

Espaços e funções mensuráveis

Exercícios:

1. Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável.

Dados $A, B \in \mathcal{M}$, mostre que

(a) $(A \setminus B) \in \mathcal{M}$;

(b) $(A \triangle B) \in \mathcal{M}$.

2. Seja (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : F \text{ é fechado}\}$.

Mostre que $\mathcal{M}^*(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\tau)$, onde $\mathcal{B}(\tau)$ é a σ -álgebra de borel.

3. Sejam $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma partição de um conjunto X e

$$\mathcal{M} = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i : I \subseteq \mathbb{N} \right\}.$$

Mostre que $\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra em X .

4. Sejam $X \neq \emptyset$ e $\mathcal{F} = \{\{x\} : x \in X\}$

(a) Mostre que

$$\mathcal{M}^*(\mathcal{F}) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ é numerável ou } X \setminus A \text{ é numerável}\}$$

- (b) Considere, em cada uma das funções que se segue, o espaço de Borel $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ no conjunto de chegada e o espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$, com $\mathcal{M}$ a σ -álgebra da alínea anterior, no domínio.

Mostre que:

- i. são mensuráveis as funções

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; \quad x \mapsto 3 ; \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; \quad x \mapsto \begin{cases} 3 & x \in \mathbb{Q} \\ -3 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} ;$$

- ii. não são mensuráveis as funções

$$id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; \quad x \mapsto x ; \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; \quad x \mapsto \begin{cases} 3 & x \geq 0 \\ -3 & x < 0 \end{cases} .$$

5. Mostre que são mensuráveis todas as funções em escada, isto é, $f \in \mathcal{I}([a, b]; \mathbb{R})$, com $a < b$ números reais e os espaços de Borel em $[a, b]$ e em $\mathbb{R}$.
6. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona. Mostre que f é mensurável.

7. Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável.

Mostre que uma função simples

$$\begin{aligned} s: X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}(x) \end{aligned} ,$$

com $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$ para $i = 1, \dots, n$, é mensurável se e só se $A_i \in \mathcal{M}$ para todo $i = 1, \dots, n$.

8. Mostre que são mensuráveis cada uma das seguintes funções:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x t^2 dt ; \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{(b)} \quad g: [0, +\infty] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \sin x & x \in \mathbb{R} \\ 2 & x = +\infty \end{cases} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad h: \overline{\mathbb{R}} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ +\infty & x \in \{-\infty, +\infty\} \end{cases} ; \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{(d)} \quad l: \overline{\mathbb{R}} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ -\infty & x \in \{-\infty, +\infty\} \end{cases} ; \end{aligned}$$

9. No seu livro, *Real and Complex Analysis*, Walter Rudin define função mensurável da seguinte forma:

Dados $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável, (Y, τ) espaço topológico e $f: X \rightarrow Y$ uma função, diz-se que f é *mensurável* caso

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{M}, \quad \forall V \in \tau.$$

Mostre que esta definição é equivalente à apresentada nas aulas, quando em Y se considera a σ -álgebra de Borel.

10. Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ duas funções mensuráveis. Justifique que cada uma das seguintes funções é mensurável, caso esteja bem definida.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f + g; & \quad \text{(d)} \quad f^+, \text{ onde } f^+(x) = \max\{f(x), 0\}; \\ \text{(b)} \quad |f|^p, \text{ com } p \in \mathbb{R}; & \quad \text{(e)} \quad f^-, \text{ onde } f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}; \\ \text{(c)} \quad fg; & \quad \text{(f)} \quad \frac{g}{f}. \end{aligned}$$

11. Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável.

Mostre que existe $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucessão de funções simples que converge simplesmente para f .

12. Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão funções mensuráveis de X em $\overline{\mathbb{R}}$.

(a) Mostre que cada uma das seguintes funções é mensurável:

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad \left(\sup_n f_n \right); & \quad \text{iii.} \quad \left(\limsup_n f_n \right); \\ \text{ii.} \quad \left(\inf_n f_n \right); & \quad \text{iv.} \quad \left(\liminf_n f_n \right); \end{aligned}$$

(b) Justifique que o limite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se existir, é uma função mensurável.

Espaços de medida

Exercícios:

1. Considere o terno $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, onde

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\rightarrow [0, \infty] \\ A &\mapsto \begin{cases} \#A, & \text{caso } A \text{ finito} \\ \infty, & \text{caso } A \text{ infinito} \end{cases} \end{aligned}.$$

- (a) Mostre que $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ é um espaço de medida.
 (b) Justifique que qualquer sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável.
 (c) Seja $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em $[0, \infty]$. Mostre que

$$\int_{\mathbb{N}} a \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

- (d) A igualdade da alínea anterior é válida para todas as sucessões em $\mathbb{R}$? Justifique.
 (e) Identifique o espaço $\mathcal{L}_1(\mu)$.

2. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida completa. Mostre que:

- (a) Se $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ com f mensurável e $f = g$ q.t.p. em X , então g é mensurável;
 (b) Se $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é uma sucessão de funções mensuráveis e $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função tais que

$$\lim_n f_n(x) = f(x), \quad \text{q.t.p. em } X,$$

então f é mensurável.

3. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida:

Mostre que se $A, B \in \mathcal{M}$, então

$$\int_X |\chi_A - \chi_B| \, d\mu = \mu(A \triangle B).$$

4. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável e $A \in \mathcal{M}$ tais que existe

$$\int_A f \, d\mu.$$

Mostre que se $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, com $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu.$$

5. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida.

(a) Mostre que μ é σ -finita se e só se existe $f : X \rightarrow]0, \infty]$ função integrável.

(b) Seja $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável.

Mostre que f é integrável se e só se $|f|$ é integrável.

6. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida não nula.

Sendo $E \in \mathcal{M}$ não vazio, verifique que a desigualdade no lema de Fatou é estrita na sucessão de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} \chi_E, & n \text{ par} \\ \chi_{X \setminus E}, & n \text{ ímpar} \end{cases}.$$

7. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função integrável.

Mostre que

$$\left(\forall E \in \mathcal{M}, \int_E f d\mu = 0 \right) \Leftrightarrow (f = 0 \text{ q.t.p. em } X).$$

8. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $\mathcal{F} := \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} | f \text{ é mensurável}\}$. Define-se em $\mathcal{F}$ a relação $\sim$ por

$$(f \sim g) \Leftrightarrow \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Mostre que:

(a) $\sim$ é um relação de equivalência em $\mathcal{F}$;

(b) $(f \sim g) \Rightarrow \left(\int_X f d\mu = \int_X g d\mu \right)$.

9. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida completa e $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma sucessão de funções mensuráveis tal que:

i. $0 \leq \dots \leq f_2 \leq f_1$, q.t.p. em X ;

ii. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que f_{n_0} é integrável.

(a) Mostre que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para uma função mensurável $f : X \rightarrow [0, \infty]$ q.t.p. em X .

(b) Mostre que f é integrável e

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

(c) Justifique que a igualdade da alínea anterior não é válida caso a hipótese ii. seja retirada.

10. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida completa, $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma sucessão de funções mensuráveis e $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que:

i. $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f$, q.t.p. em X ;

ii. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que f_{n_0} é integrável.

Mostre que

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_n f_n d\mu.$$

11. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida completa, $I =]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} f : X \times I &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ (x, t) &\mapsto f(x, t) \end{aligned}$$

uma função tal que:

i. Existe $g \in \mathcal{L}_1(\mu)$ tal que

$$|f(x, t)| \leq g(x), \quad \forall t \in I, \text{ q.t.p. em } x \in X;$$

ii. Para todo $t \in]a, b[$ (fixo), a função

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto f(x, t) \end{aligned}$$

é mensurável;

iii. Para quase todo $x \in X$ (fixo), a função

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ t &\mapsto f(x, t) \end{aligned}$$

é contínua.

Mostre que a função

$$\begin{aligned} F : I &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ t &\mapsto \int_X f(x, t) d\mu(x) \end{aligned}$$

é contínua.

12. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ não negativa.

Mostre a conhecida desigualdade de Tchébychev, isto é:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mu(\{x \in X : f(x) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X f d\mu.$$

13. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de conjuntos mensuráveis.

Definem-se:

$$\text{i. } \liminf_n A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k;$$

$$\text{ii. } \limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

Mostre que:

$$(a) \quad \mu\left(\liminf_n A_n\right) \leq \liminf_n \mu(A_n);$$

$$(b) \quad \text{Se } \mu \text{ é finita, então } \limsup_n \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup_n A_n\right);$$

$$(c) \quad \textbf{(Lema de Borel-Cantelli)} \text{ Se } \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty, \text{ então } \mu\left(\limsup_n A_n\right) = 0.$$

Integração no espaço $\mathbb{R}^n$ com a medida de Lebesgue

Exercícios:

1. Sejam $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ o espaço de medida de Lebesgue e $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}.$$

- (a) Justifique que f é Lebesgue mensurável;
 (b) Calcule

$$\int_{[0,1]} f \, dm.$$

2. Sejam $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ o espaço de medida de Lebesgue e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente.

- (a) Justifique que as funções $g_n(x) = \frac{f(nx)}{\sqrt{1+|x|}}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, são funções Lebesgue mensuráveis.
 (b) Calcule

$$\lim_n \int_0^1 g_n(x) \, dx.$$

3. Seja $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ o espaço de medida de Lebesgue.

Apresente uma sucessão de funções simples Lebesgue integráveis, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que seja uniformemente convergente, mas para a qual não existe o seguinte limite:

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} s_n \, dm.$$

4. Seja $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ o espaço de medida de Lebesgue.

- (a) Mostre que não é Lebesgue integrável a função

$$f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin x}{x}.$$

- (b) Justifique que $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ é convergente (integral de Dirichlet).

5. Seja $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ o espaço de medida de Lebesgue.

Considere a sucessão de funções $f_n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = \frac{\arctg(nx)}{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Justifique que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções Lebesgue mensuráveis;
 (b) Calcule

$$\lim_n \int_1^\infty f_n(x) \, dx.$$

6. Sejam $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ o espaço de medida de Lebesgue, $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, e $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ uma função tal que $f|_{[c, b]}$ é Riemann integrável para qualquer $c \in]a, b]$.

(a) Mostre que f é Lebesgue se e só se o integral impróprio $\int_a^b f(x) dx$ é convergente.

(b) Apresente um exemplo de uma função $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ não integrável à Lebesgue, mas que exista o integral impróprio

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Convergência em medida

Exercícios:

1. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma sucessão de funções mensuráveis de Cauchy em medida.

Mostre que existe uma subsucessão $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que verifica o seguinte:

$$\mu \left(\left\{ x \in X : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq \left(\frac{1}{2}\right)^k \right\} \right) < \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

2. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f_n, f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Mostre que:

Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em medida para g e converge pontualmente para f , então $f = g$ q.t.p. em X .

3. Sejam $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ o espaço de medida de Lebesgue. Mostre que cada uma das seguintes sucessões de funções convergem pontualmente, mas não convergem em medida:

(a) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \frac{x}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(b) $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \leq n \\ n, & x > n \end{cases}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

4. Sejam $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}, m)$ o espaço de medida de Lebesgue.

(a) Mostre que se $f_n : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ é uma sucessão de funções mensuráveis que converge uniformemente para $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em medida para f .

(b) A afirmação, presente na alínea anterior, continua válida se em lugar da medida de Lebesgue se considerar uma outra medida? Justifique a sua resposta.

5. Seja $([0, 1[, \mathcal{M}, m)$ espaço de medida de Lebesgue.

Tem-se

$$\mathbb{N} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{2^m + k : k \in \{0, 1, 2, \dots, 2^m - 1\}\}$$

Mais, dado $n \in \mathbb{N}$, existem e são únicos $m \in \mathbb{N}$ e $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2^m - 1\}$ tais que $n = 2^m + k$.

Mostre que a sucessão de funções $f_n : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f_n(x) = \chi_{[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}[}$, converge em medida para a função nula, mas não converge pontualmente q.t.p. em $[0, 1[$.

6. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida.

Mostre que se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são sucessões de funções, de X em $\mathbb{R}$, convergentes em medida para f e g , respectivamente, então $(f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em medida para $f + g$.

7. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua.

Mostre que se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente em medida para f , então $g \circ f_n$ converge em medida para $g \circ f$.

8. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida.

Mostre que se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções, de X em $\mathbb{R}$, convergente em medida para f , então qualquer sua subsucessão converge em medida para f .

9. Em todas as alíneas, considere a medida de Lebesgue, nos domínios considerados, e todas as funções mensuráveis.

Apresente um exemplo, ou justifique que não existe:

- (a) uma sucessão $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convergente em medida, mas não de Cauchy em medida;
- (b) uma sucessão $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Cauchy em medida, mas não convergente em medida;
- (c) uma sucessão $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ convergente em medida, mas não de Cauchy em medida;
- (d) uma sucessão $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Cauchy em medida, mas não convergente em medida;
- (e) uma sucessão $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pontualmente convergente q.t.p., mas não de Cauchy em medida.

Espaços L^p

Exercícios:

1. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Para cada $p \in [1, \infty[$ define-se

$$\mathcal{L}^p(X) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mensurável e } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\} \text{ e } \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dadas $f, f_1, g, g_1 \in \mathcal{L}^p(X)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, mostre que:

- (a) Se $f \sim g$, então $\lambda f \sim \lambda g$;
 - (b) Se $f \sim g$ e $f_1 \sim g_1$, então $(f + f_1) \sim (g + g_1)$;
 - (c) Se $f \sim g$, então $\|f\|_p = \|g\|_p$.
2. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida finita.
 - (a) Mostre que se $1 \leq q \leq p \leq \infty$, então $L^p(X) \subseteq L^q(X)$;
 - (b) Mostre que se $1 \leq q \leq p < \infty$ e $f \in L^q(X)$, então $\|f\|_q \leq (\mu(X))^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|f\|_p$;
 - (c) Mostre que se $1 \leq q < p \leq \infty$, então $L^p(X) \subsetneq L^q(X)$;
 - (d) Mostre que se μ não é uma medida finita, então a alínea (a) é falsa.
 3. Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões numéricas. Use a desigualdade de Minkowski para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p$$

4. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida finita.

Mostre que $L^p(X) = L^q(X)$ para quaisquer $p, q \in [1, \infty]$
5. Seja $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ o espaço de medida de Lebesgue.
 - (a) Mostre que $C_c(\mathbb{R}) \subseteq L^\infty(\mathbb{R})$.
 - (b) Mostre que $C_c(\mathbb{R})$ não é denso em $L^\infty(\mathbb{R})$.
6. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções em $L^p(X)$, com $p \in [1, \infty]$.

Mostre que se $\lim_n f_n = f$ em $L^p(X)$, então a sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em medida para f .
7. Seja $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ o espaço de medida de Lebesgue e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ uniformemente convergente para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Identifique, justificando, os valores de $p \in [1, \infty]$ tais que

$$\lim_n f_n = f \text{ em } L^p(\mathbb{R}).$$
8. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Considere $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções convergentes em $L^p(X)$, com $p \in [1, \infty]$.

Mostre que se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $f_n \rightarrow f$ q.t.p. em X , então $f \in L^p(X)$ e

$$\lim_n f_n = f \text{ em } L^p(X).$$

9. Apresente um exemplo, ou justifique que não existe:

- (a) Uma função $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável à Riemann tal que $f \notin L^1([0, 1])$;
- (b) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável tal que $f \notin L^1(\mathbb{R})$, mas $f|_{[-n, n]} \in L^1([-n, n])$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- (c) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável tal que $f \in L^1(\mathbb{R})$, mas $f|_{[-n, n]} \notin L^1([-n, n])$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- (d) Uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in L_m^1(\mathbb{N})$ e $f \notin L_c^1(\mathbb{N})$, onde m representa a medida de Lebesgue e c a medida de contagem;
- (e) Uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \notin L_m^1(\mathbb{N})$ e $f \in L_c^1(\mathbb{N})$, onde m representa a medida de Lebesgue e c a medida de contagem;
- (f) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável tal que $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, mas $f \notin L^p(\mathbb{R})$, $\forall p \in [1, \infty[$;
- (g) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável tal que $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $f|_{[0, 1]} \notin L^2([0, 1])$;
- (h) Uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável tal que $f \in L^1([0, 1])$ e $f \notin L^\infty([0, 1])$;

Medidas produto

Exercícios:

1. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$, $(Z, \mathcal{Z}, \tau)$ e $(W, \mathcal{W}, \omega)$ espaços de medida σ -finitos e $f : X \rightarrow Z$ $g : Y \rightarrow W$ funções mensuráveis.

Considerando os espaços de medida produtos em $X \times Y$ e em $Z \times W$, mostre que a função

$$\begin{aligned} \Phi : X \times Y &\rightarrow Z \times W \\ (x, y) &\mapsto (f(x), g(y)) \end{aligned}$$

é mensurável.

2. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida σ -finito, $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ o espaço de medida de Lebesgue e $f : X \rightarrow [0, \infty[$ uma função mensurável. Considerando

$$A = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

mostre que:

(a) o conjunto A é $(\mathcal{A} \times \mathcal{M})$ -mensurável;

(b) $(\mu \times m)(A) = \int_X f d\mu.$

3. Considere $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ o espaço de medida de Lebesgue, $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \lambda)$, com λ a medida de contagem e $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{M} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ o espaço mensurável produto.

Considerando o conjunto

$$Q = \{(x, x) : x \in [0, 1]\},$$

mostre que:

(a) A função χ_Q é $(\mathcal{M} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ -mensurável;

(b) $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_Q dm d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_Q d\lambda dm;$

(c) Justifique porque não é possível considerar o produto das duas medidas.

4. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Z, \mathcal{Z}, \tau)$ espaços de medida σ -finitos e $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \lambda)$ o espaço de medida com λ a medida de contagem. Mostre que:

(a) $C \in (\mathcal{A} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ se e só se $C^n = \{x \in X : (x, n) \in C\} \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N};$

(b) A função $g : X \times \mathbb{N} \rightarrow Z$
 $(x, n) \mapsto g(x, n)$ é $(\mathcal{A} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ -mensurável se e só se, para cada $n \in \mathbb{N}$,

a função $g^n : X \rightarrow Z$
 $x \mapsto g(x, n)$ é $\mathcal{A}$ -mensurável.

5. Sejam $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ o espaço de medida de Lebesgue, $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \lambda)$, com λ a medida de contagem e $(\mathbb{R} \times \mathbb{N}, \mathcal{M} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}), m \times \lambda)$ a correspondente medida produto.

Considere $f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ as funções definidas por

$$f(x, n) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & (x, n) \in [0, 1] \times \mathbb{N} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad g(x, n) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & (x, n) \in [0, 1] \times \{1, 2, 3, 4\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

- (a) Mostre que as funções f e g são $(\mathcal{M} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ -mensuráveis;
(b) Calcule cada um dos seguintes integrais:

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{N}} f d(m \times \lambda); \quad \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{N}} g d(m \times \lambda).$$

6. Sejam $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ o espaço de medida de Lebesgue e o espaço de medida produto $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M} \times \mathcal{M}, m \times m)$.

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^{2n}, & (x, y) \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]^2 \\ -2^{2n+1}, & (x, y) \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

- (a) Mostre que

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dm(x) \right) dm(y) \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dm(y) \right) dm(x).$$

- (b) Justifique porque é que não se pode aplicar o teorema de Fubini à função f .

7. Seja $([0, 1], \mathcal{M}, m)$ espaço de medida de Lebesgue e $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

- (a) Mostre que $\int_{[0, 1]} \left(\int_{[0, 1]} f^y dm(x) \right) dm(y) = \int_{[0, 1]} \left(\int_{[0, 1]} f_x dm(y) \right) dm(x);$

- (b) Mostre que não existe $\int_{[0, 1] \times [0, 1]} f d(m \times m)$

Nota: Use coordenadas polares;

- (c) Justifique porque é que não se pode aplicar o teorema de Fubini à função f .

8. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ espaços de medida σ -finitos e $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ o espaço de medida de Lebesgue.

Considerando $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ funções não nulas e

$$\begin{aligned} \Phi : X \times Y &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x)g(y) \end{aligned} .$$

- (a) Mostre que Φ é $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ -mensurável se e só se f é $\mathcal{A}$ -mensurável e g é $\mathcal{B}$ -mensurável;
- (b) Sendo Φ $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ -mensurável, mostre que Φ é integrável se e só se f e g são integráveis;
- (c) Justifique que as equivalências das alíneas anteriores são válidas caso alguma função, f ou g , seja a função nula;
- (d) Sendo Φ uma função integrável, mostre que

$$\int_{X \times Y} \Phi d(\mu \times \lambda) = \left(\int_X f d\mu \right) \cdot \left(\int_Y g d\lambda \right) .$$