Universidade do Minho — Lic. Ciências da Computação
Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

— folha 1 — Noções Topológicas em $\mathbb{R}^n$ — 2010'11 —

1. Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a aplicação definida por $f(x, y) = xy$. Mostre que f é um produto interno em $\mathbb{R}$.

2. Seja $< \cdot, \cdot >$ um produto interno definido em $\mathbb{R}^n$.

   (a) Mostre que a norma induzida

   $$\begin{array}{rccl} ||\cdot|| : & \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & X & \mapsto & \sqrt{< X, X >} \end{array}$$

   é de facto uma norma em $\mathbb{R}^n$;

   (b) Determine a norma em $\mathbb{R}^n$ induzida pelo produto interno canónico.

3. Considere a aplicação $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$.

   (a) Verifique que h é um produto interno em $\mathbb{R}^2$;

   (b) Determine a norma em $\mathbb{R}^2$ induzida pelo produto interno apresentado.

4. Mostre que $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(X, Y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_3y_3$, para quaisquer $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3)$ em $\mathbb{R}^3$, define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

5. Verifique que, em $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno canónico, os vectores $\mathrm{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathrm{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathrm{e}_3 = (0, 0, 1)$ são ortogonais dois a dois.

6. Determine os vectores de $\mathbb{R}^3$ que, relativamente ao produto interno canónico, são ortogonais ao vector $U = (1, 1, 1)$.

7. Considere o produto interno definido em $\mathbb{R}^2$ por

   $$\langle X, Y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2, \quad X = (x_1, x_2), \; Y = (y_1, y_2).$$

   (a) Sejam $U = (-1, 0)$, $V = (0, 2)$. Calcule $\langle U, U \rangle$, $\langle V, V \rangle$, $\langle U, V \rangle$, $\langle U + 2V, -2U + 3V \rangle$.

   (b) Apresente $W, Z \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ que sejam ortogonais relativamente a $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

8. Considere as aplicações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ definidas por

$$\| X \|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},$$
$$\| X \|_\infty = \max\{\, |x_1|,\, |x_2|,\, \ldots,\, |x_n| \,\},$$
$$\| X \|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|,$$

para qualquer $X = (x_1, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$. Prove que estas aplicações são normas em $\mathbb{R}^n$.

9. Considere o espaço $\mathbb{R}^3$ munido separadamente das normas $\| \,.\, \|_2$, $\| \,.\, \|_\infty$ e $\| \,.\, \|_1$ definidas para $n = 3$. Em cada caso, calcule a correspondente norma do vectores $U = (0, 0, 1)$, $V = (1, 2, 3)$ e $W = (-4, 0, 5)$.

10. Considere as normas $\| \,.\, \|_2$, $\| \,.\, \|_\infty$ e $\| \,.\, \|_1$ definidas no exercício 8.

    (a) Para $n = 2$, esboce as correspondentes bolas $B((0, 0), 1)$.

    (b) Considere $n = 3$. Mostre que, para cada $X \in \mathbb{R}^3$, se tem

    $$\| X \|_\infty \leq \| X \|_2 \leq \| X \|_1 \leq 3 \| X \|_\infty, \quad \forall X \in \mathbb{R}^3.$$

11. Sejam $\langle \cdot , \cdot \rangle$ um produto interno em $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ a correspondente norma induzida. Mostre que:

    (a) $\| X + Y \|^2 + \| X - Y \|^2 = 2 \| X \|^2 + 2 \| Y \|^2, \ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$;

    (b) $\| X + Y \| \| X - Y \| \leq \| X \|^2 + \| Y \|^2, \ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$;

    (c) $\langle X + Y, X - Y \rangle = 0$ se e só se $\| X \| = \| Y \|$;

    (d) $\| X + \lambda Y \| \geq \| X \|, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, se e só se $\langle X, Y \rangle = 0$.

12. Seja $d_{0,1} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(X, Y) = 0$ se $X = Y$ e $d(X, Y) = 1$ se $X \neq Y$.

    (a) Mostre que $d_{0,1}$ é uma distância em $\mathbb{R}^2$.

    (b) Esboce ou especifique cada um dos conjuntos
    $$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ d_{0,1}\left((x, y), (0, 0)\right) < k\right\},$$
    onde k assume, alternativamente, os valores $\dfrac{1}{2}, 1, 2.$

13. Determine a norma e a distância induzidas em $\mathbb{R}^n$ pelo produto interno canónico.

14. Determine a distância induzida em $\mathbb{R}^n$ pela:

    (a) norma do máximo, isto é, pela norma $||(x_1, \ldots, x_n)||_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$;

    (b) norma da soma, isto é, pela norma $||(x_1, \ldots, x_n)||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$.

15. Represente geometricamente a bola $B((2,1),2)$ quando em $\mathbb{R}^2$ se considera:

    (a) a métrica induzida pela norma euclidiana, $(x,y) \mapsto ||(x,y)||_2$;

    (b) a métrica induzida pela norma do máximo, $(x,y) \mapsto ||(x,y)||_\infty$;

    (c) a norma da soma; $(x,y) \mapsto ||(x,y)||_1$.

16. Considerando em $\mathbb{R}^2$ a distância euclidiana, determine o *interior*, a *aderência*, a *fronteira* e o *derivado* de cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

    $A =]0,2[\times]1,3[$ $\qquad$ $G = [0,2] \times (\mathbb{Q} \cap [3,4])$

    $B = [0,2] \times [1,3]$ $\qquad$ $H = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$

    $C = [0,2]\times]1,3]$ $\qquad$ $I = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \times [1,2]$

    $D =]0,2[\times\{3,4\}$ $\qquad$ $J = \left\{ (x,y) : x > y^2 \right\}$

    $E = [0,2] \times \mathbb{R}$ $\qquad$ $L = B((0,0),1)$

    $F = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\qquad$ $M = \{ (x,y) : 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 0 < y \leq x \}$

17. Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^2$ munido da norma euclidiana.

    (a) Apresente conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^2$ tais que A seja limitado e B não seja limitado.

    (b) Diga se cada um dos seguintes conjuntos é ou não limitado.

    $A = \{ (x,y) : 0 \leq x < 1 , \ 0 \leq y \leq 3 \}$

    $B = \left\{ (x,y) : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} < 1 \right\}$

    $C = \{ (x,y) : x \leq 10 , \ 0 \leq y \leq \mathrm{e}^x \}$

    $D = \left\{ (x,y) : x = \operatorname{sen} a , \ y = \operatorname{tg} a , \ \dfrac{\pi}{4} \leq a < \dfrac{\pi}{2} \right\}$

    $E = \{ (x,y) : x \leq y \}$

    $F = \{ (x,y) : x = 1 , \ -1 \leq y \leq 1 \}$

    $G = \{ (1,n) : n \in \mathbb{N} \}$

    $H = \left\{ \left(1, \dfrac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$

    $I = ([0,2] \cap \mathbb{Q}) \times ([-1,2] \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$

18. Em $\mathbb{R}^2$, apresente:

    (a) uma família de abertos cuja intersecção não seja um aberto;

    (b) uma família de fechados cuja reunião não seja um fechado.

19. Quando possível, apresente um subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ que:

    (a) não seja aberto nem fechado;

    (b) seja simultaneamente aberto e fechado;

    (c) seja aberto e limitado;

    (d) seja fechado e não limitado;

    (e) seja finito e não limitado;

    (f) coincida com o seu derivado;

    (g) coincida com a sua fronteira;

    (h) cuja fronteira seja o conjunto vazio.

20. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

    (a) se $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto então A não é limitado;

    (b) se $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto e $B \subset \mathbb{R}^2$ é fechado então $A \cup B$ não é aberto nem fechado;

    (c) se $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto e $x \in A$ então $A \setminus \{\boldsymbol{x}\}$ é aberto;

    (d) se $A \subset B \subset \mathbb{R}^2$ e B é fechado então A é fechado;

    (e) se $A \subset B \subset \mathbb{R}^2$ e B é fechado então $\overline{A} \subset B$;

    (f) se $F \subset \mathbb{R}^2$ é fechado e $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto então $F \setminus A$ é fechado;

    (g) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ é aberto;

    (h) $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \in A \right\}$, com A aberto de $\mathbb{R}$, é aberto;

    (i) se $A \subset \mathbb{R}$ não é aberto então A é fechado;

    (j) o conjunto $A = [0,1] \times ([0,2] \cap \mathbb{Q})$ é conexo por arcos;

    (k) se $A, B \subset \mathbb{R}^2$ são conexos por arcos então $A \cup B$ também é conexo por arcos;

    (l) se $A, B \subset \mathbb{R}^2$ são conexos por arcos então $A \cap B$ também é conexo por arcos;

    (m) Se $A, B \subset \mathbb{R}$ são conexos por arcos então $A \times B$ é conexo por arcos em $\mathbb{R}^2$;

21. Diga quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ são compactos:

$A = \{ (x,y) : \ x \geq 0 \}$

$B = \{ (x,y) : \ x = \operatorname{sen} a \, , \ y = \cos a \, , \ 0 \leq a \leq \pi/2 \}$

$C = \left\{ (x,y) : \ x^2 + y^2 < 1 \right\}$

$D = \{ (x,y) : \ xy > 1 \} \cap \left\{ (x,y) : \ x^2 + y^2 < 4 \right\}$

$E = \{ (x,y) : \ 0 \leq x \leq 1 \}$

$F = \{ (x,y) : \ \log x \leq y \leq \mathrm{e}^{\,x} \}$

$G \subset \mathbb{R}^2 \, , \ \ G$ finito

$H = \{ (x,y) : \ x = 1/n \, , \ n \in \mathbb{N} \, , \ \ 1 \leq y \leq 3 \}$

$I = \{ (x,y) : \ x \leq y \leq 4 \}$

$J = \{ (x,y) : \ x = 0 \, , \ \ y \in [0,1] \}$

$L \subset [0,2[\times]1,3[\, , \ L$ fechado

$M = \{ (x,y) : \ |x| + |y| \leq 1 \}$

Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. Ciências da Computação

Análise

— folha 2 — Sucessões em $\mathbb{R}^m$ — 2010'11 —

1. Considere a seguinte sucessão em $\mathbb{R}^4$:

$$(v_n)_n = \left(1 - \frac{1}{n}, (-1)^n, \frac{2n+3}{3n}, \cos(n\pi)\right)_n.$$

   (a) Identifique as sucessões componentes da sucessão $(v_n)_n$;

   (b) Determine o termo de ordem 7 da sucessão $(v_n)_n$;

   (c) Determine a subsucessão dos termos pares de $(v_n)_n$;

   (d) Determine a subsucessão dos termos ímpares de $(v_n)_n$;

   (e) Apresente uma sucessão $(w_n)_n$ em $\mathbb{R}^4$ que não seja subsucessão de $(v_n)_n$, mas que
$$\{w_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{v_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

   (f) Mostre que a sucessão $(v_n)_n$ é limitada.

2. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \{(3,2,1), (1,0,0), (0,0,0)\}.$$

   (a) Apresente, caso exista, uma sucessão em $\mathbb{R}^3$ cujo conjunto dos seus termos seja A;

   (b) Apresente, caso exista, uma sucessão em $\mathbb{R}^3$ não limitada cujo conjunto dos seus termos contenha A;

   (c) Apresente, caso exista, uma sucessão em $\mathbb{R}^3$ cujo conjunto dos seus termos contenha A e a sucessão das 3ª componentes seja constante;

   (d) Apresente, caso exista, uma sucessão em $\mathbb{R}^3$ não limitada que possua uma subsucessão com o conjunto dos termos estritamente contido em A.

3. Mostre que um sucessão $(u_n)_n$ em $\mathbb{R}^m$ é limitada se e só se cada uma das suas m sucessões componentes é limitada em $\mathbb{R}$.
Sugestão: Use a norma do máximo.

4. Considere a seguinte sucessão em $\mathbb{R}^3$:

$$(u_n)_n = \left(\frac{1}{n}, (-1)^n, n\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_n.$$

(a) Identifique a sucessão das 3ª componentes da sucessão $(u_n)_n$;

(b) Apresente, caso exista, uma subsucessão de $(u_n)_n$ limitada;

(c) Apresente, caso exista, uma subsucessão de $(u_n)_n$ não limitada;

(d) A sucessão $(u_n)_n$ é limitada? Justifique.

5. Usando a definição de limite de uma sucessão, mostre que

$$\lim_n \left(\frac{2}{n+5}, \frac{4n+2}{n+5}\right) = (0,4)$$

6. Calcule, caso existam, $\lim_n a_n$ e $\lim_n b_n$ para:

(a) $a_n = \left(\dfrac{\sqrt{n}}{n^2}, -2 + \dfrac{4n}{1+n^3}, 3\right), \qquad b_n = \left(\dfrac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3}, \sqrt[3]{n^3+1}, 0\right)$

(b) $a_n = (\cos(n\pi), 0, \mathrm{sen}(n\pi)), \qquad b_n = \left((-1)^n \dfrac{n+1}{e^n}, \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)$

(c) $a_n = \left(\dfrac{n}{\log^2(n+3)}, 0\right), \qquad b_n = \left(\dfrac{\mathrm{sen}\, n}{n}, n\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{n}, \mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{n}\right)$

(d) $a_n = (\pi, 0, e), \qquad b_n = \begin{cases} \left(\dfrac{n+1}{2n}, 0\right) & \text{se } n \text{ é par} \\ \left(\dfrac{1}{2}, e^{-n}\right) & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

(e) $a_n = \begin{cases} \left(\dfrac{1+n}{2n}, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) & \text{se } n \text{ é par} \\ \left(\dfrac{1-n}{2n}, e^{-n}\right) & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

(f) $a_n = \begin{cases} \left(n^2+2, \dfrac{1}{n}\right) & \text{se } n < 12 \\ \left(\dfrac{n+3}{-2n}, e^{-n}\right) & \text{se } n \geq 12 \end{cases}$

(g) $a_n = \begin{cases} \left(\dfrac{\cos n}{n+1}, 0\right) & \text{se } n = 3k-2 \\ (0, 0) & \text{se } n = 3k-1, \qquad k = 1,2,3,\ldots \\ \left(e^{-n^2}, \log(n) - \log(n+1)\right) & \text{se } n = 3k \end{cases}$

7. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é *verdadeira* ou *falsa*:

   (a) toda a subsucessão de uma sucessão convergente é convergente;

   (b) toda a subsucessão de uma sucessão divergente é divergente;

   (c) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são sucessões divergentes então $(u_n + v_n)_n$ é divergente;

   (d) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são sucessões divergentes então $(\,\langle u_n, v_n\rangle\,)_n$ é divergente;

   (e) $\lim\limits_n u_n = 0$ se e só se $\lim\limits_n \| u_n \| = 0$;

   (f) $\lim\limits_n u_n = a$, com $a \neq 0$, se e só se $\lim\limits_n \| u_n \| = \| a \|$;

   (g) se $(u_n)_n$ e $(w_n)_n$ são sucessões tais que $\lim\limits_n u_n = \lim\limits_n w_n = 0$ e $(v_n)_n$ é outra sucessão de $\mathbb{R}^m$ para a qual, a partir de uma certa ordem p, se tem $\| u_n \| \leq \| v_n \| \leq \| w_n \|$, $\forall n > p$, então $\lim\limits_n v_n = 0$;

   (h) se $(u_n)_n$ e $(w_n)_n$ são sucessões tais que $\lim\limits_n u_n = \lim\limits_n w_n = a$, com $a \neq 0$, e $(v_n)_n$ é uma sucessão para a qual, a partir de uma certa ordem p, se tem $\| u_n \| \leq \| v_n \| \leq \| w_n \|$, $\forall n > p$, então $\lim\limits_n v_n = a$;

   (i) se $(u_n)_n$ é uma sucessão limitada então $(u_n)_n$ é uma sucessão de Cauchy;

   (j) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são sucessões tais que $(u_n)_n$ e $(u_n - 2v_n)_n$ são convergentes então $(v_n)_n$ é convergente;

   (k) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são sucessões reais convergentes então $\left(1 + u_n\,,\ \dfrac{u_n}{n}\,,\ u_n - 2v_n\right)_n$ é uma sucessão de Cauchy;

   (l) se $(u_n)_n$ é uma sucessão tal que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito então $(u_n)_n$ é convergente;

   (m) se $(u_n)_n$ é uma sucessão tal que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \{(1,1,1),(1,2,3)\}$ então $(u_n)_n$ é divergente.

8. Quando possível, apresente uma sucessão de $\mathbb{R}^3$ que seja:

   (a) de Cauchy mas não convergente;

   (b) de Cauchy mas não limitada;

   (c) limitada mas não de Cauchy;

   (d) não limitada e que possua uma subsucessão convergente;

   (e) convergente para $(0, 1, \mathrm{e}\,)$;

   (f) divergente e possua uma subsucessão de Cauchy;

   (g) convergente para $(0,0,0)$ e com todos os termos na bola $B((0,0,0),1)$;

   (h) divergente e com todos os termos na bola $((0,0,0),1)$;

   (i) convergente para $(0,0,0)$ e com todos os termos em $\mathbb{R}^3 \backslash B((0,0,0),1)$;

(j) de Cauchy e que possua uma subsucessão divergente;

(k) divergente e que possua uma subsucessão convergente para $(\mathrm{e}\,, \pi, \sqrt{2})$;

(l) convergente e que possua uma subsucessão não limitada;

(m) convergente para $(0, 0, 0)$ e que possua uma subsucessão convergente para $(0, 1, 0)$;

(n) de Cauchy, com termos em $B((0, 0, 0), 1)$ e em $B((5, 5, 5), 1)$.

Universidade do Minho Lic. Ciências da Computação
Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

— folha 3 — Funções vectoriais de n variáveis reais — 2010'11 —

1. Para cada uma das funções que se seguem:

   (a) $f(x,y) = \left(\dfrac{\cos(xy)}{x}, \sqrt{y}\right)$ (b) $g(x,y,z) = \left(\operatorname{sen}(xyz), x^2+y^2+z^2\right)$;

   (c) $h(x,y) = \dfrac{x^2+1}{x^2+(y+1)^2}$; (d) $l(x,y,z) = \operatorname{sen} x + \cos y$;

   identifique o domínio e o contradomínio e verifique se é limitada.

2. Represente graficamente o domínio das funções definidas por:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{y}{x-2}$; (b) $f(x,y,z) = \log(y^2+z^2-4)$;

   (c) $f(x,y) = \left(\sqrt{xy}, \dfrac{1}{xy}\right)$; (d) $f(x,y,z) = \sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$;

   (e) $f(x,y) = \log\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$; (f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-2xy}$;

   (g) $f(x,y) = \sqrt{-(x-y)^2}$; (h) $f(x,y) = \sqrt{y-x^2} + \sqrt{2x-y}$;

   (i) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$; (j) $f(x,y) = \log(y^2) + \sqrt{1-x^2}$;

   (k) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^{xy}}{\sqrt{xy}}$; (l) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$;

   (m) $f(x,y) = \sqrt{y \operatorname{sen} x}$; (n) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \log(y-x^2)$;

   (o) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2-2}}$; (p) $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{y}\right)$;

   (q) $f(x,y) = (\log(y-x), \cos(y-x))$; (r) $f(x,y) = \sqrt{y-x} + \sqrt{1-y}$;

   (s) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{4-y^2}$; (t) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \log(y-x^2)$.

3. Estude a existência dos seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, com $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2\,, \\ 0 & \text{se } y \neq x^2\,; \end{cases}$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$, com $g(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1\,, \\ 5 & \text{se } x^2 + y^2 > 1\,; \end{cases}$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$, com $h(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{se } y = x\,, \\ \operatorname{sen}(xy) & \text{se } y \neq x\,; \end{cases}$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} k(x,y)$, com $k(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0,\ y \geq 0\,, \\ x & \text{se } x \geq 0,\ y < 0\,, \\ y & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$

4. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{2x^2+4y^2}$;

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x+y}{x-y}$;

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$;

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \left(y + x^2y^2, \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}\right)$;

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-1)} \dfrac{x^2}{y+1}$;

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$;

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-3x+\sqrt[3]{y}}{x+\sqrt[5]{y}}$;

(h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$;

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{tg}(x^2)}{x^2-y^2}$;

(j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-2x^2y^3}{2x^4+3y^6}$;

(k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos(x-y)}$;

(l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-2x^2+3y}{x^2+y^2}$;

(m) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^3}{3x^2+4y^6}$;

(n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$;

(o) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^3)}{x^2+2y^3}$;

(p) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2-2y}{x^4+y^2}$;

5. Seja $f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^2y}{x^4+y^2},\cos x\right) & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\,,\\ (0,1) & \text{se } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$ Mostre que:

   (a) f é descontínua em $(0,0)$;

   (b) para cada $m\in\mathbb{R}$, a restrição $f|_\ell$ da função f à recta ℓ de equação $y=mx$ é contínua em $(0,0)$.

6. Quando for possível, estenda, por continuidade, à origem, as funções definidas por:

   (a) $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$;

   (b) $f(x,y)=\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},x^3+3\right)$;

   (c) $f(x,y)=\dfrac{2(x-1)y^2}{x^2+y^2}$;

   (d) $f(x,y)=\dfrac{1-\cos(x+y)}{(x+y)^2}$;

   (e) $f(x,y)=1+\dfrac{x^3y+xy^3}{x^2+y^2}$;

   (f) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

7. Considere a função definida por $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{x-y}$. Estenda-a, por continuidade, aos pontos da recta de equação $y=x$.
   [Repare que $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$].

8. Estude a continuidade das funções definidas por:

   (a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$

   (b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{xy} & \text{se } xy\neq0,\\ 0 & \text{se } xy=0;\end{cases}$

   (c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$

   (d) $f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{se } 0<y<x^2,\\ 1 & \text{caso contrário;}\end{cases}$

   (e) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$

   (f) $f(x,y)=\begin{cases}x & \text{se } x\geq y,\\ y & \text{se } x<y;\end{cases}$

   (g) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$

   (h) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{y-2} & \text{se } y\neq2,\\ 0 & \text{se } y=2;\end{cases}$

(i) $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2 & \text{se } x^2+y^2\le 1,\\ 0 & \text{se } x^2+y^2>1;\end{cases}$

(j) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x-y} & \text{se } x\neq y,\\ 0 & \text{se } x=y;\end{cases}$

(k) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$

(l) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy-1}{x^2+y^2-2} & \text{se } x^2+y^2\neq 2,\\ 0 & \text{se } x^2+y^2=2;\end{cases}$

(m) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

9. Apresente uma função $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ que seja descontínua apenas em:

   (a) $(1,-2)$;
   (b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=4\}$;
   (c) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$;
   (d) $\{(0,0)\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=x^2+1\}$;
   (e) $\{1\}\times[1,7]$;
   (f) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 3;\ \wedge\ 0\le y\le \mathrm{e}^{\,x}\}$.

10. Relativamente a uma função $f\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

   (a) se $f(0,0)=1$ e $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1$ então f é contínua em $(0,0)$;

   (b) se $f(0,0)=1$ e $f(x,x^3)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, então f é descontínua em $(0,0)$;

   (c) se f é contínua em $(0,0)$ e $f(x,x^2)=2x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, então $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1$;

   (d) se $f(x,x^2)=x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, e $f(x,-x^2)=\mathrm{e}^{\,x},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, então f é contínua em $(0,0)$.

11. Mostre que a função $f(x,y)=-5x^5+xy+3y+9xy^2-2$ possui pelo menos um zero.

Universidade do Minho — Lic. Ciências da Computação

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

— folha 4 — funções reais de várias variáveis reais — 2010'11 —

1. Usando a definição, calcule a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A)$ da função f no ponto A segundo o vector $\vec{v}$, para:

   (a) $f(x,y) = xy\,,\ \vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2\,,\ A = (1,0)$;

   (b) $f(x,y) = (x^2+y^2, e^{x^2+y^2})\,,\ \vec{v} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2\,,\ A = (1,1)$;

   (c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)\,,\ \vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2\,,\ A = (0,0)$;

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } x<y, \\ \frac{1}{2}y & \text{se } x \geq y, \end{cases} \quad \vec{v} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2\,,\ A = (0,0)$;

   (e) $f(x,y,z) = (x^2+xy+z^2, xyz^2)\,,\ \vec{v} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\,,\ A = (1,2,-1)$;

2. Usando a definição de derivada parcial num ponto, determine:

   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,1)$ para $f(x,y) = 2x^2y$;

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ para $f(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{se } x<y, \\ -x & \text{se } x \geq y. \end{cases}$

3. Determine as funções derivadas parciais de primeira ordem das funções definidas por

   (a) $f(x,y) = \big(5y^3 + 2xy - x^2, x^2 + y^2 \operatorname{sen}(zy)\big)$;

   (b) $f(x,y) = \big(y\mathrm{e}^{x} + x\cos(x^2y), \log y\big)$;

   (c) $f(x,y) = \log(\cos(xy))$;

   (d) $f(x,y,z) = \Big(\operatorname{sen} x + \log x + \mathrm{e}^{xz}, \big(x^2+zy^3\big)^2\Big)$;

   (e) $f(x,y) = \big(x^3 + y^2\mathrm{e}^{x}, 45\big)$;

   (f) $f(x,y) = (\operatorname{sen}\,(xy)\,, x, y)$;

   (g) $f(x,y,z) = \Big(\sqrt{x^2yz^3}, x^2\log(1+y^2)\mathrm{e}^{z}\Big)$.

4. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ para qualquer $\vec{v}\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, onde:

   (a) $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(x,y)=0$ se $(x,y)=(0,0)$;

   (b) $f(x,y)=\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(x,y)=0$ se $(x,y)=(0,0)$;

   (c) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$ se $x\neq-y$ e $f(x,y)=0$ se $x=-y$;

   (d) $f(x,y)=0$ se $y\neq x^2$ ou $(x,y)=(0,0)$ e $f(x,y)=1$ se $y=x^2$ e $(x,y)\neq(0,0)$.

5. Seja $f(x,y)=x^3+3x^2+4xy+y^2$.
   Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{3}\right)=0$ para todo $\vec{v}\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

6. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das funções definidas por

   (a) $f(x,y)=1$ se $x=0$ ou $y=0$ e $f(x,y)=0$ se $xy\neq0$;

   (b) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(x,y)=0$ se $(x,y)=(0,0)$;

   (c) $f(x,y)=\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(x,y)=0$ se $(x,y)=(0,0)$;

   (d) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$ se $x+y\neq0$ e $f(x,y)=x$ se $x+y=0$;

   (e) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(x,y)=0$ se $(x,y)=(0,0)$;

   (f) $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(x,y)=0$ se $(x,y)=(0,0)$;

   (g) $f(x,y)=xy$ se $y\neq x$ e $f(x,y)=x^3$ se $x=y$.

7. Calcule as derivadas parciais de segunda ordem das funções definidas por

   (a) $f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2-y^2}$; (b) $f(x,y)=\log(1+x^2+y^2)$;

   (c) $f(x,y,z)=\cos(xyz)$; (d) $f(x,y,z)=y^2\log x+x\mathrm{e}^{xz}$.

8. Mostre que as funções definidas a seguir verificam as condições indicadas:

   (a) $f(x,y) = \cos\left(\dfrac{y}{x}\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $\quad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$;

   (b) $g(x,y) = x\,\mathrm{e}^{-y/x}$, $\quad 2y(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}) = x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$;

   (c) $h(x,y) = \mathrm{e}^{-4x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,y)$, $\quad \frac{\partial h}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$;

   (d) $p(x,y) = \cos(x-y) + \log(x+y)$, $\quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$;

   (e) $u(x,y,z) = x + \dfrac{x-y}{y-z}$, $\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$;

   (f) $v(x,y) = -\log(x^3 + y^3)$, $\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$;

   (g) $w(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2})$, $\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$;

   (h) $i(x,y) = \log(x^2+y^2) + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $\quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial y^2} = 0$;

   (i) $j(x,y) = \cos xy^2$, $\quad \frac{\partial^2 j}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 j}{\partial y \partial x} = 0$.

9. Usando o teorema de Schwarz, mostre que não pode existir uma função $f :$ $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais de primeira ordem sejam:

   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x^3$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = yx^2 + x$;

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x\operatorname{sen} y$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y\operatorname{sen} x$.

10. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

    (b) Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

    (c) Explique porque não há contradição com o teorema de Schwarz.

11. Considere a função definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x+y} & \text{se } x \neq -y, \\ 0 & \text{se } x = -y. \end{cases}$

(a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$.

(b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

12. Seja $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{|xy|\, z}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$

(a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0,0)$ para qualquer $\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

(b) Usando o resultado da alínea anterior, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)$.

13. Em cada alínea, use a definição para estudar a derivabilidade em $(0,0)$ da função $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como se indica:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$;

(c) $f(x,y) = |xy|$;

(d) $f(x,y) = \max\{\, |x|, |y| \,\}$;

(e) $f(x,y) = |x| + |y|$;

(f) $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$.

14. Seja $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } xy = 0; \\ 1 & \text{se } xy \neq 0. \end{cases}$

Estude a continuidade e a derivabilidade de f em $(0,0)$.

15. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{se } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

(a) Mostre que f é derivável em $(0,0)$.

(b) Verifique que não existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,b)$, sempre que $b \neq 0$.

16. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & \text{se } x+y \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } x+y=0\,. \end{cases}$

    Estude a derivabilidade de f.

17. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (xz + \operatorname{sen} y + e^z x^2, 3y)$.

    (a) Mostre que f é derivável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

    (b) Determine a matriz, em relação às bases canónicas nos respectivos espaços domínio e chegada, da derivada de f no ponto $(3, 3\pi, 2)$.

    (c) Use a alínea anterior para determinar $\dfrac{\partial f}{\partial(1,3,0)}(3,3\pi,2)$.

18. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

    (a) Mostre que f possui derivadas parciais de 1^{a} ordem em todos os pontos.

    (b) Averigue a existência de derivadas direccionais de f na origem.

    (c) Estude a continuidade de f.

    (d) Estude a derivabilidade de f.

Universidade do Minho — Lic. Ciências da Computação

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

—— folha 5 — funções vectoriais de várias variáveis reais ——— 2010'11 ———

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (a) Mostre que f possui derivadas direcionais em $(0,0)$ segundo todos os vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$;

   (b) Mostre que a aplicação $\vec{v} \mapsto \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}((0,0))$ não é linear;

   (c) Verifique se f é derivável em $(0,0)$.

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (a) Mostre que f possui derivadas direcionais em $(0,0)$ segundo todos os vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$;

   (b) Mostre que a aplicação $\vec{v} \mapsto \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}((0,0))$ é linear;

   (c) Verifique se f é derivável em $(0,0)$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;

   (b) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ e verifique que não são contínuas em $(0,0)$;

   (c) Verifique que f é derivável em $(0,0)$.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{3x^2+2y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (a) Mostre que f é contínua em $(0,0)$;

   (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial (1,1)}(0,0)$;

   (c) Verifique se f é derivável em $(0,0)$.

5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{3(xy)^{\frac{4}{3}}}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (a) Mostre que f é contínua em $(0,0)$;

   (b) Para que valores de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ existe $\frac{\partial f}{\partial (a,b)}(0,0)$? Justifique;

   (c) Verifique se f é derivável em $(0,0)$;

   (d) Calcule, caso exista, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

6. Considere a função f: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5xy^4}{2x^2+3y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Prove que f é contínua em $(0,0)$.

   (b) Estude a derivabilidade de f em $(0,0)$.

7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

   (b) Determine a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$, para qualquer $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

   (c) Estude a derivabilidade de f em $(0,0)$.

8. Diga se a função f: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   é de classe C^1.

9. Considere a função f: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ em cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Verifique se f é de classe C^1.

10. Determine o *gradiente* da função f nos pontos onde ele exista, para:

    (a) $f(x,y) = 2x^2y^3 - x\mathrm{e}^{\,y}$;

    (b) $f(x,y) = xy + x\mathrm{e}^{\,x}$;

    (c) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x^2+y+3z)$;

    (d) $f(x,y,z) = \log(-x+z) - \log(y+z)$.

11. Sejam f uma função real derivavel em $\mathbb{R}^2$ e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tais que

    $$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a,b) = 1\ , \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b) = 2\ , \quad \text{onde} \quad \vec{v} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2\ , \quad \vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

    Determine $\nabla f(a,b)$, $f'(a,b)$ e $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{w}}(a,b) = 0$.

12. Determine os pontos da curva de equação $x^3 + y^2 + 3x = 0$ cuja tangente é horizontal ou vertical.

13. Determine os pontos da elipse $2x^2 + y^2 = 1$ cuja tangente passa pelo ponto $(1,1)$.

14. Determine os pontos da curva $x^2 + y^2 - 2x + xy = 0$ cuja normal é paralela à recta $y = x$.

15. Para cada uma das seguintes funções, determine o plano tangente ao seu gráfico no ponto indicado:

    (a) $f(x,y) = 2x^2 - y^2$, ponto $(2,-1,7)$;

    (b) $f(x,y) = 2x^2y^3 - x\mathrm{e}^{\,y}$, ponto $(0,0,0)$;

    (c) $f(x,y) = x^2 + y^2$, ponto $(0,0,0)$.

16. Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que as funções $g, h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas a seguir satisfazem as condições indicadas:

    (a) $g(x,y) = xy + f\left(x^2+y^2\right), \qquad y\,\dfrac{\partial g}{\partial x} - x\,\dfrac{\partial g}{\partial y} = y^2 - x^2;$

    (b) $h(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + f\left(\dfrac{1}{x} + \log y\right), \qquad x^2\,\dfrac{\partial h}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial h}{\partial y} = y^2.$

17. Sejam f e g funções reais deriváveis em $\mathbb{R}$. Mostre que a função h definida por $h(x,y) = f(x+y) + g(x-y)$ verifica a equação $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0\,.$

18. Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x,y) = x^2 y$ e $g(t) = f(\mathrm{e}^{\,t^2}, 2t+1)$. Determine $g'(t)$, para $t \in \mathbb{R}$.

19. Sejam $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x,y) = x^2 \mathrm{e}^{\,xy} + y^2 \operatorname{sen}(xy)$ e $g(s,t) = f(s^2 t, s\mathrm{e}^{\,t})$. Determine as derivadas parciais de g.

20. Seja $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e defina-se $f\colon U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $f(x,y,z) = x^3\, F\left(\dfrac{y}{x}\,,\, \dfrac{z}{x}\right)$. Verifique que $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = 3f$.

21. Considere $z : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $z(x,y) = y + F(x^2 - y^2)$, onde $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1. Prove que $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = x\,.$

22. Dada $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, defina-se $g : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $g(x,y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Mostre que $x\dfrac{\partial g}{\partial x} + y\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0\,.$

23. Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \log\left(1 + x^2 + y^2\right)$ e $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(t) = f\,(\operatorname{sen} 3t, \cos 3t)$. Calcule $h'(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

24. Mostre que $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ para $u\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x,y) = f\,(x-y, y-x)\,,$ onde $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1.

25. Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^2 e $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x,y) = f\,(x + g(y))$. Verifique que $\dfrac{\partial u}{\partial x}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$

26. Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e defina-se $\phi\colon U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $\phi(x,y,z) = f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}, \dfrac{z}{x}\right)$. Mostre que $x\,\dfrac{\partial \phi}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial \phi}{\partial y} + z\,\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = 0\,.$

Universidade do Minho — Lic. Ciências da Computação

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

— folha 6 — funções vectoriais de várias variáveis reais ——— 2010'11 ———

1. Considere as funções:

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (xy, \operatorname{sen}(xy), \mathrm{e}^{x}) \end{array} \qquad f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x^2y + y^2z \end{array}$$

   (a) Determine a derivada de $f \circ u$ num ponto (x, y);

   (b) Use a alínea anterior para determinar $(f \circ u)'(0,2)(2,1)$.

2. Escreva o polinómio de Taylor de ordem 2 para as funções apresentadas a seguir, em torno dos pontos indicados:

   (a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$, ponto $(1,\pi)$;

   (b) $f(x,y) = \cos(xy)$, ponto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

   (c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$, ponto $(0,0)$;

   (d) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + \cos(xy)$, ponto $(0,0)$;

   (e) $f(x,y) = (x+y)^2$, ponto $(0,0)$.

3. Escreva o polinómio de Taylor de ordem 3 para a função

$$f(x,y) = (x+y)^2$$

   em torno do ponto $(1,2)$.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + \cos(xy)$.

   (a) Determine o polinómio de Taylor e o resto de Lagrange de segunda ordem de f no ponto $(0,0)$;

   (b) Verifique se existe e é finito $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-1}{x^2+y^2}$.

5. Determine os pontos críticos de cada uma das funções apresentadas a seguir. Averigue se algum deles é ponto extremante, recorrendo apenas ao estudo do comportamento da função em torno de cada ponto críticos.

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^4$;
   (b) $f(x,y) = 2 - x - y^2$;
   (c) $f(x,y) = xy$;
   (d) $f(x,y) = x^2y^2$;
   (e) $f(x,y) = 1 - x^2$;
   (f) $f(x,y) = x^2 - y^2$.

6. Determine, caso existam, os extremos locais das funções definidas por:

   (a) $f(x,y) = (2x-y)^2$;
   (b) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 - 1$;
   (c) $f(x,y) = x^3y^3$;
   (d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2xz - xy$;
   (e) $f(x,y) = \operatorname{sen} x \cos y$;
   (f) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$;
   (g) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$;
   (h) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 4z^2$.
   (i) $f(x,y) = \frac{9}{4}y^2 - 3x^2y + x^4 - x^5$

7. Determine, caso existam, os extremos locais da seguinte função

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2y + xy^2 + xy - 1 \end{array}.$$

8. Determine os extremos das funções f definidas a seguir, vinculados pelas condições indicadas:

   (a) $f(x,y) = xy, \qquad x^2 + y^2 = 4$;
   (b) $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2, \qquad 2x + 3y + 4z = 12$;
   (c) $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2, \qquad z^2 - xy = 1$;
   (d) $f(x,y) = xy, \qquad x + y = 1$;
   (e) $f(x,y) = x^3 + y^3, \qquad x^2 + y^2 = 1$;
   (f) $f(x,y,z) = y(x+z), \qquad x^2 + y^2 - 2 = 0,\ \ yz - 2 = 0$.

9. Analise, em função dos parâmetros a e b, os extremos da função $f(x,y,z) = ax^2 + by^2$ sobre a superfície esférica

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

   supondo que $a < 0$ e $b > 0$.

10. Determine o ponto de cota mais alta da intersecção do paraboloide $x^2 + y^2 = 5 - z$ com o plano $x + y + z = 1$.

11. Calcule o máximo e o mínimo da função

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & xz+xy+yz \end{array}$$

restrita ao conjunto $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq 1, z\in[-1,1]\}$.

12. Considere $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, definida por $f(x,y,z)=x+y^2$, e o conjunto

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=z \ \wedge \ x^2+y^2+z^2=1\}.$$

Calcule, caso existam, o máximo e o mínimo da função f restrita a K.

13. Em cada uma das seguintes alíneas, verifique que a equação dada define implicitamente uma função z de (x,y) numa bola de centro no ponto apresentado, e determine as derivadas parciais indicadas:

   (a) $\operatorname{sen}(xyz)=x+y+z, \quad (0,0,0), \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0);$

   (b) $z=(xy)^z, \quad (1,1,1), \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,1);$

   (c) $\log(xyz)+\mathrm{e}^{x+2y-z}=1, \quad (1,\tfrac{1}{2},2), \quad \dfrac{\partial z}{\partial x}(1,\dfrac{1}{2}),\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(1,\dfrac{1}{2});$

   (d) $\cos(y-z)+\operatorname{sen}(x+z)=1, \quad (0,0,0), \quad \dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0),\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0);$

   (e) $\operatorname{sen}(x+z)+\cos(y+z)=z+1, \quad (\pi,0,0), \quad \dfrac{\partial z}{\partial x}(\pi,0);$

   (f) $\mathrm{e}^{xyz-1}+xyz=2, \quad (1,1,1), \quad \dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1).$

14. Considere a seguinte equação de três variáveis reais

$$xz^2+xy^2z=yz^2+5.$$

   (a) Mostre que a equação apresentada define z como função de (x,y) numa bola de centro no ponto $(3,1,1)$.

   (b) Determine o vector que indica a direcção e o sentido de maior crescimento de $z(x,y)$ partindo de $(3,1)$.

   (c) Para $z: B((3,1),\delta)\to\mathbb{R}$, definida na alínea (a), $\delta>0$, determine $H'(3,1)$, onde $H(x,y)=G(x,y,z(x,y))$ definida em $B((3,1),\delta)$, com $G(x,y,z)=e^{xy}+xyz$.

15. Seja $z=\varphi(x,y)$ uma função definida implicitamente, numa bola de centro em $(1,1,0)$, pela equação $xe^{yz}+z\log y=1$. Determine $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(1,1)$.

16. Mostre que sistema de equações

$$\begin{cases} yv^2 - u^2 + x^3 = 1 \\ \\ 4xv - yu^3 + \log y = 0 \end{cases}$$

define u e v como funções de (x, y) numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 2, 2)$.

17. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - zy + 1 = 0 \\ \\ 3x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}.$$

   (a) Mostre que o sistema é resolúvel em ordem a y e a z numa vizinhança de $(0, 1, 1)$;

   (b) Escrevendo numa vizinhança de $(0, 1, 1)$, isto é $y = y(x)$ e $z = z(x)$, calcule $y''(0)$.

18. Seja $z = \varphi(x, y)$ uma função definida implicitamente, numa bola de centro em $(1, 1, 0)$, pela equação $zx + 2ye^z = 3^x - 1$. Determine $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(1, 1)$.

19. Mostre que a equação $x^3z^2 - z^3yx = 0$ define, nas condições do teorema da função implícita, z como função de (x, y) numa bola de centro $(1, 1, 1)$ e calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1, 1)$. Analise o que se passa numa qualquer bola de centro em $(0, 0, 0)$.

20. Nas condições do teorema da função implícita, a equação $F\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right) = 0$ define, para $x \neq 0$, z como função de (x, y). Mostre que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

21. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(1, 2) = f(2, 1) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 2$. Prove que a equação $(z + f(x, y))\,(z + f(y, x)) = 1$ define z como função implícita de (x, y) numa bola de centro em $(1, 2, 1)$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1, 2)$.

22. Considere a função

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x + xyz, y + xy, z + 2x + 3z^2) \end{array}.$$

Verifique que f é localmente invertível numa bola de centro no ponto $(0, 0, 0)$.

23. Considere a função

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x^2-y^2, 2xy) \end{array}.$$

(a) Mostre que f é localmente invertível numa bola de centro no ponto $(x,y) \neq (0,0)$;

(b) Para $(x,y) = (1,-1)$, considere a bola $B((1,-1),\delta)$ de tal forma que a função

$$f|_{B((1,-1),\delta)} \rightarrow f\left(B((1,-1),\delta)\right)$$

seja bijectiva. Determine $\left(f|_{B((1,-1),\delta)}\right)^{-1}(0,-2)$.

24. Considere a função

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x^3, y) \end{array}.$$

Mostre que f é invertível, mesmo com o determinante da matriz de $f'(0,0)$ nulo.

25. Considere a função

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (\mathrm{e}^{\,xy} + x^3y^3 + y^2, y^2) \end{array}.$$

(a) Mostre que f é localmente invertível numa bola de centro no ponto (x,y) com $y \neq 0$.

(b) Verifique se f é localmente invertível em algum ponto da forma $(x,0)$.

Universidade do Minho — Lic. Ciências da Computação

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

— folha 7 — Integração múltipla — 2010'11 —

1. Calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy$ para:

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^2$ e $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,1]$;

   (b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$ e $\mathcal{D} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le y\,,\ y \le 0\,,\ x+y+1 \ge 0\big\}$;

   (c) $f(x,y) = \cos(x+y)$ e $\mathcal{D} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1\big\}$;

   (d) $f(x,y) = 10 + y$ e $\mathcal{D} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\,,\ x \ge 1\big\}$;

   (e) $f(x,y) = 1$ e $\mathcal{D} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\big\} \cup [3,5] \times [1,3]$.

2. Inverta a ordem de integração nos seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{y+3} f(x,y)\,dxdy$;

   (b) $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} f(x,y)\,dydx$;

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x,y)\,dxdy$;

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} f(x,y)\,dydx$;

   (e) $\displaystyle\int_1^2 \int_{x^2}^{x^3} f(x,y)\,dydx$;

   (f) $\displaystyle\int_0^2 \int_x^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dydx$.

3. Invertendo a ordem de integração, calcule:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}\,dydx$;

   (b) $\displaystyle\int_1^{e^3} \int_{\log y}^3 dxdy$;

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}\,dx\,dy$;

   (d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \int_{\log y}^1 \frac{(x^2+1)^{13}}{y}\,dx\,dy$.

4. Usando integrais duplos, calcule a área de cada uma das regiões planas R que se seguem:

   (a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ \mathrm{e}^{-x} \leq y \leq \mathrm{e}^{x}\}$;

   (b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ y \leq -2x^2 - x + 3,\ y \leq -x + 1\}$;

   (c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2,\ y \leq 4 - x^2\}$;

5. Usando integrais duplos, calcule o volume de cada um dos sólidos S que se seguem:

   (a) $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2,\ \mathrm{e}^{-x} \leq y \leq \mathrm{e}^{x},\ 0 \leq z \leq x + y\}$;

   (b) $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0,\ y \leq x^2 - 2x,\ x - y \leq z \leq x + y\}$;

   (c) $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0,\ x \leq y^2 - y,\ x \leq z + y,\ y \leq -x - z\}$.

6. Calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, d(x, y)$, onde $\mathcal{D} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\big\}$ e f é a função definida a seguir, efectuando a mudança de variáveis indicada:

   (a) $f(x, y) = \cos\left(\dfrac{x - y}{x + y}\right), \quad x - y = u\,, \quad x + y = v$;

   (b) $f(x, y) = \exp\left(\dfrac{y}{x + y}\right), \quad x + y = u\,, \quad y = uv$.

7. Determine as coordenadas polares dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A = (3, \sqrt{3}), \quad B = (0, 2), \quad C = (0, -2), \quad D = (-4, -4), \quad E = (1, 1).$$

8. Determine as coordenadas cartesianas dos pontos cuja representação polar é

$$A = \left(1, \frac{\pi}{4}\right), \quad B = \left(2, \frac{3\pi}{2}\right), \quad C = (5, 0), \quad D = \left(5, \frac{\pi}{2}\right), \quad E = \left(3, \frac{11\pi}{6}\right),$$

9. Determine a equação polar das curvas de equações cartesianas:

   (a) $y = x$;

   (b) $x^2 + y^2 = 1$;

   (c) $y = 3\,, \quad x \geq 0$;

   (d) $x^2 + y^2 = 9\,, \quad y \geq x$;

   (e) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$;

   (f) $y = 3x + 6$.

10. Passando para coordenadas polares, calcule $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,d(x,y)$, onde:

(a) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$ e $\mathcal{D}=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 5\big\}$;

(b) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{-1}\log\left(x^2+y^2\right)$ e $\mathcal{D}$ é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências de equações $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=9$;

(c) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ e $\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 1\le x^2+y^2\le 9,\ \sqrt{3}y\ge x,\ \sqrt{3}x\ge y\right\}$;

(d) $f(x,y)=x^2+y^2$ e $\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 0\le x\le 2\,,\ 0\le y\le\sqrt{2x-x^2}\right\}$;

(e) $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ e $\mathcal{D}=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ y\le x\,,\ y\ge x^2\,,\ x\ge 0\big\}$.

11. Passando para coordenadas cartesianas, calcule

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}/(2\cos\theta)} \rho\ \ d\rho\,d\theta.$$

12. Usando integrais duplos, calcule a área de cada uma das regiões planas R que se seguem:

(a) $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\ge -x,\ y\le x,\ x^2+y^2\le 9\}$;

(b) $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4,\ y\le x,\ x\ge 0\}$;

(c) $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 16,\ (x+2)^2+y^2\ge 4,\ y\ge 0\}$.

13. Usando integrais duplos, calcule o volume dos seguintes sólidos:

(a) $A=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le z\le x^2+y^2\big\}$;

(b) $B=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ 0\le x\le 2\,,\ 0\le y\le 2\,,\ z\ge 0\,,\ y+z\le 2\big\}$;

(c) $C=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2\le 1\,,\ z\ge 0\,,\ y+z\le 3\big\}$.

14. Usando integrais duplos, calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies de equações:

(a) $z=0\,,\ z=3\,,\ y=x^2\,,\ x=y^2\,;$

(b) $z=3\,,\ z=x^2+y^2\,;$

(c) $x^2+y^2=2z\,,\ x^2+y^2+z^2=3;$

(d) $z=4-x^2-y^2\,,\ z=0.$

15. Calcule $\displaystyle\iiint_{\mathcal{R}} f(x,y,z)\,d(x,y,z)$, onde:

   (a) $f(x,y,z) = x+y+z$ e $\mathcal{R} = [0,2]\times[0,2]\times[0,2]$;

   (b) $f(x,y,z) = y$ e $\mathcal{R}$ é a região de $\mathbb{R}^3$ limitada pelos planos coordenados e pelo plano de equação $x+y+z=1$;

   (c) $f(x,y,z) = x$ e $\mathcal{R}$ é a região de $\mathbb{R}^3$ definida pelas condições $x^2+y^2 \leq z \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

16. Determine as coordenadas cilíndricas dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A = (1, \sqrt{3}, -1), \qquad B = (2,0,0), \qquad C = (0,-5,3) \quad \text{e} \quad D = (3,-3,2).$$

17. Determine as coordenadas cartesianas dos pontos cuja representação em coordenadas cilíndricas é

$$A = (1,\pi,2), \qquad B = \left(\frac{\pi}{4}, 0, 2\right), \qquad C = v\,(0,\pi,2) \quad \text{e} \quad D = \left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, 1\right).$$

18. Determine a equação em coordenadas cilíndricas das superfícies em $\mathbb{R}^3$ de equações cartesianas

   (a) $x^2+y^2=1$;   (b) $x^2+y^2+z^2=1$;   (c) $x^2+y^2=z^2$;

   (d) $x+y+z=1$;   (e) $y=x$;   (f) $z=1$.

19. Determine a equação cartesiana das superfícies de $\mathbb{R}^3$ cujas equações em coordenadas cilíndricas são:

   (a) $\rho=3$;   (b) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$;   (c) $z=1$;   (d) $z = 2-\sqrt{4-\rho^2}$.

20. Usando coordenadas cilíndricas, calcule $\iiint_{\mathcal{R}} f(x,y,z)\, d(x,y,z)$, para

 (a) $f(x,y,z) = x$ e $\mathcal{R} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 3\,,\ x^2+y^2 \le z\}$;

 (b) $f(x,y,z) = z\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}$ e $\mathcal{R} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \le z \le 3\,,\ x^2+y^2 \le 4\}$;

 (c) $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2}$ e $\mathcal{R}$ a região do primeiro octante limitada pelas superfícies cilíndricas de equações $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=9$ e pelos planos de equações $z=0$, $z=1$, $x=0$ e $x=y$.

21. Determine as coordenadas esféricas dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A=(1,-1,0), \qquad B=(1,1,\sqrt{2}), \qquad C=(-1,-1,\sqrt{2}) \quad \text{e} \quad D=(0,1,-1).$$

22. Determine a equação em coordenadas esféricas das superfícies em $\mathbb{R}^3$ de equações cartesianas:

 (a) $x^2+y^2=1$;

 (b) $x^2+y^2+z^2=1$;

 (c) $x^2+y^2=z^2$;

 (d) $x+y+z=1$;

 (e) $y=x$;

 (f) $z=1$.

23. Determine a equação cartesiana das superfícies de $\mathbb{R}^3$ cuja equação em coordenadas esféricas é:

 (a) $r=2$; (b) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$; (c) $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$; (d) $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$; (e) $r=4\cos\varphi$.

24. Usando coordenadas esféricas, descreva o sólido

$$\mathcal{S} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+(z-2)^2 \le 4 \right\}.$$

25. Calcule o volume do sólido que é:

 (a) definido pelas condições $3z \ge x^2+y^2$ e $x^2+y^2+z^2 \le 4$;

 (b) definido pelas condições $x^2+y^2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$;

 (c) limitado pela superfície esférica de equação $r=1$ e pela superfície cónica de equação $\varphi=\pi/4$.

26. Estabeleça um integral (ou soma de vários integrais) que dê o volume dos sólidos:

(a) $S=\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+(z-1)^2\geq 1\ \wedge\ x^2+y^2+(z-2)^2\leq 4\ \wedge\ z\geq 1\}$;

(b) $T=\Big\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x>0\ \wedge\ y>0\ \wedge\ 0<z<\sqrt{x^2+y^2}\ \wedge\ x^2+y^2+z^2<1\Big\}$.

27. Usando integrais triplos, calcule o volume dos sólidos:

(a) $S_1=\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\leq 1-z^2\,\}$;

(b) $S_2=\Big\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1-\sqrt{x^2+y^2}\ \wedge\ y\geq 0\Big\}$.

28. Estabeleça um integral que dê o volume do sólido definido pela condição

$$\Big(z\geq\sqrt{x^2+y^2}\ \wedge\ 0\leq z\leq 1\Big)\ \vee\ \big(x^2+y^2\leq 1\wedge 1\leq z\leq 2\big)\,.$$