Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Ciências da Computação

Análise

Folha de exercícios 1 — 2018'19

1. Considere os vectores $X = (3,4)$ e $Y = (-1, \sqrt{3})$ do espaço $\mathbb{R}^2$.
   (a) Determine a norma de cada um dos vectores apresentados;
   (b) Determine a distância entre os dois vectores apresentados;
   (c) Determine o produto interno entre X e Y, identificando o ângulo entre eles.
2. Considere os vectores $X = (3,4,-1)$ e $Y = (0,-1,\sqrt{3})$ do espaço $\mathbb{R}^3$.
   (a) Determine a norma de cada um dos vectores apresentados;
   (b) Determine a distância entre os dois vectores apresentados;
   (c) Determine o produto interno entre X e Y, identificando o ângulo entre eles.
3. Obtenha uma equação da recta, no espaço $\mathbb{R}^2$, que passa nos pontos $(2,3)$ e $(-1,0)$.
4. Obtenha uma equação da recta, no espaço $\mathbb{R}^2$, que passa no ponto $(1,2)$ e tem a direcção do vector $(-1,1)$.
5. Obtenha as equações da recta, no espaço $\mathbb{R}^3$, que passa nos pontos $(2,3,0)$ e $(-1,0,1)$.
6. Obtenha as equações da recta, no espaço $\mathbb{R}^3$, que passa no ponto $(1,2,0)$ e tem a direcção do vector $(-1,-1,1)$.
7. Obtenha uma equação do plano, no espaço $\mathbb{R}^3$, que contenha o ponto $(1,0,2)$ e é perpendicular ao vector $(-1,0,3)$.
8. Obtenha um vector, no espaço $\mathbb{R}^2$, perpendicular ao vector $(1,-3)$.
9. Obtenha um vector, no espaço $\mathbb{R}^3$, perpendicular aos vectores $(1,1,0)$ e $(0,2,-1)$.
10. Obtenha uma equação do plano, no espaço $\mathbb{R}^3$, que contenha os pontos $(1,0,2)$, $(1,1,1)$ e $(-1,0,-2)$.
11. Identifique as bolas $B(2,1)$, $B((1,-1),1)$ e $B((0,1,1),1)$ nos espaços $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente.
12. Para cada um dos seguintes conjuntos, faça um esboço e identifique o interior, a aderência, o derivado e a fronteira.
    (a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y < 2\} \cup \{(0,0)\}$;
    (b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x\}$;
    (c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$;
    (d) $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 > x \text{ ou } x \geq 1\big\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\right\}$;
    (e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \text{ e } y \neq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ e } |x| > 2\}$;
    (f) $F = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \pi\big\}$.
13. Dos conjuntos da alínea anterior, identifique os limitados, os fechados e os abertos.
14. Para cada um dos seguintes conjuntos, identifique o interior, a aderência, o derivado e a fronteira.
    (a) $A = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4 \text{ ou } z = 0\}$;
    (b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x\}$;
    (c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$;
    (d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x + y + z = 1\}$;
15. Dos conjuntos da alínea anterior, identifique os limitados, os fechados e os abertos.

Análise

— Folha de exercícios 2 — 2018'19 —

1. Identifique o domínio de cada uma das seguintes funções reais de várias variáveis reais:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 - y}$;

   (b) $f(x,y) = \sqrt[3]{-y^2+5y-6}.\sqrt{-x^2+5x-6}$;

   (c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

   (d) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$;

   (e) $f(x,y) = \ln(xy)$;

   (f) $f(x,y,z) = \dfrac{y.\arccos(x)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

   (g) $f(x,y) = \sqrt{4x^2+9y^2-36}$

   (h) $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;.

2. Identifique o domínio de cada uma das seguintes funções vectoriais de várias variáveis reais:

   (a) $f(x,y) = \left(xy, \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$;

   (b) $f(x,y) = \left(\sqrt[3]{x-y}, y, \sqrt{x^2-1}\right)$;

   (c) $f(x,y) = \left(\ln(x^2+y^2), \sqrt{y-1}\right)$;

   (d) $f(t) = \left(\ln t, \dfrac{t}{t-1}, \mathrm{e}^{-t}\right)$.

3. Identifique e esboce cada uma das cónicas que se seguem:

   (a) $x^2+y^2-2y=16$;

   (b) $x^2+2x+\dfrac{y^2}{2}=2$;

   (c) $\dfrac{x^2}{4}-y^2+2y=0$;

   (d) $y^2+4y-x=2$.

4. Esboce ou descreva as superfícies definidas pelas seguintes equações:

   (a) $4x^2+y^2=16$;

   (b) $x+2z=4$;

   (c) $z^2=y^2+4$;

   (d) $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}$;

   (e) $z=x^2$

   (f) $y^2+z^2=4$;

   (g) $z=\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{9}$

   (h) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{9}=1$;

   (i) $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1$

   (h) $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{9}=1+\dfrac{z^2}{9}+\dfrac{2z}{9}$.

5. Esboce o gráfico da função real de várias variáveis definida por:

   (a) $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}+2$;

   (b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+2$;

   (c) $f(x,y)=x-2y$;

   (d) $f(x,y)=x^2+y^2$;

6. Identifique as curvas de nível de cada uma das seguintes funções reais de várias variáveis:

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$;

   (b) $f(x, y) = x^2 - y^2$;

   (c) $f(x, y) = y^2$;

   (d) $f(x, y) = x^2 + 4x$;

   (e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

   (f) $f(x, y) = 2x + y$.

Universidade do Minho — Lic. em Ciências da Computação

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

Folha de exercícios 3 — 2018'19

1. Estude a existência dos seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\,,\quad$ com $\quad f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{se } y=x^2\,,\\ 0 & \text{se } y\neq x^2\,;\end{cases}$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\,,\quad$ com $\quad g(x,y)=\begin{cases} 2 & \text{se } x^2+y^2\leq 1\,,\\ 5 & \text{se } x^2+y^2>1\,;\end{cases}$

2. Calcule, caso exista (ou demonstre que não existe) cada um os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$; (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$; (d) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,0,1)} \dfrac{x^4z}{(x^4+y^2)^3}$;

   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{2x^2+4y^2}$; (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x+y}{x-y}$;

   (g) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$; (h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$;

   (i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-2x^2y^3}{2x^4+3y^6}$ (j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$;

   (l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2-2y}{x^4+y^2}$; (m) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-2x^2+3y}{x^2+y^2}$;

   (n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^3}{3x^2+4y^6}$; (o) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$;

   (p) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2\operatorname{sen} x}{x^2+3y^2}$; (q) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \cos\left(\dfrac{\log\,(x^6)}{y^2-x+1}\right)$;

   (r) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$; (s) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

   (t) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2+2}$; (u) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\mathrm{e}^{\,xy}}{x+1}$;

3. Estude a continuidade de cada uma das funções $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

4. Apresente, caso seja possível, um prolongamento contínua à origem de cada uma das funções definidas por:

(a) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$; (b) $f(x,y)=\dfrac{3x^2(y-1)}{x^2+y^2}$;

(c) $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$; (d) $f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{x^4+2y^4}$;

5. Estude a continuidade das funções definidas por:

(a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$ (b) $f(x,y)=\begin{cases}2 & \text{se } xy\neq 0,\\ 0 & \text{se } xy=0;\end{cases}$

(c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$ (d) $f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{se } 0<y<x^2,\\ 1 & \text{caso contrário;}\end{cases}$

(e) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$ (f) $f(x,y)=\begin{cases}x & \text{se } x\geq y,\\ y & \text{se } x<y;\end{cases}$

(g) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$ (h) $f(x,y)=\log(x^3y)$

(i) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$ (j) $f(x,y)=\begin{cases}x, & x<y\\ -y+2, & x\geq 0\end{cases}$

(k) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$ (l) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x-y}, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$

6. Relativamente a uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

(a) se $f(0,0)=1$ e $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1$ então f é contínua em $(0,0)$;

(b) se $f(0,0)=1$ e $f(x,x^3)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, então f é descontínua em $(0,0)$;

(c) se f é contínua em $(0,0)$ e $f(x,x^2)=2x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, então $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1$;

(d) se $f(x,x^2)=x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, e $f(x,-x^2)=e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, então f é contínua em $(0,0)$.

Universidade do Minho — Lic. em Ciências da Computação

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

Folha de exercícios 4 — 2018'19

1. Sendo $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y)=x^2y$ e $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, calcule, usando a definição de derivada parcial:

   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$;

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$;

   (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$;

   (d) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

2. Determine as funções derivadas parciais de primeira ordem das funções definidas por

   (a) $f(x,y)=5y^3+2xy-x^2$;

   (b) $f(x,y)=ye^x+x\cos(x^2y)$;

   (c) $f(x,y)=\sqrt[3]{x}y^3$;

   (d) $f(x,y)=\log(\cos(xy))$;

   (e) $f(x,y,z)=\operatorname{sen}x+\log x+e^{xz}$;

   (f) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2yz^3}$.

3. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das funções definidas por

   (a) $f(x,y)=1$ se ($x=0$ ou $y=0$), e $f(x,y)=0$ se $xy\neq 0$;

   (b) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$, e $f(x,y)=0$ se $(x,y)=(0,0)$;

   (c) $f(x,y)=\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$ se $(x,y)\neq(0,0)$, e $f(x,y)=0$ se $(x,y)=(0,0)$;

   (d) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$ se $x+y\neq 0$, e $f(x,y)=x$ se $x+y=0$;

4. Mostre que:

   (a) se $f(x,y)=\mathrm{e}^{\,xy}$, então $x\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial y}$;

   (b) se $f(x,y)=\ln(x^2+y^2+xy)$, então $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=2$;

   (c) se $f(x,y,z)=x+\frac{x-y}{y-z}$, então $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}=1$.

5. Usando a definição, calcule a derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A)$ da função f no ponto A na direcção e sentido do vector $\vec{v}$, para:

   (a) $f(x,y)=xy$, $\vec{v}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $A=(1,0)$;

   (b) $f(x,y)=x^2y+x$, $\vec{v}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $A=(1,0)$;

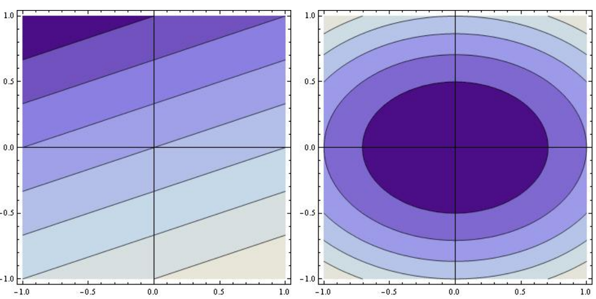
   (c) $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$, $\vec{v}=-\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $A=(1,1)$;

   (d) $f(x,y)=3x+y^2$, $\vec{v}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $A=(0,0)$;

(e) $f(x,y,z) = z\mathrm{e}^{\,x^2+y^2}$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $A = (0,0)$;

(f) $f(x,y,z) = x^2 + xy + z^2$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $A = (1,2,-1)$.

6. As curvas de nível de uma função f, nas quais os níveis mais elevados têm a cor mais clara, são apresentadas em cada uma das seguintes figuras. Qual o sinal de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e de $\frac{\partial f}{\partial y}$ (para uma série de pontos à sua escolha)?



7. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ para qualquer $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, onde:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$;

   (b) $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$.

8. Mostre que não são deriváveis em $(0,0)$ cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$;

   (b) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$;

   (c) $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$.

9. Calcule o gradiente de cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(x,y,z) = x\mathrm{e}^{\,y^2+z^2}$;

   (b) $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2+2}$;

   (c) $f(x,y,z,w) = z^2 \cos(xy) \ln(xy)$.

10. Para cada uma das seguintes funções:

$$f(x,y,z) = x + y + \operatorname{sen}(xy^2), \qquad g(x,y,z) = e^{xy} + 4z, \qquad h(x,y,z) = \operatorname{sen} x + 3\operatorname{sen} y + z,$$

   (a) jusifique que são diferenciáveis na origem;

   (b) determine a derivada direccional na origem segundo o vector $\vec{v} = (1,3,-1)$.

11. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.

   (a) Determine as funções derivadas parciais de primeira ordem de f.

   (b) Verfique se f é diferenciável em $(0,0)$. Justifique.

12. Encontre uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^3$ no ponto de coordenadas $(3,1,10)$.

13. Mostre que os gráficos das funções $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $g(x,y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ têm o mesmo plano tangente em $(0,0)$.

14. Determine o ponto de interseção do plano tangente à superfície de equação $z = \mathrm{e}^{\,x-y}$ no ponto $(1,1,1)$ com o eixo de zz.

15. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

    (a) Mostre que existe $Df(A, \vec{u})$, $\forall A, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$;

    (b) Verifique se f é derivável em $(0,0)$.

16. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

    (a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

    (b) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ e verifique quenão são contínuas em $(0,0)$;

    (c) Verifique se f é derivável em $(0,0)$.

17. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

    Mostre que:

    (a) f é contínua;

    (b) $Df((0,0),(a,b)) = f(a,b)$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$;

    (c) Verifique se f é derivável em $(0,0)$.

18. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y,z) = z^2 \mathrm{e}^{\,x} \cos y$.

    (a) Obtenha o vector gradiente $\triangledown f(x,y,z)$;

    (b) Justifique que f é derivável em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$;

    (c) Determine $f'(0, \frac{\pi}{3}, 1)$;

    (d) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial(4,0,3)}(0, \dfrac{\pi}{3}, 1)$;

    (e) Determine a taxa de variação de f no ponto $(0, \frac{\pi}{3}, 1)$ e na direcção e sentido de $\vec{v} = (4,0,3)$.

19. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = 3xy + y^2$.

    (a) Justifique que f é derivável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$;

    (b) Determine $f'(2,3)$;

    (c) Determine a taxa de variação de f no ponto $(2,3)$ e na direcção de $\vec{v} = (3,4)$;

    (d) Qual o sentido e direcção a seguir, partindo de $(2,3)$, para que a taxa de variação de f seja máxima?

    (e) Qual a taxa de variação máxima de f no ponto $(2,3)$?

    (f) Encontre a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,3,27)$.

Análise

— Folha de exercícios 5 — 2018'19 —

1. Determine equações da recta normal e do plano tangente a cada uma das superfícies dadas, no ponto indicado:
   (a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$, $(1,1,1)$;
   (b) $xyz^2 = 1$, $(1,1,1)$;
   (c) $z = x^2 + 3y^3 + \operatorname{sen}(xy)$, $(1,0,1)$;
   (d) $x^2 - 2y^2 + z^2 = 3$, $(-1,1,2)$;
   (e) $z = 4x^2$, $(1,2,4)$;
   (f) $\mathrm{e}^{\,xyz} = 1$, $(1,1,0)$.
2. Determine a equação do plano tangente à superfície $x^2 + y^2 - xyz = 7$ no ponto $(2,3,1)$ por dois processos diferentes:
   (a) Considerando a superfície como a superfície de nível de uma função de 3 variáveis, $f(x,y,z)$;
   (b) Considerando a superfície como o gráfico de uma função de 2 variáveis, $g(x,y)$.
3. O potencial eléctrico V em (x,y,z), de um dado objecto 3D, é dado por $V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. Determine a taxa de variação de V em $P = (2,-1,3)$ na direcção e sentido de P para a origem do sistema de coordenadas. Indique ainda a direcção e sentido que produz a taxa máxima de variação de V em P. Qual o valor dessa taxa?
4. A temperatura T num dado ponto (x,y) de uma placa plana é dada por $T(x,y) = x^2\mathrm{e}^{\,-y}$. Partindo do ponto $(2,1)$, em que direcção e sentido a temperatura diminui mais rapidamente? Qual a taxa de variação instantânea partindo de $(2,1)$ e seguindo a direcção e sentido obtidos?
5. Considere a superfície de nível $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + xyz = 12\}$.
   (a) Determine equações da recta normal e do plano tangente a $\mathcal{S}$ no ponto $(2,2,1)$;
   (b) Verifique se a recta encontrada na alínea anterior intersecta o eixo Oz.
6. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x - y^2$ e $A = (-1,0)$.
   (a) Determine e represente graficamente a curva de nível de f que passa em A;
   (b) Calcule o vector $\nabla f(A)$. Coloque no esboço efectuado na alínea anterior, um representante de $\nabla f(A)$ com origem em A;
   (c) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f em $(A, f(A))$.
7. Determine os pontos da curva de equação $x(x^2 + y^2) + 9x^2 + y^2 = 0$ cuja recta tangente é horizontal ou vertical.
8. Determine os pontos da elipse $2x^2 + y^2 = 1$ cuja recta tangente passa pelo ponto $(1,1)$.
9. Determine os pontos da curva de equação $x^2 + y^2 - 2x + xy = 0$ cuja recta normal é paralela à recta $y = x$.
10. Determine os planos tangentes à esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ que contêm a recta de equação $\begin{cases} x = 5 - z \\ y = -5 + 2z \end{cases}$.
11. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2y^3$. Indique, para o ponto $(-1,2)$, um vector:
    (a) com a direcção e sentido de maior crescimento de f;
    (b) com a direcção e sentido de maior decrescimento de f;
    (c) com a direcção e sentido em que a variação instantânea de f é nula.

Análise

Folha de exercícios 6 2018'19

1. Calcule as derivadas parciais de segunda ordem das funções definidas por

   (a) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$; (b) $f(x,y) = \log(1+x^2+y^2)$;

   (c) $f(x,y,z) = \cos(xyz)$; (d) $f(x,y,z) = y^2 \log x + xe^{xz}$;

   (e) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy^2)$; (f) $f(x,y,z) = xy^2 + zy$;

   (g) $f(x,y) = \dfrac{y}{(x^2+y^2)^2}$; (h) $f(x,y,z) = xy^{\frac{3}{2}} + xe^{xy}$.

2. Usando o teorema de Schwarz, mostre que não pode existir uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais de primeira ordem sejam:

   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = yx^2 + x$;

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x \operatorname{sen} y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y \operatorname{sen} x$.

3. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

   (b) Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

   (c) Explique porque não há contradição com o teorema de Schwarz.

4. Considere a função definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x+y} & \text{se } x \neq -y, \\ 0 & \text{se } x = -y. \end{cases}$

   (a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$.

   (b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

   $$f(x,y) = (x\mathrm{e}^{\,y} + \cos y, x, x + \mathrm{e}^{\,y}).$$

   de cada uma das funções definidas a seguir, indicando o conjunto dos pontos onde está definida:

   (a) Justifique que f é derivável em todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

   (b) Calcule a matriz Jacobiana de f para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

   (c) Calcule $Jf(2,0)$ e $f'(2,0)$.

6. Calcule a derivada de cada uma das funções definidas a seguir, indicando o conjunto dos pontos (x, y) onde está definida:
   (a) $f(x, y) = (x\mathrm{e}^{\,y} + \cos y, x, x + \mathrm{e}^{\,y})$;
   (b) $f(x, y) = (x\sqrt[3]{y}, e^{x+2y})$;
   (c) $f(x, y) = (\ln(x^2 + y^2), \cos(xy))$;
   (d) $f(x, y, z) = (zx^2, -ye^z)$.

   Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

   $$f(x, y) = (3x - 2y, -y, \pi x + y).$$

   (a) Calcule $f'(x, y)$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
   (b) Observe e comente o resultado obtido na alínea anterior;
   (c) O mesmo acontece em todas as aplicaçãoes lineares? Justifique.
7. Calcule a derivada de $f \circ g$ em (x, y, z), sendo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções definidas por

   $$g(x, y, z) = (xz, yz + x) \qquad \text{e} \qquad f(x, y) = 2x + y^2.$$

8. Use a "regra da cadeia" de várias variáveis para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, sendo
   (a) $f(u, v) = 2uv, \quad \text{com} \quad u = u(x, y) = x^2 + y^2 \text{ e } v = v(x, y) = \dfrac{x}{y}$;
   (b) $f(s, t) = 2s^2 - st^2, \quad \text{com} \quad s = s(x, y) = y^2 \text{ e } t = t(x, y) = x\cos y$;
9. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\nabla F(2, 3) = (-1, 2)$. Determine:
   (a) $f'(2)$, sendo $f(x) = F(x, x + 1)$;
   (b) $f'(1)$, sendo $f(x) = F(2x, -x^2 + 4)$.
10. Seja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\nabla G(2, 3, 0) = (-1, 2, 3)$. Determine:
   (a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 2)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 2)$, sendo $g(x, y) = G\left(yx, x + y, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)$;
   (b) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0, -1)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0, -1)$, sendo $g(x, y) = G\left(-2ye^x, -3y + y^3x^2, x\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)$.
11. Considere a seguinte equação

   $$xyz^3 + x^2yz^2 - x + 2y + z = 0.$$

   (a) Mostre que a equação apresentada define implicitamente z como função de (x, y) para pontos "próximos" de $(1, 1, -1)$.
   (b) Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1, 1)$.
12. Considere a seguinte equação de três variáveis reais

   $$xz^2 + xy^2z = yz^2 + 5.$$

   (a) Mostre que a equação apresentada define z como função de (x, y) para pontos "próximos" de $(3, 1, 1)$;
   (b) Determine $z'(3, 1)$;
   (c) Para $z(x, y)$, definida na alínea (a), determine $H'(3, 1)$, onde $H(x, y) = G(x, y, z(x, y))$ para (x, y) "próximo" de $(3, 1)$, com $G(x, y, z) = e^{xy} + xyz$.
13. Considere a seguinte equação de três variáveis reais

   $$xe^{yz} + z\log y = 1$$

   (a) Mostre que a equação apresentada define z como função de (x, y) para pontos "próximos" de $(1, 1, 0)$;
   (b) Determine $z'(1, 1)$.

Análise

Folha de exercícios 7 — 2018'19

1. Determine os pontos críticos de cada uma das funções apresentadas. Averigúe se algum deles é maximizante local, minimizante local ou ponto de sela.
   (a) $f(x, y) = x^4 + y^4$;
   (b) $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$;
   (c) $f(x, y) = x^4 + y^3$;
   (d) $f(x, y) = xy$;
   (e) $f(x, y) = x^2 - y^2$;
   (f) $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5$.
2. Determine e classifique os pontos críticos das funções definidos por:
   (a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - y$;
   (b) $f(x, y) = (x + y)(xy + 1)$;
   (c) $f(x, y) = e^{2x^2+y^2}$;
   (d) $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.
3. Determine, caso existam, os extremos locais das funções definidas por:
   (a) $f(x, y) = (2x - y)^2$;
   (b) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 - 1$;
   (c) $f(x, y) = x^3y^3$;
   (d) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - y$;
   (e) $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$;
   (f) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$;
   (g) $f(x, y) = y + x \operatorname{sen} y$;
   (h) $f(x, y) = 2x^3 + 3xy^2 + +5x^2 + y^2$;
   (h) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$;
   (i) $f(x, y, z) = \mathrm{e}^{\,x^2+y^2+y^2}$;
4. Determinado foguete tem um sistema de controlo sensível quer à humidade quer à temperatura. Supondo que o raio (em Kms) no qual o foguete pode ser controlado é dado pela função
   $$R(h, t) = 27800 - 5t^2 - 6ht - 3h^2 + 400t + 300h,$$
   identifique as condições atmosféricas óptimas (temperatura vs humidade) para operar o foguete.
5. Determine o máximo do produto entre dois números reais, desde que a soma deles seja igual a quatro.
6. De entre todos os triângulos rectângulos com hipotenusa de cumprimento quatro, calcule as dimensões daquele que possui área máxima.
7. Determine as dimensões do rectângulo de área máxima que se encontra inscrito na elipse de equação
   $$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

8. Determine os extremos das funções f, definidas a seguir, vinculados pelas respectivas condições:
   (a) $f(x,y) = \ln(xy)$ e $2x + 3y = 5$;
   (b) $f(x,y) = x + y$ e $x^2 + y^2 = 1$;
   (c) $f(x,y) = x^2 - y^2$ e $x^2 + y^2 = 1$;
   (d) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ e $x^2 - y^2 = 1$;
   (e) $f(x,y) = xy$ e $9x^2 + y^2 = 4$;
   (f) $f(x,y) = x + 2y$ e $x^2 + y^2 = 5$;
   (g) $f(x,y,z) = x + 2y$ e $x + y + z = 1$ e $y^2 + z^2 = 4$;
   (h) $f(x,y,z) = 3x - y - 3z$ e $x + y = z$ e $x^2 + 2z^2 = 1$.
9. Pretende-se construir um quarto, com a forma de um paralelepípedo, para armazenamento de materiais em temperatura elevada com um volume de 100 metros cúbicos. Como o ar quente sobe, a perda de calor por unidade de área pelo tecto é cinco vezes maior que a perda de calor pelo chão. A perda de calor pelas quatro paredes é três vezes maior do que a perda de calor pelo chão. Determine as dimensões do quarto a construir que minimize a perda de calor e, portanto, minimiza o custo do aquecimento.
10. Determine o ponto do plano $2x - y + z = 1$ que está mais próximo do ponto $(-4, 1, 3)$.
11. Mostre que um paralelepípedo de volume 27 unidades cúbicas, possui superfície mínima se for um cubo.
12. Determine três números positivos cuja soma é 13 e tais que a soma dos seus quadrados é mínima.
13. Considere uma placa circular de raio 1, identificada com os pontos $P = (x,y)$ do plano $\mathbb{R}^2$ que verificam $x^2 + y^2 \leq 1$. Sabendo que a temperatura em qualquer ponto (x,y) da placa é
$$T(x,y) = 2x^2 + y^2 - y + 10,$$
encontre os pontos mais quentes e mais frios na placa.
14. Determine o mínimo e o máximo absoluto da função
$$f : \begin{array}{rcl} [0,2\pi] \times [0,2\pi] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \operatorname{sen} x + \cos y \end{array}.$$
15. Determine o mínimo e o máximo absoluo da função f no disco definido pela equação $x^2 + y^2 \leq 1$, sendo f definida por:
   (a) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^4$;
   (b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$.

Análise

Folha de exercícios 8 — 2018'19

1. Calcule o valor do integral $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,d(x,y)$, onde:

   (a) $f(x,y)=3$ e $\mathcal{R}=[1,2]\times[0,1]$;

   (b) $f(x,y)=e^{x+y}$ e $\mathcal{R}=[-1,0]\times[0,2]$;

   (c) $f(x,y)=x^3+y^2$ e $\mathcal{R}=[0,1]\times[1,2]$;

   (d) $f(x,y)=xy^2$ e $\mathcal{R}=[-1,0]\times[1,2]$.

2. Calcule os seguintes integrais, esboçando as regiões de integração:

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2} dydx$;

   (b) $\displaystyle\int_1^2\int_{2x}^{3x+1} dydx$;

   (c) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^3}^{x^2} y\,dydx$;

   (d) $\displaystyle\int_0^1\int_1^{\mathrm{e}^{\,y}} (x+y)\,dxdy;$.

3. Calcule o valor do integral $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,d(x,y)$, usando as duas possíveis ordens de integração, quando f e $\mathcal{R}$ são:

   (a) $f(x,y)=xy$ e $\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2,\ 0\le y\le x^2\}$;

   (b) $f(x,y)=x+y$ e $\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2,\ x\le y\le -x^2+4x\}$;

   (c) $f(x,y)=e^{x+y}$ e $\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0,\ x\le y\le -x+2\}$;

   (d) $f(x,y)=x+y$ e $\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-2x\le y\le -x+2\}$.

4. Identifique o domínio de integração (fazendo um esboço) e inverta a ordem de integração nos seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_y^{y+3} f(x,y)\,dxdy$;

   (b) $\displaystyle\int_{-2}^2\int_0^{4-x^2} f(x,y)\,dydx$;

   (c) $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{2-y} f(x,y)\,dxdy$;

   (d) $\displaystyle\int_0^1\int_{-x^2}^{x^2} f(x,y)\,dydx$;

   (e) $\displaystyle\int_1^2\int_{x^2}^{x^3} f(x,y)\,dydx$;

   (f) $\displaystyle\int_0^2\int_x^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dydx$;

   (g) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dydx+\int_1^2\int_0^{-x+2} f(x,y)\,dydx$;

   (h) $\displaystyle\int_0^1\int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy$;

   (i) $\displaystyle\int_{-2}^0\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dydx+\int_1^2\int_0^{-x+2} f(x,y)\,dydx$;

   (j) $\displaystyle\int_0^1\int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy$.

5. Invertendo a ordem de integração, calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}\,dydx$; (b) $\displaystyle\int_1^{e^3}\int_{\log y}^{3} dxdy$;

(c) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{1} e^{x^3}\,dx\,dy$; (d) $\displaystyle\int_1^{e}\int_{\log y}^{1} \frac{(x^2+1)^{13}}{y}\,dx\,dy.$

6. Usando integrais duplos, calcule a área de cada uma das regiões planas R que se seguem:

(a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ e^{-x} \le y \le e^x\}$;
(b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y^2 \le x \le y^2,\ 0 \le y \le 1\}$;
(c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0,\ y \le -2x^2 - x + 3,\ y \le -x + 1\}$;
(d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge x^2,\ y \le 4 - x^2\}$;

7. Usando integrais duplos, calcule o volume de cada um dos sólidos S que se seguem:

(a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 2,\ e^{-x} \le y \le e^x,\ 0 \le z \le x + y\}$;
(b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \ge 0,\ y \le -x^2 - 2x,\ x - y \le z \le x + y\}$;
(c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \le 0,\ x \ge y^2 - y,\ x \le z + y,\ y \le -x - z\}$;
(d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\}$.

8. Determine as coordenadas polares dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A = (3, \sqrt{3}),\quad B = (0, 2),\quad C = (0, -2),\quad D = (-4, -4),\quad E = (1, 1).$$

9. Determine as coordenadas cartesianas dos pontos cuja representação polar é

$$A = \left(1, \frac{\pi}{4}\right),\quad B = \left(2, \frac{3\pi}{2}\right),\quad C = (5, 0),\quad D = \left(5, \frac{\pi}{2}\right),\quad E = \left(3, \frac{11\pi}{6}\right).$$

10. Passando para coordenadas polares, calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, d(x, y)$, onde:

(a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$ e $\mathcal{D} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 5\big\}$;

(b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1} \log(x^2 + y^2)$ e $\mathcal{D}$ é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências de equações $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$;

(c) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ e $\mathcal{D} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x^2 + y^2 \le 9,\ \sqrt{3}y \ge x,\ \sqrt{3}x \ge y\Big\}$;

(d) $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $\mathcal{D} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 2\,,\ 0 \le y \le \sqrt{2x - x^2}\Big\}$;

(e) $f(x, y) = \big(x^2 + y^2\big)^{-\frac{1}{2}}$ e $\mathcal{D} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y \le x\,,\ y \ge x^2\,,\ x \ge 0\big\}$.

11. Usando integrais duplos, calcule a área de cada uma das regiões planas R que se seguem:

(a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge -x,\ y \le x,\ x^2 + y^2 \le 9\}$;
(b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ y \le x,\ x \ge 0\}$;
(c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 16,\ (x + 2)^2 + y^2 \ge 4,\ y \ge 0\}$.

12. Usando integrais duplos, calcule o volume dos seguintes sólidos:

(a) $A = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le x^2 + y^2\big\}$;
(b) $B = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le x \le 2\,,\ 0 \le y \le 2\,,\ z \ge 0\,,\ y + z \le 2\big\}$;
(c) $C = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \le 1\,,\ z \ge 0\,,\ y + z \le 3\big\}$.

Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação

Análise

Folha de exercícios 9 — 2018'19

1. Calcule o valor do integral $\displaystyle\iiint_{\mathcal{R}} f(x,y,z)\,d(x,y,z)$, onde:

   (a) $f(x,y,z)=x+y+z$ e $\mathcal{R}=[1,2]\times[0,1]\times[-2,1]$;

   (b) $f(x,y,z)=ze^{x+y}$ e $\mathcal{R}=[0,1]^3$;

   (c) $f(x,y,z)=xy$ e $\mathcal{R}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y+z\leq 1\}$;

   (d) $f(x,y,z)=x$ e $\mathcal{R}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0, x^2+y^2\leq z\leq 3\}$.

2. Use integrais triplos para expressar o volume do sólido definido pela superfície $z=2-x^2-y^2$ e pelo plano XOY.

3. Determine as coordenadas cilíndricas dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A=(1,\sqrt{3},-1),\qquad B=(2,0,0),\qquad C=(0,-5,3)\quad \text{e} \quad D=(3,-3,2).$$

4. Usando coordenadas cilíndricas, calcule $\displaystyle\iiint_{\mathcal{R}} f(x,y,z)\,d(x,y,z)$, para

   (a) $f(x,y,z)=x$ e $\mathcal{R}=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq z\leq 3\,,\ x^2+y^2\leq z\big\}$;

   (b) $f(x,y,z)=z\,e^{x^2+y^2}$ e $\mathcal{R}=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2\leq z\leq 3\,,\ x^2+y^2\leq 4\big\}$;

   (c) $f(x,y,z)=z\sqrt{x^2+y^2}$ e $\mathcal{R}$ a região do primeiro octante limitada pelas superfícies cilíndricas de equações $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=9$ e pelos planos de equações $z=0$, $z=1$, $x=0$ e $x=y$;

   (d) $f(x,y,z)=x+y$ e $\mathcal{R}=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0, y\geq 0, 0\leq z\leq 4-(x^2+y^2)\big\}$.

5. Seja $V=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z^2\leq x^2+y^2\leq 9\big\}$. Calcule o volume de V, usando coordenadas cilíndricas.

6. Determine as coordenadas esféricas dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A=(1,-1,0),\qquad B=(1,1,\sqrt{2}),\qquad C=(-1,-1,\sqrt{2})\quad \text{e} \quad D=(0,1,-1).$$

7. Calcule o volume da esfera de centro na origem e raio 2.

8. Usando coordenadas esféricas, calcule o valor do integral

$$\iiint_{\mathcal{S}} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,d(x,y,z),$$

   onde $\mathcal{S}=\big\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+(z-2)^2\leq 4\,\big\}$.

9. Calcule o volume do sólido que é:

   (a) definido pelas condições $3z\geq x^2+y^2$ e $x^2+y^2+z^2\leq 4$;

   (b) definido pelas condições $x^2+y^2\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2}$;

   (c) limitado pela superfície esférica de equação $\rho=1$ e pela superfície cónica de equação $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

10. Calcule o volume do sólido S, onde S é descrito por

    (a) $S=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq\sqrt{16-x^2-y^2}\Big\}$;

    (b) $S=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 2+\sqrt{4-x^2-y^2}\Big\}$.