Matemática das Coisas

Parte 4

Grafos

Aula de 16 de Maio de 2023

José Joaquim Martins Oliveira

Grafos

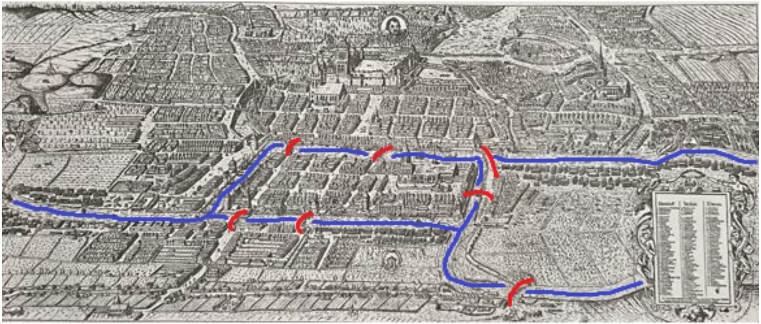
Grafos – Motivação

1- Problema das sete pontes de Königsberg (1736):

- Na cidade existiam sete pontes sobre o rio Pregel.
- Será possível visitar toda a cidade e regressar ao ponto de partida atravessando cada ponte uma única vez?

Grafos – Motivação

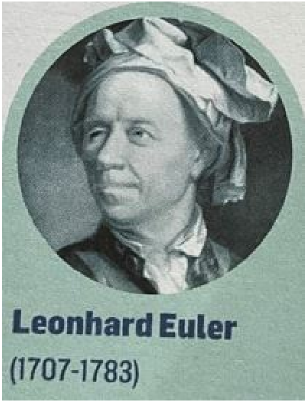
1- Problema das sete pontes de Königsberg (1736):



- Na cidade existiam sete pontes sobre o rio Pregel.
- Será possível visitar toda a cidade e regressar ao ponto de partida atravessando cada ponte uma única vez?

Grafos – Motivação

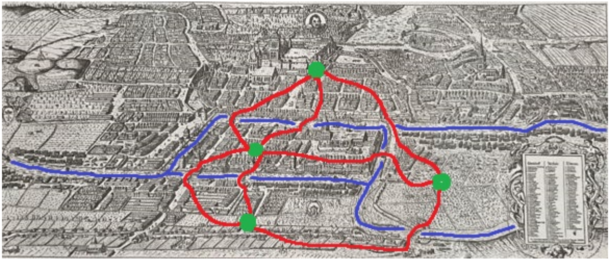
1- O problema das sete pontes de Königsberg foi proposto por



- Foi ele que deu início à teoria de grafos.

Grafos – Motivação

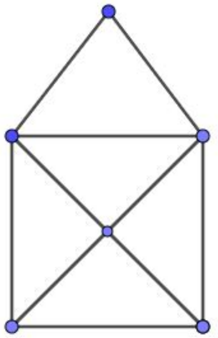
Formalizando:



- A solução do problema obtém-se se for possível desenhar as linhas a vermelho sem levantar o lápis e sem passar mais do que uma vez por cada linha.

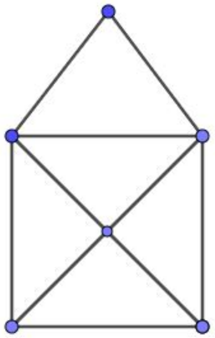
Grafos – Motivação

2- É possível desenhar a “casa”sem levantar o lápis e sem passar duas vezes sobre no mesmo segmento de recta?



Grafos – Motivação

2- É possível desenhar a "casa"sem levantar o lápis e sem passar duas vezes sobre no mesmo segmento de recta?



3- É possível desenhar a "casa", sem levantar o lápis e sem passar duas vezes sobre no mesmo segmento de recta, terminando no ponto onde começou?

Grafos – Definição

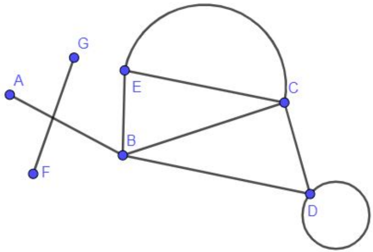
Um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ consiste em

- conjunto $\mathcal{V}$, finito e não vazio, de pontos chamados vértices
- conjunto $\mathcal{A}$, possivelmente vazio, de ligações entre pares de vértices, chamadas arestas.

Grafos – Definição

Um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ consiste em

- conjunto $\mathcal{V}$, finito e não vazio, de pontos chamados vértices
- conjunto $\mathcal{A}$, possivelmente vazio, de ligações entre pares de vértices, chamadas arestas.

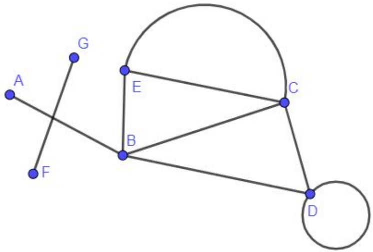


Vértices

Grafos – Definição

Um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ consiste em

- conjunto $\mathcal{V}$, finito e não vazio, de pontos chamados vértices
- conjunto $\mathcal{A}$, possivelmente vazio, de ligações entre pares de vértices, chamadas arestas.



Vértices

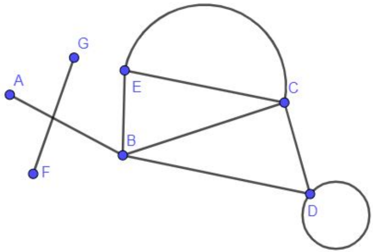
$\mathcal{V} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$

Arestas

Grafos – Definição

Um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ consiste em

- conjunto $\mathcal{V}$, finito e não vazio, de pontos chamados vértices
- conjunto $\mathcal{A}$, possivelmente vazio, de ligações entre pares de vértices, chamadas arestas.



Vértices

$$\mathcal{V} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$

Arestas

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \;=\; & \{(AB), (BE), (EC), \\ & (EC), (CB), (CD), \\ & (DD), (DB), (FG)\} \end{aligned}$$

Os grafos têm inúmeras aplicações,

sendo estrutura ideais para representar

Os grafos têm inúmeras aplicações,

sendo estrutura ideais para representar

- redes de transporte

Os grafos têm inúmeras aplicações,

sendo estrutura ideais para representar

- redes de transporte
- relações sociais

Os grafos têm inúmeras aplicações,

sendo estrutura ideais para representar

- redes de transporte
- relações sociais
- canais de comunicação

Os grafos têm inúmeras aplicações,
sendo estrutura ideais para representar

- redes de transporte
- relações sociais
- canais de comunicação
- labirintos

Os grafos têm inúmeras aplicações,

sendo estrutura ideais para representar

- redes de transporte
- relações sociais
- canais de comunicação
- labirintos
- conexões em geral

Os grafos têm inúmeras aplicações, sendo estrutura ideais para representar

- redes de transporte
- relações sociais
- canais de comunicação
- labirintos
- conexões em geral

Os vértices podem representar

- locais, estações, nós
- pessoas, páginas de internet, perfis
- e muitos outros "objectos" ...

Os grafos têm inúmeras aplicações,

sendo estrutura ideais para representar

- redes de transporte
- relações sociais
- canais de comunicação
- labirintos
- conexões em geral

As arestas podem representar

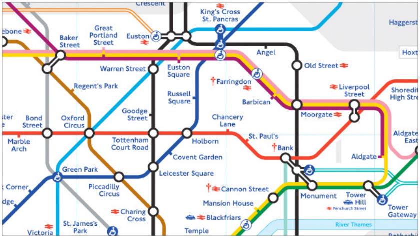
- ruas, canalizações, linha elétricas, vias de comunicação
- relações de amizade, ligações entre servidores,
- e muitos outras "ligações" ...

Os grafos surgem em variados contextos

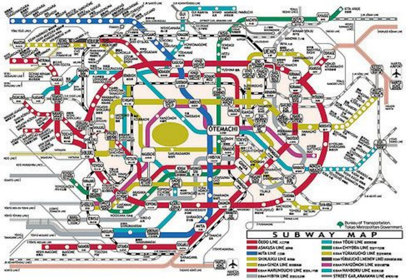
Metro do Porto

Metro de Lisboa

Os grafos surgem em variados contextos

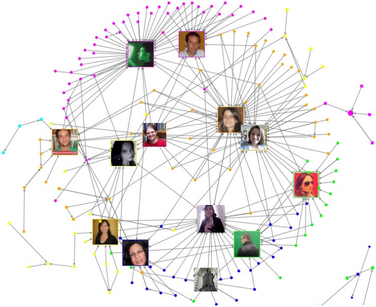


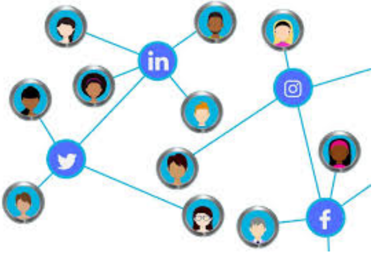
Metro de Londres



Metro de Tóquio

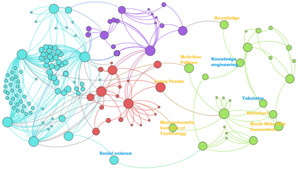
Os grafos surgem em variados contextos

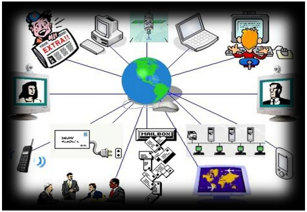




Redes sociais

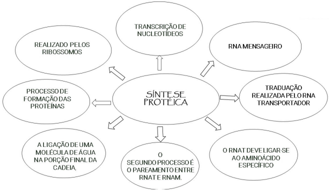
Os grafos surgem em variados contextos

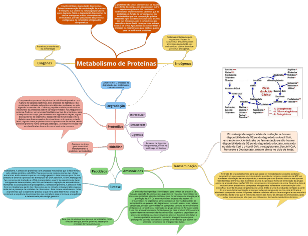


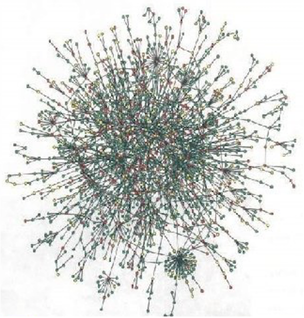


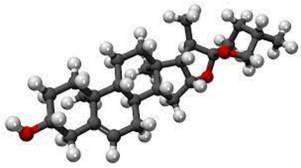
Fluxos de Informação

Os grafos surgem em variados contextos





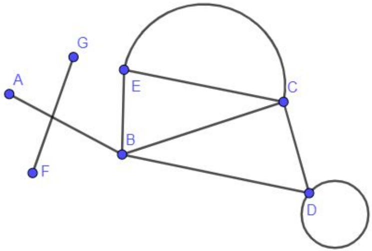




Ligações biológicas e moleculares

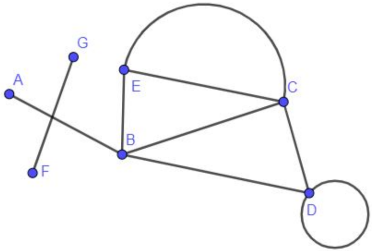
Grafos – Noções gerais

No grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ onde $\mathcal{V} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ e
$\mathcal{A} = \{(AB), (BE), (EC), (EC), (CB), (CD), (DD), (DB), (FG)\}$



Grafos – Noções gerais

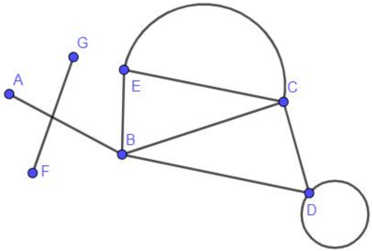
No grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ onde $\mathcal{V} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ e $\mathcal{A} = \{(AB), (BE), (EC), (EC), (CB), (CD), (DD), (DB), (FG)\}$



- A aresta (DD) chama-se lacete;

Grafos – Noções gerais

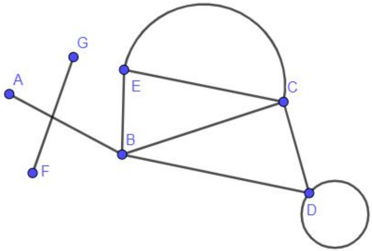
No grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ onde $\mathcal{V} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ e
$\mathcal{A} = \{(AB), (BE), (EC), (EC), (CB), (CD), (DD), (DB), (FG)\}$



- A aresta (DD) chama-se lacete;
- As arestas (EC) dizem-se paralelas;

Grafos – Noções gerais

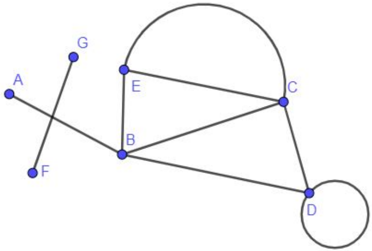
No grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ onde $\mathcal{V} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ e $\mathcal{A} = \{(AB), (BE), (EC), (EC), (CB), (CD), (DD), (DB), (FG)\}$



- A aresta (DD) chama-se lacete;
- As arestas (EC) dizem-se paralelas;
- Vértices ligados por arestas dizem-se adjacentes;

Grafos – Noções gerais

No grafo $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{A})$ onde $\mathcal{V}=\{A,B,C,D,E,F,G\}$ e $\mathcal{A}=\{(AB),(BE),(EC),(EC),(CB),(CD),(DD),(DB),(FG)\}$



- A aresta (DD) chama-se lacete;
- As arestas (EC) dizem-se paralelas;
- Vértices ligados por arestas dizem-se adjacentes;
- Arestas que ligam um vértice, V, dizem-se incidentes em V.

Grafos – Noções gerais

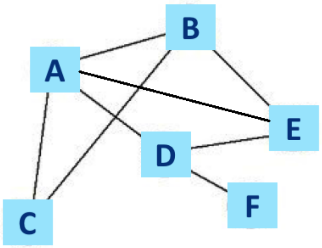
Dado um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$

- chamamos grau de um vértice V, e representa-se por $g(V)$, ao número de arestas incidentes no vértice V

Grafos – Noções gerais

Dado um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$

- chamamos grau de um vértice V, e representa-se por $g(V)$, ao número de arestas incidentes no vértice V



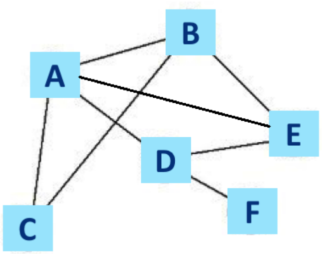
Graus

$g(A) =$

Grafos – Noções gerais

Dado um grafo $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{A})$

- chamamos grau de um vértice V, e representa-se por $g(V)$, ao número de arestas incidentes no vértice V



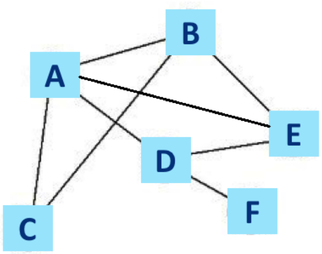
Graus

$g(A)=3$

Grafos – Noções gerais

Dado um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$

- chamamos grau de um vértice V, e representa-se por $g(V)$, ao número de arestas incidentes no vértice V



Graus

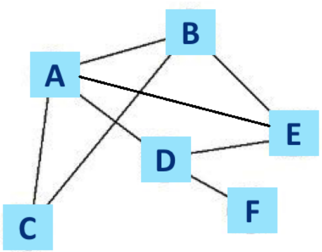
$g(A) = 3$

$g(B) =$

Grafos – Noções gerais

Dado um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$

- chamamos grau de um vértice V, e representa-se por $g(V)$, ao número de arestas incidentes no vértice V



Graus

$g(A) = 3$

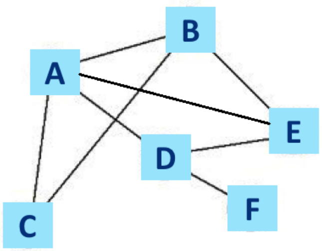
$g(B) = 3$

$g(C) =$

Grafos – Noções gerais

Dado um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$

- chamamos grau de um vértice V, e representa-se por $g(V)$, ao número de arestas incidentes no vértice V



Graus

$g(A) = 3$

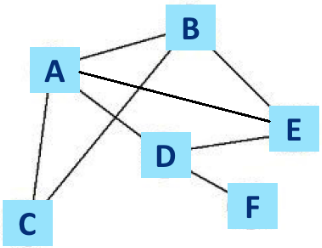
$g(B) = 3$

$g(C) = 2$

Grafos – Noções gerais

Dado um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$

- chamamos grau de um vértice V, e representa-se por $g(V)$, ao número de arestas incidentes no vértice V



Graus

$g(A) = 3$ $\qquad$ $g(D) = 3$

$g(B) = 3$ $\qquad$ $g(E) = 2$

$g(C) = 2$ $\qquad$ $g(F) = 1$

O grau pode ter vários significados, consoante o contexto.

Num grafo, definimos

- passeio como uma sequência de vértices, possivelmente não todos distintos, tais que cada dois vértices consecutivos define uma aresta.

Num grafo, definimos

• passeio como uma sequência de vértices, possivelmente não todos distintos, tais que cada dois vértices consecutivos define uma aresta.
• trajecto (ou trilho) como um passeio onde não há repetição de arestas.

Num grafo, definimos

• passeio como uma sequência de vértices, possivelmente não todos distintos, tais que cada dois vértices consecutivos define uma aresta.
• trajecto (ou trilho) como um passeio onde não há repetição de arestas.
• caminho como um passeio que não repete vértices (nem arestas)

Num grafo, definimos

• passeio como uma sequência de vértices, possivelmente não todos distintos, tais que cada dois vértices consecutivos define uma aresta.
• trajecto (ou trilho) como um passeio onde não há repetição de arestas.
• caminho como um passeio que não repete vértices (nem arestas)
• circuito como um passeio que começa e acaba no mesmo vértice.

Num grafo, definimos

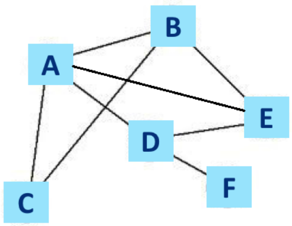
• passeio como uma sequência de vértices, possivelmente não todos distintos, tais que cada dois vértices consecutivos define uma aresta.
• trajecto (ou trilho) como um passeio onde não há repetição de arestas.
• caminho como um passeio que não repete vértices (nem arestas)
• circuito como um passeio que começa e acaba no mesmo vértice.
• circuito simples como um circuito que mas não repete arestas.

Num grafo, definimos

- passeio como uma sequência de vértices, possivelmente não todos distintos, tais que cada dois vértices consecutivos define uma aresta.
- trajecto (ou trilho) como um passeio onde não há repetição de arestas.
- caminho como um passeio que não repete vértices (nem arestas)
- circuito como um passeio que começa e acaba no mesmo vértice.
- circuito simples como um circuito que mas não repete arestas.
- ciclo como um circuito simples, onde não há repetição de vértices com a excepção dos vértices inicial e final.

Num grafo, definimos

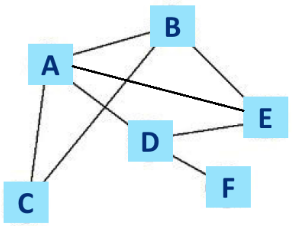
• passeio como uma sequência de vértices, possivelmente não todos distintos, tais que cada dois vértices consecutivos define uma aresta.
• trajecto (ou trilho) como um passeio onde não há repetição de arestas.
• caminho como um passeio que não repete vértices (nem arestas)
• circuito como um passeio que começa e acaba no mesmo vértice.
• circuito simples como um circuito que mas não repete arestas.
• ciclo como um circuito simples, onde não há repetição de vértices com a excepção dos vértices inicial e final.



ABEDA é um

Num grafo, definimos

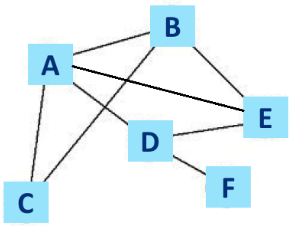
• passeio como uma sequência de vértices, possivelmente não todos distintos, tais que cada dois vértices consecutivos define uma aresta.
• trajecto (ou trilho) como um passeio onde não há repetição de arestas.
• caminho como um passeio que não repete vértices (nem arestas)
• circuito como um passeio que começa e acaba no mesmo vértice.
• circuito simples como um circuito que mas não repete arestas.
• ciclo como um circuito simples, onde não há repetição de vértices com a excepção dos vértices inicial e final.



ABEDA é um ciclo

Num grafo, definimos

• passeio como uma sequência de vértices, possivelmente não todos distintos, tais que cada dois vértices consecutivos define uma aresta.
• trajecto (ou trilho) como um passeio onde não há repetição de arestas.
• caminho como um passeio que não repete vértices (nem arestas)
• circuito como um passeio que começa e acaba no mesmo vértice.
• circuito simples como um circuito que mas não repete arestas.
• ciclo como um circuito simples, onde não há repetição de vértices com a excepção dos vértices inicial e final.

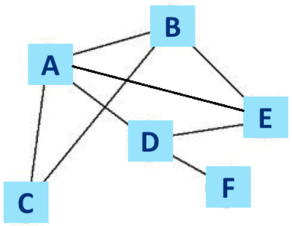


ABEDA é um ciclo

ACBADE é um

Num grafo, definimos

• passeio como uma sequência de vértices, possivelmente não todos distintos, tais que cada dois vértices consecutivos define uma aresta.
• trajecto (ou trilho) como um passeio onde não há repetição de arestas.
• caminho como um passeio que não repete vértices (nem arestas)
• circuito como um passeio que começa e acaba no mesmo vértice.
• circuito simples como um circuito que mas não repete arestas.
• ciclo como um circuito simples, onde não há repetição de vértices com a excepção dos vértices inicial e final.

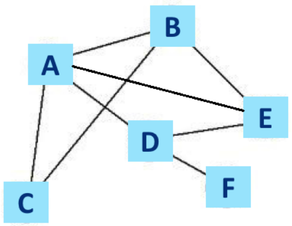


ABEDA é um ciclo

ACBADE é um trajecto, mas não é caminho

Num grafo, definimos

• passeio como uma sequência de vértices, possivelmente não todos distintos, tais que cada dois vértices consecutivos define uma aresta.
• trajecto (ou trilho) como um passeio onde não há repetição de arestas.
• caminho como um passeio que não repete vértices (nem arestas)
• circuito como um passeio que começa e acaba no mesmo vértice.
• circuito simples como um circuito que mas não repete arestas.
• ciclo como um circuito simples, onde não há repetição de vértices com a excepção dos vértices inicial e final.



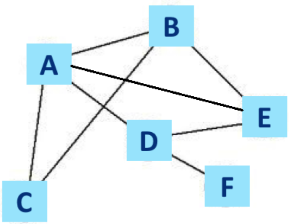
ABEDA é um ciclo

ACBADE é um trajecto, mas não é caminho

ABEDABCA é um

Num grafo, definimos

• passeio como uma sequência de vértices, possivelmente não todos distintos, tais que cada dois vértices consecutivos define uma aresta.
• trajecto (ou trilho) como um passeio onde não há repetição de arestas.
• caminho como um passeio que não repete vértices (nem arestas)
• circuito como um passeio que começa e acaba no mesmo vértice.
• circuito simples como um circuito que mas não repete arestas.
• ciclo como um circuito simples, onde não há repetição de vértices com a excepção dos vértices inicial e final.



ABEDA é um ciclo

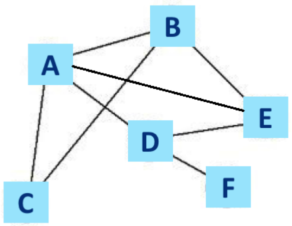
ACBADE é um trajecto, mas não é caminho

ABEDABCA é um passeio, mas não é trajecto

EDABCAE é um

Num grafo, definimos

• passeio como uma sequência de vértices, possivelmente não todos distintos, tais que cada dois vértices consecutivos define uma aresta.
• trajecto (ou trilho) como um passeio onde não há repetição de arestas.
• caminho como um passeio que não repete vértices (nem arestas)
• circuito como um passeio que começa e acaba no mesmo vértice.
• circuito simples como um circuito que mas não repete arestas.
• ciclo como um circuito simples, onde não há repetição de vértices com a excepção dos vértices inicial e final.



ABEDA é um ciclo

ACBADE é um trajecto, mas não é caminho

ABEDABCA é um passeio, mas não é trajecto

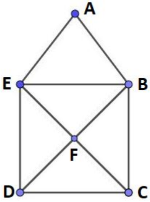
EDABCAE é um circuito simples, mas não é ciclo

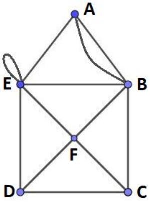
Tipos de Grafos

- Grafo simples quando não possui lacetes nem arestas paralelas

Tipos de Grafos

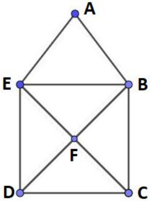
- Grafo simples quando não possui lacetes nem arestas paralelas



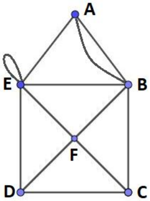


Tipos de Grafos

- Grafo simples quando não possui lacetes nem arestas paralelas



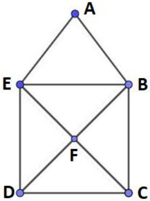
Grafo simples



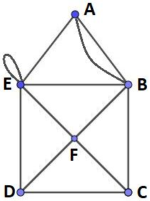
Grafo não simples

Tipos de Grafos

• Grafo simples quando não possui lacetes nem arestas paralelas



Grafo simples

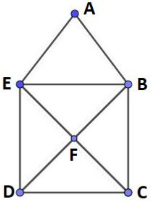


Grafo não simples

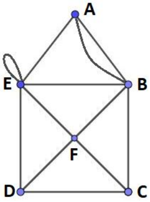
• Grafo orientado quando todas as arestas têm uma orientação. As setas podem representar sentido no trânsito, quando as arestas representam estradas

Tipos de Grafos

- Grafo simples quando não possui lacetes nem arestas paralelas

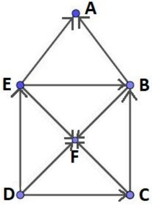


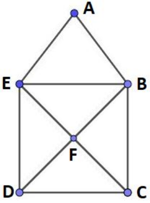
Grafo simples



Grafo não simples

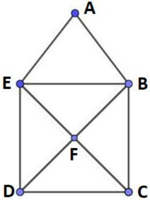
- Grafo orientado quando todas as arestas têm uma orientação. As setas podem representar sentido no trânsito, quando as arestas representam estradas



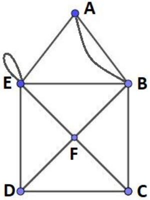


Tipos de Grafos

- Grafo simples quando não possui lacetes nem arestas paralelas

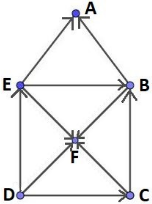


Grafo simples

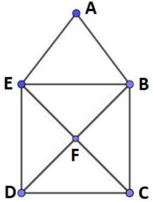


Grafo não simples

- Grafo orientado quando todas as arestas têm uma orientação. As setas podem representar sentido no trânsito, quando as arestas representam estradas



Grafo orientado



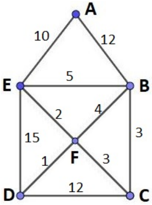
Grafo não orientado

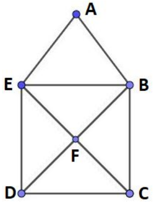
Tipos de Grafos

- Grafo ponderado quando todas as arestas têm um **peso**, isto é um número que poderá representar uma distância, um custo, um tempo, etc..

Tipos de Grafos

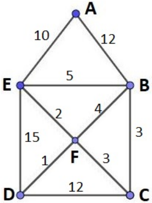
- Grafo ponderado quando todas as arestas têm um **peso**, isto é um número que poderá representar uma distância, um custo, um tempo, etc..



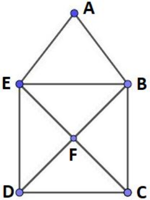


Tipos de Grafos

- Grafo ponderado quando todas as arestas têm um **peso**, isto é um número que poderá representar uma distância, um custo, um tempo, etc..



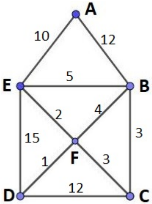
Grafo ponderado



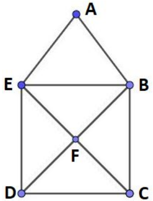
Grafo não ponderado

Tipos de Grafos

- Grafo ponderado quando todas as arestas têm um **peso**, isto é um número que poderá representar uma distância, um custo, um tempo, etc..



Grafo ponderado

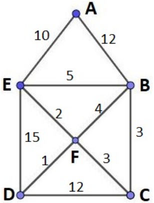


Grafo não ponderado

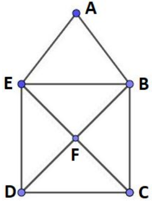
- Grafo planar quando é possível representa-lo no plano sem que as arestas se cruzem

Tipos de Grafos

- Grafo ponderado quando todas as arestas têm um **peso**, isto é um número que poderá representar uma distância, um custo, um tempo, etc..

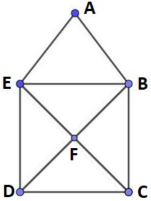


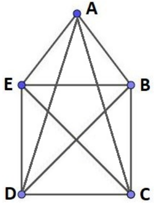
Grafo ponderado



Grafo não ponderado

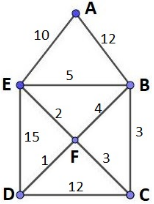
- Grafo planar quando é possível representa-lo no plano sem que as arestas se cruzem



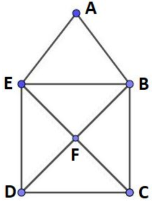


Tipos de Grafos

- Grafo ponderado quando todas as arestas têm um **peso**, isto é um número que poderá representar uma distância, um custo, um tempo, etc..

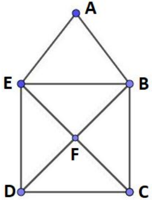


Grafo ponderado

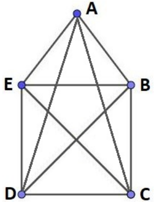


Grafo não ponderado

- Grafo planar quando é possível representa-lo no plano sem que as arestas se cruzem



Grafo planar



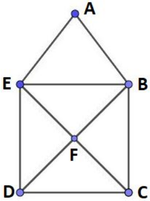
Grafo não planar

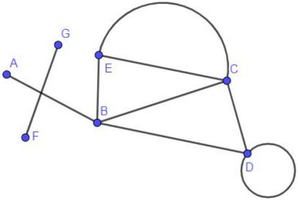
Tipos de Grafos

- Grafo conexo se qualquer par de vértices está ligado por um passeio
  No caso contrário, o grafo é desconexo

Tipos de Grafos

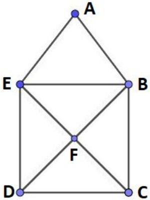
- Grafo conexo se qualquer par de vértices está ligado por um passeio
  No caso contrário, o grafo é desconexo



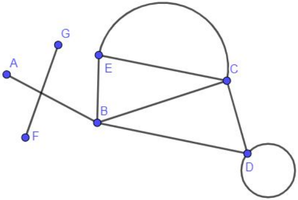


Tipos de Grafos

- Grafo conexo se qualquer par de vértices está ligado por um passeio
  No caso contrário, o grafo é desconexo



Grafo conexo

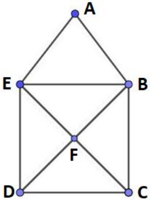


Grafo desconexo

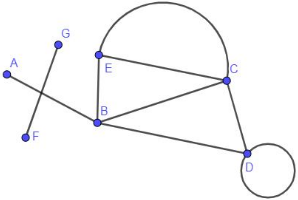
2 componentes conexas

Tipos de Grafos

- Grafo conexo se qualquer par de vértices está ligado por um passeio
  No caso contrário, o grafo é desconexo



Grafo conexo



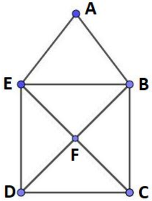
Grafo desconexo

2 componentes conexas

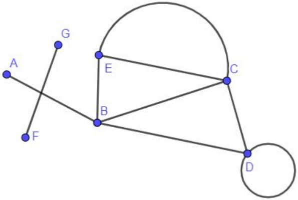
- Grafo completo se todo o par de vértices define uma aresta

Tipos de Grafos

- Grafo conexo se qualquer par de vértices está ligado por um passeio
  No caso contrário, o grafo é desconexo



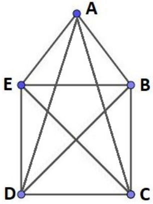
Grafo conexo

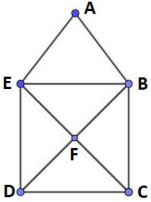


Grafo desconexo

2 componentes conexas

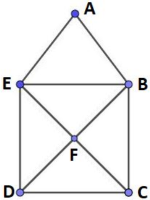
- Grafo completo se todo o par de vértices define uma aresta



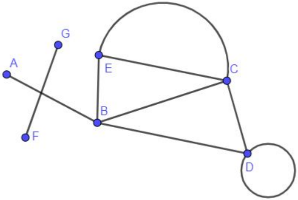


Tipos de Grafos

- Grafo conexo se qualquer par de vértices está ligado por um passeio
  No caso contrário, o grafo é desconexo



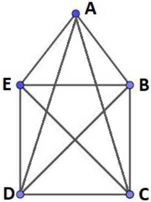
Grafo conexo



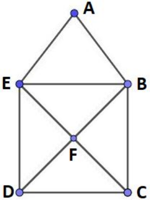
Grafo desconexo

2 componentes conexas

- Grafo completo se todo o par de vértices define uma aresta

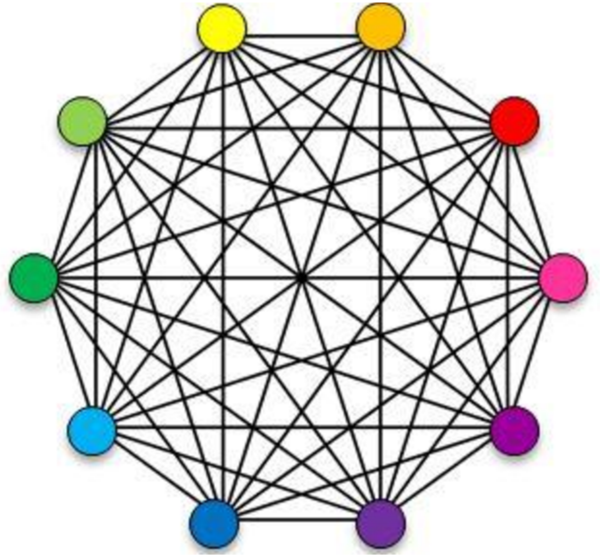


Grafo completo (K_5)



Grafo não completo

Grafo completo com 10 vértices – K_{10}



Grafos de Euler (eulerianos)

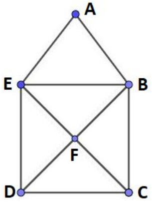
- Um trajecto diz-se euleriano se percorre todas as arestas.

Grafos de Euler (eulerianos)

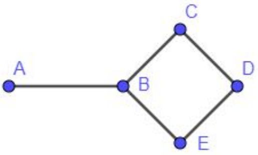
- Um trajecto diz-se euleriano se percorre todas as arestas.

Quais dos seguintes grafos admite um trajecto euleriano?

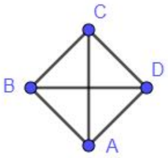
G_1



G_2



G_3

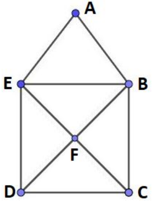


Grafos de Euler (eulerianos)

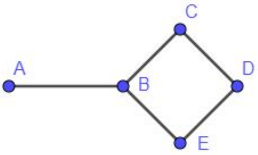
- Um trajecto diz-se eulerianoo se percorre todas as arestas.

Quais dos seguintes grafos admite um trajecto euleriano?

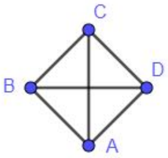
$\mathbf{G_1}$



$\mathbf{G_2}$



$\mathbf{G_3}$



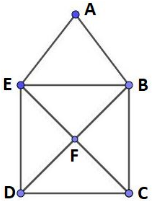
$\mathbf{G_1}$ e $\mathbf{G_2}$

Grafos de Euler (eulerianos)

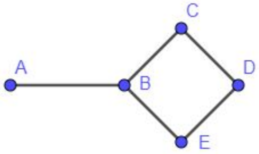
- Um trajecto diz-se euleriano se percorre todas as arestas.

Quais dos seguintes grafos admite um trajecto euleriano?

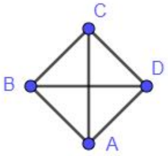
G_1



G_2



G_3



G_1 e G_2

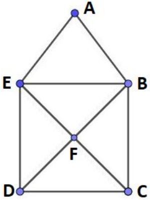
- **Quando é que um grafo admite um trajecto euleriano?**

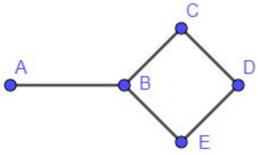
Grafos de Euler (eulerianos)

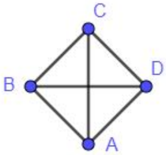
- Um trajecto diz-se euleriano se percorre todas as arestas.

Quais dos seguintes grafos admite um trajecto euleriano?

$\mathbf{G_1}$ $\mathbf{G_2}$ $\mathbf{G_3}$







$\mathbf{G_1}$ e $\mathbf{G_2}$

- **Quando é que um grafo admite um trajecto euleriano?**

Quando o grafo é conexo e possui, no máximo, dois vértices de grau ímpar.

Grafos de Euler (eulerianos)

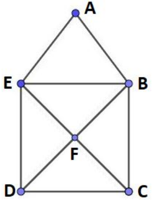
• Um grafo diz-se de Euler ou euleriano se possui um circuito simples que percorre todas as arestas. No caso contrário, o grafo diz-se não euleriano

Grafos de Euler (eulerianos)

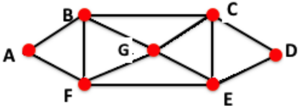
• Um grafo diz-se de Euler ou euleriano se possui um circuito simples que percorre todas as arestas. No caso contrário, o grafo diz-se não euleriano

Quais dos seguintes grafos é euleriano?

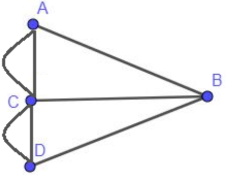
G_1



G_2



G_3

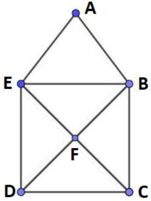


Grafos de Euler (eulerianos)

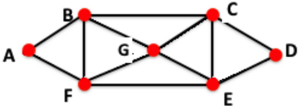
• Um grafo diz-se de Euler ou euleriano se possui um circuito simples que percorre todas as arestas. No caso contrário, o grafo diz-se não euleriano

Quais dos seguintes grafos é euleriano?

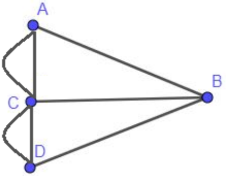
$\mathbf{G_1}$



$\mathbf{G_2}$



$\mathbf{G_3}$



Apenas $\mathbf{G_2}$

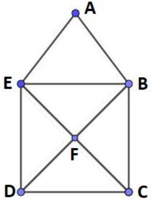
Quando é que um grafo é euleriano?

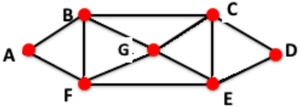
Grafos de Euler (eulerianos)

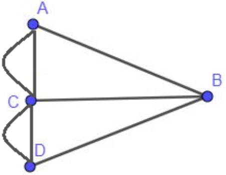
• Um grafo diz-se de Euler ou euleriano se possui um circuito simples que percorre todas as arestas. No caso contrário, o grafo diz-se não euleriano

Quais dos seguintes grafos é euleriano?

$\mathbf{G_1}$ $\mathbf{G_2}$ $\mathbf{G_3}$







Apenas $\mathbf{G_2}$

Quando é que um grafo é euleriano?

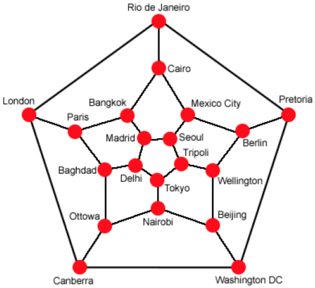
Quando o grafo é conexo e todos os vértices têm grau par.

Grafo de Hamilton (hamiltoniano)

- Um grafo diz-se de Hamilton ou hamiltoniano se possui um ciclo que contém todos os vértices. No caso contrário, o grafo diz-se não hamiltoniano

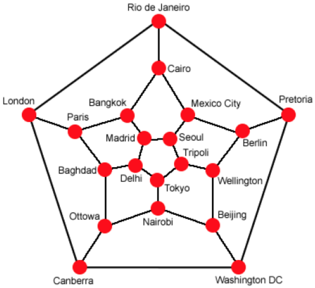
Grafo de Hamilton (hamiltoniano)

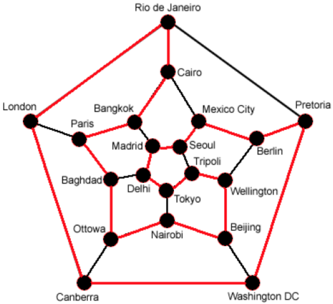
• Um grafo diz-se de Hamilton ou hamiltoniano se possui um ciclo que contém todos os vértices. No caso contrário, o grafo diz-se não hamiltoniano



Grafo de Hamilton (hamiltoniano)

• Um grafo diz-se de Hamilton ou hamiltoniano se possui um ciclo que contém todos os vértices. No caso contrário, o grafo diz-se não hamiltoniano

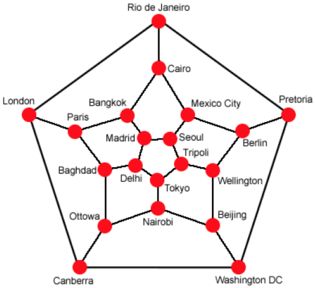


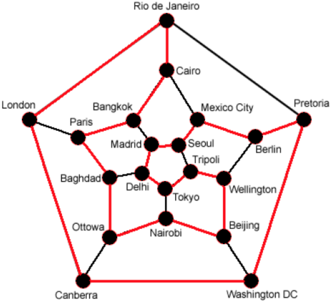


Este grafo será hamiltoniano?

Grafo de Hamilton (hamiltoniano)

• Um grafo diz-se de Hamilton ou hamiltoniano se possui um ciclo que contém todos os vértices. No caso contrário, o grafo diz-se não hamiltoniano

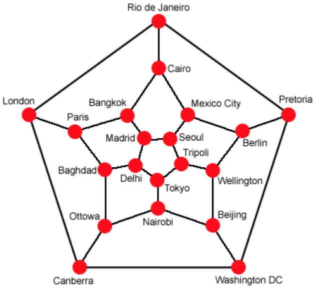


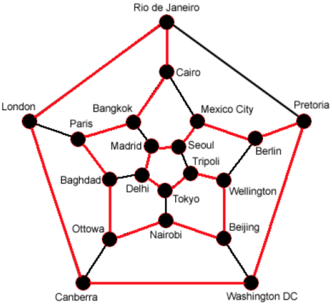


Este grafo será hamiltoniano? **SIM**

Grafo de Hamilton (hamiltoniano)

• Um grafo diz-se de Hamilton ou hamiltoniano se possui um ciclo que contém todos os vértices. No caso contrário, o grafo diz-se não hamiltoniano



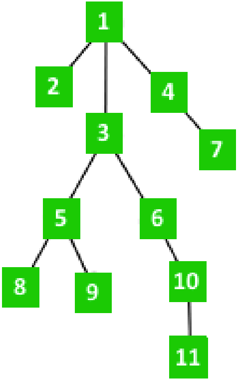


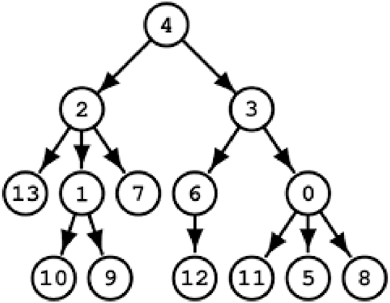
Este grafo será hamiltoniano? **SIM**

Não existe uma caracterização completa de grafos hamiltonianos

Árvore

- Árvore é um grafo conexo sem ciclos



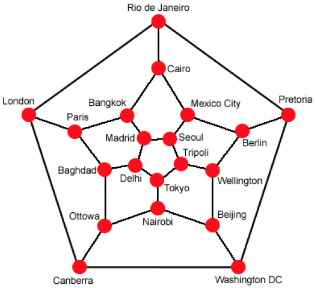


Árvore abrangente

- Uma árvore abrangente de um grafo é uma árvore que contém todos os vértices desse grafo.

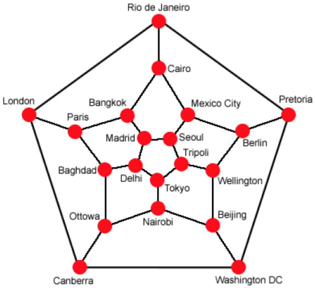
Árvore abrangente

- Uma árvore abrangente de um grafo é uma árvore que contém todos os vértices desse grafo.



Árvore abrangente

- Uma árvore abrangente de um grafo é uma árvore que contém todos os vértices desse grafo.

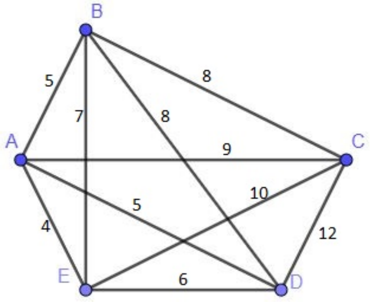


Árvore abrangente mínima

- Uma árvore abrangente mínima de um grafo ponderado é uma árvore abrangente desse grafo em que a soma dos pesos das suas arestas é mínima.

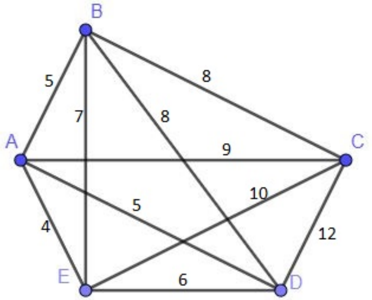
Árvore abrangente mínima

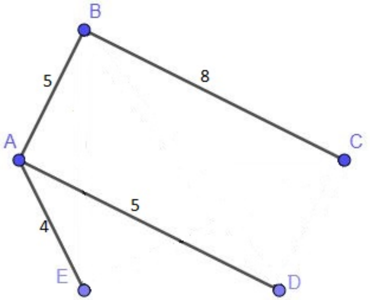
• Uma árvore abrangente mínima de um grafo ponderado é uma árvore abrangente desse grafo em que a soma dos pesos das suas arestas é mínima.



Árvore abrangente mínima

• Uma árvore abrangente mínima de um grafo ponderado é uma árvore abrangente desse grafo em que a soma dos pesos das suas arestas é mínima.





Árvore abrangente mínima

• A obtenção de uma árvore abrangente mínima soluciona diversos problemas de optimização, tais como:

- Implementação de redes de distribuição de energia numa certa localidade/cidade/país;

Árvore abrangente mínima

- A obtenção de uma árvore abrangente mínima soluciona diversos problemas de optimização, tais como:
  - Implementação de redes de distribuição de energia numa certa localidade/cidade/país;
  - Construção de redes de saneamento básico;

Árvore abrangente mínima

• A obtenção de uma árvore abrangente mínima soluciona diversos problemas de optimização, tais como:

- Implementação de redes de distribuição de energia numa certa localidade/cidade/país;
- Construção de redes de saneamento básico;
- Construção de redes de abastecimento de água;
- etc...

Árvore abrangente mínima

• A obtenção de uma árvore abrangente mínima soluciona diversos problemas de optimização, tais como:

- Implementação de redes de distribuição de energia numa certa localidade/cidade/país;
- Construção de redes de saneamento básico;
- Construção de redes de abastecimento de água;
- etc...

• **Como obter uma árvore abrangente mínima?**

- Algoritmo de Kruskal;
- Algoritmo de Prim.

Algoritmo de Kruskal

1. Ordenar as arestas por ordem crescente de pesos;

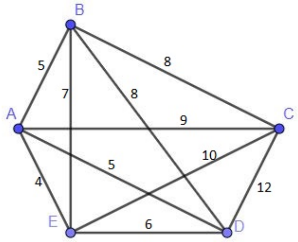
Algoritmo de Kruskal

1. Ordenar as arestas por ordem crescente de pesos;
2. Respeitando a ordem estabelecida no ponto 1, acrescentar cada aresta à árvore se esta não criar um ciclo;

Algoritmo de Kruskal

1. Ordenar as arestas por ordem crescente de pesos;
2. Respeitando a ordem estabelecida no ponto 1, acrescentar cada aresta à árvore se esta não criar um ciclo;
3. Terminar quando se tiver obtido uma árvore abrangente.

Algoritmo de Kruskal (exemplo)



- Primeiro ordenar as arestas por ordem crescente de pesos:

  $(4)AE; (5)AB; (5)AD; (6)DE; (7)EB; (8)BD; (8)BC; (9)AC; (10)CE; (12)DC$

Algoritmo de Kruskal (exemplo)

- Primeiro ordenar as arestas por ordem crescente de pesos:

$$(4)AE; (5)AB; (5)AD; (6)DE; (7)EB; (8)BD; (8)BC; (9)AC; (10)CE; (12)DC$$

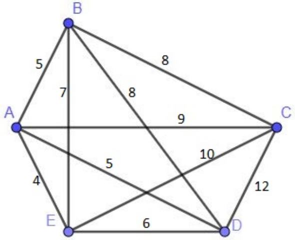
- Segundo usar as arestas

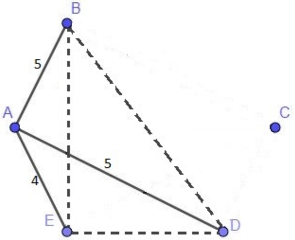
$$(4)AE; (5)AB; (5)AD$$

e rejeitar as arestas

$$(6)DE; (7)EB; (8)BD$$

por formarem ciclos





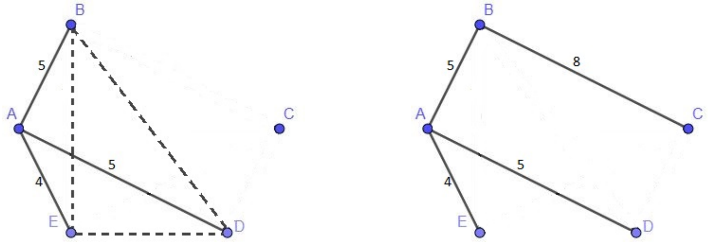
Algoritmo de Kruskal (exemplo)

- Primeiro ordenar as arestas por ordem crescente de pesos:

$$(4)AE; (5)AB; (5)AD; (6)DE; (7)EB; (8)BD; (8)BC; (9)AC; (10)CE; (12)DC$$

- Segundo usar as arestas $(4)AE; (5)AB; (5)AD$ e rejeitar as arestas $(6)DE; (7)EB; (8)BD$ por formarem ciclos.

- Terceiro usar a aresta $(8)BC$.



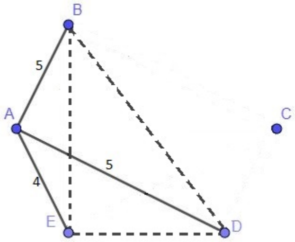
Algoritmo de Kruskal (exemplo)

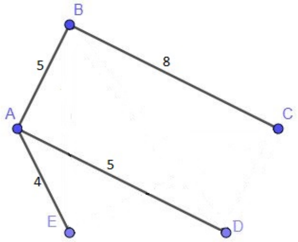
- Primeiro ordenar as arestas por ordem crescente de pesos:

$$(4)AE; (5)AB; (5)AD; (6)DE; (7)EB; (8)BD; (8)BC; (9)AC; (10)CE; (12)DC$$

- Segundo usar as arestas $(4)AE; (5)AB; (5)AD$ e rejeitar as arestas $(6)DE; (7)EB; (8)BD$ por formarem ciclos.

- Terceiro usar a aresta $(8)BC$.





- O processo terminou pois já temos todos os vértices em conexão.

Algoritmo de Prim

1. Escolher um vértice qualquer;

Algoritmo de Prim

1. Escolher um vértice qualquer;
2. De entre todas as arestas que incidem nesse vértice, escolher a de menor peso;

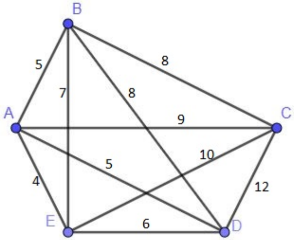
Algoritmo de Prim

1. Escolher um vértice qualquer;
2. De entre todas as arestas que incidem nesse vértice, escolher a de menor peso;
3. De entre todas as arestas que ligam algum dos vértices que já pertence à árvore a um que não pertence, escolher a de menor peso;

Algoritmo de Prim

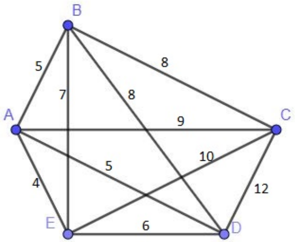
1. Escolher um vértice qualquer;
2. De entre todas as arestas que incidem nesse vértice, escolher a de menor peso;
3. De entre todas as arestas que ligam algum dos vértices que já pertence à árvore a um que não pertence, escolher a de menor peso;
4. Repetir o item anterior até se obter uma árvore abrangente.

Algoritmo de Prim (exemplo)

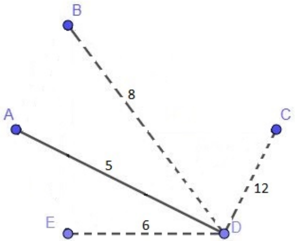


- Escolha-se um vértice qualquer, por exemplo D.

Algoritmo de Prim (exemplo)

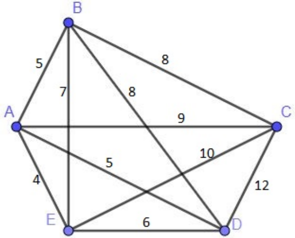


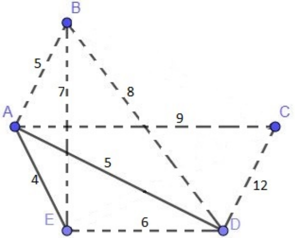
- Escolha-se um vértice qualquer, por exemplo D.
- Partindo de D, escolhe-se a aresta de menor peso. No caso AD.



Algoritmo de Prim (exemplo)

- Escolha-se um vértice qualquer, por exemplo D.
- Partindo de D, escolhe-se a aresta de menor peso. No caso AD.
- Analisando as arestas que incidem em A e em D, escolhe-se a que tem menor peso.





No caso AE

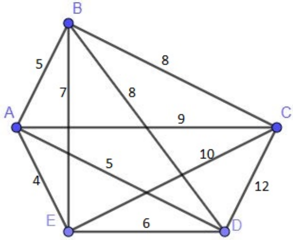
Algoritmo de Prim (exemplo)

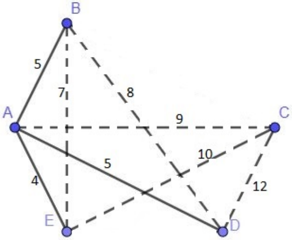
• Escolha-se um vértice qualquer, por exemplo D.

• Partindo de D, escolhe-se a aresta de menor peso. No caso AD.

• Analisando as arestas que incidem em A e em D, escolhe-se a que tem menor peso. No caso AE.

• Analisando as arestas que incidem em A, em D e em E, escolhe-se a que tem menor peso.





No caso AB.

Algoritmo de Prim (exemplo)

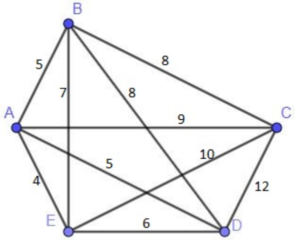
• Escolha-se um vértice qualquer, por exemplo D.

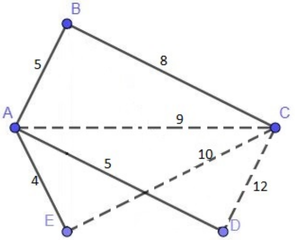
• Partindo de D, escolhe-se a aresta de menor peso. No caso AD.

• Analisando as arestas que incidem em A e em D, escolhe-se a que tem menor peso. No caso AE.

• Analisando as arestas que incidem em A, em D e em E, escolhe-se a que tem menor peso. No caso AB.

• Faltando o vértice C, escolhe-se a aresta com menor peso entre as que incidem em C.

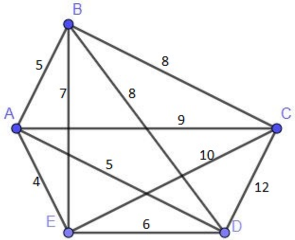


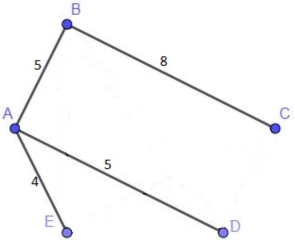


No caso BC.

Algoritmo de Prim (exemplo)

- Escolha-se um vértice qualquer, por exemplo D.
- Partindo de D, escolhe-se a aresta de menor peso. No caso AD.
- Analisando as arestas que incidem em A e em D, escolhe-se a que tem menor peso. No caso AE.
- Analisando as arestas que incidem em A, em D e em E, escolhe-se a que tem menor peso. No caso AB.
- Faltando o vértice C, escolhe-se a aresta com menor peso entre as que incidem em C. No caso BC.
- Obtém-se





Problema do Caixeiro viajante

- Problemas de optimização, tais como:
  - Estabelecer percursos para a distribuição do correio;

Problema do Caixeiro viajante

- Problemas de optimização, tais como:
  - Estabelecer percursos para a distribuição do correio;
  - Definir percursos de distribuição de mercadorias por uma cadeia de supermercados;

Problema do Caixeiro viajante

- Problemas de optimização, tais como:
  - Estabelecer percursos para a distribuição do correio;
  - Definir percursos de distribuição de mercadorias por uma cadeia de supermercados;
  - Planear uma viagem cujo objectivo é visitar várias cidades e regressar ao ponto de partida;

Problema do Caixeiro viajante

- Problemas de optimização, tais como:
  - Estabelecer percursos para a distribuição do correio;
  - Definir percursos de distribuição de mercadorias por uma cadeia de supermercados;
  - Planear uma viagem cujo objectivo é visitar várias cidades e regressar ao ponto de partida;
  - etc...

Problema do Caixeiro viajante

- Problemas de optimização, tais como:
  - Estabelecer percursos para a distribuição do correio;
  - Definir percursos de distribuição de mercadorias por uma cadeia de supermercados;
  - Planear uma viagem cujo objectivo é visitar várias cidades e regressar ao ponto de partida;
  - etc...

são conhecidos como problema do caixeiro viajante.

Problema do Caixeiro viajante

- Problemas de optimização, tais como:
  - Estabelecer percursos para a distribuição do correio;
  - Definir percursos de distribuição de mercadorias por uma cadeia de supermercados;
  - Planear uma viagem cujo objectivo é visitar várias cidades e regressar ao ponto de partida;
  - etc...

são conhecidos como problema do caixeiro viajante.

- Concretamente: Um viajante tem de visitar um certo número de cidades e voltar à cidade de partida.

Qual será a forma mais económica de o fazer?

Problema do Caixeiro viajante

- A solução ideal será obter um ciclo hamiltoniano (ciclo que contém todos os vértices de um grafo) com custo mínimo.

Problema do Caixeiro viajante

• A solução ideal será obter um ciclo hamiltoniano (ciclo que contém todos os vértices de um grafo) com custo mínimo.

- Para o obter será necessário analisar todos os casos possíveis.

Problema do Caixeiro viajante

• A solução ideal será obter um ciclo hamiltoniano (ciclo que contém todos os vértices de um grafo) com custo mínimo.

- Para o obter será necessário analisar todos os casos possíveis.
- Sendo um método exaustivo, pode tornar-se difícil, ou mesmo impossível, de lidar se o número de locais a visitar aumentar significativamente.

Problema do Caixeiro viajante

• A solução ideal será obter um ciclo hamiltoniano (ciclo que contém todos os vértices de um grafo) com custo mínimo.

- Para o obter será necessário analisar todos os casos possíveis.
- Sendo um método exaustivo, pode tornar-se difícil, ou mesmo impossível, de lidar se o número de locais a visitar aumentar significativamente.
- Existem algoritmos específicos (não exaustivos) para tratar o problema do caixeiro viajante, mas não há a garantia de obter a solução óptima:

Problema do Caixeiro viajante

• A solução ideal será obter um ciclo hamiltoniano (ciclo que contém todos os vértices de um grafo) com custo mínimo.

- Para o obter será necessário analisar todos os casos possíveis.
- Sendo um método exaustivo, pode tornar-se difícil, ou mesmo impossível, de lidar se o número de locais a visitar aumentar significativamente.
- Existem algoritmos específicos (não exaustivos) para tratar o problema do caixeiro viajante, mas não há a garantia de obter a solução óptima:
  - algoritmo dos mínimos sucessivos.
  - algoritmo por ordenação dos pesos das arestas.

Problema do Caixeiro viajante

Algoritmo dos mínimos sucessivos

• Começa-se por um vértice e escolhe-se sempre a aresta com menor peso até construir um ciclo hamiltoniano.

Problema do Caixeiro viajante

Algoritmo dos mínimos sucessivos

• Começa-se por um vértice e escolhe-se sempre a aresta com menor peso até construir um ciclo hamiltoniano.

• Realiza-se a operação anterior começando em todos os vértices.

Problema do Caixeiro viajante

Algoritmo dos mínimos sucessivos

• Começa-se por um vértice e escolhe-se sempre a aresta com menor peso até construir um ciclo hamiltoniano.

• Realiza-se a operação anterior começando em todos os vértices.

• A solução encontrada corresponde à que tem a menor soma dos pesos das arestas que compõem o ciclo.

Problema do Caixeiro viajante

Algoritmo dos mínimos sucessivos

- Começa-se por um vértice e escolhe-se sempre a aresta com menor peso até construir um ciclo hamiltoniano.
- Realiza-se a operação anterior começando em todos os vértices.
- A solução encontrada corresponde à que tem a menor soma dos pesos das arestas que compõem o ciclo.

Atenção: Encontra-se uma boa solução, mas esta pode não corresponder à solução óptima do problema.

Problema do Caixeiro viajante

Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas

- Começa-se por ordenar as arestas por ordem crescente dos pesos.

Problema do Caixeiro viajante

Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas

• Começa-se por ordenar as arestas por ordem crescente dos pesos.

• Escolhe-se sucessivamente a aresta com menor peso, respeitando as seguinte regras:

- Não se pode escolher três arestas que incidem no mesmo vértice;

Problema do Caixeiro viajante

Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas

• Começa-se por ordenar as arestas por ordem crescente dos pesos.

• Escolhe-se sucessivamente a aresta com menor peso, respeitando as seguinte regras:

- Não se pode escolher três arestas que incidem no mesmo vértice;
- Não se pode fechar o circuito quando ainda restarem vértice não visitados.

Problema do Caixeiro viajante

Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas

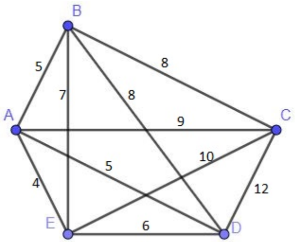
• Começa-se por ordenar as arestas por ordem crescente dos pesos.

• Escolhe-se sucessivamente a aresta com menor peso, respeitando as seguinte regras:

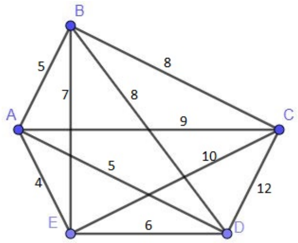
- Não se pode escolher três arestas que incidem no mesmo vértice;
- Não se pode fechar o circuito quando ainda restarem vértice não visitados.

Atenção: Analogamente ao algoritmo anterior, provavelmente encontra-se uma boa solução, mas esta pode não corresponder à solução óptima do problema.

Problema do Caixeiro viajante (exemplo)



Problema do Caixeiro viajante (exemplo)

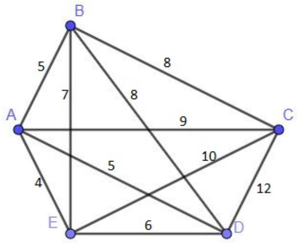


- Sendo o grafo um K_5, então o método exaustivo para solucionar o problema do caixeiro viajante envolve a análise de

$$(5-1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

casos.

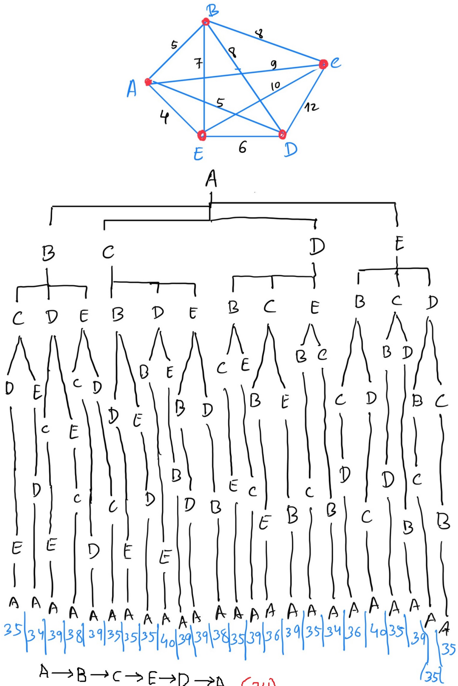
Problema do Caixeiro viajante (exemplo)



• Sendo o grafo um K_5, então o método exaustivo para solucionar o problema do caixeiro viajante envolve a análise de

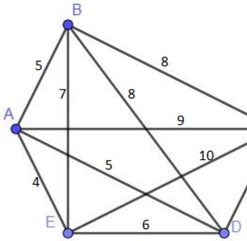
$$(5-1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

casos.
• O estudo exaustivo de um grafo completo com n vértices $(n \in \mathbb{N})$, isto é um K_n, exige a análise de para $(n-1)!$ casos para solucionar o problema do caixeiro viajante.

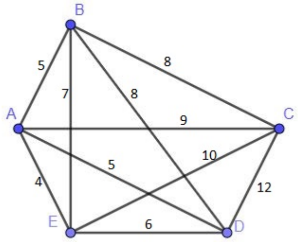


$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow A$ (34)

Algoritmo dos mínimos sucessivos (exemplo)



Algoritmo dos mínimos sucessivos (exemplo)



$$A \xrightarrow{4} E \xrightarrow{6} D \xrightarrow{8} B \xrightarrow{8} C \xrightarrow{9} A \quad \text{custo } 35$$

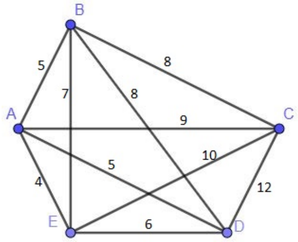
$$B \xrightarrow{5} A \xrightarrow{4} E \xrightarrow{6} D \xrightarrow{12} C \xrightarrow{8} B \quad \text{custo } 35$$

$$C \xrightarrow{8} B \xrightarrow{5} A \xrightarrow{4} E \xrightarrow{6} D \xrightarrow{12} C \quad \text{custo } 35$$

$$D \xrightarrow{6} E \xrightarrow{4} A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{8} C \xrightarrow{12} D \quad \text{custo } 35$$

$$E \xrightarrow{4} A \xrightarrow{5} D \xrightarrow{8} B \xrightarrow{8} C \xrightarrow{10} E \quad \text{custo } 36$$

Algoritmo dos mínimos sucessivos (exemplo)



$$A \xrightarrow{4} E \xrightarrow{6} D \xrightarrow{8} B \xrightarrow{8} C \xrightarrow{9} A \quad \text{custo } 35$$

$$B \xrightarrow{5} A \xrightarrow{4} E \xrightarrow{6} D \xrightarrow{12} C \xrightarrow{8} B \quad \text{custo } 35$$

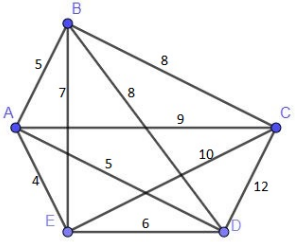
$$C \xrightarrow{8} B \xrightarrow{5} A \xrightarrow{4} E \xrightarrow{6} D \xrightarrow{12} C \quad \text{custo } 35$$

$$D \xrightarrow{6} E \xrightarrow{4} A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{8} C \xrightarrow{12} D \quad \text{custo } 35$$

$$E \xrightarrow{4} A \xrightarrow{5} D \xrightarrow{8} B \xrightarrow{8} C \xrightarrow{10} E \quad \text{custo } 36$$

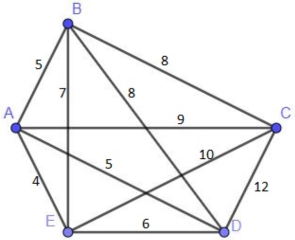
- a solução dada pelo algoritmo dos mínimos sucessivos pode ser qualquer dos 4 primeiros ciclos obtidos, pois todos têm um custo de 35.

Algoritmo por ordenação do peso das arestas (exemplo)



- Começa-se por ordenar as arestas por ordem crescente dos pesos:

Algoritmo por ordenação do peso das arestas (exemplo)

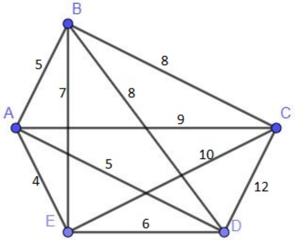


- Começa-se por ordenar as arestas por ordem crescente dos pesos:

  $(4)AE; (5)AB; (5)AD; (6)DE; (7)EB; (8)BD; (8)BC; (9)AC; (10)CE; (12)DC$

Seguindo o algoritmo tem-se
$(4)AE; (5)AB; \cancel{(5)AD}; (6)DE; \cancel{(7)EB; (8)BD}; (8)BC; \cancel{(9)AC; (10)CE}; (12)DC$

Algoritmo por ordenação do peso das arestas (exemplo)



- Começa-se por ordenar as arestas por ordem crescente dos pesos:

$$(4)AE; (5)AB; (5)AD; (6)DE; (7)EB; (8)BD; (8)BC; (9)AC; (10)CE; (12)DC$$

Seguindo o algoritmo tem-se
$(4)AE; (5)AB; \cancel{(5)AD}; (6)DE; \cancel{(7)EB; (8)BD}; (8)BC; \cancel{(9)AC; (10)CE}; (12)DC$

- A solução dada pelo algoritmo por ordenação do peso das arestas é

$$AEDCBA$$

cujo custo é 35.