Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's)

Mestrado em Matemática - 2015/2016 Folha 1

Exercícios / Problemas

1. Resolva cada uma das seguintes EDO's:
   (a) $x'(t) = x(t)(x(t) - 1)$;
   (b) $x'(t) = x(t)^2$;
   (c) $x'(t) = F(x(t))$, onde $F(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$.

2. Considere a equação
$$x'(t) = F(x(t)), \tag{1}$$
onde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$.
   (a) Justifique que a equação (1) não é uma EDO;
   (b) Justifique que, para qualquer $\delta > 0$, não existe uma solução $x :]2 - \delta, 2 + \delta[\to \mathbb{R}$ de (1) de classe C^1 tal que $x(2) = 0$;
   (c) Encontre $x : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ solução de (1) de classe C^1 tal que $x(0) = 2$.

3. Considere $F : U \subseteq \mathbb{R}^{1+d} \to \mathbb{R}^d$ contínua em U, aberto de $\mathbb{R}^{1+d}$, e $(t_0, x_0) \in U$. Mostre que o PVI
$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
tem solução $x(t)$ se e só se
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds, \quad \forall t \in I_{t_0},$$
onde I_{t_0} é um intervalo aberto contendo t_0.

4. Mostre que o conjunto $\mathcal{A}$, definido na prova do teorema de Peano apresentada na aula, é convexo, fechado e uniformemente limitado.

5. Mostre que se
$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^{1+d} & \to & \mathbb{R}^d \\ & (t, x) & \mapsto & F(t, x) \end{array}$$
é de classe C^1, então F é localmente Lipschitziana em x.

6. Mostre que se $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ é localmente Lipschitziana, então a sua restrição a qualquer compacto é Lipschitziana.

7. Mostre que o PVI

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt[3]{x(t)^2} \\ x(3) = 0 \end{cases}$$

possui várias soluções definidas em $\mathbb{R}$.

8. Usando o método iterativo, apresentado pelo princípio da contracção, que permite a obtenção do ponto de equilíbrio, obtenha a solução de

$$\begin{cases} x'(t) = 2tx(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

9. Sejam $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^d$ e $F : \mathbb{R}^{1+d} \to \mathbb{R}^d$ contínua e localmente Lipschitziana na segunda variável. Considere $\mathcal{F} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ definida por

$$\mathcal{F}(x) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds,$$

sendo $(\mathcal{X}, d)$ é o espaço métrico definido na aula a quando da prova do Teorema de Picard-Lindelöf.

   (a) Mostre que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F}^k$ é uma contracção.
   Sugestão Verifique que

$$\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s_1} \cdots \int_{t_0}^{s_{k-1}} 1\, ds_k\, ds_{k-1} \ldots ds_1 = \frac{(t - t_0)^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

   (b) Mostre que $\mathcal{F}$ tem um único ponto fixo.
   Sugestão:

      i. Mostre que $\mathcal{F}$ é uma contracção quando em $\mathcal{X}$ se considera a métrica $D(x_1, x_2)$ definida por

$$D(x_1, x_2) = d(x_1, x_2) + \lambda_0^{-1} d(\mathcal{F}(x_1), \mathcal{F}(x_2)) + \cdots + \lambda_0^{-k+1} d(\mathcal{F}^{k-1}(x_1), \mathcal{F}^{k-1}(x_2)),$$

      onde $\lambda_0 = \lambda^{\frac{1}{k}}$ e $\lambda < 1$ tal que $d(\mathcal{F}^k(x_1), \mathcal{F}^k(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2)$ para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$;

      ii. Sejam (E, d) um espaço métrico completo, $f : E \to E$ função contínua e $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Mostre que (E, d^*) é um espaço métrico completo, sendo

$$d^*(e_1, e_2) = d(e_1, e_2) + \alpha d(f(e_1), f(e_2)), \quad \forall e_1, e_2 \in E;$$

      iii. Conclua que $(\mathcal{X}, D)$ é um espaço métrico completo.

10. Considere a equação diferencial

$$x'(t) = \operatorname{sen}\big(x(t)\big), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Sem resolver explicitamente a equação diferencial:

(a) Encontre todos os pontos de equilíbrio da equação diferencial (2);

(b) Justifique que todas as soluções maximais de (2) estão definidas em $\mathbb{R}$;

(c) Justifique que todas as soluções de (2) são monótonas e limitadas;

(d) Apresente um esboço dos gráficos das soluções de (2).

11. Seja $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ tal que

$$G(x) \cdot x < 0, \quad \forall x \in \left(\mathbb{R}^d \setminus B(0,10)\right).$$

Mostre que toda a solução maximal da equação diferencial

$$x'(t) = G(x(t))$$

está definida em $]a, +\infty[$ para algum $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Sugestão Verifique que, para qualquer solução $x(t)$, a função $t \to \|x(t)\|^2$ tem derivada negativa sempre que $\|x(t)\| > 10$.

12. Fazendo uso do teorema de dependência contínua das soluções em relação a parâmetros, prove o teorema da dependência contímua das soluções em relação às condições iniciais.

Sugestão: Sendo $F : U \to \mathbb{R}^d$, $U \subseteq \mathbb{R}^{1+d}$ aberto, contínua e localmente Lipschitziana na 2ª variável, é necessário provar que

$$\mathcal{D} = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{2+d} : (t_0, x_0) \in U \text{ e } t \text{ pertence ao domínio de } x(\cdot, t_0, x_0)\}$$

é aberto, isto é, fixado $(t^*, t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ é necessário provar que existe uma bola de centro (t^*, t_0, x_0) contida em $\mathcal{D}$. Para isso define-se

$$\mathcal{V} = \{(t, x, s, y) : (t + s, x + y) \in U\} \subseteq \mathbb{R}^{1+d+p},$$

com $p = 1 + d$, e

$$\begin{array}{rccl} G : & \mathcal{V} & \to & \mathbb{R}^d \\ & (t, x, s, y) & \mapsto & F(t + s, x + y) \end{array},$$

considerando $\mu = (s, y)$ como sendo o parâmetro. Desta forma, para cada $(a, b) \in \mathbb{R}^{1+d}$, tome o parâmetro $\mu = (s, y) = (a - t_0, b - x_0)$ e os PVI's

$$(1) \begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(a) = b \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} z'(t) = G(t, x(t), s, y) \\ z(t_0) = x_0 \end{cases}$$

e prove que:

(a) Se $x : I \to \mathbb{R}^d$ é solução de (1), então $z : J \to \mathbb{R}^d$, definida por $z(t) = x(t+s)+y$ com $J = I - s = \{t - s : t \in I\}$, é solução de (2);

(b) Se $z : J \to \mathbb{R}^d$ é solução de (2), então $x : I \to \mathbb{R}^d$, definida por $x(t) = z(t-s)-y$ com $I = J + s = \{t + s : t \in J\}$, é solução de (1);

(c) Existe uma bola de centro (t^*, t_0, x_0) contida em $\mathcal{D}$, fazendo uso do facto de $\mathcal{D}_{(t_0,x_0)}$ ser aberto. [Note que $\mathcal{D}_{(t_0,x_0)}$ define-se como no teorema de dependência contínua das soluções de (2) em relação ao parâmetro $\mu = (s, y)$];

(d) a função $(t, a, b) \mapsto x(t, a, b)$ é contínua.

13. Seja $F : U \to \mathbb{R}^d$ uma função de classe C^1 e $U \subseteq \mathbb{R}^d$ um aberto. Assuma-se que, para qualquer $p \in U$, a órbita de p pela equação diferencial $x'(t) = F(x(t))$ está contida num compacto. Prove que:

(a) a equação diferencial $x'(t) = F(x(t))$ é completa;

(b) para qualquer órbita γ, os conjuntos α-limite e ω-limite são conexos.

14. Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Faça um esboço das trajectórias e justifique que a equação é completa. [*Sugestão:* Escreva a equação em coordenadas polares]

15. Identifique o espaço de soluções de cada EDO linear

$$x'(t) = Ax(t),$$

onde

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$;

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$;

(f) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$;

(g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$;

(h) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$;

(i) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(j) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

(k) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

16. Para cada um dos sistemas do exercício anterior, identifique os subespaços estável, instável e central, E^s, E^u e E^c. Faça um esboço do retrato de fase.

17. Seja $x'(t) = Ax(t)$ uma EDO linear tal que

$$dimE^s = dimE^u = 1.$$

Mostre que, se $x_0 \notin (E^s \cup E^u)$, então a solução $x(t) = x(t, x_0)$ satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = +\infty.$$

18. Considere a EDO autónoma não linear

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = x(t)y(t) + 2 \\ y'(t) = x^2(t) + y^2(t) - 5 \end{array} \right. . \tag{3}$$

(a) Identifique o espaço de fase de (3).

(b) Determine os pontos de equilíbrio de (3).

(c) Considere os pontos de equilíbrio situados no <u>4º quadrante</u>:

i. Verifique se são ou não pontos hiperbólicos;

ii. Esboce (qualitativamente) as órbitas do sistema na vizinhança de cada um deles;

iii. Indique, justificando, a estabilidade de cada um deles.