1}(\mathcal{M}_Y)$ implica que existe $B \in \mathcal{M}_Y$ tal que $A = f^{-1}(B)$, e como $B \in \mathcal{M}_Y$, então $A = f^{-1}(B) \in \mathcal{M}^*(f^{-1}(\mathcal{F}))$. $\square$

3.2 Funções mensuráveis

Nesta secção introduz-se a noção de função mensurável a demonstram-se as suas propriedades base. Especial atenção será dada às funções reais, ou mais geralmente, às funções com imagens em $\overline{\mathbb{R}}$.

Abusando do paralelismo, pode-se dizer que as funções mensuráveis estão para os espaços mensuráveis, assim como as funções contínuas estão para os espaços topológicos.

O estudo inicia-se com a introdução da definição.

Definição 3.8. *Sejam $(X, \mathcal{M}_X)$ e $(Y, \mathcal{M}_Y)$ dois espaços mensuráveis e $f : X \rightarrow Y$ uma função.*

A função f diz-se mensurável se

$$\forall B \in \mathcal{M}_Y, f^{-1}(B) \in \mathcal{M}_X.$$

Nota 3.2 De notar que, independentemente de qual seja a σ -álgebra definida em Y , se em X estiver definida a σ -álgebra grosseira, então qualquer função $f : X \rightarrow Y$ é mensurável, ao passo que se em X estiver definida a σ -álgebra trivial então só as funções $f : X \rightarrow Y$ constantes é que são mensuráveis. Efectivamente, toda a função constante definida entre espaços mensuráveis é uma função mensurável (verifique).

O resultado que se segue garante que a composta de funções mensuráveis é sempre uma função mensurável.

Teorema 3.10. *Sejam $(X, \mathcal{M}_X)$, $(Y, \mathcal{M}_Y)$ e $(Z, \mathcal{M}_Z)$ espaços mensuráveis e $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ funções mensuráveis.*

Então $g \circ f : X \rightarrow Z$ é mensurável.

Demonstração. Seja $B \in \mathcal{M}_Z$. Sendo g uma função mensurável, então $g^{-1}(B) \in \mathcal{M}_Y$ e, uma vez que f é também uma função mensurável, obtém-se que $f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{M}_X$. Como $f^{-1}(g^{-1}(B)) = (g \circ f)^{-1}(B)$, a prova está concluída. $\square$

O teorema seguinte apresenta uma caracterização das funções mensuráveis que, no conjunto de chegada, está definido uma σ -álgebra gerada.

Teorema 3.11. *Sejam $(X, \mathcal{M}_X)$ um espaço mensurável, $f : X \rightarrow Y$ uma função e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(Y)$. Considerando o espaço mensurável $(Y, \mathcal{M}^*(\mathcal{F}))$, tem-se*

$$(f \text{ mensurável}) \Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{F}, f^{-1}(A) \in \mathcal{M}_X).$$

Demonstração. Assumindo que f é um função mensurável e sabendo que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}^*(\mathcal{F})$, da Definição 3.8 imediatamente se conclui que $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}_X$ para qualquer $A \in \mathcal{F}$.

Na implicação contrária, a hipótese pode ser traduzida por

$$f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{M}_X.$$

Consequentemente, do ponto 3. do Teorema 3.5, obtém-se

$$\mathcal{M}^*(f^{-1}(\mathcal{F})) \subseteq \mathcal{M}_X$$

e pelo Teorema 3.9 conclui-se que

$$f^{-1}(\mathcal{M}^*(\mathcal{F})) = \mathcal{M}^*(f^{-1}(\mathcal{F})) \subseteq \mathcal{M}_X.$$

Mas a inclusão anterior diz que para qualquer $V \in \mathcal{M}^*(\mathcal{F})$ tem-se $f^{-1}(V) \in \mathcal{M}_X$, ou seja, f é uma função mensurável. $\square$

O Teorema anterior permite simplificar a prova de que uma determinada função, f , é mensurável, nos casos em que no conjunto de chegada está definido um espaço mensurável com uma σ -álgebra gerada. Efectivamente, este teorema afirma que é suficiente apenas testar a mensurabilidade da imagem recíproca dos conjuntos que geram a σ -álgebra em lugar de testar a mensurabilidade da imagem recíproca de todos os conjuntos da σ -álgebra gerada.

O resultado que se segue ilustra bem esta situação pois, para obter a mensurabilidade da função, testa-se apenas a mensurabilidade da imagem recíproca dos abertos.

Teorema 3.12. *Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Considerem-se no domínio de f um espaço mensurável $(X, \mathcal{M}_X)$ tal que $\mathcal{B}(\mathcal{T}_X) \subseteq \mathcal{M}_X$, e no conjunto de chegada de f o correspondente espaço de Borel $(Y, \mathcal{B}(\mathcal{T}_Y))$.*

Se f é uma função contínua, então f é uma função mensurável.

Demonstração. Suponha-se que f é contínua. A σ -álgebra em Y é $\mathcal{B}(\mathcal{T}_Y)$, isto é a σ -álgebra gerada pelos conjuntos abertos em Y . Pelo Teorema 3.11, para provar que f é mensurável, é suficiente mostrar que

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{M}_X, \quad \forall A \in \mathcal{T}_Y.$$

Seja $A \in \mathcal{T}_Y$. Sendo f contínua, Definição 2.5, tem-se que $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$, pela definição de σ -álgebra de Borel, tem-se $\mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{T}_X)$ e por hipótese $\mathcal{B}(\mathcal{T}_X) \subseteq \mathcal{M}_X$. Consequentemente $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}_X$ o que conclui a prova. $\square$

O implicação recíproca do Teorema 3.12 é falsa. Por exemplo, considerando o espaço topológico euclidiano $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ e a função

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases},$$

em que no domínio se considera a σ -álgebra grosseira e no conjunto de chegada a σ -álgebra de Borel, $\mathcal{B}(\mathcal{E})$, tem-se que f é mensurável mas não é contínua.

Teorema 3.13. *Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável, $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\mathcal{T}_{\overline{d}}))$ o espaço de Borel em que $\mathcal{T}_{\overline{d}}$ é a topologia em $\overline{\mathbb{R}}$ induzida pela métrica $\overline{d}$ definida por (2.4), e $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função.*

Se $f^{-1}(] \alpha, \infty]) \in \mathcal{M}$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, então f é mensurável.

Demonstração. Uma vez que no conjunto de chegada se considera a σ -álgebra de Borel, então, pelo Teorema 3.11, é suficiente verificar que

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{M}, \forall V \in \mathcal{T}_{\overline{d}}$$

para concluir que f é mensurável.

Seja $V \in \mathcal{T}_{\overline{d}}$. Pelo Teorema 2.7, existe $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucessão em $\mathcal{A}$, definida em (2.5), tal que

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Consequentemente

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n),$$

pelo que é suficiente provar que

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{M}, \forall A \in \mathcal{A},$$

onde $\mathcal{A} = \{]a, b[, [-\infty, a[,]a, \infty], \overline{\mathbb{R}} : a, b \in \overline{\mathbb{R}} \text{ com } a < b\}$.

Considerando $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, com $a \leq b$, tem-se:

1. $f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) = X \in \mathcal{M}$, pois $\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra;
2. Se $a \in \mathbb{R}$, então $f^{-1}(]a, \infty]) \in \mathcal{M}$, por hipótese.

Se $a = -\infty$, então $f^{-1}(]-\infty, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(]-n, \infty]) \in \mathcal{M}$, pela hipótese e pelo facto de $\mathcal{M}$ ser uma σ -álgebra;

3. Considere-se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão crescente tal que $\lim_n a_n = a$ em $\overline{\mathbb{R}}$. Tem-se,

$$\begin{aligned} f^{-1}(]-\infty, a[) &= X \setminus f^{-1}([a, \infty]) = X \setminus f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}]a_n, \infty]\right) \\ &= X \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(]a_n, \infty])\right) \in \mathcal{M}, \end{aligned}$$

pelo ponto anterior, pelo Teorema 3.1 e porque $\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra;

4. Tem-se $f^{-1}(]a, b[) = f^{-1}([-\infty, b[) \cap f^{-1}(]a, \infty]) \in \mathcal{M}$, pelo dois pontos anteriores, pelo Teorema 3.1 e porque $\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra.

□

Em seguida apresenta-se um resultado que permitirá concluir que a soma, o produto e o quociente de funções reais mensuráveis é uma função mensurável.

Teorema 3.14. *Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções mensuráveis, considerando em $\mathbb{R}$ a σ -álgebra de Borel.*

Se $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então a função $h : X \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = H(f_1(x), f_2(x))$, é uma função mensurável.

Demonstração. Observando que $h = H \circ f$, com $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, e que a H é mensurável, porque é contínua (Teorema 3.12), pelo Teorema 3.10 conclui-se que é suficiente demonstrar que f é uma função mensurável.

Pelo Teorema 3.11, é suficiente demonstrar que, para qualquer conjunto aberto $V \in \mathbb{R}^2$ se tem

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{M}.$$

Primeiro, assumamos que V é um rectângulo aberto em $\mathbb{R}^2$, denotando $R = V$. Assim sendo, $R = I_1 \times I_2$, com I_1 e I_2 intervalos abertos e limitados em $\mathbb{R}$, e

$$\begin{aligned} f^{-1}(R) &= \{x \in X : f(x) \in R\} = \{x \in X : (f_1(x), f_2(x)) \in I_1 \times I_2\} \\ &= f_1^{-1}(I_1) \cap f_2^{-1}(I_2) \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

porque as funções f_1 e f_2 são mensuráveis e $\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra. Finalmente, considerando V um qualquer aberto em $\mathbb{R}^2$, pelo Teorema 2.5 existe $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de rectângulos abertos em $\mathbb{R}^2$ tal que

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n.$$

Consequentemente,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(R_n) \in \mathcal{M},$$

por definição de σ -álgebra.

□

Nota 3.3 O Teorema 3.14 continua válido se em lugar do espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ e o correspondente espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathcal{E}))$, foram colocados o espaço topológico $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{\overline{d}})$ e o correspondente espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathcal{T}_{\overline{d}}))$, respectivamente.

Como consequência do Teorema 3.14 e da Nota anterior, obtém-se o corolário que se segue, cuja prova é deixada como exercício ao leitor.

Corolário 3.15. *Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável.*

1. *Se $f, g \in F(X, \mathbb{R})$ (ou pertencentes a $F(X, \overline{\mathbb{R}})$) são funções mensuráveis, então cada uma das funções da Definição 1.5 é uma função mensurável;*
2. *Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções mensuráveis em $F(X, \mathbb{R})$ (ou em $F(X, \overline{\mathbb{R}})$), então cada uma das funções da Definição 1.6 são funções mensuráveis;*
3. *Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções mensuráveis em $F(X, \mathbb{R})$ (ou em $F(X, \overline{\mathbb{R}})$) pontualmente convergente para $f \in F(X, \mathbb{R})$ (ou $f \in F(X, \overline{\mathbb{R}})$), então a função f é mensurável.*

Demonstração. A maior parte da prova deste corolário é deixada como exercício ao leitor. No entanto, a título de exemplo, é aqui apresentada a prova de que as funções máximo, sup, inf, lim sup e lim inf são mensuráveis. Para a prova do ponto 3. observe que esta é uma consequência imediata do ponto 2., da Nota 1.1 e do Teorema 1.4.

Prove-se então que a função máximo é mensurável.

Sejam $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ duas funções mensuráveis.

Definindo a função $H : \overline{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ por $H(a, b) = \max\{a, b\}$, tem-se que H é contínua. Pelo Teorema 3.14 e pela Nota 3.3, conclui-se que a função máximo $\max\{f, g\} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável.

$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & \max\{f(x), g(x)\} \end{array}$$

Prove-se agora que as funções supremo e ínfimo de um conjunto de funções mensuráveis são mensuráveis. A prova de que a função supremo é mensurável faz-se pela aplicação do Teorema 3.13.

Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis em $F(X, \overline{\mathbb{R}})$. Considere-se a função $g = \sup_n f_n$, isto é

$$\begin{array}{ccc} g = \sup_n f_n : & X & \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ & x & \mapsto \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \end{array} .$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$\begin{aligned} g^{-1}([\alpha, \infty]) &= \{x \in X : g(x) > \alpha\} = \left\{x \in X : \left(\sup_n f_n\right)(x) > \alpha\right\} \\ &= \{x \in X : \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} > \alpha\} \\ &= \{x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N} : f_n(x) > \alpha\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > \alpha\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([\alpha, \infty]), \end{aligned}$$

donde se conclui que $g^{-1}(] \alpha, \infty]) \in \mathcal{M}$ porque $\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra e $f_n^{-1}(] \alpha, \infty]) \in \mathcal{M}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois f_n são mensuráveis.

Observando que $\inf_n f_n = -\sup_n (-f_n)$, imediatamente se conclui que a função ínfimo de um conjunto de funções mensuráveis é mensurável tendo em consideração que: o supremo é uma função mensurável; as funções constantes são mensuráveis (Nota 3.2); e o produto de funções mensuráveis é mensurável (proposta de exercício no ponto 1.).

Finalmente, observando a Nota 1.1, conclui-se que

$$\limsup_n f_n = \inf_{n \geq 1} \left(\sup_{k \geq n} f_k \right) \quad \text{e} \quad \liminf_n f_n = \sup_{n \geq 1} \left(\inf_{k \geq n} f_k \right),$$

donde se conclui que as funções $\limsup_n f_n$ e $\liminf_n f_n$ são mensuráveis porque as funções supremo e ínfimo de um conjunto de funções mensuráveis são mensuráveis. $\square$

As funções simples desempenham um papel fundamental na teoria de integração. Em (1.4) observou-se que qualquer função simples, s , assume a forma $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, com $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$. O resultado que se segue garante que, num espaço mensurável, s é mensurável se e só se cada A_i é um conjunto mensurável.

Teorema 3.16. *Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável.*

Uma função simples $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável se e só se a imagem recíproca de cada uma das suas imagens for um conjunto mensurável em X .

Demonstração. Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função simples. Por (1.4), a função s pode ser escrita na forma

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i},$$

com $s(X) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ e $A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$.

Assuma-se que s é uma função mensurável. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, tem-se que o conjunto singular $\{\alpha_i\}$ é fechado e, pelo Teorema 3.6, obtém-se que $\{\alpha_i\}$ é um conjunto mensurável. Sendo s uma função mensurável, por definição, conclui-se que $A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$ é um conjunto mensurável para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Assume-se agora que $A_i \in \mathcal{M}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Para demonstrar que s é uma função mensurável, usa-se o Teorema 3.13. Fixando $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrariamente e definindo $I_\alpha = \{i \in \{1, \dots, n\} : \alpha_i > \alpha\}$ tem-se

$$s^{-1}(] \alpha, \infty]) = \{\alpha_i : \alpha_i > \alpha\} = \bigcup_{i \in I_\alpha} A_i,$$

que é uma união finita de conjuntos mensuráveis. Consequentemente, por definição de σ -álgebra, obtém-se $s^{-1}(] \alpha, \infty[) \in \mathcal{M}$ e assim s é mensurável. $\square$

Segue-se um teorema essencial na teoria de integração, pois este permite concluir que as funções reais mensuráveis são limite pontual de sucessão de funções simples mensuráveis.

Teorema 3.17. *Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e $f : X \rightarrow [0, \infty]$ uma função mensurável.*

Então existe $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucessão de funções simples mensuráveis, $s_n : X \rightarrow [0, \infty]$, tais que

$$(a) \quad 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots \leq f;$$

$$(b) \quad \lim_n s_n(x) = f(x), \forall x \in X \text{ (convergência pontual).}$$

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$. Dado $t \in [0, \infty]$, existe um único número inteiro não negativo, $k_n(t) \in \mathbb{N}_0$, tal que

$$\frac{k_n(t)}{2^n} \leq t < \frac{k_n(t) + 1}{2^n}. \quad (3.4)$$

Defina-se a função

$$\begin{aligned} \varphi_n : [0, \infty] &\longrightarrow [0, \infty[\\ t &\longmapsto \begin{cases} \frac{k_n(t)}{2^n}, & 0 \leq t < n \\ n, & n \leq t \leq \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Desta forma tem-se uma sucessão de funções $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com as seguintes propriedades:

1. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a função φ_n é simples e mensurável.

Verifique que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\varphi_n([0, \infty]) = \left\{ \frac{k}{2^n} : k = 0, 1, 2, \dots, 2^n n \right\},$$

logo a função φ_n é simples, e

$$\varphi_n^{-1} \left(\left\{ \frac{k}{2^n} \right\} \right) = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right], \forall k = 0, 1, 2, \dots, 2^n n - 1, \text{ e } \varphi_n^{-1}(\{n\}) = [n, \infty],$$

que são conjuntos de Borel em $[0, \infty]$, logo a função φ_n é mensurável;

2. Tem-se $0 \leq \varphi_1(t) \leq \varphi_2(t) \leq \dots \leq t, \forall t \in [0, \infty]$.

De facto, dados $t \in [0, \infty]$ e $n \in \mathbb{N}$, três casos podem ocorrer: $t < n$, $n \leq t < n+1$ ou $n+1 \leq t$. Caso $t < n$, por (3.4), obtém-se

$$t \in \left[\frac{k_n(t)}{2^n}, \frac{k_n(t)+1}{2^n} \right] = \left[\frac{2k_n(t)}{2^{n+1}}, \frac{2k_n(t)+1}{2^{n+1}} \right] \cup \left[\frac{2k_n(t)+1}{2^{n+1}}, \frac{2k_n(t)+2}{2^{n+1}} \right]$$

logo

$$\varphi_n(t) = \frac{k_n(t)}{2^n} \leq \varphi_{n+1}(t) = \frac{k_{n+1}(t)}{2^{n+1}} = \begin{cases} \frac{2k_n(t)}{2^{n+1}}, & t \in \left[\frac{2k_n(t)}{2^{n+1}}, \frac{2k_n(t)+1}{2^{n+1}} \right] \\ \frac{2k_n(t)+1}{2^{n+1}}, & t \in \left[\frac{2k_n(t)+1}{2^{n+1}}, \frac{2k_n(t)+2}{2^{n+1}} \right] \end{cases}.$$

Caso $n \leq t < n+1$, então $\varphi_n(t) = n \leq \frac{k_n(t)}{2^n} = \frac{2k_n(t)}{2^{n+1}} \leq \varphi_{n+1}(t)$;

Caso $n+1 \leq t$, então $\varphi_n(t) = n < n+1 = \varphi_{n+1}(t)$.

Consequentemente $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Trivialmente se verifica que $\varphi_n(t) \leq t$ para quaisquer $t \in [0, \infty]$ e $n \in \mathbb{N}$;

3. Tem-se $\varphi_n \xrightarrow{p} id_{[0, \infty]}$. Dado $t \in [0, \infty[$, por definição de $k_n(t)$, facilmente se conclui que $\lim_n \varphi_n(t) = \lim_n \frac{k_n(t)}{2^n} = t$. Para $t = \infty$ tem-se $\lim_n \varphi_n(\infty) = \lim_n n = \infty$.

Finalmente, considere-se a sucessão de funções, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definida por $s_n = \varphi_n \circ f$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 3.10, cada s_n é uma função mensurável e, uma vez que φ_n são funções simples, então cada s_n é também uma função simples.

Para $x \in X$, pelo ponto 2. acima tem-se

$$s_n(x) = \varphi_n(f(x)) \leq \varphi_{n+1}(f(x)) \leq f(x), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que prova o item (a) do Teorema.

Finalmente, do ponto 3. acima conclui-se que, para cada $x \in X$,

$$\lim_n s_n(x) = \lim_n \varphi_n(f(x)) = id_{[0, \infty]}(f(x)) = f(x),$$

o que prova o item (b) do Teorema. $\square$

Corolário 3.18. *Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável.*

Então existe $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucessão de funções simples mensuráveis, $s_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $s_n \xrightarrow{p} f$.

Demonstração. Seja $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável. Tem-se $f = f^+ - f^-$, em que $f^+ : X \rightarrow [0, \infty]$ é a função parte positiva de f e $f^- : X \rightarrow [0, \infty]$ é a função parte negativa de f . Pelo Corolário 3.15, conclui-se que quer f^+ , quer f^- são funções mensuráveis.

Como consequência do Teorema 3.17, existem $(s_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(s_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$ sucessões de funções, de X em $[0, \infty]$, simples mensuráveis e não negativas tais que $s_n^+ \xrightarrow{p} f^+$ e $s_n^- \xrightarrow{p} f^-$.

Defina-se, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $s_n = s_n^+ - s_n^-$ (verifique que a soma da função s_n^+ com $-s_n^-$ está bem definida). Consequentemente $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções simples, mensuráveis e, dado $x \in X$, tem-se

$$\lim_n s_n(x) = \lim_n (s_n^+(x) - s_n^-(x)) = f^+(x) - f^-(x) = f(x).$$

□

No último resultado deste capítulo, constroem-se conjuntos mensuráveis a partir de funções mensuráveis.

Teorema 3.19. *Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável, $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funções mensuráveis e $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Então são mensuráveis os seguintes conjuntos:

1. $\{x \in X : f(x) = g(x) + \alpha\};$
2. $\{x \in X : f(x) \neq g(x) + \alpha\};$
3. $\{x \in X : f(x) < g(x) + \alpha\};$
4. $\{x \in X : f(x) \leq g(x) + \alpha\};$
5. $\{x \in X : f(x) > g(x) + \alpha\};$
6. $\{x \in X : f(x) \geq g(x) + \alpha\}.$

Demonstração. A prova está apenas feita para os pontos 1. e 2.. Os restantes pontos são deixados como exercícios.

Ponto 1. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funções mensuráveis. Como qualquer função constante é mensurável, ver Nota 3.2, pelo Corolário 3.15 conclui-se que a função

$$\begin{aligned} F : X &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto f(x) - g(x) - \alpha \end{aligned}$$

é mensurável. Consequentemente $F^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{M}$ porque $\{0\}$ é um conjunto fechado, logo pertencente à σ -álgebra de Borel em $\overline{\mathbb{R}}$, (ver Teorema 3.6). Mas

$$\{x \in X : f(x) = g(x) + \alpha\} = \{x \in X : f(x) - g(x) - \alpha = 0\} = F^{-1}(\{0\}),$$

ou seja, $\{x \in X : f(x) = g(x) + \alpha\}$ é um conjunto mensurável.

Ponto 2. Uma vez que

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x) + \alpha\} = X \setminus \{x \in X : f(x) = g(x) + \alpha\},$$

pelo ponto 1. e pela definição de σ -álgebra conclui-se que o conjunto

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x) + \alpha\}$$

é mensurável. □

3.3 Exercícios

1. Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável.

Dados $A, B \in \mathcal{M}$, mostre que

- (a) $(A \setminus B) \in \mathcal{M}$;
- (b) $(A \triangle B) \in \mathcal{M}$.

2. Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável, $Y \subseteq X$ e $\mathcal{M}' = \{Y \cap A : A \in \mathcal{M}\}$.

Mostre que $(Y, \mathcal{M}')$ é um espaço mensurável.

3. Seja (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : F \text{ é fechado}\}$.

Mostre que $\mathcal{M}^*(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\tau)$, onde $\mathcal{B}(\tau)$ é a σ -álgebra de borel.

4. Sejam $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma partição de um conjunto X e

$$\mathcal{M} = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i : I \subseteq \mathbb{N} \right\}.$$

Mostre que $\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra em X .

5. Sejam $(X, \mathcal{M}_X)$ um espaço mensurável, Y um conjunto não vazio e $f : X \rightarrow Y$ uma função.

Mostre que

$$\mathcal{F} = \{f(A) : A \in \mathcal{M}_X\}$$

não é uma σ -álgebra em Y .

6. Sejam $X \neq \emptyset$ e $\mathcal{F} = \{\{x\} : x \in X\}$

- (a) Mostre que

$$\mathcal{M}^*(\mathcal{F}) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ é numerável ou } X \setminus A \text{ é numerável}\}$$

- (b) Considere, em cada uma das funções que se segue, o espaço de Borel $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ no conjunto de chegada e o espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$, com $\mathcal{M}$ a σ -álgebra da alínea anterior, no domínio.

Mostre que:

i. são mensuráveis as funções

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 3 \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} 3 & x \in \mathbb{Q} \\ -3 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} ;$$

ii. não são mensuráveis as funções

$$id: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} 3 & x \geq 0 \\ -3 & x < 0 \end{cases} .$$

7. Mostre que são mensuráveis todas as funções em escada, isto é, $f \in \mathcal{I}([a, b]; \mathbb{R})$, com $a < b$ números reais e os espaços de Borel em $[a, b]$ e em $\mathbb{R}$.

8. Sejam $(X, \mathcal{M}_X)$, $(Y, \mathcal{M}_Y)$ dois espaços mensuráveis e $f: X \rightarrow Y$ uma função constante.

Mostre que f é uma função mensurável.

9. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona. Mostre que f é mensurável.

10. Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável.

Mostre que uma função simples

$$s: X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}(x) \quad ,$$

com $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$ para $i = 1, \dots, n$, é mensurável se e só se $A_i \in \mathcal{M}$ para todo $i = 1, \dots, n$.

11. Mostre que são mensuráveis cada uma das seguintes funções:

$$(a) \quad \begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x t^2 dt ; \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{ccc} g : [0, +\infty] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sin x & x \in \mathbb{R} \\ 2 & x = +\infty \end{cases} ; \end{array}$$

$$(c) \quad \begin{array}{ccc} h : \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ +\infty & x \in \{-\infty, +\infty\} \end{cases} ; \end{array}$$

$$(d) \quad \begin{array}{ccc} l : \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ -\infty & x \in \{-\infty, +\infty\} \end{cases} ; \end{array}$$

12. Em [8], Walter Rudin define função mensurável da seguinte forma:

Dados $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável, $(Y, \mathcal{T})$ espaço topológico e $f : X \rightarrow Y$ uma função, diz-se que f é *mensurável* caso

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{M}, \quad \forall V \in \mathcal{T}.$$

Mostre que esta definição é equivalente à apresentada na Definição 3.8, quando em Y se considera a σ -álgebra de Borel.

13. Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ duas funções mensuráveis. Justifique que cada uma das seguintes funções é mensurável, caso esteja bem definida.

$$\begin{array}{lll} (a) \ f + g; & (c) \ fg; & (e) \ f^-; \\ (b) \ |f|^p, \text{ com } p \in \mathbb{R}; & (d) \ f^+; & (f) \ \frac{g}{f}. \end{array}$$

14. Considere o seguinte subconjunto do conjunto das parte de $\mathbb{R}$

$$\mathcal{M} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : X = (\mathbb{R} \setminus A) \cup B, \text{ com } A \in (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{\mathbb{R}\}) \text{ e } B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}.$$

- (a) Mostre que $\mathcal{M} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ e que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{M}$;
- (b) Mostre que $\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra em $\mathbb{R}$;

(c) Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas respectivamente por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ 0, & x \neq 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{2}x,$$

com $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ o espaço de Borel no conjunto de chegada e $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$ no domínio.

Mostre que f é uma função mensurável e que g não é uma função mensurável.

15. Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão funções mensuráveis de X em $\overline{\mathbb{R}}$.

(a) Mostre que cada uma das seguintes funções é mensurável:

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \left(\sup_n f_n \right); & \text{iii. } \left(\limsup_n f_n \right); \\ \text{ii. } \left(\inf_n f_n \right); & \text{iv. } \left(\liminf_n f_n \right); \end{array}$$

(b) Justifique que o limite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se existir, é uma função mensurável.

16. Tome em atenção o enunciado do Teorema 3.19.

(a) Demonstre os pontos 3., 4., 5. e 6. do Teorema 3.19.

(b) Mostre que os pontos 1. e 2. do Teorema 3.19 não são necessariamente verdade quando no conjunto de chegada está definido um espaço mensurável geral. Concretamente, apresente exemplos de espaços mensuráveis $(X, \mathcal{M}_X)$ e $(Y, \mathcal{M}_Y)$ e funções mensuráveis $f, g : X \rightarrow Y$ tais que

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

não é um conjunto mensurável.

Capítulo 4

Espaços de Medida

Neste capítulo procede-se à introdução de uma medida num espaço mensurável. Uma medida é uma função que, verificando os axiomas de medida, permite medir os conjuntos mensuráveis que compõem a σ -álgebra do espaço mensurável.

4.1 Medida

A ideia que norteia a definição de medida é a de que a medida do todo corresponde à soma da medida das partes. Esta ideia encontra-se formalizada na definição de medida que aqui se apresenta.

Definição 4.1. *Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável.*

Designa-se por medida em $(X, \mathcal{M})$, uma função

$$\begin{array}{ccc} \mu: \mathcal{M} & \longrightarrow & [0, \infty] \\ A & \mapsto & \mu(A) \end{array}$$

que verifica os seguintes axiomas:

- (a) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (b) *Para qualquer sucessão $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}$, com $A_n \cap A_m = \emptyset$ para $n \neq m$, tem-se*

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (\sigma\text{-aditividade}). \quad (4.1)$$

Alguma notação usual na teoria da medida é apresentada abaixo.

- Uma medida μ , num espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$, diz-se finita se $\mu(X) < \infty$.

- Uma medida μ , num espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$, diz-se σ -finita se existe uma sucessão $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}$ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{e} \quad \mu(A_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

- Sendo $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e μ uma medida nele definida, designa-se por espaço de medida o terno $(X, \mathcal{M}, \mu)$.
- Dado $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $A \in \mathcal{M}$, designa-se por medida de A a imagem de A por μ , isto é $\mu(A)$.
- Um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ designa-se por espaço de probabilidade caso $\mu(X) = 1$.

Alguns exemplos de medida, cuja verificação dos axiomas (a) e (b) da Definição 4.1 são deixadas ao leitor, são apresentados de seguida.

Num qualquer espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$, é sempre possível definir:

1. a medida nula

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{M} &\longrightarrow [0, \infty] \\ A &\mapsto \mu(A) = 0 \end{aligned} ;$$

2. a medida grosseira

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{M} &\longrightarrow [0, \infty] \\ A &\mapsto \mu(A) = \infty \end{aligned} ;$$

3. a medida δ -Dirac

$$\begin{aligned} \delta_a : \mathcal{M} &\longrightarrow [0, \infty] \\ A &\mapsto \begin{cases} 0, & a \notin A \\ 1, & a \in A \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

em que $a \in X$;

4. a medida de contagem

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{M} &\longrightarrow [0, \infty] \\ A &\mapsto \begin{cases} \#A, & A \text{ é finito} \\ \infty, & A \text{ é infinito} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

A medida de Lebesgue, m , que permite medir subconjuntos de $\mathbb{R}^k$ de uma forma tal, que os rectângulos abertos, $R \subseteq \mathbb{R}^k$ da Definição 2.11, são medidos da forma esperada, $m(R) = \prod_{i=1}^k (b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_k - a_k)$, será apresentada posteriormente.

No próximo resultado descrevem-se importantes propriedades verificadas pelas medidas, cuja prova surge de forma natural dos axiomas de medida.

Teorema 4.1. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida.*

Então

1. Se $m \in \mathbb{N}$ e $(A_n)_{n \in \{1, \dots, m\}}$ uma colecção em $\mathcal{M}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_m) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_m);$$

2. Se $A, B \in \mathcal{M}$ tais que $A \subseteq B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$;
3. Se $A, B \in \mathcal{M}$ tais que $A \subseteq B$ e $\mu(A) < \infty$, então $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;

4. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão em $\mathcal{M}$ tal que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ e $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, então

$$\lim_n \mu(A_n) = \mu(A);$$

5. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão em $\mathcal{M}$ tal que $\cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots \subseteq A_2 \subseteq A_1$, $\mu(A_1) < \infty$ e $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, então

$$\lim_n \mu(A_n) = \mu(A);$$

6. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão em $\mathcal{M}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \quad (\text{subaditividade da medida}).$$

Demonstração. A prova de cada ponto do teorema é apresentada abaixo:

1. O primeiro ponto é trivial, uma vez que basta considerar no axioma da σ -aditividade de Definição 4.1

$$A_{m+1} = A_{m+2} = A_{m+3} = \cdots = \emptyset;$$

2. Uma vez que $B = A \cup (B \setminus A)$ e $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, pelo ponto 1. e por μ ser medida, tem-se

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A);$$

3. Desenvolvendo o mesmo raciocínio do ponto 2., obtém-se

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

Uma vez que $\mu(A) < \infty$ (necessário devido à aritmética definida em $\overline{\mathbb{R}}$), então

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \Leftrightarrow \mu(B) - \mu(A) = \mu(A) - \mu(A) + \mu(B \setminus A),$$

donde se obtém

$$\mu(B) - \mu(A) = \mu(B \setminus A).$$

4. Considere-se a sucessão $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}$ definida por

$$B_n = \begin{cases} A_1, & n = 1 \\ A_n \setminus A_{n-1}, & n > 1 \end{cases}.$$

Como por hipótese se tem $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$, então $B_j \cap B_i = \emptyset$, para $j \neq i$, $A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Efectivamente:

(a) Assumindo $j > i$, das propriedades da teoria de conjuntos, tem-se

$$B_j \cap B_i = (A_j \setminus A_{j-1}) \cap (A_i \setminus A_{i-1}) = (A_j \cap A_i) \setminus (A_{j-1} \cup A_{i-1})$$

e da hipótese ($j > i \Rightarrow j - 1 \geq i$) vem

$$B_j \cap B_i = (A_j \cap A_i) \setminus (A_{j-1} \cup A_{i-1}) = A_i \setminus A_{j-1} = \emptyset;$$

(b) Como $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$, então, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A_n &= (A_n \setminus A_{n-1}) \cup A_{n-1} \\ &= (A_n \setminus A_{n-1}) \cup (A_{n-1} \setminus A_{n-2}) \cup A_{n-2} \\ &= (A_n \setminus A_{n-1}) \cup (A_{n-1} \setminus A_{n-2}) \cup \dots \cup (A_2 \setminus A_1) \cup A_1 \\ &= B_n \cup \dots \cup B_1; \end{aligned}$$

(c) Tem-se $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cup \dots \cup B_1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Pelas propriedades da sucessão $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}$, pela σ -aditividade da medida e pelo ponto 1., obtém-se

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_n \sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \lim_n \mu(B_1 \cup \dots \cup B_n) = \lim_n \mu(A_n).$$

5. Considere-se a sucessão $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}$ definida por

$$C_n = A_1 \setminus A_n.$$

Como por hipótese se tem $\cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots \subseteq A_2 \subseteq A_1$, tem-se

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots \subseteq C_n \subseteq \cdots \quad (4.5)$$

e

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = A_1 \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = A_1 \setminus A. \quad (4.6)$$

Por outro lado, por (4.5), (4.6) e pelo ponto 4. acima tem-se

$$\lim_n \mu(C_n) = \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right) = \mu(A_1 \setminus A). \quad (4.7)$$

Por um lado, como $\mu(A_1) < \infty$, o ponto 3. acima garante que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu(C_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$, donde

$$\lim_n \mu(C_n) = \lim_n (\mu(A_1) - \mu(A_n)) = \mu(A_1) - \lim_n \mu(A_n) \quad (4.8)$$

Finalmente, por (4.7) e por (4.8), conclui-se que

$$\mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \lim_n \mu(A_n)$$

e mais uma vez pelo ponto 3. acima, tem-se

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1) - \lim_n \mu(A_n),$$

donde $(\mu(A_1) < \infty)$,

$$\lim_n \mu(A_n) = \mu(A).$$

6. Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucessão em $\mathcal{M}$. Definindo a sucessão em $\mathcal{M}$, $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$, por

$$B_m = \bigcup_{n=1}^m A_n,$$

facilmente se verifica que $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_m \subseteq \cdots$ e

$$B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Por indução sobre m , mostra-se que $\mu(B_m) \leq \sum_{n=1}^m \mu(A_n)$ para todo $m \in \mathbb{N}$.
Efectivamente:

- $\mu(B_1) = \mu(A_1)$;
- Assumindo que $\mu(B_{m-1}) \leq \sum_{n=1}^{m-1} \mu(A_n)$, pelos pontos 1. e 2. acima, tem-se

$$\begin{aligned}
 \mu(B_m) &= \mu(B_{m-1} \cup A_m) = \mu(B_{m-1} \cup (A_m \setminus B_{m-1})) \\
 &= \mu(B_{m-1}) + \mu(A_m \setminus B_{m-1}) \leq \mu(B_{m-1}) + \mu(A_m) \\
 &\leq \left(\sum_{n=1}^{m-1} \mu(A_n) \right) + \mu(A_m) = \sum_{n=1}^m \mu(A_n).
 \end{aligned}$$

Pelo ponto 4. acima obtém-se

$$\begin{aligned}
 \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m\right) = \lim_m \mu(B_m) \leq \lim_m \left(\sum_{n=1}^m \mu(A_n)\right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).
 \end{aligned}$$

□

Nota 4.1 Efectivamente, a condição $\mu(A_1) < \infty$ que é imposta no ponto 5. do Teorema 4.1 não pode ser retirada. Atenda ao exemplo seguinte.

Exemplo 4.1 Considere-se o espaço de medida de contagem $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ou seja, a medida μ está definida em (4.4) com $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Considerando a sucessão $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $A_n = \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\dots \subseteq A_n \subseteq \dots \subseteq A_2 \subseteq A_1$$

e

$$\mu(A_n) = \mu(\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n\}) = \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde

$$\lim_n \mu(A_n) = \infty \neq 0 = \mu(\emptyset) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n\})\right) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right).$$

4.2 Conjuntos de medida nula

Esta pequena secção está reservada para apresentar algumas noções envolvendo conjuntos de medida nula. Parece um paradoxo, mas a importância dos conjuntos de medida nula reside na insignificância da sua medida, zero.

Definição 4.2. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida.*

Um conjunto $A \in \mathcal{M}$ diz-se que tem medida nula se $\mu(A) = 0$.

O primeiro resultado sobre conjuntos de medida nula estabelece que a união numerável de conjuntos de medida nula tem medida nula.

Teorema 4.2. *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em $\mathcal{M}$.*

Se $\mu(A_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = 0.$$

Demonstração. Consequência imediata do ponto 6. do Teorema 4.1. $\square$

Os conjuntos de medida nula, desempenham um papel importante na teoria de integração pois, como se verá, estes permitem alterar o domínio de integração de uma função mensurável sem modificar o valor do seu integral de Lebesgue. Contudo é relevante notar que, num espaço de medida, nem todo o subconjunto de um conjunto de medida nula é mensurável e como tal não pode ser medido. O simples exemplo seguinte ilustra a situação descrita:

Exemplo 4.2 Considere-se o espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \delta_4)$ onde $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{M} = \{X, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \emptyset\}$ e δ_4 a medida de Dirac

$$\begin{aligned} \delta_4 : \mathcal{M} &\longrightarrow [0, \infty] \\ A &\mapsto \begin{cases} 0, & 4 \notin A \\ 1, & 4 \in A \end{cases} . \end{aligned}$$

Observe-se que $\{1, 2\}$ é um conjunto de medida nula, pois $\delta_4(\{1, 2\}) = 0$, $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$, mas o conjunto $\{1\}$ não é mensurável pois $\{1\} \notin \mathcal{M}$.

Os espaços de medidas em que todos os subconjuntos da medida nula são conjuntos mensuráveis dizem-se completos. Esta noção formaliza-se da forma que se segue.

Definição 4.3. *Um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ diz-se espaço de medida completo se*

$$\forall E \in \mathcal{M}, \forall A \in \mathcal{P}(X) : (A \subseteq E \text{ e } \mu(E) = 0) \Rightarrow A \in \mathcal{M}.$$

Num espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ podem existir proposições, $P(x)$, verdadeiras para todo $x \in X$. No entanto, pode também existir alguma proposição, $Q(x)$, que, não sendo verdadeira para todo o $x \in X$, pode ser verdadeira para

todo o $x \in X \setminus N$, em que $N \in \mathcal{M}$ é um conjunto de nula, ou seja, $Q(x)$ é falsa apenas para um conjunto de elementos com medida nula. Neste caso é usual afirmar que $Q(x)$ é válida em quase toda a parte do espaço X .

Definição 4.4. *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $E \in \mathcal{M}$.*

Uma proposição $P(x)$ sobre todos os elementos $x \in X$ diz-se válida quase por toda a parte de E (q.t.p.) se existe $N \in \mathcal{M}$ tal que $N \subseteq E$, $\mu(N) = 0$ e

$$P(x) \text{ é verdadeira, } \forall x \in E \setminus N.$$

Exemplo 4.3 Sejam $(X, \mathcal{M}_X, \mu)$ um espaço de medida e $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ duas funções mensuráveis.

As funções f e g são iguais q.t.p. em X se o conjunto dos objectos cujas imagens por f e por g são diferentes tem medida nula, ou seja

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Note que, pelo Teorema 3.19, tem-se $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{M}_X$ porque f e g são funções mensuráveis.

A relação “ $f = g$ q.t.p. em X ”, denotada por $f \sim g$, é uma relação de equilavência no conjunto das funções mensuráveis de X em Y .

Teorema 4.3. *Seja Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida completo, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$) uma função mensurável e $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$) uma função.*

Se $f = g$ q.t.p. em X , então g é uma função mensurável.

Demonstração. Pelo Teorema 3.13, é suficiente mostrar que $g^{-1}(] \alpha, \infty]) \in \mathcal{M}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Por hipótese $f = g$ q.t.p. em X , logo existe $N \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(N) = 0$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X \setminus N$.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$\begin{aligned} g^{-1}(] \alpha, \infty]) &= (g^{-1}(] \alpha, \infty]) \setminus N) \cup (g^{-1}(] \alpha, \infty]) \cap N) \\ &= (f^{-1}(] \alpha, \infty]) \setminus N) \cup (g^{-1}(] \alpha, \infty]) \cap N) \end{aligned}$$

Por um lado, sendo f mensurável, então $f^{-1}(] \alpha, \infty]) \in \mathcal{M}$ e, sendo $\mathcal{M}$ uma σ -álgebra, tem-se $(f^{-1}(] \alpha, \infty]) \setminus N) \in \mathcal{M}$. Por outro lado, sendo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida completo e $N \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(N) = 0$, então $(g^{-1}(] \alpha, \infty]) \cap N) \in \mathcal{M}$ porque $(g^{-1}(] \alpha, \infty]) \cap N) \subseteq N$.

Finalmente, sendo $\mathcal{M}$ uma σ -álgebra, conclui-se que $g^{-1}(] \alpha, \infty]) \in \mathcal{M}$. $\square$

No ponto 3. do Corolário 3.15, verificou-se que o limite pontual de uma sucessão de funções mensuráveis é uma função mensurável. No entanto, se a

convergência pontual de uma sucessão de funções mensuráveis for q.t.p., então não há a garantia que a função limite seja mensurável. Ou seja, se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em $F(X, \mathbb{R})$ e $f \in F(X, \mathbb{R})$ tais que $f_n \xrightarrow{p} f$ q.t.p. em X , então f pode não ser mensurável. Formalmente, $f_n \xrightarrow{p} f$ q.t.p. em X significa que existe $N \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(N) = 0$ e

$$\lim_n f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in X \setminus N.$$

Exemplo 4.4 Considere o espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \delta_4)$ apresentado no Exemplo 4.2, a sucessão de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{aligned} f_n: X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1, & x \in \{3, 4\} \\ (-1)^n, & x \in \{1, 2\} \end{cases} \end{aligned}$$

e a função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{2, 3, 4\} \\ -1, & x = 1 \end{cases}$$

Facilmente se verifica, usando o Teorema 3.13, que f não é mensurável e f_n é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$. Mais, considerando $N = \{1, 2\} \in \mathcal{M}$ tem-se $\delta_4(N) = 0$ e

$$\lim_n f_n(x) = 1 = f(x), \quad \forall x \in \{3, 4\} = X \setminus N.$$

Ou seja, $f_n \xrightarrow{p} f$ q.t.p. em X , com f_n todas mensuráveis, mas f não é mensurável.

O limite pontual q.t.p. de uma sucessão de funções mensuráveis é uma função mensurável sempre que no domínio das funções se considera um espaço de medida completo.

Teorema 4.4. *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida completo, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções de X em $\mathbb{R}$ (ou em $\overline{\mathbb{R}}$) e f uma função de X em $\mathbb{R}$ (ou em $\overline{\mathbb{R}}$).*

Se $f_n \xrightarrow{p} f$ q.t.p. em X , então f é mensurável.

Demonstração. Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções de X em $\overline{\mathbb{R}}$ e f uma função de X em $\overline{\mathbb{R}}$ tais que

$$f_n \xrightarrow{p} f \text{ q.t.p. em } X.$$

Por definição, existe $N \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(N) = 0$ e

$$\lim_n f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in X \setminus N.$$

Por um lado, considerando a função $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$g(x) = \left(\limsup_n f_n \right) (x),$$

e uma vez que as funções f_n são mensuráveis, o ponto 2. do Corolário 3.15 garante que g é mensurável. Por outro lado, o Teorema 1.4 garante que

$$f(x) = \left(\limsup_n f_n \right) (x), \quad \forall x \in X \setminus N.$$

Como $\mu(N) = 0$, obtém-se que $f = g$ q.t.p. em X e, sendo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida completo, pelo Teorema 4.3 conclui-se que f é uma função mensurável. $\square$

4.3 Exercícios

1. Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável.

Mostre que são medidas:

- (a) a medida δ -Dirac apresentada em (4.3);
- (b) a medida de contagem apresentada em (4.4).

Capítulo 5

Integral de Lebesgue

Este capítulo é dedicado ao estudo do integral de Lebesgue e das suas propriedades mais gerais.

5.1 Integral de Lebesgue

Nesta secção introduz-se o integral de Lebesgue de funções reais mensuráveis definidas num espaço de medida. Inicialmente define-se integral de uma função simples mensurável, depois o integral de uma função mensurável não negativa e por último de uma qualquer função mensurável com valores em $\overline{\mathbb{R}}$. Relembra-se que a σ -álgebra considerada no conjunto de chegada das funções reais (ou com imagens em $\overline{\mathbb{R}}$) é a σ -álgebra de Borel.

Definição 5.1. *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $s : X \rightarrow [0, \infty[$ uma função simples.*

Por (1.4) e pelo Teorema 3.16, a função assume a forma

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i},$$

com $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, \infty[$ as imagens de s e $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$, em que $A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$, para $i = 1, \dots, n$.

Para cada $E \in \mathcal{M}$, define-se

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E). \quad (5.1)$$

Para cada $E \in \mathcal{M}$ e cada $f : X \rightarrow [0, \infty]$ mensurável, define-se

$$\int_E f \, d\mu = \sup \left\{ \int_E s \, d\mu \mid s : X \rightarrow [0, \infty[\text{ é função simples mensurável e } s \leq f \right\} \quad (5.2)$$

designando-se por integral de Lebesgue de f em E relativo à medida μ .

Observe que, na definição de integral de Lebesgue de uma função simples e mensurável, (5.1), poderá estar presente a operação $0 \cdot \infty = 0$ definida em $\overline{\mathbb{R}}$.

Nota 5.1 Qualquer subconjunto não vazio de $\overline{\mathbb{R}}$ possui supremo. Consequentemente, num espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, o integral de Lebesgue

$$\int_E f d\mu$$

existe sempre que $f : X \rightarrow [0, \infty]$ é mensurável e $E \subseteq X$ é um conjunto mensurável. Mais,

$$\int_E f d\mu \in [0, \infty].$$

Falta definir o integral de Lebesgue para funções reais mensuráveis com algumas das suas imagens negativas.

Definição 5.2. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida $E \in \mathcal{M}$ e $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável.

Define-se integral de Lebesgue de f em E por

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu,$$

desde que $\min \left\{ \int_E f^+ d\mu, \int_E f^- d\mu \right\} < \infty$, onde f^+ e f^- são respectivamente a parte positiva e a parte negativa da função f de acordo com a Definição 1.5.

Diz-se que f é uma função integrável à Lebesgue, ou simplesmente integrável, se

$$\int_X f d\mu \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.1 Considere-se o espaço de medida de contagem $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$. Uma vez que se está perante a σ -álgebra grosseira, qualquer função $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável. Ou seja, as sucessões reais são funções mensuráveis no espaço de medida aqui considerado. Para qualquer sucessão

$$\begin{array}{ccc} a : & \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n & \mapsto a_n \end{array}$$

tem-se

$$\begin{array}{ccc} a^+ : & \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0 \\ 0, & a_n < 0 \end{cases} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} a^- : & \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n^- = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0 \\ -a_n, & a_n < 0 \end{cases} \end{array}$$

e facilmente se obtém

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}} a^+ d\mu &= \sup \left\{ \int_{\mathbb{N}} s d\mu \mid s : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty[\text{ é função simples e } s \leq a^+ \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+.\end{aligned}$$

de forma análoga se tem $\int_{\mathbb{N}} a^- d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Consequentemente, o integral de Lebesgue de a está definido se pelo menos uma das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

for convergente, tendo-se

$$\int_{\mathbb{N}} a d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Finalmente, a função a é integrável à Lebesgue se e só se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for absolutamente convergente.

Segue-se a prova de algumas propriedades básicas do integral de Lebesgue.

Teorema 5.1. *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ duas funções mensuráveis. Então*

1. *Se $f \leq g$, então $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu, \forall E \in \mathcal{M}$;*
2. *Se $A \subseteq B$, com $A, B \in \mathcal{M}$, então $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$;*
3. *Se $E \in \mathcal{M}$ e $f(x) = 0, \forall x \in E$, então $\int_E f d\mu = 0$;*
4. *Se $c \in [0, \infty[$, então $\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu, \forall E \in \mathcal{M}$;*
5. *Se $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) = 0$, então $\int_E f d\mu = 0$;*
6. *$\forall E \in \mathcal{M}, \int_E f d\mu = \int_X \chi_E \cdot f d\mu$.*

Demonstração. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ duas funções mensuráveis.

1. Seja $E \in \mathcal{M}$. Como $f \leq g$, então o conjunto $\{\int_E s d\mu : s \text{ é simples mensurável e } s \leq f\}$ é um subconjunto de $\{\int_E s d\mu : s \text{ é simples, mensurável e } s \leq g\}$, donde

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &= \sup \left\{ \int_E s d\mu : s \text{ é simples mensurável e } s \leq f \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_E s d\mu : s \text{ é simples mensurável e } s \leq g \right\} \\ &= \int_E g d\mu. \end{aligned}$$

2. Sejam $A, B \in \mathcal{M}$ tais que $A \subseteq B$. Para qualquer função simples e mensurável $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, com $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, \infty[$ e $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$, da definição de integral (5.1) e das propriedades das medidas (ponto 2. do Teorema 4.1), conclui-se que

$$\int_A s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap A) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap B) = \int_B s d\mu.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \sup \left\{ \int_A s d\mu : s \text{ é simples mensurável e } s \leq f \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_B s d\mu : s \text{ é simples mensurável e } s \leq f \right\} \\ &= \int_B f d\mu. \end{aligned}$$

3. Seja $E \in \mathcal{M}$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in E$. Verifique-se primeiro que, para qualquer função simples e mensurável, s , tal que $s(x) = 0$ para todo $x \in E$, se tem $\int_E s d\mu = 0$. Sendo s uma função simples nas condições apresentadas, então s assume a forma $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, com $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, \infty[$ e $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ tais que $A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$, $i = 1, \dots, n$. Como $s(x) = 0$ para todo $x \in E$, então

$$E \subseteq s^{-1}(\{0\}) = \begin{cases} A_j, & \exists j \in \{1, \dots, n\} : \alpha_j = 0 \\ \emptyset, & 0 \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \end{cases},$$

donde $E \subseteq A_i$ caso $\alpha_i = 0$, e $E \cap A_i = \emptyset$ caso $\alpha_i \neq 0$. Consequentemente,

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E) = 0.$$

Finalmente, como $f(x) = 0$ para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned} \int_E f \, d\mu &= \sup \left\{ \int_E s \, d\mu : s \text{ é simples mensurável e } s \leq f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_E s \, d\mu : s \text{ é simples mensurável tal que } s \leq f \text{ e } s(x) = 0, \forall x \in E \right\} \\ &= \sup \{0\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

4. Sejam $E \in \mathcal{M}$ e $c \in [0, \infty[$.

Para qualquer função simples e mensurável $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, com $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, \infty[$ e $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$, da definição de integral (5.1), conclui-se que

$$c \int_E s \, d\mu = c \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^n c \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \int_E cs \, d\mu.$$

Se $c = 0$, então a situação é trivial pelo do ponto 3. acima.

Se $c > 0$, então, tendo em conta que o produto de uma constante com uma função simples e mensurável é ainda uma função simples e mensurável, tem-se

$$\begin{aligned} c \int_E f \, d\mu &= \sup \left\{ c \int_E s \, d\mu : s \text{ é simples mensurável e } s \leq f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_E cs \, d\mu : s \text{ é simples mensurável e } s \leq f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_E cs \, d\mu : s \text{ é simples mensurável e } cs \leq cf \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_E q \, d\mu : q \text{ é simples mensurável e } q \leq cf \right\} \\ &= \int_E cf \, d\mu. \end{aligned}$$

5. Seja $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) = 0$. Verifique-se primeiro que, para qualquer função simples e mensurável, s , se tem $\int_E s \, d\mu = 0$. Seja $s : X \rightarrow [0, \infty[$ uma função simples e mensurável. Por um lado, a função s assume a forma $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, com $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, \infty[$ e $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$, donde

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot 0 = 0. \quad (5.3)$$

Por outro lado $0 \leq s$ e, pelos pontos 1. e 3. acima, conclui-se que

$$0 = \int_E 0 \, d\mu \leq \int_E s \, d\mu. \quad (5.4)$$

Por (5.3) e por (5.4) obtém-se $\int_E s \, d\mu = 0$.

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_E f \, d\mu &= \sup \left\{ \int_E s \, d\mu : s \text{ é simples mensurável e } s \leq f \right\} \\ &= \sup \{0\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

6. Seja $E \in \mathcal{M}$. Verifique-se primeiro que, para qualquer função simples e mensurável, s , se tem $\int_E s \, d\mu = \int_X \chi_E \cdot s \, d\mu$. Seja $s : X \rightarrow [0, \infty[$ uma função simples e mensurável. A função s assume a forma $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, com $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, \infty[$ e $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$. Pela aritmética de funções, Definição 1.5, e pelo ponto 4. do Teorema 1.2, obtém-se

$$\chi_E \cdot s = \chi_E \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_E \cdot \chi_{A_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E \cap A_i},$$

ou seja, $\chi_E \cdot s$ é também uma função simples e mensurável, logo

$$\int_X \chi_E \cdot s \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \int_E s \, d\mu.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_X \chi_E f \, d\mu &= \sup \left\{ \int_X s \, d\mu : s \text{ é simples mensurável e } s \leq \chi_E f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_X s \, d\mu : s \text{ é simples mensurável, } s \leq f, s(x) = 0 \, \forall x \in E \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_X \chi_E s \, d\mu : s \text{ é simples mensurável, } s \leq f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_E s \, d\mu : s \text{ é simples mensurável e } s \leq f \right\} \\ &= \int_E f \, d\mu. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.2. *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ duas funções integráveis. Então*

1. Se $f \leq g$, então $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu, \forall E \in \mathcal{M}$;
2. Se $E \in \mathcal{M}$ e $f(x) = 0, \forall x \in E$, então $\int_E f d\mu = 0$;
3. Se $c \in \mathbb{R}$, então $\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu, \forall E \in \mathcal{M}$;
4. Se $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) = 0$, então $\int_E f d\mu = 0$;
5. $\forall E \in \mathcal{M}, \int_E f d\mu = \int_X \chi_E \cdot f d\mu$.

Demonstração. Sejam $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funções integráveis.

1. Se $f \leq g$, então, pelo ponto 1. do Teorema 1.1, tem-se $f^+ \leq g^+$ e $g^- \leq f^-$. Consequentemente pelas propriedades descritas no Teorema 5.1, conclui-se que, para qualquer $E \in \mathcal{M}$,

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \leq \int_E g^+ d\mu - \int_E g^- d\mu = \int_E g d\mu.$$

2. Dado $E \in \mathcal{M}$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in E$, tem-se, pelo ponto 3. do Teorema 5.1,

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu = 0 - 0 = 0.$$

3. Sejam $E \in \mathcal{M}$ e $c \in \mathbb{R}$.

Se $c \in [0, \infty[$, então, pelo ponto 4. do Teorema 5.1, tem-se

$$\begin{aligned} c \int_E f d\mu &= c \left(\int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \right) = \int_E cf^+ d\mu - \int_E cf^- d\mu \\ &= \int_E cf d\mu. \end{aligned}$$

No caso $c \in]-\infty, 0[$, prova-se primeiro que a função $-f$ é integrável, tendo-se

$$\int_E -f d\mu = - \int_E f d\mu.$$

Pelo ponto 2. do Teorema 1.1 tem-se $(-f)^+ = f^-$ e $f^+ = (-f)^-$, logo

$$\begin{aligned}\int_E -f \, d\mu &= \int_E (-f)^+ \, d\mu - \int_E (-f)^- \, d\mu = \int_E f^- \, d\mu - \int_E f^+ \, d\mu \\ &= -\left(\int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu\right) = -\int_E f \, d\mu,\end{aligned}$$

donde $-f$ é integrável.

Finalmente, sendo $c < 0$, então $-c > 0$, logo

$$c \int_E f \, d\mu = (-c) \left(-\int_E f \, d\mu\right) = (-c) \int_E -f \, d\mu = \int_E (-c)(-f) \, d\mu = \int_E cf \, d\mu.$$

4. Seja $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) = 0$. Pelo ponto 5. do Teorema 5.1 tem-se

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu = 0 - 0 = 0.$$

5. Seja $E \in \mathcal{M}$. Pelo ponto 6. do Teorema 5.1 e pelo ponto 6. do Teorema 1.2, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_E f \, d\mu &= \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu = \int_X \chi_E \cdot f^+ \, d\mu - \int_X \chi_E \cdot f^- \, d\mu \\ &= \int_X (\chi_E \cdot f)^+ \, d\mu - \int_X (\chi_E \cdot f)^- \, d\mu \\ &= \int_X \chi_E \cdot f \, d\mu.\end{aligned}$$

□

Teorema 5.3. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \rightarrow [0, \infty]$ uma função mensurável. Então*

$$\left(\int_X f \, d\mu = 0\right) \Leftrightarrow (f = 0 \text{ q.t.p. em } X).$$

Demonstração. Prove-se primeiro a condição necessária ($\Leftarrow$).

Assume-se que $f = 0$ q.t.p. em X , ou seja $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0$. Denote-se

$$N = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Seja $s : X \rightarrow [0, \infty[$ uma função simples e mensurável tal que $0 \leq s \leq f$ e escreva-se s na forma

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i},$$

com $A_i = s^{-1}(\alpha_i)$, $i = 1, \dots, n$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\alpha_i \neq 0$, a condição $0 \leq s \leq f$ implica que $A_i \subseteq N$, donde $\mu(A_i) = 0$. Com efeito, se $x \in A_i$, então

$$0 < \alpha_i = s(x) \leq f(x),$$

logo $f(x) \neq 0$, donde $x \in N$. Como $\mu(N) = 0$, pelas propriedades das medidas, pnto 2. do Teorema 4.1, obtém-se $0 \leq \mu(A_i) \leq \mu(N) = 0$.

Consequentemente

$$\int_X s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = 0,$$

logo, por definição de integral, tem-se

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &= \sup \left\{ \int_X s d\mu \mid s : X \rightarrow [0, \infty[\text{ é função simples mensurável e } s \leq f \right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Prove-se agora a condição suficiente ($\Rightarrow$).

Suponha-se que $\int_X f d\mu = 0$. Pelo Teorema 3.17, existe uma sucessão crescente $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples mensuráveis não negativas tal que $s_n \xrightarrow{p} f$. Assim $0 \leq s_n \leq f$, para todo $n \in \mathbb{N}$, logo

$$0 \leq \int_X s_n d\mu \leq \int_X f d\mu = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pelo ponto 1. do Teorema 5.2, e consequentemente

$$\int_X s_n d\mu = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Escrevendo cada uma das funções simples s_n como em (1.4),

$$s_n = \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i^{(n)} \chi_{A_i^{(n)}},$$

da definição de integral de uma função simples e mensurável, tem-se

$$0 = \int_X s_n d\mu = \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i^{(n)} \mu(A_i^{(n)}) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

logo,

$$\mu \left(\bigcup_{i \in I_n} A_i^{(n)} \right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (5.5)$$

onde $I_n = \{i \in \{1, \dots, m_n\} : \alpha_i^{(n)} \neq 0\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Defina-se

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{i \in I_n} A_i^{(n)} \right).$$

Por um lado, por (5.5) e pelo Teorema 4.2 tem-se $\mu(\mathcal{U}) = 0$.

Por outro lado, dado $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq 0$, e uma vez que $\lim_n s(x_0) = f(x_0) > 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_{n_0}(x_0) > 0$, donde $x_0 \in A_i^{(n_0)}$, para algum $i \in I_{n_0}$. e consequentemente $x_0 \in \mathcal{U}$.

Assim sendo

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} \subseteq \mathcal{U}$$

e $\mu(\mathcal{U}) = 0$, ou seja $f = 0$ q.t.p. em X . $\square$

À semelhança do que acontece com o integral de Riemann, espera-se também a linearidade do integral de Lebesgue no conjunto das funções integráveis à Lebesgue com domínio num dado espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$. Tendo em conta o ponto 3 do Teorema 5.2 falta verificar que a soma de funções integrais é integrável tendo-se que o integral da soma é igual à soma dos integrais. Acontece que esta propriedade não é de verificação imediata, pelo que se apresentam alguns resultados prévios, nomeadamente do Teorema da convergência monótona de Lebesgue que é apresentado na secção 5.2. Os restantes resultados desta secção demonstram a propriedade referida para funções simples e mensuráveis não negativas.

Teorema 5.4. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida.*

Se $s : X \rightarrow [0, \infty[$ é uma função simples e mensurável, então

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M} &\longrightarrow [0, \infty] \\ E &\longmapsto \int_E s \, d\mu \end{aligned}$$

é uma medida em $(X, \mathcal{M})$.

Demonstração. Sendo $s : X \rightarrow [0, \infty[$ uma função simples e mensurável, então, por (1.4) e pelo Teorema 3.16, s assume a forma

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i},$$

com $A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\}) \in \mathcal{M}$, para cada $i = 1, \dots, n$.

Por um lado, pelo axioma (a) da definição de medida, Definição 4.1 e por (5.1), tem-se

$$\varphi(\emptyset) = \int_{\emptyset} s \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(\emptyset \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(\emptyset) = 0,$$

o que demonstra que φ satisfaz o axioma (a) da definição de medida.

Por outro lado, sendo $(E_r)_{r \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em $\mathcal{M}$ tal que $E_i \cap E_j = \emptyset$, para $i \neq j$, pelo axioma (b) da definição de medida, Definição 4.1, tem-se

$$\begin{aligned} \varphi \left(\bigcup_{r=1}^{\infty} E_r \right) &= \int_{\bigcup_{r=1}^{\infty} E_r} s \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu \left(\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} E_r \right) \cap A_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu \left(\bigcup_{r=1}^{\infty} (E_r \cap A_i) \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{r=1}^{\infty} \mu(E_r \cap A_i) \right) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_r \cap A_i) \right) = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{E_r} s \, d\mu = \sum_{r=1}^{\infty} \varphi(E_r), \end{aligned}$$

e conseqüentemente φ satisfaz o axioma (b) da definição de medida.

Conclusão, a função φ é uma medida em $(X, \mathcal{M})$. $\square$

Teorema 5.5. *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $s, t : X \rightarrow [0, \infty[$ duas funções simples mensuráveis.*

Então $s + t$ é uma função simples mensurável e

$$\int_X (s + t) \, d\mu = \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu.$$

Demonstração. Sendo $s, t : X \rightarrow [0, \infty[$ duas funções simples e mensuráveis, por (1.4) e pelo Teorema 3.16, s e t assumem a forma

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \quad \text{e} \quad t = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j},$$

com $A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\}) \in \mathcal{M}$, $i = 1, \dots, n$, e $B_j = t^{-1}(\{\beta_j\}) \in \mathcal{M}$, $j = 1, \dots, m$. Observe que

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = X = \bigcup_{j=1}^m B_j, \quad A_i \cap A_{i^*} = \emptyset \text{ caso } i \neq i^*, \text{ e } B_j \cap B_{j^*} = \emptyset \text{ caso } j \neq j^*. \quad (5.6)$$

A soma de funções mensuráveis é ainda uma função mensurável, Corolário 3.15, logo a função $s + t$ é também uma função mensurável. Mais, $s + t$ é também uma função simples, pois, dado $x \in X$, existem $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$ tais que $x \in A_i$ e $x \in B_j$, donde

$$(s + t)(x) = s(x) + t(x) = \alpha_i + \beta_j$$

e conseqüentemente

$$s + t = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j}. \quad (5.7)$$

Denota-se $I = \{1, \dots, n\}$, $J = \{1, \dots, m\}$ e define-se, para cada $(i, j) \in I \times J$, o conjunto

$$E_{ij} = A_i \cap B_j.$$

Pelas propriedades dos conjuntos $(A_i)_{i \in I}$ e $(B_j)_{j \in J}$, (5.6), facilmente se verifica que

$$X = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} E_{ij}, \quad A_i = \bigcup_{j=1}^m E_{ij}, \quad \forall i \in I, \quad B_j = \bigcup_{i=1}^n E_{ij}, \quad \forall j \in J \quad (5.8)$$

e

$$E_{ij} \cap E_{i^*j^*} = \emptyset, \quad \text{se} \quad (i, j) \neq (i^*, j^*). \quad (5.9)$$

Dado $(i^*, j^*) \in I \times J$, por (5.7) e (5.9), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{E_{i^*j^*}} (s+t) d\mu &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \mu(E_{ij} \cap E_{i^*j^*}) = (\alpha_{i^*} + \beta_{j^*}) \mu(E_{i^*j^*}) \\ &= \alpha_{i^*} \mu(E_{i^*j^*}) + \beta_{j^*} \mu(E_{i^*j^*}), \end{aligned}$$

donde se verifica que

$$\int_{E_{ij}} (s+t) d\mu = \alpha_i \mu(E_{ij}) + \beta_j \mu(E_{ij}), \quad \forall (i, j) \in I \times J. \quad (5.10)$$

Pelo Teorema 5.4, $\varphi(E) = \int_E (s+t) d\mu$, para cada $E \in \mathcal{M}$, é uma medida em $(X, \mathcal{M})$. Pela definição de integral de funções simples mensuráveis, pelos axiomas de medida e por (5.8), (5.9), (5.10), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_X (s+t) d\mu &= \int_{\bigcup_{(i,j) \in I \times J} E_{ij}} (s+t) d\mu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{E_{ij}} (s+t) d\mu \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \mu(E_{ij}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(E_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \mu(E_{ij}) + \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^n \mu(E_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j) \\ &= \int_X s d\mu + \int_X t d\mu. \end{aligned}$$

□

5.2 Teoremas de Convergência

Teorema 5.6. [Teorema da Convergência monótona de Lebesgue]

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis de X em $[0, \infty]$ e $f : X \rightarrow [0, \infty]$ tais que:

(a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq \infty, \forall x \in X$;

(b) $f_n \xrightarrow{p} f$.

Então f é uma função mensurável e

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Demonstração. Sendo f o limite pontual de uma sucessão de funções mensuráveis, o ponto 3. do Corolário 3.15 garante que f é uma função mensurável.

Pela hipótese (a) e pelo ponto 1. do Teorema 5.1, conclui-se que a sucessão em $\overline{\mathbb{R}}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definida por

$$u_n = \int_X f_n d\mu, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

é crescente e não negativa. Em $\overline{\mathbb{R}}$ toda a sucessão monótona é convergente, logo existe $\alpha \in [0, \infty]$ tal que

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \alpha. \quad (5.11)$$

Mais, como $f_n \leq f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então, novamente pelo ponto 1. do Teorema 5.1, $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde

$$\alpha \leq \int_X f d\mu. \quad (5.12)$$

Falta demonstrar que $\alpha \geq \int_X f d\mu$.

Sejam $c \in]0, 1[$ e $s : X \rightarrow [0, \infty[$ uma função simples e mensurável tal que $0 \leq s \leq f$. Defina-se a sucessão de subconjuntos de X , $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$, por

$$E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq cs(x)\} = (f_n - cs)^{-1}([0, \infty]), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.13)$$

A sucessão $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui as seguintes propriedades:

1. $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão em $\mathcal{M}$;
2. $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots$;

$$3. X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

O ponto 1. verifica-se porque cada E_n é a imagem recíproca de um conjunto fechado, $[0, \infty]$, por uma função mensurável, $f_n - c.s.$ O ponto 2. verifica-se por a sucessão de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente. O ponto 3. verifica-se pelo seguinte: Seja $x \in X$.

Se $f(x) = 0$, então $s(x) = 0$, logo $f_1(x) \geq 0 = cs(x)$, donde $x \in E_1$;

Se $f(x) \neq 0$, então $f(x) > 0$, donde $f(x) > cs(x)$ porque $s \leq f$ e $c \in]0, 1[$. Como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e $f_n \xrightarrow{p} f$, logo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) \geq cs(x)$, donde se conclui que $x \in E_n$. Consequentemente $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Dos pontos 1., 2. e 4. do Teorema 5.1 e da definição dos conjuntos E_n , (5.13), obtém-se

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \int_{E_n} c.s d\mu = c \int_{E_n} s d\mu. \quad (5.14)$$

Pelo Teorema 5.4, a função $\varphi(E) = \int_E s d\mu$ definida em $\mathcal{M}$, é uma medida. Uma vez que a sucessão $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verifica os pontos 1. 2. e 3. acima, das propriedades das medidas (ver ponto 4. do Teorema 4.1) tem-se

$$\lim_n \int_{E_n} s d\mu = \int_X s d\mu.$$

Consequentemente, de (5.11) e da desigualdade (5.14) tem-se

$$\alpha = \lim_n \int_X f d\mu \geq \lim_n c \int_{E_n} s d\mu = c \int_X s d\mu.$$

Como $c \in]0, 1[$ é arbitrário, conclui-se que

$$\alpha \geq \int_X s d\mu. \quad (5.15)$$

Viu-se assim que, para qualquer $s : X \rightarrow [0, \infty[$ função simples e mensurável tal que $0 \leq s \leq f$ se tem (5.15). Pela Definição de integral de Lebesgue, (5.2), conclui-se que

$$\alpha \geq \int_X f d\mu \quad (5.16)$$

e o resultado sai por (5.11), (5.12) e por (5.16). $\square$

O teorema acabado de apresentar estabelece condições que permitem concluir que o limite comuta com o integral. O teorema que se segue afirma que o sumatório também comuta com o integral.

Teorema 5.7. *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis de X em $[0, \infty]$.*

Então

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X f_n d\mu \right).$$

Demonstração. Sendo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções não negativas, então está bem definida a função

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) . \end{aligned}$$

Mais, como as funções f_n são mensuráveis, o ponto 3. do Corolário 3.15 permite concluir que f é também uma função mensurável.

Por um lado, considerando a sucessão das somas parciais $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$,

$$g_m = f_1 + f_2 + \cdots + f_m, \quad m \in \mathbb{N},$$

tem-se que $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções mensuráveis não negativas e crescente tal que $g_m \xrightarrow{p} f$. Pelo Teorema da convergência monótona de Lebesgue, Teorema 5.6, conclui-se que

$$\lim_m \int_X g_m d\mu = \int_X f d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu. \quad (5.17)$$

Por outro lado, o Teorema 3.17 garante que existem sucessões crescentes de funções simples mensuráveis não negativas, $(s_i^{(1)})_{i \in \mathbb{N}}$, $(s_i^{(2)})_{i \in \mathbb{N}}$, $\dots$, $(s_i^{(m)})_{i \in \mathbb{N}}$, $\dots$, tais que, para todo $m \in \mathbb{N}$, $s_i^{(m)} \xrightarrow{p} f_m$ quando $i \rightarrow \infty$. Consequentemente, para qualquer $m \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\left(s_i^{(1)} + s_i^{(2)} + \cdots + s_i^{(m)} \right) \xrightarrow{p} (f_1 + f_2 + \cdots + f_m) = g_m, \quad \text{quando } i \rightarrow \infty.$$

Desta forma, fixando $m \in \mathbb{N}$, tem-se que a sucessão de funções, $(S_i^{(m)})_{i \in \mathbb{N}}$, definida por

$$S_i^{(m)} = \sum_{j=1}^m s_i^{(j)},$$

é crescente, composta por funções mensuráveis não negativas, e pontualmente convergente para g_m . Mais uma vez o Teorema da convergência monótona de Lebesgue, Teorema 5.6, garante que

$$\lim_i \int_X \left(s_i^{(1)} + s_i^{(2)} + \cdots + s_i^{(m)} \right) d\mu = \int_X g_m d\mu. \quad (5.18)$$

Mas, pelo Teorema 5.5 e pelo Teorema da Convergência monótona de Lebesgue aplicado a cada uma das sucessões $(s_i^{(1)})_{i \in \mathbb{N}}, \dots, (s_i^{(m)})_{i \in \mathbb{N}}$, tem-se

$$\begin{aligned} \lim_i \int_X (s_i^{(1)} + \dots + s_i^{(m)}) d\mu &= \lim_i \left(\int_X s_i^{(1)} d\mu + \dots + \int_X s_i^{(m)} d\mu \right) \\ &= \lim_i \int_X s_i^{(1)} d\mu + \dots + \lim_i \int_X s_i^{(m)} d\mu \\ &= \int_X f_1 d\mu + \dots + \int_X f_m d\mu \\ &= \sum_{n=1}^m \int_X f_n d\mu, \end{aligned}$$

ou seja

$$\lim_i \int_X (s_i^{(1)} + s_i^{(2)} + \dots + s_i^{(m)}) d\mu = \sum_{n=1}^m \int_X f_n d\mu. \quad (5.19)$$

Por (5.18) e por (5.19) tem-se

$$\int_X g_m d\mu = \sum_{n=1}^m \int_X f_n d\mu, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

donde se conclui que

$$\lim_m \int_X g_m d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu. \quad (5.20)$$

Finalmente, o resultado é consequência imediata de (5.17) e de (5.20). $\square$

Nota 5.2 Como consequência imediata do Teorema 5.7, obtém-se que em qualquer espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é válida a igualdade

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu, \quad (5.21)$$

para quaisquer $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ funções mensuráveis.

Para funções mensuráveis $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ a igualdade (5.21) não é necessariamente válida. Mesmo para funções simples. Por exemplo, considerando o espaço de medida de contagem $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, e as funções simples mensuráveis, $s, t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas respectivamente por $s(n) = 1$ e $t(n) = -1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tem-se $\int_{\mathbb{N}} (s + t) d\mu = 0 \cdot \mu(\mathbb{N}) = 0 \cdot \infty = 0$, mas $\int_{\mathbb{N}} s d\mu = 1 \cdot \mu(\mathbb{N}) = \infty$ e $\int_{\mathbb{N}} t d\mu = -1 \cdot \mu(\mathbb{N}) = -\infty$, donde não está definida a soma dos integrais.

Como consequência da condição (5.21), tem-se o resultado que se segue.

Teorema 5.8. *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável.*

A função f é integrável se e só se a função $|f|$ é integrável.

Demonstração. Suponha-se que f é integrável. Consequentemente $\int_X f^+ d\mu \in [0, \infty[$ e $\int_X f^- d\mu \in [0, \infty[$, donde, por (5.21),

$$\int_X |f| d\mu = \int_X (f^+ + f^-) d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu \in [0, \infty[,$$

ou seja, $|f|$ é integrável.

Suponha-se que $|f|$ é integrável. Como $f^+ \leq |f|$ e $f^- \leq |f|$, pelo ponto 1. do Teorema 5.1, tem-se

$$0 \leq \int_X f^+ d\mu \leq \int_X |f| d\mu \in [0, \infty[$$

e

$$0 \leq \int_X f^- d\mu \leq \int_X |f| d\mu \in [0, \infty[.$$

Consequentemente f é integrável. □

A condição (5.21) é válida para funções integráveis f, g com imagens reais.

Teorema 5.9. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida.*

Se $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ são funções integráveis, então $f + g$ é uma função integrável, tendo-se

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Demonstração. Sejam $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funções integráveis.

Defina-se a função h como sendo a função soma, $h = f + g$. Pelo Teorema 5.8, cada uma das funções $|f|$ e $|g|$ é integrável e, por (5.21), obtém-se

$$\int_X |h| d\mu \leq \int_X (|f| + |g|) d\mu \leq \left(\int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu \right) \in [0, \infty[,$$

donde se conclui que h é uma função integrável.

Pelo ponto 3. do Teorema 1.1, obtém-se

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^- \Leftrightarrow h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$$

com $h^+, h^-, f^+, f^-, g^+, g^- : X \rightarrow [0, \infty]$. Consequentemente, por (5.21),

$$\int_X h^+ d\mu + \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu + \int_X h^- d\mu,$$

com cada um dos integrais finito. Desta forma obtém-se

$$\int_X h^+ d\mu - \int_X h^- d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu + \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu,$$

isto é

$$\int_X h d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

□

O ponto 3. do Teorema 5.2 e o Teorema 5.9 motivam a definição que se segue.

Definição 5.3. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida.*

Define-se

$$\mathcal{L}^1(\mu) = \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ é integrável}\}.$$

Teorema 5.10. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida.*

Então o terno $(\mathcal{L}^1(\mu), +, \cdot)$ é um espaço vectorial real.

Demonstração. Proposta de exercício.

□

Bibliografia

- [1] A.A. Breda & J.N. Costa, *Cálculo com funções de várias variáveis*, McGraw-Hill 1996.
- [2] D.L. Cohn, *Measure Theory*, 2^a Edição, BirKhäuser 2013.
- [3] P.J. Fernandez, *Medida e Integração*, 2^a Edição, Projeto Euclides 2002.
- [4] A.N. Kolmogorov & S.V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover 1975.
- [5] A.N. Kolmogorov & S.V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Dover 1999.
- [6] E.L. Lima, *Curso de Análise*, Vol. 1, Projeto Euclides 1992.
- [7] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3^a Edição, McGraw-Hill 1976.
- [8] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3^a Edição, McGraw-Hill 1987.