

3 Integral definido

Definição

Considera-se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.

- Uma partição P do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito de $[a, b]$ que contém os pontos a e b .

$$\mathcal{P} = \{P : P \text{ é partição de } [a, b]\}$$

- Sendo $P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ define-se:

1. soma inferior de f em relação a P por

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}), \quad \text{onde} \quad m_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} \{f(x)\}.$$

2. soma superior de f em relação a P por

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}), \quad \text{onde} \quad M_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} \{f(x)\}.$$

- Sendo $\mathcal{P} = \{P : P \text{ é partição de } [a, b]\}$, define-se:

1. integral inferior de f em $[a, b]$ por

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_{P \in \mathcal{P}} \{S(f, P)\}$$

2. integral superior de f em $[a, b]$ por

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{P \in \mathcal{P}} \{s(f, P)\}$$

- Diz-se que f é integrável em $[a, b]$ se

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Aplicação do integral definido no cálculo de áreas

- Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa e integrável. Define-se área de

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

como sendo o número real:

$$\text{área}(\mathcal{R}) = \int_a^b f(x) dx.$$

- Seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não positiva e integrável. Define-se área de

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \text{ e } g(x) \leq y \leq 0\}$$

como sendo o número real:

$$\text{área}(\mathcal{R}) = - \int_a^b g(x) dx.$$

Como consequência dos dois pontos anteriores, dadas duas funções $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis tais que $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, obtém-se a área de

$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \text{ e } g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

através do integral definido:

$$\text{área}(\mathcal{S}) = \int_a^b f(x) - g(x) dx.$$

Critérios de integrabilidade

Teorema: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e descontínua num número finito de pontos, então f é integrável.

Teorema: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e monótona, então f é integrável.

Teoremas fundamentais do Cálculo

1º Teorema fundamental do Cálculo:

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável.

Se f é contínua em $x_0 \in [a, b]$, então

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é derivável em x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

2º Teorema fundamental do Cálculo:

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável e primitivável, sendo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de f . Então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Exercícios:

1. Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável e $\mathcal{P} = \{P : P \text{ partição de } [a, b]\}$. Mostre que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P} : S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

2. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. Mostre que $|f|$ é uma função integrável e que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

3. Fazendo uso da definição do integral de Riemann, mostre que a função

$$\begin{aligned} g : [0, 2] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1, & x \in [0, 1[\\ 2, & x \in [1, 2] \end{cases} \end{aligned}$$

é integrável.

4. Seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável, com $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Considere a função

$$h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} g(x), & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}.$$

Mostre que:

- (a) a função h é integrável;
- (b) é válida a seguinte igualdade

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

[sugestão: Mostre que o integral $\int_a^b (h(x) - g(x))dx = 0$ e use as propriedades da aritmética de integrais]

5. Calcule o valor dos seguintes integrais definidos:

$$\begin{aligned} (i) \int_1^4 \sqrt{2x+1}dx; & \quad (ii) \int_0^{2\pi} |\text{sen}(x)|dx; & \quad (iii) \int_0^1 xe^x dx; \\ (iv) \int_0^\pi x \text{sen}(x)dx; & \quad (v) \int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx; & \quad (vi) \int_0^1 \frac{\text{sen} \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx; \\ (vii) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}(x) \cos(x)dx; & \quad (viii) \int_1^{10} \frac{1}{2+3x} dx; & \quad (ix) \int_0^1 \frac{1}{x^2-x} dx; \\ (x) \int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx; & \quad (xi) \int_{-2}^2 \text{sh}(x)dx; & \quad (xii) \int_{-2}^2 \text{ch}(x)dx. \end{aligned}$$

6. Calcule $\int_0^e f(x)dx$, com $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \cos(\pi x), & 0 \leq x < 1 \\ \log \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq e \end{cases}.$

7. Considere a função

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \text{sen} \sqrt{x}.$$

- (a) Justifique que f é uma função integrável.
- (b) Justifique que

$$F(x) = \int_0^{x^2} \text{sen} \sqrt{t} dt, \quad \text{para } x \in [0, 1],$$

é uma função derivável.

- (c) Calcule a derivada de F .

8. Determine $F'(x)$, sendo $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{aligned} (i) F(x) &= \int_0^x \text{sen}(t^2)dt; & (ii) F(x) &= \int_0^{x^2} (1+t^3)^{-1}dt; & (iii) F(x) &= \int_0^{x^3} e^{t^2} dt; \\ (iv) F(x) &= \int_x^\pi \text{sen}(2t)dt; & (v) F(x) &= \int_{\text{sh } x}^{\text{ch } x} \sqrt{t^2 + \text{ch } t} dt; & (vi) F(x) &= \int_{-x}^x \text{sen } t dt. \end{aligned}$$

9. Apresente um exemplo, ou justifique que não existe,:

- (a) de uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável e descontínua num número infinito de pontos;
- (b) de uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ não integrável, mas apenas descontínua num número finito de pontos;
- (c) de duas funções $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis tais que

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 g(x)dx$$

e $f(x) \neq g(x)$ para todo $x \in [-1, 1]$;

- (d) de duas funções $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas tais que

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 g(x)dx$$

e $f(x) \neq g(x)$ para todo $x \in [-1, 1]$;

10. Calcule as áreas das figuras limitadas por:

- (a) a parábola $y = \frac{x^2}{2}$ e as retas $x = 1$, $x = 3$ e $y = 0$;
- (b) a parábola $y = x^2 - 4$ e o eixo das abscissas;
- (c) a parábola $x = 2 - y - y^2$ e o eixo das ordenadas;
- (d) o gráfico $y = \sin x$ e a parábola $y = x^2 - \pi$.

11. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que:

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Mostre que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

12. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\int_0^1 |f(x)|dx = 0.$$

Mostre que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

13. Calcule a área da região(limitada) compreendida entre os gráficos das funções f e g definidas por:

- (a) $f(x) = x^3$ e $g(x) = x$;
- (b) $f(x) = 4 - x^2$ e $g(x) = 0$;
- (c) $f(x) = 4 - x^2$ e $g(x) = 8 - 2x^2$;
- (d) $f(x) = |x|$ e $g(x) = -x^2 + x + 4$.

14. Calcule a área de cada uma das regiões:

- (a) $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2}x^2 - 1 \leq y \leq \frac{1}{2}x^2 \right\}$;
- (b) $B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - 2x \leq y \leq x^2 \right\}$;
- (c) $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x + 3 \right\}$;
- (d) $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y+1}{2} \geq x \geq y^2 \right\}$;
- (e) $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 1 \leq y \leq \frac{x}{2} \text{ e } x(x-1) \leq 2y \right\}$;