Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

MIECOM

Análise Matemática B

— folha 1 — Séries de Potências — 2011'12 —

1. Para cada uma das seguintes séries de potências, determine o raio de convergência e o intervalo de convergência.

$i) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2};$ $\qquad ii) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$

$iii) \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$ $\qquad iv) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n$

$v) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$ $\qquad vi) \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{2n}$

$vii) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\qquad viii) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$

$ix) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n 5^n x^n$ $\qquad x) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 x^n}{10^n}$

$xi) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n}(2x-1)^n$ $\qquad xii) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}(3x+2)^n$

$xiii) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{n+3}$ $\qquad xiv) \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\log n}$

$xv) \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n(n+2)}$ $\qquad xvi) \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{n^3}$

2. Suponha que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge para $x = -4$ e diverge para $x = 6$.
O que pode dizer sobre a convergência de cada uma das seguintes séries numéricas?

$i) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n;$ $\qquad ii) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n 8^n$

$iii) \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(-3)^n$ $\qquad iv) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n c_n 9^n$

3. Determine a série de Maclaurin de cada uma das seguintes funções e identifique o raio de convergência:

$i) f(x) = e^x;$ $\qquad ii) f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$iii) f(x) = \operatorname{sen} x$ $\qquad iv) f(x) = cosx$

$v) f(x) = e^{x^2}$ $\qquad vi) f(x) = \dfrac{x}{1-x}$

$vii) f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ $\qquad viii) f(x) = \sqrt{x}$

$ix) f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad x) f(x) = \arctan(x)$

4. Determine a série de Taylor de cada uma das funções que se segue em torno do ponto a:

$i) f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \dfrac{\pi}{3};$ $\qquad ii) f(x) = e^x, \quad a = 3$

$iii) f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = 1$ $\qquad iv) f(x) = \log x, \quad a = 2$

$v) f(x) = \cos, \quad a = -\dfrac{\pi}{4}$ $\qquad vi) f(x) = x^2 + 2x - 3, \quad a = -3$

5. Considere a função $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Determine o polinómio de Taylor de f de ordem 2 em torno de $\frac{\pi}{3}$.
   (b) Calcule $\cos 61^0$ utilizando o polinómio de Taylor da alínea anterior e calcule um majorante do valor absoluto do erro cometido.

6. Utilizando um polinómio de Taylor, calcule $\sqrt{e}$ com erro inferior a 10^{-3}.

Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

MIECOM

Análise Matemática B

—— folha 1 — Algumas soluções ———————————— 2011'12 ———

1. (iv) Raio: $\frac{1}{2}$, intervalo convergência: $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$;
(v) Raio: 0, intervalo convergência: $\{0\}$;
(vi) Raio: 1, intervalo convergência: $[2,4[$;
(vii) Raio: $+\infty$, intervalo convergência: $\mathbb{R}$;
(xiii) Raio: $\frac{1}{2}$, intervalo convergência: $[-\frac{5}{2},\frac{7}{2}[$;
(xv) Raio: 1, intervalo convergência: $[-2,0]$;
(xvi) Raio: $\frac{1}{2}$, intervalo convergência: $[0,1]$;

2. (i) convergente; (ii) divergente; (iii) convergente; (iv) divergente.

Nota: Alerto para a possibilidade da existência de gralhas. O aluno deverá contactar o docente para o esclarecimento de qualquer dúvida.

Universidade do Minho — MIECOM
Departamento de Matemática e Aplicações

Análise Matemática B

—— folha 2 — Funções Escalares —————————— 2011'12 ———

1. Para cada uma das funções que se seguem, determine o seu domínio e o seu contradomínio:

   (a) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$;

   (b) $f(x,y) = -y^2$;

   (c) $f(x,y) = -e^{-x^2-y^2}$;

   (d) $f(x,y) = x^3 - \operatorname{sen} y$;

   (e) $f(x,y) = |xy|$;

   (f) $f(x,y) = \operatorname{sen} y$;

   (g) $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$;

   (h) $f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

2. Sem recorrer a instrumentos eletrónicos, faça a correspondência de cada uma das funções do exercício anterior com os gráficos apresentados na última página.

3. Estude a existência dos seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, com $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2\,, \\ 0 & \text{se } y \neq x^2\,; \end{cases}$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$, com $g(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se } x^2+y^2 \leq 1\,, \\ 5 & \text{se } x^2+y^2 > 1\,; \end{cases}$

4. Calcule, caso exista (ou demonstre que não existe) cada um os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$; (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$; (d) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,0,1)} \dfrac{x^4 z}{(x^4+y^2)^3}$;

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{2x^2+4y^2}$; (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x+y}{x-y}$;

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$; (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$;

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-2x^2y^3}{2x^4+3y^6}$ (j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$;

(l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2-2y}{x^4+y^2}$; (m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-2x^2+3y}{x^2+y^2}$;

(n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^3}{3x^2+4y^6}$; (o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$;

5. Estude a continuidade de cada uma das funções $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6. Estude a continuidade das funções definidas por:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se } xy \neq 0, \\ 0 & \text{se } xy = 0; \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ (d) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < y < x^2, \\ 1 & \text{caso contrário;} \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ (f) $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq y, \\ y & \text{se } x < y; \end{cases}$

(g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ (m) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

7. Usando a definição, calcule a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A)$ da função f no ponto A segundo o vector $\vec{v}$, para:

   (a) $f(x,y) = xy\,,\ \vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2\,,\ A = (1,0);$

   (b) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}\,,\ \vec{v} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2\,,\ A = (1,1);$

   (c) $f(x,y) = 3x + y^2\,,\ \vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2\,,\ A = (0,0);$

   (d) $f(x,y,z) = x^2 + xy + z^2\,,\ \vec{v} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\,,\ A = (1,2,-1);$

8. Determine as funções derivadas parciais de primeira ordem das funções definidas por

   (a) $f(x,y) = 5y^3 + 2xy - x^2;$
   (b) $f(x,y) = y\mathrm{e}^{x} + x\cos(x^2y);$
   (c) $f(x,y) = \log(\cos(xy));$
   (d) $f(x,y,z) = \operatorname{sen} x + \log x + \mathrm{e}^{xz};$
   (e) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2yz^3}.$

9. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ para qualquer $\vec{v}\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, onde:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0);$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0);$

10. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das funções definidas por

    (a) $f(x,y) = 1$ se $x = 0$ ou $y = 0$ e $f(x,y) = 0$ se $xy\neq 0;$

    (b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0);$

    (c) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0);$

    (d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$ se $x+y\neq 0$ e $f(x,y) = x$ se $x+y = 0;$

11. Calcule as derivadas parciais de segunda ordem das funções definidas por

    (a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y^2};$

    (b) $f(x,y) = \log(1+x^2+y^2);$

    (c) $f(x,y,z) = \cos(xyz);$

    (d) $f(x,y,z) = y^2\log x + x\mathrm{e}^{xz}.$

12. Usando o teorema de Schwarz, mostre que não pode existir uma função f : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais de primeira ordem sejam:

    (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x^3$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = yx^2 + x$;

    (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x \operatorname{sen} y$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y \operatorname{sen} x$.

13. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

    (b) Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

    (c) Explique porque não há contradição com o teorema de Schwarz.

14. Considere a função definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x+y} & \text{se } x \neq -y, \\ 0 & \text{se } x = -y. \end{cases}$

    (a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$.

    (b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

15. Para cada um das seguintes funções:

    $f(x,y,z) = x+y+\operatorname{sen}(xy^2)$, $\quad g(x,y,z) = e^{xy}+4z$, $\quad h(x,y,z) = \operatorname{sen} x + 3\operatorname{sen} y + z$,

    (a) jusifique que são diferenciáveis na origem;

    (b) determine a derivada direccional na origem segundo a direcção $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$.

16. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.

    (a) Determine as funções derivadas parciais de primeira ordem de f.

    (b) Verfique se f é diferenciável em $(0,0)$. Justifique.

17. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = 3xy + y^2$.

(a) Justifique que f é derivável em odos os pontos de $\mathbb{R}^2$;

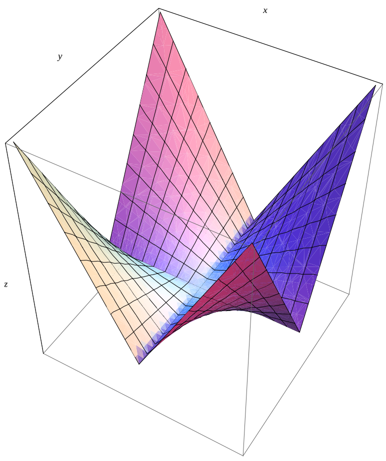
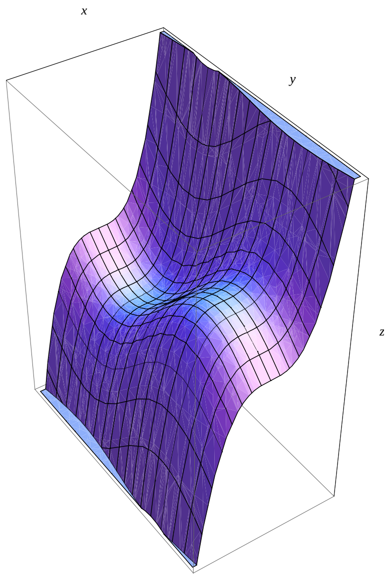
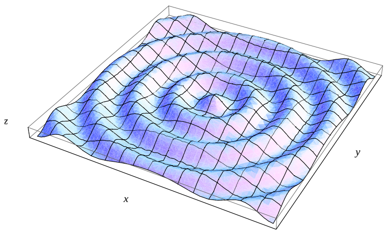
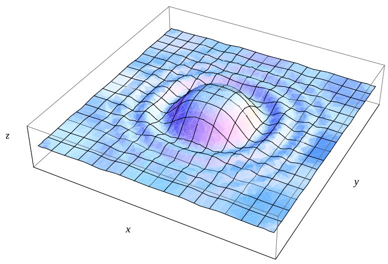
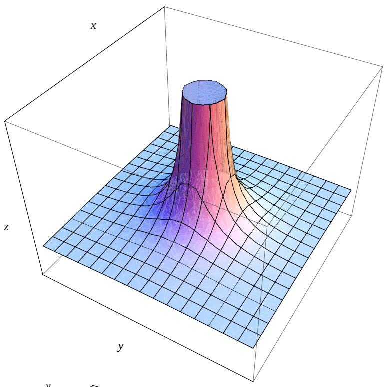
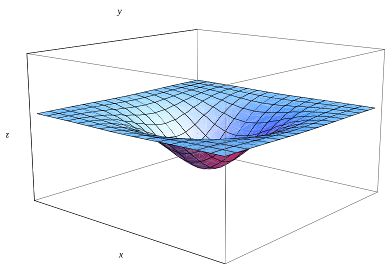
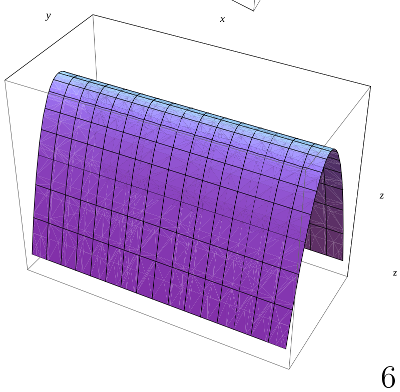
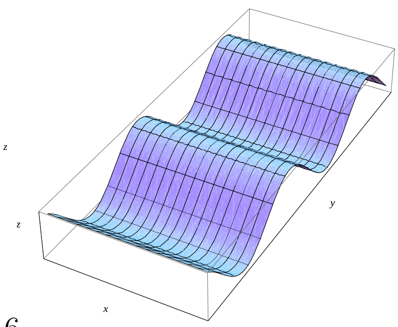
(b) Determine $f'(2,3)$;

(c) Determine a taxa de variação de f no ponto $(2,3)$ e na direcção de $\vec{v} = (3,4)$;

(d) Quais o senido e direcção a seguir, partindo de $(2,3)$, para que a taxa de variação de f seja máxima?

(e) Qual a taxa de variação máxima de f no ponto $(2,3)$?

(f) Encontre a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,3,27)$.


x
y
z

x
y
z

z
y
x

z
y
x

x
z
y

y
z
x

y
x
z

z
y
x

Análise Matemática B

— folha 2 — Algumas soluções ———————— 2011'12 ———

1. (c) Domínio: $\mathbb{R}^2$, Contradomínio: $]-\infty,0[$;
(d) Domínio: $\mathbb{R}^2$, Contradomínio: $\mathbb{R}$;
(e) Domínio: $\mathbb{R}^2$, Contradomínio: $[0,+\infty[$;
(h) Domínio: $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, Contradomínio: $\mathbb{R}$.

4. (c) 0; (d)$\frac{1}{256}$; (f) 1; (g) 2; ; (h) não tem; (i) não tem; (j) 0; (l) não tem; (m) não tem; (n) não tem; (o) 0.

5. (a) f é contínua em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ e g é contínua em $\mathbb{R}^2$.

6. (b) Contínua em $\{(x,y)\mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$; (f) Contínua em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$; (m) Contínua em $\mathbb{R}^2$.

7. (b) 0; (c) 3; (d) 4.

8. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2y-2x \end{array}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 15y^2+2x \end{array}$;

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}: \begin{array}{rcl} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & -y\tan(xy) \end{array}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}: \begin{array}{rcl} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & -x\tan(xy) \end{array}$,

com $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \cos(xy)>0\}$.

10. (c) $$\frac{\partial f}{\partial x}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{2y^6-2x^2y^2}{(x^2+y^4)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{array} ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{4x^2y-4xy^5}{(x^2+y^4)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{array} ;$$

14. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)=y$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)=0$.
(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0\neq 1=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Nota: Alerto para a possibilidade da existência de gralhas. O aluno deverá contactar o docente para o esclarecimento de qualquer dúvida.

Universidade do Minho MIECOM
Departamento de Matemática e Aplicações

Análise Matemática B

— folha 3 — Algumas soluções ————— 2011'12 ———

4(a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,2) = 0$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,2) = 2 - \dfrac{3}{2}\pi$

6(b) $z'(3,1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{5}{8} \end{bmatrix}$

6(c) $H'(3,1) = \begin{bmatrix} e^3 - \frac{1}{4} & 3e^3 - \frac{9}{8} \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{yx}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

1. Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$;
2. Mostre que f é diferenciável em $(-1,2)$;
3. Determine $f'(-1,2)$.

Determine $\dfrac{\partial h}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial h}{\partial v}$ quando:

1. $f(x,y) = 2xy$, com $x = u^2 + v$, $y = \dfrac{u}{v}$ e $h(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$;
2. $f(x,y) = xe^{-y} + ye^{-x}$, com $x = u\,\mathrm{sen}\, v$, $y = v\cos u$ e $h(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$;
3. $f(x,y) = xe^{y}$, com $x = \ln u$, $y = v$ e $h(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$;
4. $f(x,y) = xe^{y}$, com $x = u^2+v^2$, $y = u^2-v^2$ e $h(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.

Seja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\nabla G(2,3,0) = (-1,2,3)$. Determine:

1. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,2)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,2)$, sendo $g(x,y) = G\left(yx, x+y, \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)$;
2. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,-1)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,-1)$, sendo $g(x,y) = G\left(-2ye^{x}, -3y + y^3x^2, x\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)$.

Considere a seguinte equação

$$xyz^3 + x^2yz^2 - x + 2y + z = 0.$$

1. Mostre que a equação apresentada define implicitamente z como função de (x, y) para pontos "próximos"de $(1, 1, -1)$.
2. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1, 1)$.

Considere a seguinte equação de três variáveis reais

$$xz^2 + xy^2z = yz^2 + 5.$$

1. Mostre que a equação apresentada define z como função de (x, y) para pontos "próximos"de $(3, 1, 1)$;
2. Determine $z'(3, 1)$;
3. Para $z(x, y)$, definida na alínea (a), determine $H'(3, 1)$, onde $H(x, y) = G(x, y, z(x, y))$ para (x, y) "próximo"de $(3, 1)$, com $G(x, y, z) = e^{xy} + xyz$.

Seja $z = \varphi(x, y)$ uma função definida implicitamente, para (x, y, z) "próximo"de $(1, 1, 0)$, pela equação $xe^{yz} + z\log y = 1$. Determine $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 1)$ e $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1)$.

Escreva o polinómio de Taylor de ordem 2 para as funções apresentadas a seguir, em torno dos pontos indicados:

1. $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$, ponto $(1, \pi)$;
2. $f(x, y) = \cos(xy)$, ponto $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$;
3. $f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y}$, ponto $(0, 0)$;
4. $f(x, y) = (x + y)^2$, ponto $(0, -2)$.

Determine os pontos críticos de cada uma das funções apresentadas. Averigue se algum deles é maximizante local, minimizante local ou ponto de sela.

1. $f(x, y) = x^6 + y^6$;
2. $f(x, y) = x^4 + y^3$;
3. $f(x, y) = x^2y^2$;
4. $f(x, y) = 2 - x - y^2$.

Universidade do Minho — MIECOM
Departamento de Matemática e Aplicações

Análise Matemática B

— folha 3 — Algumas soluções — 2011'12 —

4.(a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,2) = 0$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,2) = 2 - \dfrac{3}{2}\pi$

6.(b) $z'(3,1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{5}{8} \end{bmatrix}$

6.(c) $H'(3,1) = \begin{bmatrix} e^3 - \frac{1}{4} & 3e^3 - \frac{9}{8} \end{bmatrix}$

7. $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(1,1) = -1$ e $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1) = 0$

9.(c) Todos os pontos do conjunto $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ que são todos pontos minimizantes.

9.(d) Não tem pontos críticos.

10.(c) O ponto $(-1,1)$ é o único ponto crítico e é ponto de mínimo. O mínimo local é zero.

13.(a) Mínimo condicionado: $\log\left(\frac{25}{24}\right)$.

15. O triângulo retângulo que possui área máxima tem ambos os catetos com medida $2\sqrt{2}$.

Nota: Alerto para a possibilidade da existência de gralhas. O aluno deverá contactar o docente para o esclarecimento de qualquer dúvida.

Universidade do Minho — MIECOM

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise Matemática B

— folha 4 — Integração múltipla — 2011'12 —

1. Calcule o valor do integral $\displaystyle\int_{\mathcal{A}} f$, onde:

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^2$ e $\mathcal{A} = [0,1] \times [0,1]$;

   (b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$ e $\mathcal{A} = [-1,0] \times [0,2]$;

   (c) $f(x,y,z) = xy^2 - 2z$ e $\mathcal{A} = [-1,1] \times [0,2] \times [2,3]$;

   (d) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y} - 3zx^2$ e $\mathcal{A} = [-1,1] \times [1,e] \times [2,3]$;

2. Calcule o valor do integral $\displaystyle\int_{\mathcal{A}} f$, onde:

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^2$ e $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\, x \le y \le -x^2 + 4x\}$;

   (b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$ e $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\, x \le y \le -x + 2\}$;

   (c) $f(x,y,z) = xy^2 - 2z$ e
   $\mathcal{A} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le x^2 + y^2\}$;

   (d) $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x \le y \le -x + 2\}$;

3. Identifique o domínio de integração e inverta a ordem de integração nos seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{y+3} f(x,y)\, dxdy$;

   (b) $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} f(x,y)\, dydx$;

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x,y)\, dxdy$;

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} f(x,y)\, dydx$;

   (e) $\displaystyle\int_1^2 \int_{x^2}^{x^3} f(x,y)\, dydx$;

   (f) $\displaystyle\int_0^2 \int_x^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\, dydx$.

4. Invertendo a ordem de integração, calcule:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}\, dydx$;

   (b) $\displaystyle\int_1^{e^3} \int_{\log y}^3 dxdy$;

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}\, dx\, dy$;

   (d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \int_{\log y}^1 \frac{(x^2+1)^{13}}{y}\, dx\, dy$.

5. Usando integrais duplos, calcule a área de cada uma das regiões planas R que se seguem:

   (a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ \mathrm{e}^{-x} \leq y \leq \mathrm{e}^{x}\}$;

   (b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ y \leq -2x^2 - x + 3,\ y \leq -x + 1\}$;

   (c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2,\ y \leq 4 - x^2\}$;

6. Usando integrais duplos, calcule o volume de cada um dos sólidos S que se seguem:

   (a) $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2,\ \mathrm{e}^{-x} \leq y \leq \mathrm{e}^{x},\ 0 \leq z \leq x + y\}$;

   (b) $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0,\ y \leq x^2 - 2x,\ x - y \leq z \leq x + y\}$;

   (c) $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0,\ x \leq y^2 - y,\ x \leq z + y,\ y \leq -x - z\}$.

7. Determine as coordenadas polares dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A = (3, \sqrt{3}), \quad B = (0,2), \quad C = (0,-2), \quad D = (-4,-4), \quad E = (1,1).$$

8. Determine as coordenadas cartesianas dos pontos cuja representação polar é

$$A = \left(1, \frac{\pi}{4}\right), \quad B = \left(2, \frac{3\pi}{2}\right), \quad C = (5,0), \quad D = \left(5, \frac{\pi}{2}\right), \quad E = \left(3, \frac{11\pi}{6}\right).$$

9. Passando para coordenadas polares, calcule $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\, d(x,y)$, onde:

   (a) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$ e $\mathcal{D} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 5\big\}$;

   (b) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{-1} \log(x^2 + y^2)$ e $\mathcal{D}$ é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências de equações $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$;

   (c) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ e $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ \sqrt{3}y \geq x,\ \sqrt{3}x \geq y\right\}$;

   (d) $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 2\,,\ 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\right\}$;

   (e) $f(x,y) = \big(x^2 + y^2\big)^{-\frac{1}{2}}$ e $\mathcal{D} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y \leq x\,,\ y \geq x^2\,,\ x \geq 0\big\}$.

10. Usando integrais duplos, calcule a área de cada uma das regiões planas R que se seguem:

   (a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x,\ y \leq x,\ x^2 + y^2 \leq 9\}$;

   (b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \leq x,\ x \geq 0\}$;

   (c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16,\ (x+2)^2 + y^2 \geq 4,\ y \geq 0\}$.

11. Usando integrais duplos, calcule o volume dos seguintes sólidos:

    (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \; 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$;

    (b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 \leq x \leq 2 \, , \; 0 \leq y \leq 2 \, , \; z \geq 0 \, , \; y + z \leq 2\}$;

    (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq 1 \, , \; z \geq 0 \, , \; y + z \leq 3\}$.

12. Determine as coordenadas cilíndricas dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A = (1, \sqrt{3}, -1), \qquad B = (2, 0, 0), \qquad C = (0, -5, 3) \quad \text{e} \quad D = (3, -3, 2).$$

13. Usando coordenadas cilíndricas, calcule $\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int_{\mathcal{R}} f(x, y, z) \, d(x, y, z)$, para

    (a) $f(x, y, z) = x$ e $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 3 \, , \; x^2 + y^2 \leq z\}$;

    (b) $f(x, y, z) = z \, \mathrm{e}^{x^2+y^2}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq z \leq 3 \, , \; x^2 + y^2 \leq 4\}$;

    (c) $f(x, y, z) = z \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\mathcal{R}$ a região do primeiro octante limitada pelas superfícies cilíndricas de equações $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$ e pelos planos de equações $z = 0 \, ,$ $z = 1 \, ,$ $x = 0$ e $x = y$.

14. Determine as coordenadas esféricas dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A = (1, -1, 0), \qquad B = (1, 1, \sqrt{2}), \qquad C = (-1, -1, \sqrt{2}) \quad \text{e} \quad D = (0, 1, -1).$$

15. Calcule o volume da esfera de centro na origem e raio 2.

16. Usando coordenadas esféricas, calcule o valor do integral

$$\int\!\!\int\!\!\int_{\mathcal{S}} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} d(x, y, z),$$

    onde $\mathcal{S} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4 \}$.

17. Calcule o volume do sólido que é:

    (a) definido pelas condições $3z \geq x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$;

    (b) definido pelas condições $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$;

    (c) limitado pela superfície esférica de equação $\rho = 1$ e pela superfície cónica de equação $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações MIECOM

Análise Matemática B

— folha 5 — Integrais de Linha — 2011'12 —

1. Faça um esboço das curvas C com as seguintes parametrizações:

   (a) $\vec{r}(t) = (t, t^2)$, com $t \in [0, 2]$;

   (b) $\vec{r}(t) = (2t, 4t^2)$, com $t \in [0, 1]$;

   (c) $\vec{r}(t) = (-\frac{t}{2} + 1, t + 2)$, com $t \in \mathbb{R}$;

   (d) $\vec{r}(t) = (-\frac{t}{2} + 1, t + 2)$, com $t \in [-1, 2]$;

   (e) $\vec{r}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$, com $t \in [0, 2\pi]$;

   (f) $\vec{r}(t) = (2\cos t, \sin t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.

2. Encontre uma parametrização para cada uma das seguintes curvas, nos sentidos indicados:

   (a) Circunferência de centro (0,0) e raio 2 percorrida em sentido horário;

   (b) Circunferência de centro (0,0) e raio 2 percorrida em sentido anti-horário;

   (c) O segmento de recta no plano desde o ponto $(1, 2)$ até ao ponto $(-2, 1)$;

   (d) O segmento de recta no espaço desde o ponto $(1, 2, 0)$ até ao ponto $(-2, 1, 3)$.

3. Considere as curvas com as seguintes parametrizações:

   (a) $\vec{r}(t) = (3t^2, t^3 + 1)$, com $t \in \mathbb{R}$;

   (b) $\vec{r}(t) = (3\operatorname{sen}(t^2) - 1, 3\cos(t^2))$, com $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$;

   (c) $\vec{r}(t) = (3\operatorname{sen}^2 t, \cos t - 1, t^2)$, com $t \in \mathbb{R}$;

   (d) $\vec{r}(t) = (t^2, \pi^2)$, com $t \in \mathbb{R}$.

   Para cada uma das curvas apresentadas, determine:

   i) O vector velocidade $\vec{r}'(t)$;

   ii) A velocidade $||\vec{r}'(t)||$;

   iii) Os tempos t em que ocorre uma paragem da partícula.

4. Determine os integrais de linha $\int_C \vec{F} d\vec{r}$, quando:

   (a) $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ e C é o segmento de recta do ponto $(0,0)$ até ao ponto $(3,3)$;

   (b) $\vec{F}(x,y) = -y \operatorname{sen} x\vec{i} + \cos x\vec{j}$ e C é a parábola $y = x^2$ desde o ponto $(0,0)$ até ao ponto $(2,4)$;

   (c) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + (x+2z^2)\vec{j} + 4yz\vec{k}$ e $C = C_1 + C_2$ onde C_1 é o segmento de recta do ponto $(1,1,0)$ até ao ponto $(0,0,0)$ e C_2 é o segmento de recta do ponto $(0,0,0)$ até ao ponto $(0,0,\sqrt{2})$;

   (d) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + (x+2z^2)\vec{j} + 4yz\vec{k}$ e C é um arco de circunferência, no plano $y = x$, desde o ponto $(1,1,0)$ até ao ponto $(0,0,\sqrt{2})$;

   (e) $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{i} + xy\vec{j}$ e C é a curva que percorre a parábola $y = x^2$ desde o ponto $(0,0)$ até ao ponto $(1,1)$ e, depois, percorre o segmento de reta desde o ponto $(1,1)$ até ao ponto $(0,0)$;

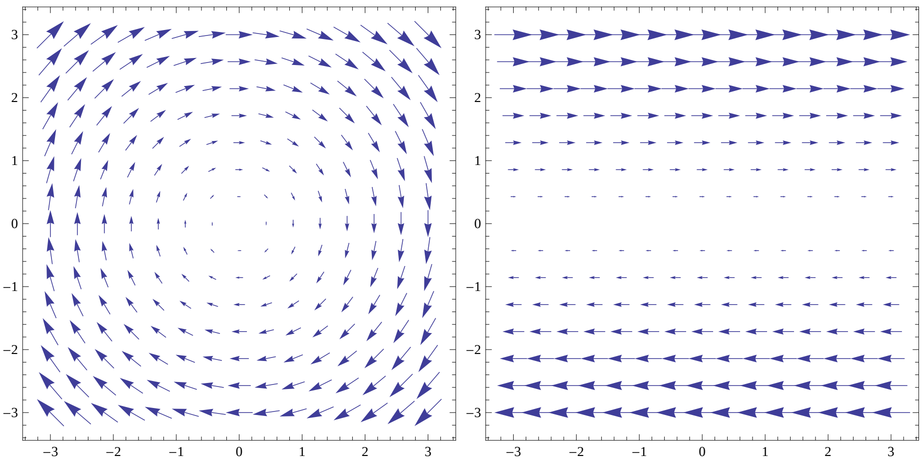
   (f) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + (xz-y)\vec{k}$ e C é o segmento de reta que une o ponto $(0,0,0)$ ao ponto $(1,2,4)$.

5. Para cada um dos campos de vectores que se segue, represente uma curva orientada cujo integral de linha ao longo dessa curva seja:

   (a) positiva;

   (b) negativa;

   (c) zero.



6. Considere a função real $f(x,y,z) = x\operatorname{sen} z + yx$.

   (a) Determine $\vec{F} = \nabla f$;

   (b) Determine $\displaystyle\int_C \vec{F} d\vec{r}$, onde $\vec{r}(t) = \left(\operatorname{sen}^2(t), \frac{4t}{\pi}, \cos^2 t\right)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

7. Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} - x\vec{j}$, sobre uma partícula que se desloca, em sentido horário, ao longo da circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1. O campo de forças $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} - x\vec{j}$ é conservativo? Justifique.

8. Utilize o Teorema de Green para calcular $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ em que $\vec{F}(x,y) = y^2\vec{i} + x\vec{j}$ e a curva C, parametrizada no sentido direto, delimita:

   (a) o quadrado cujos vértices são: $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$;

   (b) o quadrado cujos vértices são: $(2,0)$, $(-2,0)$, $(0,-2)$, $(0,2)$;

   (c) o círculo de raio 2 e centro na origem.

9. Use o Teorema de Green para determinar a área de uma circunferência de raio $R > 0$.

Universidade do Minho — MIECOM
Departamento de Matemática e Aplicações

Análise Matemática B

— folha 6 — Integrais de Superfície — 2011'12 —

1. Identifique as superfícies S com as seguintes parametrizações:
   (a) $s(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$, com $(u,v) \in [0, 2\pi[\times[0,2]$;
   (b) $s(u,v) = (u, v, 1-u-v)$, com $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$;
   (c) $s(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$, com $(u,v) \in \mathbb{R}^2$;
   (d) $s(u,v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, u^2)$, com $(u,v) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[$;
   (e) $s(u,v) = (\cos u \operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v)$, com $(u,v) \in [0,2\pi[\times[0,\pi]$.

2. Encontre uma parametrização para cada uma das seguintes superfícies:
   (a) Cone de vértice em (0,0,0) e eixo de rotação Oz^+;
   (b) Plano de equação cartesiana $2x - y + z = 2$;
   (c) Cone de vértice em (0,0,0) e eixo de rotação Oy^+.

3. Determine as áreas das superfícies (a), (b) e (e) do exercício 1.

4. Seja S a semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ e $f(x,y,z) = x$. Calcule o valor do integral de superfície $\int\int_S f dS$, utilizando
   (a) a parametrização apresentada no exercício 1.(e);
   (b) a parametrização $s(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$ com $(u,v) \in \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \leq 1\}$.

5. Determine o centro de massa da superfície da semi-esfera homogénea(densidade de massa constante) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

6. Calcule a área da porção do paraboloide $x^2 + z^2 = 2y$ cortado pelo plano $y = 1$.

7. Em cada uma das alíneas seguintes, use o teorema de Stokes para provar que os integrais de linha Têm os valores apresentados. Explique qual qual o sentido em que a curva C deve ser percorrida.
   (a) $\int_C \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = \pi\sqrt{3}$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y,z,x)$ e C a curva de intersecção da esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ e o plano $x+y+z=0$;

(b) $\int_C \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = 0$, onde $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$ e C a curva de intersecção do cilíndro $x^2 + y^2 = 2y$ e o plano $y = z$;

(c) $\int_C \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = 0$, onde $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (y^2, xy, xz)$ e C a curva de intersecção do cilíndro $x^2 + y^2 = 2y$ e o plano $y = z$.