Cálculo II

Licenciatura em Matemática 2017/2018

Integral indefinido de uma função real de variável real

Definição

Definição: Seja $f : D \to \mathbb{R}$, com $D \subseteq \mathbb{R}$ uma união finita de intervalos não triviais, uma função.
Uma função $F : D \to \mathbb{R}$ diz-se uma *primitiva* de f se F é derivável e todos os pontos de D e

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in D.$$

Exemplo: $F(x) = \frac{x^2}{2}$ e $G(x) = \frac{x^2}{2} + 3$ são primitivas da função $f(x) = x$ porque

$$F'(x) = G'(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observação: Como consequência do exemplo anterior, observa-se que, quando uma função admite uma primitiva, esta não é única.

Proposição: Se F_1 e F_2 são primitivas de f num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que:

$$F_1(x) - F_2(x) = c, \quad \forall x \in I.$$

Dem. A prova foi feita nas aulas.□

Notação: Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função real cujo domínio I é um intervalo não trivial. Chama-se *integral indefinido* de f ao conjunto de todas as primitivas de f, denotando-se por $\displaystyle\int f(x)\,dx$. Consequentemente,

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

em que $c \in \mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$.

Propriedades: Dadas duas funções primitivaveis (ou seja, que têm primitiva), f e g, e uma constante $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

- $\displaystyle\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx;$
- $\displaystyle\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx.$

Dem. Consequência das regras de derivação e da definição de integral indefinido. A formalização das provas fica como exercício. □

Primitivas imediatas

Primitivas que se obtêm directamente das regras de derivação.

Exemplo:

$$\int \operatorname{sen}(3x)dx = -\frac{1}{3}\int -3\operatorname{sen}(3x)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercícios:

Calcule cada um dos integrais indefinidos que se seguem:

(i) $\int 2xe^{x^2}dx;$	(ii) $\int e^{3x}dx;$
(iii) $\int x^3 + 3dx;$	(iv) $\int x\sqrt{x^2+1}dx;$
(v) $\int (x+4)^{10}dx;$	(vi) $\int \operatorname{tg}(x)dx;$
(vii) $\int \frac{2x}{x^2-1}dx;$	$(viii)$ $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx;$
(ix) $\int \frac{1}{x}\operatorname{sen}(\log(3x))dx;$	(x) $\int x^2(x^3+1)^7dx;$
(xi) $\int \operatorname{sh}(x)dx;$	(xii) $\int e^{3x}\operatorname{ch}(e^{3x})dx;$
$(xiii)$ $\int \operatorname{sen}(x)\cos(x)dx;$	(xiv) $\int x^2(x^3+1)^7dx;$
(xv) $\int \operatorname{sen}^3(x)dx;$	(xvi) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx;$
$(xvii)$ $\int \frac{x}{1+x^4}dx;$	$(xviii)$ $\int \frac{x}{1-x^4}dx;$

Primitivação por partes

Método de primitivação baseado na regra de derivação do produto.

Sendo u e v funções deriváveis num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, da regra de derivação do produto tem-se

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \Rightarrow u'(x)v(x) = (u(x)v(x))' - v'(x)u(x),$$

donde

$$\int u'(x)v(x)dx = \int (u(x)v(x))'dx - \int v'(x)u(x)dx$$

e consequentemente

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int v'(x)u(x)dx.$$

Exemplo:

$\displaystyle\int x\cos(x)dx = x\,\mathrm{sen}\,(x) - \int 1\mathrm{sen}\,(x)dx = x\,\mathrm{sen}\,(x) + \cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Exercícios:

Use integração por partes para calcular cada um dos seguintes integrais indefinidos:

(i) $\displaystyle\int \log x dx;$ *(ii)* $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}\,(x)dx;$

(iii) $\displaystyle\int e^x\cos(x)dx;$ *(iv)* $\displaystyle\int \mathrm{arctg}\,(x)dx;$

(v) $\displaystyle\int (3x^2+1)\log(x+1)dx;$ *(vi)* $\displaystyle\int x^2\cos(x)dx;$

(vii) $\displaystyle\int \mathrm{ch}\,(3x)\cos(2x)dx;$ *(viii)* $\displaystyle\int (x^2+x+1)e^x dx;$

(ix) $\displaystyle\int x\,\mathrm{arctg}\,(x)dx;$ *(x)* $\displaystyle\int x^5(x^3+1)^7dx.$

Primitivação por substituição

Método de primitivação baseado na regra de derivação da composta de funções.

Proposição: Sejam I e J dois intervalos de $\mathbb{R}$, $\varphi : J \to I$ função bijectiva derivável e $f : I \to \mathbb{R}$ função primitivável, com $F : I \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f. Então

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(y))\varphi'(y)dy = F(\varphi(y)) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dem. Basta provar que $F(\varphi(y))$, em que $y = \varphi^{-1}(x)$, é uma primitiva de $f(x)$.

$$\Big[F(\varphi(y))\Big]' = F'(\varphi(y))\varphi'(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y) = f(x)\Big[\varphi(\varphi^{-1}(x))\Big]' = f(x)x' = f(x).\square$$

Exemplo:
Com a mudança de variável $x = \operatorname{sen}(y)$ (pense nos domínios), obtém-se a seguinte primitiva:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}\cos(y)dy = \int \cos^2(y)dy = \int \frac{1+\cos(2y)}{2}dy =$$
$$= \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2y) + c = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercícios:

Utilize as substituições indicadas para calcular as seguintes integrais indefinidos:

(*i*) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx,$ $\qquad x = \operatorname{tg}(y);$

(*ii*) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)cos(x)}{\cos^2(x)+1}dx,$ $\qquad x = \arccos(y);$

(*iii*) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx,$ $\qquad x = \log(y);$

(*iv*) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}dx,$ $\qquad x = \operatorname{sh}(y);$

(*v*) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\log(x))dx,$ $\qquad x = e^y.$

Primitivação de fracções racionais

Chama-se *fracção racional* a uma fracção $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinómios de coeficientes reais.

Objectivo: Descrever um método de cálculo do integral indefinido de funções do tipo:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

com $p(x)$ e $q(x)$ polinómios de coeficientes reais.

Caso 1: $p(x) = q'(x)$.

Neste caso, tem-se:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \frac{q'(x)}{q(x)}dx = \log|q(x)| + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Exemplos:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x+3}dx = \log|x+3| + c, \qquad c \in \mathbb{R};$
2. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \log(x^2+3) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$

Caso 2: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{a'(x)}{[a(x)]^2+1}$

Neste caso, tem-se:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \frac{a'(x)}{[a(x)]^2+1}dx = \operatorname{arctg}(a(x)) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Exemplos:

1. $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^4}dx = \int \frac{2x}{1+(x^2)^2}dx = \operatorname{arctg}(x^2) + c, \qquad c \in \mathbb{R};$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x+x^2}dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) +$ $c, \qquad c \in \mathbb{R}.$

Caso 3: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{a'(x)}{[a(x)]^{\alpha}}$, com $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Neste caso, tem-se:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \frac{a'(x)}{[a(x)]^{\alpha}}dx = \frac{1}{1-\alpha}\int (1-\alpha)a'(x)[a(x)]^{-\alpha}dx = \frac{[a(x)]^{1-\alpha}}{1-\alpha} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemplos:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)^3}dx = \frac{-1}{2(x+2)^2} + c, \quad c \in \mathbb{R};$
2. $\displaystyle\int \frac{2x}{1+2x^2+x^4}dx = \int \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \frac{-1}{1+x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Caso Geral: Os três casos apresentados anteriormente incluem as chamadas *fracções simples* isto é, fracções do tipo

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}, \quad \text{ou} \quad \frac{Bx+C}{[(x-a)^2+b^2]^{\alpha}},$$

onde $A, B, C, a, b \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

No caso geral $\frac{p(x)}{q(x)}$, é possível escrever a fracção como soma de um polinómio com fracções simples procedendo da seguinte forma:

1. se grau $p(x) \geq$grau $q(x)$, então faz-se a divisão dos polinómios, obtendo-se

$$\frac{p(x)}{q(x)} = d(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

   com grau $r(x) <$grau $q(x)$;

2. obter as raízes reais, $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, e raízes complexas, $a_1 \pm b_1 i, a_2 \pm b_2 i, \ldots, a_l \pm b_l i \in \mathbb{C}$, e suas multiplicidades, do polinómio $q(x)$ para o factorizar na forma:

$$q(x) = (x-c_1)^{\alpha_1} \times (x-c_2)^{\alpha_2} \times \cdots \times (x-c_k)^{\alpha_k} \times \left[(x-a_1)^2 + b_1^2\right]^{\beta_1} \times \cdots \times \left[(x-a_l)^2 + b_l^2\right]^{\beta_l}$$

3. Escrever a fracção racional na forma:

$$\begin{aligned}
\frac{r(x)}{q(x)} \quad = \quad & \frac{A_{11}}{x-c_1} + \frac{A_{12}}{(x-c_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-c_1)^{\alpha_1}} + \\
& + \frac{A_{21}}{x-c_2} + \frac{A_{22}}{(x-c_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2\alpha_2}}{(x-c_2)^{\alpha_2}} + \\
& + \cdots + \frac{A_{k1}}{x-c_k} + \frac{A_{k2}}{(x-c_k)^2} + \cdots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x-c_k)^{\alpha_k}} + \\
& + \frac{B_{11}x + C_{11}}{[(x-a_1)^2 + b_1^2]} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{[(x-a_1)^2 + b_1^2]^2} + \cdots + \frac{B_{1\beta_1}x + C_{1\beta_1}}{[(x-a_1)^2 + b_1^2]^{\beta_1}} + \\
& + \cdots + \\
& + \frac{B_{l1}x + C_{l1}}{[(x-a_l)^2 + b_l^2]} + \frac{B_{l2}x + C_{l2}}{[(x-a_l)^2 + b_l^2]^2} + \cdots + \frac{B_{l\beta_l}x + C_{l\beta_l}}{[(x-a_l)^2 + b_l^2]^{\beta_l}}.
\end{aligned}$$

4. obter o integral indefinido recorrendo aos casos descritos anteriormente.

Exemplos:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-x^2-x+1}dx = ?$

   Como $x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2x+3}{x^3-x^2-x+1} \quad &= \quad \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \\
&\Rightarrow \quad x^2+2x+3 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} C = 3 \\ B = \frac{1}{2} \\ A = \frac{1}{2} \end{cases}.
\end{aligned}$$

   Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-x^2-x+1}dx \quad &= \quad \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx \\
&= \quad \frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{2}\log|x-1| + 3\frac{-1}{x-1}dx + c, \qquad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}dx = ?$

Como $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=(x-1)\left[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right]$, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1} &= \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\\
&\Rightarrow\ 3x^2+2x-2 = A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)\\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases} 3=A+B\\ 2=A+C-B\\ -2=A-C\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases} A=1\\ B=2\\ C=3\end{cases}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}dx &= \int \frac{1}{x-1}dx+\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}dx\\
&= \log|x-1|+\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\int \frac{2}{x^2+x+1}dx\\
&= \log|x-1|+\log|x^2+x+1|+\int \frac{2}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx\\
&= \log|x-1|+\log|x^2+x+1|+\frac{4}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx\\
&= \log|(x-1)(x^2+x+1)|+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c, \qquad c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exercícios:

Calcular os seguintes integrais indefinidos:

(i) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^2-1}dx$; (ii) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)^2}dx$; (iii) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+3}dx$;

(iv) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-1}dx$; (v) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{(x^2+1)^2}dx$; (vi) $\displaystyle\int \frac{5x-3}{(x^2+5)^2}$.

Exercícios:

Calcule cada um dos seguintes integrais definidos:

1. $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}dx;$
2. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x+1}dx;$
3. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2-3x}}dx;$
4. $\displaystyle\int \cos^2(x)dx;$
5. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(x)dx;$
6. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}dx;$
7. $\displaystyle\int \cos(2x)\sqrt{4-\operatorname{sen}(2x)}dx;$
8. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx;$
9. $\displaystyle\int x^2(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}dx;$
10. $\displaystyle\int \operatorname{sh}^2(x)dx;$
11. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x-\cos x}}dx;$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos x}dx$; use a mudança de variável $x = 2\operatorname{arctg} t$ e verifique previamente que $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
13. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)dx;$
14. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(x)\cos(x)dx;$
15. $\displaystyle\int \operatorname{sh}^2(x)\operatorname{ch}^2(x)dx;$
16. $\displaystyle\int \operatorname{th}(x)dx;$

17. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx;$

18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx;$

19. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+1}dx;$

20. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx;$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx;$

22. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx;$

23. $\displaystyle\int x\mathrm{sen}\,(x^2)dx;$

24. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x+2\mathrm{sen}\,x+3}dx;$

25. $\displaystyle\int x\mathrm{arctg}\,(x)dx;$

26. $\displaystyle\int x\log^2 x dx;$

27. $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}dx;$

28. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx;$

29. $\displaystyle\int x^{-2}\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}dx;$

30. $\displaystyle\int xe^{-x}dx;$