

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências



Resultados de Estabilidade em Equações Diferenciais Funcionais Retardadas

Dissertação para a obtenção do grau de Mestre em Análise Funcional e
Equações Diferenciais do Licenciado José Joaquim Martins Oliveira.

Orientadora: Professora Teresa Faria

Setembro 2003

Resumo

Esta dissertação aborda aspectos da teoria qualitativa de equações diferenciais funcionais retardadas (EDFR's) com particular ênfase no estudo da estabilidade global de EDFR's escalares.

A tese está dividida em dois capítulos.

No primeiro capítulo, estudam-se a teoria adjunta formal e a estabilidade de EDFR's lineares autónomas. Apresentam-se os resultados clássicos, nomeadamente a decomposição do espaço de fase da equação por um conjunto finito de valores característicos. A terminar, faz-se o estudo da estabilidade local da solução nula de equações lineares com pequenas perturbações autónomas. O livro de J.K. Hale [5] constitui a principal referência bibliográfica para estudo aqui apresentado.

No segundo capítulo, estudam-se condições do tipo $3/2$ para a estabilidade global de EDFR's escalares. Obtém-se um ligeiro melhoramento dos critérios de estabilidade apresentados no Teorema 2 do recente artigo de E.Liz, V. Tkachenko & S. Trofimchuk [7]. Com este melhoramento, e fazendo uma ponte entre [7] e o trabalho de T. Faria [1], estabelece-se um critério de estabilidade global para as equações estudadas em [1], que permite, por um lado, simplificar consideravelmente as demonstrações dos exemplos presentes em [7] e, por outro, melhorar critérios de estabilidade global para vários exemplos de dinâmica de populações presentes em literatura recente.

Palavras Chave: Equações diferenciais funcionais retardadas, estabilidade global e local, atractividade global, condições do tipo $3/2$, condições de Yorke, modelos escalares de dinâmica de populações.

Abstract

In this thesis, several aspects of the qualitative theory of retarded functional differential equations (RFDE's) are addressed, with particular emphasis on the study of global stability of scalar RFDE's.

The thesis is divided in two chapters.

In the Chapter I, the formal adjoint theory and the stability for linear autonomous RFDE's are studied. Classical results are presented, namely the decomposition of the phase space by a finite set of characteristic values. Also, the local stability of the zero solution of linear equation with small autonomous perturbations is studied.

In Chapter II, 3/2-conditions for the global stability of scalar RFDE's are addressed. A slight improvement of the stability criterion of E.Liz, V. Tkachenko & S. Trofimchuk [7] in theorem 2 is obtained. With this result, and connecting with the work of T. Faria in [1], a criterion for the global stability of equations studied in [1] is established. On one hand, this result allows us to simplify the proofs for examples studied in [7], and, on the hand, to improve global stability conditions for several models from population dynamics studied in the literature.

Key Words: Retarded functional differential equations, global and local stability, global attractivity, 3/2-condition, Yorke conditions, scalar models from population dynamics.

Agradecimentos

O meu primeiro agradecimento não poderia deixar de ser para a minha orientadora, Doutora Teresa Faria do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, por tudo o que aprendi, tanto no campo científico como no campo pedagógico. Agradeço também ao Dr. Fernando Miranda do Departamento de Matemática da Universidade do Minho pela paciência que teve ao ensinar-me a construir as figuras presentes nesta dissertação. Não posso também deixar de agradecer à Doutora Lisa Santos, minha orientadora pedagógica na Universidade do Minho, pelos seus incansáveis incentivos.

Finalmente, agradeço ao Departamento de Matemática da Universidade do Minho pelos recursos financeiros, materiais e humanos que pôs à minha disposição.

Índice

Resumo	i
Abstract	iii
Agradecimentos	v
Índice	vii
Introdução	1
Capítulo 1: Equações Diferenciais Funcionais Retardadas	5
Conceitos e resultados básicos da teoria de EDF	5
EDFR lineares autónomas	8
Decomposição do espaço de fase através da equação adjunta	18
Estimativas na decomposição de C por Λ e estabilidade	25
Exemplo	29
EDFR's lineares com perturbações autónomas	32
Capítulo 2: Equações Diferenciais Funcionais Retardadas Escalares ...	37
Noções e terminologia	37
Resumo histórico	38
Resultado principal	42
Modelos de dinâmica de populações	58
Exemplos	65
Bibliografia	71

Introdução

As equações diferenciais funcionais retardadas (EDFR's) são equações diferenciais com memória, que podem ser escritas na forma abstracta

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \text{ com } x_t(\theta) = x(t + \theta), \theta \in [-r, 0], \quad (1)$$

onde $r \in \mathbb{R}^+$, B é um espaço de Banach e $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times C([-r, 0]; B) \rightarrow B$ é uma função. A função que descreve o crescimento, f , depende do estado do sistema não apenas no instante presente t , como acontece com as equações diferenciais ordinárias (EDO's), mas também do estado do sistema no passado até determinado momento $t - r$. A constante positiva r traduz o tempo de memória do sistema. É devido a esta característica que as EDFR's são importantes, por exemplo, na modelação do crescimento populacional de espécies biológicas ou em modelos biomédicos, uma vez que permitem ter em linha de conta o período de maturação das espécies ou o tempo de incubação de doenças.

Esta dissertação divide-se essencialmente em duas partes: Numa primeira parte, estuda-se o comportamento das soluções de EDFR's lineares autónomas, por forma a obter critérios de estabilidade. Numa segunda parte, consideram-se EDFR's escalares, com o objectivo de estabelecer condições do tipo 3/2 para a estabilidade global assintótica de soluções, que serão aplicadas a modelos de dinâmica de populações de uma única espécie biológica. Assim, esta tese surge naturalmente dividida em dois capítulos.

No primeiro capítulo, *Equações Diferenciais Funcionais Retardadas Lineares*, começa-se por apresentar os resultados básicos de existência, unicidade e continuação de soluções para (1), com $B = \mathbb{R}^n$. Segue-se o estudo de EDFR's lineares autónomas, isto é, equações da forma

$$\dot{x}(t) = L(x_t), \quad (2)$$

com $L \in \mathcal{L}(C([-r, 0]; \mathbb{R}^n); \mathbb{R}^n)$. Os resultados apresentados são os clássicos da teoria de EDFR's e têm como referência base o livro de J.K. Hale [5], no qual se podem encontrar as demonstrações omitidas neste capítulo.

Para o estudo de EDFR's lineares autónomas, o caminho seguido é constituído por três etapas distintas. Primeiro procede-se à decomposição do espaço de fase $C([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$ da equação diferencial (2) como soma directa de dois subespaços invariantes para a equação, decomposição que será efectuada com base num subconjunto finito de elementos do espectro do gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo dos operadores solução de (2), a introduzir oportunamente. Simultaneamente, demonstra-se que um dos subespaços invariantes tem dimensão finita e que, para condições iniciais nesse subespaço, as soluções possuem uma dinâmica igual às de uma equação diferencial ordinária linear autónoma de dimensão finita. Segue-se a caracterização do seu subespaço complementar topológico através de uma dualidade formal adjunta e, por último, obtêm-se estimativas para as soluções de (2) que possibilitam o estudo da estabilidade da solução nula, ou equivalentemente (como se verá) da equação (2).

Como nem todos os fenómenos têm um comportamento linear, torna-se importante estudar outros tipos de equações. Naturalmente, o passo seguinte será estudar equações que, não sendo lineares, obtêm-se destas por pequenas perturbações. Na última secção deste primeiro capítulo faz-se um primeiro estudo destas situações, ao abordar EDFR's lineares autónomas com perturbações autónomas, isto é, equações do tipo

$$\dot{x}(t) = L(x_t) + f(x_t), \quad (3)$$

onde $f : C([-r, 0]; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Mais concretamente, usando a Fórmula de Variação das Constantes obtêm-se condições suficientes para a estabilidade (local) da solução nula da equação (3).

No segundo capítulo, *Equações Diferenciais Funcionais Retardadas Escalares*, os recentes trabalhos de E.Liz, V.Tkachenko e S.Trofimchuk [7], e de T.Faria [1] constituem as referências base. Embora em ambos os artigos se assumam condições do tipo 3/2 para o estudo da estabilidade global de soluções de EDFR's escalares, estas incidem sobre equações distintas. Mais concretamente, em [7] estudam-se equações do tipo

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

onde as condições são impostas à função $f : C([-h, 0]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, e em [1] estudam-se equações do tipo

$$\dot{x}(t) = (1 + x(t))F(t, x_t), \quad (5)$$

onde $h \in \mathbb{R}^+$, $I = \mathbb{R}$ ou $I = [0, +\infty)$ e $F : I \times C([-h, 0]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, com condições impostas à função F . Tal como se evidencia no resumo histórico efectuado no início deste segundo capítulo, a novidade em [1] reside na equação

estudada, enquanto que em [7] a novidade reside no tipo de hipóteses impostas a f , nomeadamente a hipótese

$$r(\mathcal{M}(\phi)) \leq f(t, \phi) \leq r(-\mathcal{M}(-\phi)), \quad t \geq 0, \quad (6)$$

onde $\mathcal{M}(\phi)$ é o funcional de Yorke (ver [6, 18]), $r(x)$ é uma função racional da forma $\frac{ax}{1+bx}$, com $-\frac{3}{2} \leq a < 0$ e $b \geq 0$, e $\phi \in C([-h, 0]; \mathbb{R})$ satisfaz determinadas condições (ver pormenores na hipótese **(Y2*)** da secção 2.2). Como principais resultados desta dissertação, apresentam-se os Teoremas 2.7 e 2.16 sobre estabilidade global de soluções da equação (4). Apesar de análogos aos apresentados no Teorema 2 de [7], estes foram obtidos trabalhando com hipóteses um pouco mais gerais, nomeadamente com a hipótese

$$\lambda(t)r(\mathcal{M}(\phi)) \leq f(t, \phi) \leq \lambda(t)r(-\mathcal{M}(-\phi)), \quad t \geq 0, \quad (7)$$

onde $\lambda : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ é uma função seccionalmente contínua (ver pormenores na hipótese **(H3)** da secção 2.3), em lugar da hipótese (6). A linha geral de raciocínio seguida é análoga à presente em [7]. No entanto, é importante notar que, para além das necessárias adaptações à nova situação, alguns dos resultados, nomeadamente a Proposição 2.2 e o Lema 2.4, apresentam uma demonstração com novos argumentos. Seguidamente, fazendo uma ponte com a referência [1], estudam-se equações diferenciais do tipo (5), agora com F satisfazendo hipóteses similares às impostas a f para a equação (4), e obtém-se um critério de estabilidade global que permite, por um lado, simplificar consideravelmente as demonstrações do modelo (2.36) e do exemplo (2.45) estudadas em [7], e, por outro, melhorar critérios de estabilidade global para outros exemplos de dinâmica de populações presentes em literatura recente.

Capítulo 1

Equações Diferenciais Funcionais Retardadas Lineares

1.1 Conceitos e resultados básicos da teoria de EDF

Nesta secção, procede-se à apresentação da noção de EDFR e de alguns resultados básicos, tais como os teoremas de existência, de unicidade e de continuação de soluções. Estes resultados são apresentados sem demonstrações, que poderão ser encontradas em [5]. Note-se que as demonstrações em [5] são obtidas através de raciocínios análogos aos desenvolvidos na teoria de EDO's [4]. Com efeito, demonstrações de teoremas similares para EDO's poderão ser feitas usando argumentos que fazem apelo a resultados da Análise Funcional que, como tal, são válidos num quadro mais geral de equações diferenciais em espaços de Banach.

A terminar esta secção, introduz-se ainda a noção de equação diferencial funcional avançada (EDFA) e constata-se que o estudo a elaborar para estas é inteiramente análogo ao efectuado para as EDFR's.

Nesta tese, denota-se por $C([a, b]; \mathbb{R}^n)$, com $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, o espaço de Banach das aplicações contínuas definidas em $[a, b]$ e com valores em $\mathbb{R}^n$, munido da norma do supremo. Ao longo de todo este capítulo considera-se r um número real positivo e denota-se por C o espaço $C([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$.

Dados $\sigma \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}_0^+$ e $x \in C([\sigma - r, \sigma + A]; \mathbb{R}^n)$, para cada $t \in [\sigma, \sigma + A]$ denota-se por x_t o elemento de C definido por:

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \theta \in [-r, 0].$$

As definições que se seguem estabelecem o que se entende por EDFR e por uma sua solução.

Definição 1.1 Sejam $D \subseteq \mathbb{R} \times C$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função.

Chama-se equação diferencial funcional retardada à relação

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad (1.1)$$

onde “.” representa a derivada de x em t .

Definição 1.2 Sejam $\sigma \in \mathbb{R}$ e $A > 0$ ou $A = +\infty$.

Uma função $x \in C([\sigma - r, \sigma + A]; \mathbb{R}^n)$ diz-se solução de $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ em $[\sigma - r, \sigma + A)$ se verifica:

$$\begin{cases} (t, x_t) \in D \\ \dot{x}(t) = f(t, x_t) \end{cases}, \forall t \in [\sigma, \sigma + A).$$

Definição 1.3 Sejam $\sigma \in \mathbb{R}$ e $\phi \in C$.

Diz-se que x , representando-se por $x(\sigma, \phi, f)$, é uma solução de (1.1) com valor inicial ϕ em σ , ou simplesmente, uma solução de (1.1) que passa em (σ, ϕ) se, para algum $A > 0$ ou $A = +\infty$:

$$\begin{cases} x \text{ é solução de } \dot{x}(t) = f(t, x_t) \text{ em } [\sigma - r, \sigma + A) \\ x_\sigma = \phi \end{cases}.$$

Como primeira observação tem-se o seguinte lema, que resulta da continuidade uniforme de funções contínuas em intervalos compactos.

Lema 1.1 Se $x \in C([\sigma - r, \sigma + \alpha]; \mathbb{R}^n)$, com $\alpha > 0$, então

$$\begin{array}{ccc} [\sigma, \sigma + \alpha] & \rightarrow & C \\ t & \mapsto & x_t \end{array}$$

é uma função contínua.

Se f é contínua e x é uma solução de (1.1) em $[\sigma - r, \sigma + A)$ que passa em (σ, ϕ) , com $\phi \in C$, então pelo lema anterior e pela regra de Barrow facilmente se verifica que a solução x satisfaz a equação integral

$$\begin{cases} x_\sigma = \phi \\ x(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s) ds, \quad \sigma \leq t < \sigma + A \end{cases}.$$

O teorema que se segue estabelece condições suficientes, quer para a existência, quer para a unicidade, de solução de uma EDFR.

Teorema 1.2 *Sejam Ω aberto de $\mathbb{R} \times C$, $(\sigma, \phi) \in \Omega$ e $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$.*

Então existe uma solução x de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t) \\ x_\sigma = \phi \end{cases}, \quad (1.2)$$

em $[\sigma - r, \sigma + \alpha)$, para algum $\alpha > 0$.

Se f é lipschitziana em φ em cada compacto contido em Ω , a solução x em $[\sigma - r, \sigma + \alpha)$ é única.

Dem. Ver e.g. em J.K. Hale[5], p.41-42. $\square$

Definição 1.4 *Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e x uma solução de (1.1) no intervalo $[\sigma - r, a)$, com $a > \sigma$.*

Diz-se que $\bar{x}$ é uma extensão de x , se existe $b > a$, $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$, tal que $\bar{x}$ está definida em $[\sigma - r, b)$, coincide com x em $[\sigma - r, a)$ e é solução da equação diferencial (1.1) em $[\sigma - r, b)$.

Uma solução x diz-se não extensível, ou maximal, se não existe uma extensão de x .

Teorema 1.3 *Sejam Ω aberto de $\mathbb{R} \times C$ e $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$.*

Se x é uma solução maximal da equação diferencial (1.1) em $[\sigma - r, b)$, $b > \sigma$, então, para qualquer compacto $W \subseteq \Omega$, existe $t_W \in (\sigma, b)$ tal que

$$(t, x_t) \notin W, \quad \forall t \in [t_W, b).$$

Dem. Ver e.g. em J.K. Hale[5], p.42. $\square$

A abordagem anterior para EDFR's pode ser elaborada, de uma forma análoga, para EDFA's, uma vez que a diferença entre os dois tipos de EDF's reside, essencialmente, no espaço de fase.

Segue-se apenas a apresentação das noções de EDFA e de uma sua solução, uma vez que os resultados de existência, de unicidade e de continuação de solução (agora para o passado e não para o futuro) são inteiramente análogos aos anteriormente apresentados para EDFR's.

Comece-se por introduzir alguma notação. Representa-se por $\mathbb{R}^{n*}$ o conjunto dos vectores linha $1 \times n$ com coordenadas em $\mathbb{R}$, isto é

$$\mathbb{R}^{n*} = \{[x_1 \dots x_n] : x_i \in \mathbb{R}\},$$

e por C^* o espaço de Banach $C([0, r]; \mathbb{R}^{n*})$, munido da norma do supremo.

Dados $\sigma \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}_0^+$ e $y \in C([\sigma - A, \sigma + r]; \mathbb{R}^{n*})$, para cada $\tau \in [\sigma - A, \sigma]$ denota-se por y^τ o elemento de C^* definido por:

$$y^\tau(s) = y(\tau + s), \quad s \in [0, r].$$

Definição 1.5 Sejam $D \subseteq \mathbb{R} \times C^*$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^{n^*}$ uma função.

Chama-se equação diferencial funcional avançada à relação

$$\dot{y}(\tau) = f(\tau, y^\tau), \quad (1.3)$$

onde “ $\cdot$ ” representa a derivada de y em τ .

Definição 1.6 Sejam $\sigma \in \mathbb{R}$ e $A > 0$ ou $A = +\infty$.

Uma função $y \in C((\sigma - A, \sigma + r]; \mathbb{R}^{n^*})$ diz-se solução de (1.3) em $(\sigma - A, \sigma + r]$ se verifica:

$$\begin{cases} (\tau, y^\tau) \in D \\ \dot{y}(\tau) = f(\tau, y^\tau) \end{cases}, \forall \tau \in (\sigma - A, \sigma].$$

Definição 1.7 Sejam $\sigma \in \mathbb{R}$ e $\psi \in C^*$.

Diz-se que y , representando-se por $y(\sigma, \psi, f)$, é uma solução de (1.3) com valor inicial ψ em σ , ou simplesmente, uma solução de (1.3) que passa em (σ, ψ) se, para algum $A > 0$ ou $A = +\infty$:

$$\begin{cases} y \text{ é solução de } \dot{y}(\tau) = f(\tau, y^\tau) \text{ em } (\sigma - A, \sigma + r] \\ y^\sigma = \psi \end{cases}.$$

1.2 EDFR lineares autónomas

Definição 1.8 Seja $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ uma EDFR.

1. A equação diz-se linear se $f(t, \phi) = L(t, \phi) + h(t)$, onde L é uma aplicação contínua e linear em ϕ , $t \in \mathbb{R}$ e h é uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$.
2. A equação diz-se homogénea se $h \equiv 0$.
3. A equação diz-se linear autónoma se $f(t, \phi) = L(\phi)$, com $L \in \mathcal{L}(C; \mathbb{R}^n)$.

Até final deste capítulo, considera-se a EDFR linear autónoma

$$\dot{x}(t) = L(x_t), \quad (1.4)$$

com $L \in \mathcal{L}(C; \mathbb{R}^n)$.

Sendo L uma aplicação linear contínua, então L é lipschitziana. Consequentemente, pelo Teorema 1.2, para cada $\phi \in C$ existe uma única solução $x(0, \phi, L)$ em $[-r, \alpha)$, com $\alpha > 0$, da equação (1.4) que passa em $(0, \phi)$. Pelo facto de L ser aplicação linear contínua, a solução $x(0, \phi, L)$ é extensível a $[-r, +\infty)$. Para simplificar a notação, usa-se $x(\phi) := x(0, \phi, L)$. O facto de $x(\phi)$ estar definida em $[-r, +\infty)$ permite introduzir a seguinte definição.

Definição 1.9 Para cada $t \geq 0$, chama-se operador solução associado à equação diferencial (1.4) à aplicação

$$\begin{aligned} T(t) : C &\rightarrow C \\ \phi &\mapsto x_t(\phi) \end{aligned} .$$

Na proposição que se segue demonstram-se propriedades importantes da família dos operadores solução $(T(t))_{t \geq 0}$.

Proposição 1.4 A família dos operadores solução $(T(t))_{t \geq 0}$ possui as seguintes propriedades:

1. É um C_0 -semigrupo de operadores lineares em C ;
2. Para $t \geq r$, o operador $T(t)$ é compacto.

Dem.

1. Pela linearidade de L e pela unicidade de solução, facilmente se conclui que, para cada $t \geq 0$, $T(t) : C \rightarrow C$ é um operador linear.

Para cada $\phi \in C$, $T(0)\phi = x_0(\phi) = \phi$, donde $T(0) = I$.

Sejam $\phi \in C$ e $\tau \geq 0$. Por um lado, como a equação é autónoma, tem-se que $t \mapsto x(\phi)(t + \tau)$ é a solução de $\dot{x}(\alpha) = L(x_\alpha)$ com condição inicial, em $t = 0$, $x_\tau(\phi)$ e, por outro lado, por definição tem-se $x_0(x_\tau(\phi)) = x_\tau(\phi)$. Assim, pela unicidade de solução conclui-se que $x(\phi)(t + \tau) = x(x_\tau(\phi))(t)$, $\forall t \geq 0$, donde $x_{t+\tau}(\phi) = x_t(x_\tau(\phi))$, ou seja, $T(t + \tau) = T(t)T(\tau)$.

Como L é uma aplicação linear contínua, existe $l \geq 0$ tal que

$$\|L(\phi)\| \leq l\|\phi\|, \forall \phi \in C.$$

Sejam $t \geq 0$ e $-r \leq \theta \leq 0$. Pela representação integral da solução,

$$\left. \begin{aligned} \text{se } t + \theta \leq 0, \quad T(t)\phi(\theta) &= x_t(\phi)(\theta) = x(\phi)(t + \theta) = \phi(t + \theta); \\ \text{se } t + \theta \geq 0, \quad T(t)\phi(\theta) &= x_t(\phi)(\theta) = x(\phi)(t + \theta) \\ &= \phi(0) + \int_0^{t+\theta} L(x_s(\phi))ds \\ &= \phi(0) + \int_0^{t+\theta} L(T(s)\phi)ds, \end{aligned} \right\} (1.5)$$

donde,

$$\|T(t)\phi\| \leq \|\phi\| + \int_0^t l\|T(s)\phi\|ds.$$

Pela desigualdade de Gronwall tem-se

$$\|T(t)\phi\| \leq \|\phi\|e^{tl}, \forall \phi \in C.$$

Assim $T(t)$ é um operador linear contínuo para qualquer $t \geq 0$.

Para concluir que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo falta demonstrar que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)\phi = \phi, \quad \forall \phi \in C,$$

ou equivalentemente,

$$\sup\{\|T(t)\phi(\theta) - \phi(\theta)\| : \theta \in [-r, 0]\} \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0^+.$$

Sejam $\phi \in C$ e $\epsilon > 0$. Como ϕ é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $t, \tau \in [-r, 0]$,

$$|t - \tau| < \delta \Rightarrow \|\phi(t) - \phi(\tau)\| < \epsilon.$$

Considere-se $t \in (0, \min\{\delta, \alpha\})$, onde $\alpha > 0$ é tal que $\|\phi\|(e^{lt} - 1) < \epsilon$ para $t < \alpha$. Seja $\theta \in [-r, 0]$. Por (1.5), se $\theta + t \leq 0$ tem-se

$$\|T(t)\phi(\theta) - \phi(\theta)\| = \|\phi(\theta + t) - \phi(\theta)\| < \epsilon;$$

e se $\theta + t > 0$ tem-se

$$\begin{aligned} \|T(t)\phi(\theta) - \phi(\theta)\| &= \left\| \phi(0) + \int_0^{t+\theta} L(T(s)\phi)ds - \phi(\theta) \right\| \\ &\leq \|\phi(0) - \phi(\theta)\| + \int_0^t l\|T(s)\phi\|ds \\ &\leq \|\phi(0) - \phi(\theta)\| + \int_0^t l\|\phi\|e^{ls}ds \\ &= \|\phi(0) - \phi(\theta)\| + \|\phi\|(e^{lt} - 1) < 2\epsilon. \end{aligned}$$

Conclui-se então que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de operadores lineares em C .

2. Sejam $t \geq r$ e $R > 0$ fixados e considere-se $S = \{\phi \in C : \|\phi\| \leq R\}$. Para $\psi = T(t)\phi$, com $\phi \in S$, por (1.5) e porque, qualquer que seja $\theta \in [-r, 0]$, $t + \theta \geq 0$ tem-se

$$T(t)\phi(\theta) = \phi(0) + \int_0^{t+\theta} L(T(s)\phi)ds,$$

donde,

$$\|T(t)\phi\| \leq \|\phi\|e^{lt},$$

ou seja,

$$\|\psi\| \leq e^{lt}R.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|\dot{\psi}(\theta)\| &= \left\| \frac{d}{d\theta} x_t(\phi)(\theta) \right\| = \left\| \frac{d}{d\theta} x(\phi)(t + \theta) \right\| \\ &= \|L(T(t + \theta)\phi)\| \leq le^{l(t+\theta)}R \leq le^{lt}R, \end{aligned}$$

donde $T(t)S$ é um conjunto equi-contínuo. Consequentemente, sendo $T(t)S \subseteq C$ limitado e equi-contínuo, pelo teorema de Ascoli, é relativamente compacto. $\square$

Pelo resultado anterior, sabe-se que a família dos operadores solução $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo em C . Pelos resultados da teoria de C_0 -semigrupos, o seu gerador infinitesimal,

$$\begin{aligned} A : D(A) &\rightarrow C \\ \phi &\mapsto \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (T(t)\phi - \phi) \end{aligned}$$

é um operador linear fechado com domínio denso em C .

O próximo objectivo é caracterizar os elementos de C que pertencem a $D(A)$ e determinar $A\phi$ para qualquer $\phi \in D(A)$.

Proposição 1.5 *Seja A o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo dos operadores solução associados à equação diferencial (1.4). Então, $\phi \in D(A)$ se e só se ϕ tem derivada contínua em $[-r, 0]$ com $\phi(0) = L(\phi)$, e*

$$A\phi(\theta) = \begin{cases} \frac{d\phi}{d\theta}(\theta), & -r \leq \theta < 0 \\ L(\phi), & \theta = 0 \end{cases}. \quad (1.6)$$

Dem. Sejam $\phi \in C$ e $\theta \in [-r, 0]$. Se $\theta \in [-r, 0)$, para $t > 0$ suficientemente pequeno, tem-se $t + \theta < 0$, donde, por (1.5),

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (T(t)\phi(\theta) - \phi(\theta)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\phi(t + \theta) - \phi(\theta)) = \frac{d\phi}{d\theta}(\theta^+).$$

Se $\theta = 0$, pela representação integral da solução e pelas propriedades dos C_0 -semigrupos, tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (T(t)\phi(0) - \phi(0)) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t L(T(s)\phi) ds \\ &= L \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)\phi ds \right) \\ &= L(T(0)\phi) = L(\phi). \end{aligned}$$

Consequentemente $\phi \in D(A)$ implica que ϕ tem derivada contínua em $[-r, 0]$ e $\dot{\phi}(0) = L(\phi)$. É necessário ainda verificar que se tem $\frac{1}{t}(T(t)\phi - \phi) \rightarrow \dot{\phi}$ em C quando $t \rightarrow 0^+$. A demonstração deste usa um raciocínio análogo ao realizado na prova do ponto 1. da Proposição 1.4, pelo que é omitida. $\square$

Como $L \in \mathcal{L}(C; \mathbb{R}^n)$, pelo teorema da representação de Riesz conclui-se que existe

$$\begin{aligned} \eta : [-r, 0] &\rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ \theta &\mapsto [\eta_{ij}(\theta)]_{i,j}, \end{aligned}$$

com $\eta_{ij} : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ função de variação limitada para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, tal que

$$L(\phi) = \int_{-r}^0 \phi(\theta) d\eta(\theta) := \int_{-r}^0 [d\eta(\theta)] \phi(\theta). \quad (1.7)$$

O estudo que se segue tem por objectivo decompor o espaço de fase C como soma directa de dois subespaços P e Q , invariantes para os operadores solução $T(t)$, por forma a reduzir o estudo do fluxo de uma solução da equação diferencial (1.4) que passa em $(0, \phi)$, com $\phi = \phi^P + \phi^Q \in C$, ao estudo dos fluxos das soluções em P e Q que passam em $(0, \phi^P)$ e em $(0, \phi^Q)$ respectivamente. Para se efectuar a referida decomposição do espaço de fase, é necessário estudar algumas propriedades do espectro, quer dos operadores solução, quer do gerador infinitesimal. Antes de iniciar esse estudo, é importante estabelecer alguma terminologia.

Definição 1.10 *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ o C_0 -semigrupo dos operadores solução associados à equação diferencial (1.4) e A o seu gerador infinitesimal.*

Diz-se que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um valor próprio, ou valor característico, de (1.4) se $\lambda \in \sigma(A)$. O espaço próprio generalizado de A associado a λ denota-se por $M_\lambda(A)$.

O teorema que se segue caracteriza o espectro do gerador infinitesimal associado ao C_0 -semigrupo dos operadores solução.

Teorema 1.6 *Seja A o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo dos operadores solução associados à equação diferencial (1.4), $(T(t))_{t \geq 0}$.*

Então, $\sigma(A) = \sigma_P(A)$ e $\lambda \in \sigma(A)$ se e só se $\det(\Delta(\lambda)) = 0$, sendo

$$\Delta(\lambda) := \lambda I - \int_{-r}^0 e^{\lambda\theta} [d\eta(\theta)] = \lambda I - L(e^\lambda I). \quad (1.8)$$

Dem. Num primeiro passo demonstra-se que $\sigma_P(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det \Delta(\lambda) = 0\}$ e num segundo demonstra-se que $\sigma_P(A) = \sigma(A)$.

Seja $C^1 := \{\phi \in C : \dot{\phi} \in C\}$. Por (1.6) tem-se,

$$\lambda \in \sigma_P(A) \Leftrightarrow \exists \phi \in D(A) \setminus \{0\} : A\phi = \lambda\phi$$

$$\Leftrightarrow \exists \phi \in C^1 \setminus \{0\} : \begin{cases} \dot{\phi}(\theta) = \lambda\phi(\theta) \\ \dot{\phi}(0) = L(\phi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \begin{cases} \phi(\theta) = e^{\lambda\theta} b \\ \lambda b = \int_{-r}^0 [d\eta(\theta)] e^{\lambda\theta} b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \left(\lambda I - \int_{-r}^0 [d\eta(\theta)] e^{\lambda\theta} \right) b = 0$$

$$\Leftrightarrow \det(\Delta(\lambda)) = 0.$$

Seja $\lambda \notin \sigma_P(A)$. Pretende-se concluir que $\lambda \in \rho(A)$. Por definição, $(\lambda I - A)$ é injectiva, logo existe $(\lambda I - A)^{-1}$. Como o operador A é fechado, então o operador $(\lambda I - A)^{-1}$ também é fechado. Se se demonstrar que $Im(\lambda I - A) = C$, pelo teorema do gráfico fechado conclui-se que $(\lambda I - A)^{-1}$ é contínua e consequentemente $\lambda \in \rho(A)$. Assim sendo, falta demonstrar que

$$\forall \psi \in C, \exists \phi \in D(A) : (\lambda I - A)\phi = \psi.$$

Seja $\psi \in C$. Por (1.6) conclui-se que $\phi \in D(A)$ satisfaz $(A - \lambda I)\phi = \psi$ se e só se

$$\dot{\phi}(\theta) - \lambda\phi(\theta) = \psi(\theta), \quad -r \leq \theta \leq 0.$$

Com $b = \phi(0) \in \mathbb{R}^n$, a equação anterior é equivalente a

$$\phi(\theta) = e^{\lambda\theta}b + \int_0^\theta e^{\lambda(\theta-\xi)}\psi(\xi)d\xi, \quad -r \leq \theta \leq 0.$$

Pela Proposição 1.5, sabe-se que $\phi \in D(A)$ se e só se $\dot{\phi} \in C$ e $\dot{\phi}(0) = \int_{-r}^0 [d\eta(\theta)]\phi(\theta)$. Consequentemente existe $\phi \in D(A)$ tal que $(\lambda I - A)\phi = \psi$ se e só se existe $b \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lambda b + \psi(0) = \int_{-r}^0 [d\eta(\theta)] \left[e^{\lambda\theta}b + \int_0^\theta e^{\lambda(\theta-\xi)}\psi(\xi)d\xi \right],$$

ou equivalentemente, se e só se existe $b \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\Delta(\lambda)b = -\psi(0) + \int_{-r}^0 \int_0^\theta e^{\lambda(\theta-\xi)}[d\eta(\theta)]\psi(\xi)d\xi. \quad (1.9)$$

Como $\lambda \notin \sigma_P(A)$, pela primeira parte da demonstração, $\det \Delta(\lambda) \neq 0$, logo $(\Delta(\lambda))_{n \times n}$ é sobrejectiva, donde existe $b \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo (1.9). Conclui-se assim que $Im(\lambda I - A) = C$. $\square$

Teorema 1.7 *Para $(T(t))_{t \geq 0}$ e A como no teorema anterior, são válidas as seguintes propriedades:*

1. Para $t \geq r$ e $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tem-se

$$\mu \in \sigma(T(t)) \Leftrightarrow \mu \in \sigma_P(T(t));$$

2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq \alpha\}$ é finito;

3. $\forall \lambda \in \sigma(A), \dim(M_\lambda(A)) < +\infty$.

Dem.

1. Tendo em conta que $T(t)$ é um operador compacto para $t \geq r$ (Proposição 1.4), a equivalência é consequência dos resultados de teoria espectral para operadores compactos.

2. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Suponha-se que $\Gamma := \sigma_P(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha \leq \operatorname{Re} \lambda\}$ é infinito. Consequentemente existe $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Gamma$ tal que

$$\begin{cases} \lambda_n \in \sigma_P(A), \operatorname{Re} \lambda_n \geq \alpha, & \forall n \in \mathbb{N} \\ \lambda_n \neq \lambda_m, & \text{se } n \neq m \end{cases} \quad (1.10)$$

Considere-se $t \geq r$. Da teoria de C_0 -semigrupos, é sabido que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n := e^{\lambda_n t} \in \sigma(T(t))$, donde $\mu_n \in \{\mu \in \sigma(T(t)) : e^{\alpha t} \leq |\mu|\}$. Sendo $T(t)$ um operador compacto, o conjunto $\sigma_P(T(t))$ é, quando muito, numerável sem pontos de acumulação, exceptuando eventualmente o zero, e como $\sigma(T(t))$ é compacto conclui-se que $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito. Assim, por (1.10), existem $\mu \in \sigma_P(T(t))$ e $(\lambda_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ subsucessão de $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $\mu = e^{\lambda_{n_k} t}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por um lado, da teoria espectral é sabido que,

$$\dim N(\mu I - T(t)) < +\infty. \quad (1.11)$$

Por outro lado, sendo λ_{n_k} todos distintos, existe $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, b_k é um vector próprio de A associado a λ_{n_k} . Sabendo que vectores próprios associados a valores próprios distintos são linearmente independentes tem-se que $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ são linearmente independentes. Mas, da teoria espectral para C_0 -semigrupos, b_k , $k \in \mathbb{N}$, são também vectores próprios associados ao valor próprio μ de $T(t)$. Conclui-se então que

$$\dim N(\mu I - T(t)) = +\infty,$$

o que contradiz (1.11). Portanto

$$\sigma_P(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha \leq \operatorname{Re} \lambda\} \text{ é finito, } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. Sejam $t \geq r$ e $\lambda \in \sigma(A)$. Se $b \in M_\lambda(A)$, então, para algum $k \in \mathbb{N}$, $(\lambda I - A)^k b = 0$. Por indução prova-se que $(e^{\lambda t} I - T(t))^k b = 0$ e consequentemente $b \in M_{e^{\lambda t}}(T(t))$. Desta forma tem-se $M_\lambda(A) \subseteq M_{e^{\lambda t}}(T(t))$ e, como $T(t)$ é um operador compacto, dos resultados de teoria espectral conclui-se que $\dim M_{e^{\lambda t}}(T(t)) < +\infty$, donde $\dim M_\lambda(A) < +\infty$. $\square$

Teorema 1.8 *Seja A o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ dos operadores solução associados à equação diferencial (1.4). Então, para cada $\lambda \in \sigma(A)$, tem-se*

$$C = N(\lambda I - A)^k \oplus \operatorname{Im}(\lambda I - A)^k,$$

sendo $k = \alpha(\lambda I - A) = \delta(\lambda I - A)$, ou seja, k é o ascendente e o descendente de $\lambda I - A$.

Dem. Sejam $t \geq r$ e $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Da teoria de C_0 -semigrupos, tem-se $e^{\lambda_0 t} \in \sigma(T(t))$. Como $T(t)$ é compacto, então ([15] p.331), $e^{\lambda_0 t}$ é um pólo da resolvente de $T(t)$, de ordem igual a $m := \delta(e^{\lambda_0 t} I - T(t)) = \alpha(e^{\lambda_0 t} I - T(t))$. Mais uma vez pelos resultados da teoria espectral em C_0 -semigrupos, tem-se que λ_0 é um pólo da resolvente de A de ordem $k \leq m$. Sendo A é um operador fechado, tem-se que ([15] p.330)

$$C = N(\lambda_0 I - A)^k \oplus Im(\lambda_0 I - A)^k,$$

onde $k = \alpha(\lambda_0 I - A) = \delta(\lambda_0 I - A)$. $\square$

Pelo resultado anterior, para $\lambda \in \sigma(A)$, tem-se

$$C = N(\lambda I - A)^k \oplus Im(\lambda I - A)^k,$$

onde $k = \alpha(\lambda I - A)$, ou seja, $N(\lambda I - A)^k = M_\lambda(A)$. Como, pelo Teorema 1.7, o espaço próprio $M_\lambda(A)$ tem dimensão finita, pode fixar-se uma base $\Phi_\lambda = (\phi_1^\lambda, \dots, \phi_{d_\lambda}^\lambda)$. Note-se ainda que

$$AM_\lambda(A) \subseteq M_\lambda(A).$$

Com efeito, se $\phi \in M_\lambda(A)$, então

$$(\lambda I - A)^k A\phi = A(\lambda I - A)^k \phi = 0,$$

donde

$$A\phi \in M_\lambda(A).$$

Assim, existe $B_\lambda = [b_{ij}] \in M_{d_\lambda \times d_\lambda}(\mathbb{C})$ tal que, para cada $j \in \{1, \dots, d_\lambda\}$,

$$A\phi_j^\lambda = \sum_{i=1}^{d_\lambda} b_{ij} \phi_i^\lambda.$$

Tem-se então,

$$A\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda.$$

Mas $A\Phi_\lambda = \dot{\Phi}_\lambda$, donde $\dot{\Phi}_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda$, logo

$$\Phi_\lambda(\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda \theta}, \quad -r \leq \theta \leq 0. \quad (1.12)$$

Por outro lado, pelas propriedades dos C_0 -semigrupos tem-se

$$\frac{d}{dt}T(t)\Phi_\lambda = AT(t)\Phi_\lambda = T(t)A\Phi_\lambda = T(t)\Phi_\lambda B_\lambda,$$

pelo que

$$T(t)\Phi_\lambda = \Phi_\lambda e^{B_\lambda t}, \quad t \geq 0. \quad (1.13)$$

A condição (1.13) permite definir o operador $T(t)$, restrito ao espaço $M_\lambda(A)$, para $t \in \mathbb{R}$. De (1.12) e (1.13) tem-se

$$T(t)\Phi_\lambda(\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda \theta}e^{B_\lambda t} = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda(\theta+t)}, \quad -r \leq \theta \leq 0.$$

A igualdade anterior caracteriza os operadores solução $T(t)$, $t \geq 0$, em $M_\lambda(A)$, isto é, se $\phi \in M_\lambda(A)$, então $\phi = \Phi_\lambda a$, com $a \in \mathbb{R}^{d_\lambda}$, e $(T(t)\phi)(\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda(t+\theta)}a$, $-r \leq \theta \leq 0$.

O lema que se segue é importante na medida em que permite generalizar o raciocínio anterior para um conjunto finito de valores próprios da equação (1.4).

Lema 1.9 *Seja λ um valor próprio da equação diferencial (1.4). Então,*

1. *A matriz B_λ possui um único valor próprio que é λ .*
2. *O espaço $Im(\lambda I - A)^k$ é invariante para $T(t)$.*

Dem.

1. $M_\lambda(A) = N(\lambda I - A)^k = \{\Phi_\lambda a : a \in \mathbb{C}^{d_\lambda}\}$, onde Φ_λ é uma base fixada em $M_\lambda(A)$ e k é o ascendente de $\lambda I - A$. Seja $a \in \mathbb{C}^{d_\lambda}$. Então

$$(\lambda I - A)^k \Phi_\lambda a = 0 \Rightarrow \Phi_\lambda (\lambda I - B_\lambda)^k a = 0 \Rightarrow (\lambda I - B_\lambda)^k a = 0.$$

Assim sendo, $(\lambda I - B_\lambda)^k$ é o operador nulo, donde se conclui que

$$M_\lambda(B_\lambda) = \mathbb{C}^{d_\lambda}$$

e consequentemente λ é o único valor próprio de B_λ .

2. Seja $\psi \in Im(\lambda I - A)^k$. Então existe $\phi \in C$ tal que $(\lambda I - A)^k \phi = \psi$, donde

$$T(t)\psi = T(t)(\lambda I - A)^k \phi = (\lambda I - A)^k T(t)\phi \in Im(\lambda I - A)^k.$$

Logo $Im(\lambda I - A)^k$ é invariante para $T(t)$. $\square$

Por um raciocínio análogo ao realizado anteriormente a este lema, agora efectuado para um conjunto $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ finito de valores próprios da equação diferencial (1.4), chega-se ao seguinte resultado.

Teorema 1.10 *Seja $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ um conjunto finito de valores próprios da equação (1.4).*

Seja $\Phi_\Lambda = (\Phi_{\lambda_1}, \dots, \Phi_{\lambda_p})$, onde Φ_{λ_i} é uma base de $M_{\lambda_i}(A)$, $i = 1, \dots, p$.

Seja $B_\Lambda = \text{diag}(B_{\lambda_1}, \dots, B_{\lambda_p})$, onde $A\Phi_{\lambda_i} = \Phi_{\lambda_i}B_{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, p$, e defina-se $N := \sum_{i=1}^p d_{\lambda_i}$.

Então, cada matriz $B_{\lambda_i} \in M_{d_{\lambda_i} \times d_{\lambda_i}}(\mathbb{C})$ possui um único valor próprio λ_i e, para cada $a \in \mathbb{C}^N$, a solução $T(t)\Phi_\Lambda a$ com valor inicial $\Phi_\Lambda a$ em $t = 0$ é

$$x_t(\Phi_\Lambda a)(\theta) = T(t)\Phi_\Lambda a(\theta) = \Phi_\Lambda(0)e^{B_\Lambda(t+\theta)}a, \quad -r \leq \theta \leq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, existe um subespaço $Q_\Lambda \subseteq C$ tal que

$$T(t)Q_\Lambda \subseteq Q_\Lambda, \quad \forall t \geq 0$$

e

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda,$$

sendo

$$P_\Lambda = \{\Phi_\Lambda a : a \in \mathbb{C}^N\} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda(A).$$

Note-se que, este teorema diz que o comportamento da solução x de $\dot{x}(t) = L(x_t)$ que passa em $(0, \phi)$, com $\phi \in P_\Lambda$, é igual ao comportamento de uma solução de uma equação diferencial ordinária linear autónoma de dimensão finita, $\dot{x} = B_\Lambda x$.

1.3 Decomposição do espaço de fase através da equação adjunta

O estudo que se segue tem por objectivo representar, de maneira adequada, o espaço Q_Λ por forma a permitir o estudo do comportamento de soluções da equação diferencial (1.4) que passam em $(0, \phi)$ com $\phi \in Q_\Lambda$.

A aplicação:

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot) : C^* \times C &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, \phi) &\mapsto \alpha(0)\phi(0) - \int_{-r}^0 \int_0^\theta \alpha(\xi - \theta)[d\eta(\theta)]\phi(\xi)d\xi \end{aligned} \quad (1.14)$$

é chamada dualidade formal associada à equação (1.4). Facilmente se verifica que a dualidade formal é bilinear contínua. Recorde-se que a equação

diferencial (1.4) é dada por (cf.(1.7))

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 [d\eta(\theta)]x(t + \theta). \quad (1.15)$$

A definição que se segue introduz a noção de equação adjunta formal.

Definição 1.11 *Define-se a equação diferencial adjunta formal associada à equação (1.15) como sendo a equação:*

$$\dot{y}(\tau) = - \int_{-r}^0 y(\tau - \theta)[d\eta(\theta)]. \quad (1.16)$$

A equação diferencial adjunta formal (1.16) é uma EDFA. Analogamente ao Teorema 1.2 e porque (1.16) é linear contínua, conclui-se que existe uma única solução y da equação diferencial (1.16) que passa em $(0, \varphi)$, com $\varphi \in C^*$, definida em $(-\infty, r]$. Assim é possível introduzir a definição de operador solução para a equação diferencial adjunta formal (1.16).

Definição 1.12 *Para cada $\tau \leq 0$, define-se o operador solução associado à equação (1.16) da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} T^*(\tau) : C^* &\rightarrow C^* \\ \varphi &\mapsto y^\tau(\varphi) \end{aligned} ,$$

onde y é a única solução de (1.16) que passa em $(0, \varphi)$.

Considere-se $S(\tau) := T^*(-\tau)$, $\tau \geq 0$. Efectuando um estudo para (1.16) semelhante ao efectuado para (1.4), conclui-se que $(S(\tau))_{\tau \geq 0}$ é um C_0 -semi-grupo de operadores lineares em C^* com gerador infinitesimal

$$\begin{aligned} A^* : D(A^*) \subseteq C^* &\rightarrow C^* \\ \alpha &\mapsto \begin{cases} -\frac{d\alpha}{ds}(s), & 0 < s \leq r \\ \int_{-r}^0 \alpha(-\theta)[d\eta(\theta)], & s = 0 \end{cases} \end{aligned} , \quad (1.17)$$

onde

$$D(A^*) = \left\{ \alpha \in C^* : \text{existe } \dot{\alpha} \in C^* \text{ e } \dot{\alpha}(0) = - \int_{-r}^0 \alpha(-\theta)[d\eta(\theta)] \right\} ,$$

possuindo propriedades semelhantes às do gerador infinitesimal A de $(T(t))_{t \geq 0}$. Assim sendo, desde já se pode reter o seguinte resultado.

Proposição 1.11 *O operador A^* possui as seguintes propriedades:*

1. $\sigma(A^*) = \sigma_P(A^*)$;
2. $\forall \lambda \in \sigma_P(A^*), \dim M_\lambda(A^*) < +\infty$;
3. $\forall \lambda \in \sigma_P(A^*), A^*(M_\lambda(A^*)) \subseteq M_\lambda(A^*)$.

A proposição seguinte, de certa forma justifica o nome atribuído à dualidade (1.14).

Proposição 1.12 $(A^*\alpha, \phi) = (\alpha, A\phi), \forall \alpha \in D(A^*), \forall \phi \in D(A)$.

Dem. Sejam $\alpha \in D(A^*)$ e $\phi \in D(A)$. Usando as definições de A e de A^* e integrando por partes, obtém-se

$$\begin{aligned}
(\alpha, A\phi) &= \alpha(0)A\phi(0) - \int_{-r}^0 \int_0^\theta \alpha(\xi - \theta)[d\eta(\theta)]A\phi(\xi)d\xi \\
&= \alpha(0) \int_{-r}^0 [d\eta(\theta)]\phi(\theta) - \int_{-r}^0 \int_0^\theta \alpha(\xi - \theta)[d\eta(\theta)]\dot{\phi}(\xi)d\xi \\
&= \alpha(0) \int_{-r}^0 [d\eta(\theta)]\phi(\theta) - \int_{-r}^0 \left[\alpha(\xi - \theta)[d\eta(\theta)]\phi(\xi) \right]_0^\theta \\
&\quad + \int_{-r}^0 \int_0^\theta \frac{d\alpha}{d\xi}(\xi - \theta)[d\eta(\theta)]\phi(\xi)d\xi \\
&= \int_{-r}^0 \alpha(-\theta)[d\eta(\theta)]\phi(0) + \int_{-r}^0 \int_0^\theta \frac{d\alpha}{d\xi}(\xi - \theta)[d\eta(\theta)]\phi(\xi)d\xi \\
&= \left[\int_{-r}^0 \alpha(-\theta)[d\eta(\theta)] \right] \phi(0) - \int_{-r}^0 \int_0^\theta \left[-\frac{d\alpha}{d\xi}(\xi - \theta) \right] [d\eta(\theta)]\phi(\xi)d\xi \\
&= (A^*\alpha, \phi). \square
\end{aligned}$$

O resultado anterior justifica a seguinte definição.

Definição 1.13 *O operador A^* é designado por adjunto (formal) de A .*

É fácil verificar que os espectros dos operadores A e A^* coincidem, isto é,

$$\sigma(A) = \sigma(A^*).$$

Seja λ valor próprio da equação (1.4). Pelo Teorema 1.8 tem-se

$$C = N(\lambda I - A)^k \oplus \text{Im}(\lambda I - A)^k,$$

onde $k = \alpha(\lambda I - A)$. A proposição seguinte apresenta uma caracterização dos espaços $N(A - \lambda I)^k$ e $N(A^* - \lambda I)^k$. A demonstração é omitida por ser essencialmente algébrica (ver [5]).

Proposição 1.13 *Sejam $\lambda \in \sigma(A)$ e $k \in \mathbb{N}$. Então,*

$$N(A - \lambda I)^k = \left\{ \phi(\theta) = \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_{j+1} \frac{\theta^j}{j!} e^{\lambda\theta} : \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{bmatrix}, A_k \gamma = 0 \right\} \text{ e}$$

$$N(A^* - \lambda I)^k = \left\{ \psi(s) = \sum_{j=1}^k \beta_j \frac{(-s)^{k-j}}{(k-j)!} e^{\lambda s} : \beta = [\beta_1 \cdots \beta_k], \beta A_k = 0 \right\},$$

onde A_k é a matriz $(kn) \times (kn)$

$$A_k := \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_k \\ 0 & P_1 & \cdots & P_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_1 \end{bmatrix},$$

com

$$P_{j+1} := P_{j+1}(\lambda) := \frac{\Delta^{(j)}(\lambda)}{j!}, \quad \Delta^{(j)}(\lambda) := \frac{d^j \Delta}{d\lambda^j}(\lambda), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Usando esta caracterização, pode provar-se a seguinte “alternativa de Fredholm”:

Teorema 1.14 *Sejam $\psi \in C$, $\lambda \in \sigma(A)$ e $k \in \mathbb{N}$. Tem-se*

$$\psi \in \text{Im}(A - \lambda I)^k \text{ se e só se } (\alpha, \psi) = 0, \forall \alpha \in N(A^* - \lambda I)^k.$$

Dem. Seja $\psi \in C$. Pela Proposição 1.5, $\psi \in \text{Im}(A - \lambda I)^k$ se e só se existe $\phi \in D(A - \lambda I)^k$ tal que

$$\left(\frac{d}{d\theta} - \lambda \right)^k \phi(\theta) = \psi(\theta), \quad -r \leq \theta \leq 0. \quad (1.18)$$

Resolvendo a equação diferencial (1.18), tem-se que

$$\phi(\theta) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\theta^j}{j!} e^{\lambda\theta} \gamma_{j+1} + \int_0^\theta e^{\lambda(\theta-\xi)} \frac{(\theta-\xi)^{k-1}}{(k-1)!} \psi(\xi) d\xi, \quad (1.19)$$

com $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbb{R}^n$. Mas,

$$\phi \in D(A - \lambda I)^k \Leftrightarrow \left(\frac{d}{d\theta} - \lambda \right)^m \phi \in D(A), \quad \forall m = 0, \dots, k-1,$$

o que é equivalente (ver pormenores relativos aos cálculos de derivação em [5], p.175) a dizer que o sistema

$$A_k \gamma = -(\Psi, \psi),$$

com

$$\Psi := \begin{bmatrix} \alpha_1 I_n \\ \vdots \\ \alpha_k I_n \end{bmatrix}_{(kn) \times n}, \quad \alpha_j(s) = \frac{(-s)^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\lambda s}, \quad 0 \leq s \leq r, \quad j = 1, \dots, k,$$

tem solução

$$\gamma := \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{bmatrix}_{(kn) \times 1}.$$

Como $A_k \gamma = -(\Psi, \psi)$ tem solução se e só se

$$b(\Psi, \psi) = 0, \quad \forall b \in \mathbb{C}^{(kn)*} \text{ tal que } bA_k = 0,$$

conclui-se que

$$\psi \in \text{Im}(A - \lambda I)^k \text{ se e só se } (b\Psi, \psi) = 0, \quad \forall b \in \mathbb{C}^{(kn)*} : bA_k = 0. \quad (1.20)$$

Por outro lado, pela Proposição 1.13,

$$\alpha \in N(A^* - \lambda I)^k \Leftrightarrow \alpha = b\Psi, \text{ para algum } b \text{ tal que } bA_k = 0. \quad (1.21)$$

De (1.20) e (1.21) obtém-se o resultado pretendido. $\square$

Da Proposição 1.13, é ainda importante reter que, para cada $\lambda \in \sigma(A)$,

$$\dim M_\lambda(A) = \dim M_\lambda(A^*).$$

Teorema 1.15 *Sejam $\lambda \in \sigma(A)$, $\Psi_\lambda = [\psi_1 \cdots \psi_{d_\lambda}]^T$ uma base de $M_\lambda(A^*)$ e $\Phi_\lambda = [\phi_1 \cdots \phi_{d_\lambda}]$ uma base de $M_\lambda(A)$. Defina-se a matriz $d_\lambda \times d_\lambda$:*

$$(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda) = [(\psi_i, \phi_j)]_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, d_\lambda.$$

Então $(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda)$ é uma matriz invertível.

Dem. Seja a um d_λ -vector tal que $(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda)a = 0$. Então

$$0 = (\Psi_\lambda, \Phi_\lambda)a = (\Psi_\lambda, \Phi_\lambda a) \Rightarrow 0 = (\psi_i, \Phi_\lambda a), \forall i = 1, \dots, d_\lambda.$$

Por um lado, como Φ_λ é uma base de $M_\lambda(A)$, tem-se que

$$\Phi_\lambda a \in M_\lambda(A). \quad (1.22)$$

Por outro lado, como Ψ_λ é uma base de $M_\lambda(A^*)$ e $(\psi_i, \Phi_\lambda a) = 0, \forall i$, tem-se que

$$(\alpha, \Phi_\lambda a) = 0, \quad \forall \alpha \in M_\lambda(A^*),$$

logo, pelo Teorema 1.14, conclui-se que

$$\Phi_\lambda a \in \text{Im}(A - \lambda I)^k. \quad (1.23)$$

Mas, pelo Teorema 1.8,

$$C = M_\lambda(A) \oplus \text{Im}(A - \lambda I)^k,$$

donde, por (1.22) e (1.23) tem-se que $\Phi_\lambda a = 0$, logo $a = 0$. Consequentemente $(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda)$ é uma matriz invertível. $\square$

Tem-se que $(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda)$ é uma matriz invertível, quaisquer que sejam as bases Ψ_λ e Φ_λ fixadas nos espaços $M_\lambda(A^*)$ e $M_\lambda(A)$, respectivamente. Assim, é possível escolher convenientemente as bases Ψ_λ e Φ_λ , por forma a que $(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda) = I$.

Proposição 1.16 *Seja $\lambda \in \sigma(A)$. Sejam Ψ_λ e Φ_λ bases de $M_\lambda(A^*)$ e de $M_\lambda(A)$ respectivamente tais que $(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda) = I$ e considerem-se as matrizes B_λ e B_λ^* tais que*

$$A\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda \text{ e } A^*\Psi_\lambda = B_\lambda^*\Psi_\lambda.$$

Então $B_\lambda = B_\lambda^$.*

Dem. Pelas propriedades da dualidade formal tem-se, por um lado,

$$(\Psi_\lambda, A\Phi_\lambda) = (\Psi_\lambda, \Phi_\lambda B_\lambda) = (\Psi_\lambda, \Phi_\lambda) B_\lambda = B_\lambda.$$

e por outro,

$$(\Psi_\lambda, A\Phi_\lambda) = (A^*\Psi_\lambda, \Phi_\lambda) = (B_\lambda^*\Psi_\lambda, \Phi_\lambda) = B_\lambda^*(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda) = B_\lambda^*. \square$$

Considerando $\lambda \in \sigma(A)$, pelo Teorema 1.8 tem-se

$$C = N(A - \lambda I)^k \oplus \text{Im}(A - \lambda I)^k.$$

Sejam Φ_λ e Ψ_λ bases de $M_\lambda(A)$ e de $M_\lambda(A^*)$ respectivamente tais que $(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda) = I_{d_\lambda}$, onde $d_\lambda = \dim M_\lambda(A) = \dim M_\lambda(A^*)$. Para cada $\phi \in C$, tem-se

$$\phi = \phi^{P_\lambda} + \phi^{Q_\lambda}, \text{ com } \phi^{P_\lambda} \in P_\lambda \text{ e } \phi^{Q_\lambda} \in Q_\lambda,$$

com

$$P_\lambda = M_\lambda(A) = \{\phi \in C : \phi = \Phi_\lambda a, \text{ } a \text{ } d_\lambda\text{-vector}\}$$

e

$$Q_\lambda = \text{Im}(A - \lambda I)^k = \{\phi \in C : (\Psi_\lambda, \phi) = 0\}.$$

Além disso, $\phi^{P_\lambda} = \Phi_\lambda b$, sendo $b = (\Psi_\lambda, \phi)$. Com efeito, pelo facto de $(\cdot, \cdot)$ ser bilinear e de $\phi^{Q_\lambda} \in Q_\lambda$, obtém-se

$$\begin{aligned} (\Psi_\lambda, \phi) &= (\Psi_\lambda, \phi^{P_\lambda} + \phi^{Q_\lambda}) = (\Psi_\lambda, \phi^{P_\lambda}) + (\Psi_\lambda, \phi^{Q_\lambda}) \\ &= (\Psi_\lambda, \phi^{P_\lambda}) = (\Psi_\lambda, \Phi_\lambda b) \\ &= (\Psi_\lambda, \Phi_\lambda) b = b. \end{aligned}$$

Por indução, prova-se que, para $\mu, \lambda \in \sigma(A)$ tais que $\mu \neq \lambda$, se tem $(\psi, \phi) = 0$ se $\psi \in M_\mu(A^*)$ e $\phi \in M_\lambda(A)$. Isto permite generalizar o raciocínio do parágrafo anterior para um subconjunto finito de $\sigma(A)$, obtendo-se o resultado que se segue.

Teorema 1.17 *Seja $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ um conjunto finito de valores característicos da equação (1.4). Considerem-se os espaços*

$$P_\Lambda := \bigoplus_{i=1}^p M_{\lambda_i}(A); \quad P_\Lambda^* := \bigoplus_{i=1}^p M_{\lambda_i}(A^*).$$

Sejam Φ e Ψ bases de P_Λ e de P_Λ^* respectivamente tais que $(\Psi, \Phi) = I_N$, com $N := \dim P_\Lambda = \dim P_\Lambda^*$. Então,

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda; \quad (1.24)$$

$$P_\Lambda = \{\phi \in C : \phi = \Phi b, \text{ } b \text{ } N\text{-vector}\};$$

$$Q_\Lambda = \{\phi \in C : (\Psi, \phi) = 0\},$$

onde Q_Λ é um subespaço fechado. Além disso, para qualquer $\phi \in C$, tem-se $\phi = \phi^{P_\Lambda} + \phi^{Q_\Lambda}$, com $\phi^{P_\Lambda} = \Phi(\Psi, \phi)$.

Definição 1.14 A decomposição do espaço C como soma directa dos espaços P_Λ e Q_Λ , presente no teorema anterior, chama-se decomposição de C por Λ .

1.4 Estimativas na decomposição de C por Λ e estabilidade

Nesta secção, estuda-se a estabilidade da equação diferencial (1.4) e estabelecem-se estimativas para soluções com condição inicial em cada um dos subespaços P_Λ e Q_Λ de (1.24).

Comece-se por definir os diferentes tipos de estabilidade de soluções de uma EDRF geral

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad (1.25)$$

onde $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, +\infty) \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função suficientemente regular de modo a garantir existência e unicidade de soluções em $[a - r, +\infty)$, e dependência contínua em relação às condições iniciais.

Definição 1.15 Suponha-se que $f(t, 0) = 0$ para qualquer $t \in [a, +\infty)$.

Diz-se que a solução $x \equiv 0$ de (1.25) é

(i) estável se

$$\forall \sigma \geq a, \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\sigma, \epsilon) > 0, \forall \varphi \in C : \\ \|\varphi\| < \delta \Rightarrow \|x_t(\sigma, \varphi, f)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq \sigma;$$

(ii) uniformemente estável se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \forall \varphi \in C : \\ \|\varphi\| < \delta \Rightarrow \|x_t(\sigma, \varphi, f)\| < \epsilon, \quad \forall \sigma \geq a, \forall t \geq \sigma;$$

(iii) *assimptoticamente estável se é estável e*

$$\forall \sigma \geq a, \exists b > 0, \forall \varphi \in C : \\ \|\varphi\| < b \Rightarrow \|x(\sigma, \varphi, f)(t)\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty;$$

(iv) *uniformemente assimptoticamente estável se é uniformemente estável e*

$$\exists b > 0, \forall \eta > 0, \exists T = T(\eta) > 0, \forall \varphi \in C : \\ \|\varphi\| < b \Rightarrow \|x_t(\sigma, \varphi, f)\| < \eta, \forall \sigma \geq a, \forall t \geq \sigma + T;$$

(v) *exponencialmente assimptoticamente estável se*

$$\exists b, k, \alpha > 0, \forall \varphi \in C : \\ \|\varphi\| \leq b \Rightarrow \|x(\sigma, \varphi, f)(t)\| \leq ke^{-\alpha(t-\sigma)}, \forall t \geq \sigma \geq a;$$

(vi) *instável se não é estável.*

Se $y(t)$ é uma qualquer solução de (1.25), então a estabilidade de y define-se como sendo a estabilidade da solução $z \equiv 0$ da equação

$$\dot{z}(t) = f(t, z_t + y_t) - f(t, y_t).$$

Nota 1.1 Se $f(t, \varphi)$ é uma função linear em φ , então a estabilidade de qualquer solução de (1.25) é igual à da solução nula, donde, nesta situação, por vezes se refira a estabilidade como sendo a da equação e não a de uma solução em particular.

De notar ainda que, se a equação (1.25) é autónoma, isto é $f(t, \varphi) = f(\varphi)$, então $x \equiv 0$ estável implica $x \equiv 0$ uniformemente estável.

O lema que se segue, constitui um resultado preliminar da teoria de C_0 -semigrupos de operadores, importante para o cumprimento dos objectivos propostos para esta secção.

Lema 1.18 *Sejam X um espaço de Banach e $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo em X . Considere-se $w > 0$ e seja ρ o raio espectral de $T(w)$. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é tal que $\rho \leq e^{\alpha w}$, então*

$$\forall \gamma > 0, \exists K \geq 1, \forall t \geq 0, \forall \phi \in X : \|T(t)\phi\| \leq Ke^{(\alpha+\gamma)t}\|\phi\|.$$

Dem. Ver J.K. Hale[5], p.180. $\square$

Pelo ponto 2 do Teorema 1.7, tem-se que, para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\Lambda := \Lambda(\beta) := \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda \geq \beta\}$$

é finito. O resultado que se segue descreve, em certa medida, o comportamento das soluções da equação diferencial (1.4), tornando-se assim importante para o estudo da sua estabilidade.

Teorema 1.19 *Sejam $\beta \in \mathbb{R}$ e $\Lambda = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda \geq \beta\}$. Considere-se a decomposição de C por Λ ,*

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda.$$

Então existem constantes positivas k e γ tais que

$$\|T(t)\phi^{Q_\Lambda}\| \leq ke^{(\beta-\gamma)t}\|\phi^{Q_\Lambda}\|, \quad t \geq 0, \forall \phi^{Q_\Lambda} \in Q_\Lambda; \quad (1.26)$$

$$\|T(t)\phi^{P_\Lambda}\| \leq ke^{(\beta-\gamma)t}\|\phi^{P_\Lambda}\|, \quad t \leq 0, \forall \phi^{P_\Lambda} \in P_\Lambda. \quad (1.27)$$

Dem. Sejam $\beta \in \mathbb{R}$ e $C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$ a decomposição de C por

$$\Lambda = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda \geq \beta\}.$$

Da teoria espectral em C_0 -semigrupos tem-se, para $t \geq 0$,

$$\sigma_P(T(t)) \subseteq e^{t\sigma_P(A)} \cup \{0\}.$$

Como Q_Λ é um espaço de Banach invariante para $T(t)$, tem-se que $(T(t)|_{Q_\Lambda})_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo em Q_Λ . Para $t = r$,

$$\begin{aligned} \sigma_P(T(r)|_{Q_\Lambda}) &\subseteq e^{(\sigma(A) \setminus \Lambda)r} \cup \{0\} = \{e^{\lambda r} : \lambda \in \sigma(A) \setminus \Lambda\} \cup \{0\} \\ &\subseteq \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < e^{\beta r}\}. \end{aligned}$$

Sendo $T(r)$ compacto, então $\sigma(T(r))$ não tem pontos de acumulação excepto eventualmente o zero. Por este facto e pelas inclusões acima, deduz-se que existe $\gamma > 0$ tal que

$$\sigma_P(T(r)|_{Q_\Lambda}) \subseteq \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq e^{(\beta-2\gamma)r}\}.$$

Assim,

$$\rho(r) := r_\sigma(T(r)|_{Q_\Lambda}) \leq e^{(\beta-2\gamma)r}.$$

Considerando, no Lema 1.18, $\alpha = \beta - 2\gamma$, $w = r$ e γ como acima, conclui-se que

$$\exists K = K(\gamma) \geq 1 : \|T(t)\phi\| \leq Ke^{(\beta-\gamma)t}\|\phi\|, \forall t \geq 0, \forall \phi \in Q_\Lambda,$$

o que demonstra (1.26).

Seja Φ_Λ uma base de P_Λ . Pelo Teorema 1.10, existe uma matriz B_Λ tal que

$$T(t)\Phi_\Lambda a = \Phi_\Lambda e^{B_\Lambda t} a, \quad a \in \mathbb{C}^p,$$

sendo $p = \dim P_\Lambda$. O espaço P_Λ pode ser identificado com o espaço $\mathbb{C}^p$. Com esta identificação, tem-se $\Phi_\Lambda a \equiv a$ e

$$T(t)a = e^{B_\Lambda t} a, \quad a \in \mathbb{C}^p.$$

Como os valores próprios da matriz $e^{B_\Lambda t}$ têm a forma $\mu_t = e^{\lambda t}$, com $\lambda \in \Lambda$, eles satisfazem $\operatorname{Re} \mu_t \leq e^{(\beta-\gamma)t}$ para $t \leq 0$, donde (1.27) é consequência dos resultados conhecidos da teoria de EDO's. $\square$

Corolário 1.20 *Se todas as raízes da equação característica da equação diferencial (1.4), isto é, da equação $\det \Delta(\lambda) = 0$, tiverem parte real negativa, então existem constantes positivas k e γ tais que*

$$\|T(t)\phi\| \leq ke^{-\gamma t}\|\phi\|, \forall t \geq 0, \forall \phi \in C.$$

Dem. Considere-se $\Lambda(0) = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$. Por hipótese tem-se $\Lambda(0) = \emptyset$, donde $P_\Lambda = \{0\}$ e consequentemente $C = Q_\Lambda$. Por (1.26) do teorema anterior, existem $k, \gamma > 0$ tais que

$$\|T(t)\phi\| \leq ke^{-\gamma t}\|\phi\|, \forall t \geq 0, \forall \phi \in Q_\Lambda = C. \square$$

Do corolário anterior conclui-se que, se todas as raízes da equação característica $\det \Delta(\lambda) = 0$ tiverem parte real negativa, então a equação diferencial (1.4) é exponencialmente assintoticamente estável. A implicação recíproca também é válida, em virtude do Teorema 1.10 e dos resultados conhecidos para a estabilidade de EDO's lineares autónomas.

Nota 1.2 Pelos mesmos argumentos invocados no último parágrafo, conclui-se ainda que a equação (1.4) é exponencialmente assintoticamente estável se e só se é uniformemente assintoticamente estável.

1.5 Exemplo

Com o exemplo que se segue, pretende-se ilustrar as noções e aplicar os resultados estudados até ao momento neste capítulo.

Considere-se a equação diferencial funcional linear autónoma retardada,

$$\dot{x}(t) = -\frac{\pi}{2}x(t-1) := \int_{-1}^0 [d\eta(\theta)]x(t+\theta), \quad (1.28)$$

onde

$$\eta(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta = -1 \\ -\frac{\pi}{2}, & -1 < \theta \leq 0 \end{cases}.$$

Neste exemplo tem-se $r = 1$, $C = C([-1, 0]; \mathbb{R})$ e $C^* = C([0, 1]; \mathbb{R})$. Considerando

$$\begin{aligned} L : C &\rightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto -\frac{\pi}{2}\phi(-1) \end{aligned},$$

a equação (1.28) adquire a forma da equação (1.4). A forma bilinear introduzida em (1.14) é dada por

$$(\psi, \phi) = \psi(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \psi(\xi - \theta)[d\eta(\theta)]\phi(\xi)d\xi,$$

donde, pela definição de L , tem-se

$$\begin{aligned} (\psi, \phi) &= \psi(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \left(\int_0^\theta \psi(\xi - \theta)\phi(\xi)d\xi \right) d\eta(\theta) \\ &= \psi(0)\phi(0) - L \left(\int_0^\cdot \psi(\xi - \cdot)\phi(\xi)d\xi \right) \\ &= \psi(0)\phi(0) - \frac{\pi}{2} \int_{-1}^0 \psi(\xi + 1)\phi(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.5 e por (1.17) tem-se $A\phi = \dot{\phi}$, com

$$\begin{aligned} D(A) &= \{\phi \in C^1 : L(\phi) = \dot{\phi}(0)\} \\ &= \{\phi \in C^1 : \dot{\phi}(0) = -\frac{\pi}{2}\phi(-1)\}, \end{aligned}$$

e $A^*\psi = -\dot{\psi}$, com

$$D(A^*) = \{\psi \in C^1 : \dot{\psi}(0) = -\frac{\pi}{2}\psi(1)\}.$$

De seguida estuda-se a equação característica de (1.28) e localizam-se as suas raízes. Assim, como

$$\det \Delta(\lambda) = \det \left(\lambda I_1 - \int_{-1}^0 e^{\lambda \theta} [d\eta(\theta)] \right) = \lambda + \frac{\pi}{2} e^{-\lambda},$$

a equação característica é

$$\lambda + \frac{\pi}{2} e^{-\lambda} = 0. \quad (1.29)$$

Para localizar as suas raízes, considere-se $\lambda = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. A equação (1.29) assume a forma

$$a + bi + \frac{\pi}{2} e^{-a} (\cos b - i \operatorname{sen} b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + \frac{\pi}{2} e^{-a} \cos b = 0 \\ b - \frac{\pi}{2} e^{-a} \operatorname{sen} b = 0 \end{cases}.$$

1. Se $a = 0$, tem-se

$$\begin{cases} \cos b = 0 \\ b - \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} b = 0 \end{cases},$$

donde $\frac{\pi}{2}i$ e $-\frac{\pi}{2}i$ são as únicas raízes de (1.29) com parte real nula. Estas raízes são simples.

2. Se $a > 0$, tem-se

$$\begin{cases} \cos b = -a e^{a \frac{2}{\pi}} \\ \operatorname{sen} b = b e^{a \frac{2}{\pi}} \end{cases},$$

logo $\cos b < 0$ e consequentemente

$$b \in X := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right], \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Como $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cap X = \emptyset$, então não existe $b \in X$ que verifique a equação $\operatorname{sen} b = b e^{a \frac{2}{\pi}}$, donde se conclui que (1.29) não possui raízes com parte real positiva.

Pelos dois pontos anteriores, $\Lambda := \Lambda(0) = \{-\frac{\pi}{2}i, \frac{\pi}{2}i\}$. Considerando a complexificação da equação (1.28), isto é, considerando $C([-1, 0]; \mathbb{C})$ como espaço de fase, tem-se

$$M_{\frac{\pi}{2}i}(A) = N(A - \frac{\pi}{2}i) = \{e^{\frac{\pi}{2}i\theta} a : a \in \mathbb{C}\}$$

e

$$M_{-\frac{\pi}{2}i}(A) = N(A + \frac{\pi}{2}i) = \{e^{-\frac{\pi}{2}i\theta}a : a \in \mathbb{C}\}.$$

Logo,

$$P_\Lambda = M_{\frac{\pi}{2}i}(A) \oplus M_{-\frac{\pi}{2}i}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} e^{\frac{\pi}{2}i\theta} & e^{-\frac{\pi}{2}i\theta} \end{bmatrix} a : a \in \mathbb{C}^2 \right\},$$

donde $\Phi_\Lambda = (\phi_1, \phi_2)$, sendo $\phi_1(\theta) = e^{\frac{\pi}{2}i\theta}$ e $\phi_2(\theta) = e^{-\frac{\pi}{2}i\theta}$ com $\theta \in [-1, 0]$, é uma base de P_Λ . Analogamente,

$$P_\Lambda^* = M_{\frac{\pi}{2}i}(A^*) \oplus M_{-\frac{\pi}{2}i}(A^*)$$

e

$$\Psi_\Lambda^* = \begin{bmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{bmatrix},$$

onde $\psi_1^*(s) = e^{\frac{\pi}{2}is}$ e $\psi_2^*(s) = e^{-\frac{\pi}{2}is}$ com $s \in [0, 1]$, é uma base de P_Λ^* . Calculando $(\Psi_\Lambda^*, \Phi_\Lambda)^{-1}$ e considerando em P_Λ^* a base

$$\Psi_\Lambda = (\Psi_\Lambda^*, \Phi_\Lambda)^{-1} \Psi_\Lambda^*,$$

tem-se que

$$(\Psi_\Lambda, \Phi_\Lambda) = I.$$

Considerando agora a decomposição de $C = C([-1, 0]; \mathbb{C})$ por Λ , isto é,

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda,$$

tem-se, para qualquer $\phi \in C$,

$$\phi = \phi^{P_\Lambda} + \phi^{Q_\Lambda},$$

onde

$$\phi^{P_\Lambda} = \Phi_\Lambda b, \text{ com } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = (\Psi_\Lambda, \phi).$$

Como $\Lambda = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$, o Teorema 1.19 garante a existência de constantes positivas k e γ tais que

$$\|T(t)\phi^{Q_\Lambda}\| \leq ke^{-\gamma t}\|\phi^{Q_\Lambda}\|, \quad t \geq 0.$$

Por outro lado, como

$$A\Phi_\Lambda = \Phi_\Lambda B, \text{ com } B = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{2}i \end{bmatrix},$$

pelo Teorema 1.10, tem-se $T(t)\Phi_\Lambda = \Phi_\Lambda e^{Bt}$. Assim,

$$\|T(t)\phi - \Phi_\Lambda e^{Bt}b\| = \|T(t)\phi - T(t)\phi^{P_\Lambda}\| = \|T(t)\phi^{Q_\Lambda}\| \leq ke^{-\gamma t}\|\phi - \Phi_\Lambda b\|,$$

donde $\|T(t)\phi - \Phi_\Lambda e^{Bt}b\|$ converge exponencialmente para zero quando $t \rightarrow +\infty$. Desta forma conclui-se que qualquer solução de $\dot{x}(t) = -\frac{\pi}{2}x(t-1)$ em C , aproxima-se de uma solução periódica complexa

$$z(t) = e^{\frac{\pi}{2}it}b_1 + e^{-\frac{\pi}{2}it}b_2$$

quando $t \rightarrow +\infty$. Consequentemente, em $\mathbb{R}$, as soluções periódicas são

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)c_1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)c_2, \text{ com } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

e qualquer outra solução $x(t)$ de (1.28) aproxima-se exponencialmente de uma solução 4-periódica quando $t \rightarrow +\infty$.

Descrito o comportamento das soluções de (1.28), conclui-se que a equação é uniformemente estável mas não assintoticamente estável.

1.6 EDFR's lineares com perturbações autónomas

Na secção 1.4, obteve-se uma condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica exponencial da solução nula da equação

$$\dot{x}(t) = L(x_t), \tag{1.30}$$

com $L \in \mathcal{L}(C; \mathbb{R}^n)$. Considere-se agora a equação diferencial anterior com uma pequena perturbação autónoma, isto é, considere-se a equação

$$\dot{x}(t) = L(x_t) + f(x_t), \tag{1.31}$$

com $L \in \mathcal{L}(C; \mathbb{R}^n)$ e $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 tal que $f(0) = 0$ e $Df(0) = 0$.

Em [5] Chapter 6, demonstra-se a existência e unicidade de soluções de (1.31), com condição inicial $x_\sigma = \varphi$, $\varphi \in C$.

Pretende-se, nesta secção, apresentar uma condição suficiente para a estabilidade assintótica exponencial da solução nula da equação (1.31), quando o mesmo acontece para a equação (1.30). Para isso, usar-se-á a fórmula de variação das constantes (FVC) para EDF's que seguidamente se enuncia.

Teorema 1.21 (Fórmula de Variação das Constantes) *Sejam*

$L \in \mathcal{L}(C; \mathbb{R}^n)$ e $h \in \mathcal{L}_1^{loc}([\sigma, +\infty); \mathbb{R}^n)$, com $\sigma \in \mathbb{R}$.

Então a solução $x(t)$ da equação

$$\dot{x}(t) = L(x_t) + h(t),$$

com condição inicial $x_\sigma = \varphi$, $\varphi \in C$, está definida em $[\sigma - r, +\infty)$ e satisfaz

$$x_t = T(t - \sigma)\varphi + \int_\sigma^t d_s[K(t, s)]h(s)ds, \quad t \geq \sigma, \quad (1.32)$$

onde $K(t, \cdot) : [\sigma, t] \rightarrow C$ é definido por

$$K(t, s)(\theta) := \int_\sigma^s X(t + \theta - \alpha)d\alpha, \quad \theta \in [-r, 0]$$

e $X(\cdot)$ é a matriz solução do PVI

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = L(X_t) \\ X_0 = X_0(\cdot) \end{cases}, \quad (1.33)$$

sendo

$$X_0(\theta) = \begin{cases} I & \text{se } \theta = 0 \\ 0 & \text{se } -r \leq \theta < 0 \end{cases}.$$

Dem. Ver J.K. Hale[5], Chapter 6. $\square$

A função matricial $t \mapsto X(t)$ solução do PVI (1.33) é contínua para $t \geq 0$ e satisfaz

$$X(t) = \begin{cases} 0, & -r \leq t < 0 \\ I + \int_0^t X(t + \theta)d\eta(\theta), & t \geq 0 \end{cases}.$$

Assim, pela unicidade de solução e porque as colunas de X_t , com $t \geq r$, são elementos de C , tem-se que

$$X_t = T(t)X_r, \quad t \geq r,$$

onde $(T(t))_{t \geq 0}$ é o C_0 -semigrupo dos operadores solução associados à equação diferencial (1.30).

Fixando $\sigma = 0$, tem-se ainda (cf[5], p.227)

$$\frac{\partial}{\partial s}K(t, s) = X_{t-s}, \quad t \geq s. \quad (1.34)$$

Se todos os valores próprios da equação (1.30) têm parte real negativa, então, pelo Corolário 1.20, existem $k, \gamma > 0$ tais que

$$\|X_t\| = \|T(t)X_r\| \leq ke^{-\gamma t}\|X_r\|, \quad t \geq r,$$

isto é, existem $c, \gamma > 0$ tais que

$$\|X_t\| \leq ce^{-\gamma t}, \quad t \geq r. \quad (1.35)$$

Para $t \geq 0$, tem-se

$$|X(t)| \leq \|X_{t+r}\| \leq ce^{-\gamma(t+r)} = c_1 e^{-\gamma t},$$

com $c_1 := ce^{-\gamma r}$. Assim, para $0 \leq t \leq r$, vem

$$\|X_t\| = \max_{\theta \in [-r, 0]} |X(t + \theta)| = \max_{\theta \in [-t, 0]} |X(t + \theta)| \leq c_1 e^{-\gamma r} e^{-\gamma t}. \quad (1.36)$$

De (1.35) e (1.36) conclui-se então que existem $c, \gamma > 0$ tais que

$$\|X_t\| \leq ce^{-\gamma t}, \quad t \geq 0. \quad (1.37)$$

De seguida, apresenta-se o resultado de estabilidade pretendido.

Teorema 1.22 *Considere-se a equação (1.31) com f de classe C^1 tal que $f(0) = 0$ e $Df(0) = 0$.*

Se a solução nula de (1.30) é exponencialmente assintoticamente estável, então a solução nula de (1.31) é também exponencialmente assintoticamente estável.

Dem. Seja A o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ dos operadores solução associados à equação diferencial (1.30).

Sendo $x(t) \equiv 0$ solução exponencialmente assintoticamente estável de (1.30), tem-se

$$\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\},$$

donde, pelo Corolário 1.20, existem $\gamma > 0$ e $k > 0$ tais que

$$\|T(t)\phi\| \leq ke^{-\gamma t}\|\phi\|, \quad \forall t \geq 0, \forall \phi \in C. \quad (1.38)$$

Nesta situação, foi acima provado que existe $c > 0$ tal que (1.37) é satisfeita.

Por hipótese, f é de classe C^1 tal que $f(0) = 0$ e $Df(0) = 0$, donde

$$\forall \epsilon > 0, \exists \xi > 0, \forall \varphi \in C : \|\varphi\| < \xi \Rightarrow \|f(\varphi)\| < \epsilon \|\varphi\|. \quad (1.39)$$

Seja $\varphi \in C$. Seja $x(t)$ a solução de (1.31) com condição inicial $x_0 = \varphi$, definida no intervalo maximal de existência $[-r, b)$. Pela FVC e por (1.34), $x(t)$ verifica

$$x_t = T(t)\varphi + \int_0^t X_{t-s}f(x_s)ds, \quad 0 \leq t < b,$$

donde, por (1.37),

$$\|x_t\| \leq \|T(t)\varphi\| + \int_0^t ce^{-\gamma(t-s)}\|f(x_s)\|ds, \quad 0 \leq t < b$$

e de (1.38) tem-se

$$\|x_t\| \leq ke^{-\gamma t}\|\varphi\| + \int_0^t ce^{-\gamma(t-s)}\|f(x_s)\|ds, \quad 0 \leq t < b.$$

Tomando em (1.39) $\epsilon = \frac{\gamma}{2c}$, existe $\xi > 0$ tal que, se $\|\varphi\| < \xi$, então $\|f(\varphi)\| < \epsilon\|\varphi\|$. Assim,

$$\|x_t\|e^{\gamma t} \leq k\|\varphi\| + \int_0^t \frac{\gamma}{2}e^{\gamma s}\|x_s\|ds,$$

para $0 \leq t < b$, desde que se tenha $\|x_s\| < \xi$, para $0 \leq s \leq t$.

Pela desigualdade de Gronwall, tem-se

$$\|x_t\| \leq k\|\varphi\|e^{-\frac{\gamma}{2}t},$$

para $0 \leq t < b$, desde que se tenha $\|x_s\| < \xi$, para $0 \leq s \leq t$.

Como $\gamma > 0$, para $\|\varphi\| < \min\{\xi, \frac{\xi}{2k}\} =: b_0$ tem-se $\|x_t\| < \xi, \forall t \geq 0$, donde se conclui que

$$\|x_t\| \leq kb_0e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \quad 0 \leq t < b.$$

Isto prova que $b = +\infty$ e que a solução $x(t) \equiv 0$ de (1.31) é exponencialmente assintoticamente estável. $\square$

Capítulo 2

Equações Diferenciais Funcionais Retardadas Escalares

2.1 Notações e terminologia

Ao longo de todo este capítulo consideram-se $h > 0$ e $C := C([-h, 0]; \mathbb{R})$ o espaço das funções reais contínuas definidas em $[-h, 0]$ munido da norma do supremo.

Para $c \in \mathbb{R}$, usar-se-á a notação c para denotar também o elemento de C , $\varphi(\theta) = c$, $\forall \theta \in [-h, 0]$. Em C considerar-se-á a relação de ordem parcial usual, isto é,

$$\varphi \geq \psi \quad \text{se e só se} \quad \varphi(\theta) \geq \psi(\theta), \quad \forall \theta \in [-h, 0].$$

Em particular, para $\varphi \in C$ e $c \in \mathbb{R}$, tem-se $\varphi \geq c$ (respectivamente $\varphi \leq c$) quando $\varphi(\theta) \geq c$ (respectivamente $\varphi(\theta) \leq c$) para todo $\theta \in [-h, 0]$.

As definições que se seguem estabelecem algumas noções importantes a ter presente.

Definição 2.1 *Sejam $c \in \mathbb{R}$ e $x : J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo real J .*

Diz-se que $x(t)$ é limitada inferiormente para além de c , se existe $\epsilon > 0$ tal que $x(t) \geq c + \epsilon$ para todo $t \in J$.

Definição 2.2 *Seja $x : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R}$, uma função contínua.*

Diz-se que $x(t)$ é oscilatória (estritamente oscilatória) se não é eventualmente zero e possui zeros arbitrariamente grandes (se possui imagens positivas e negativas para objectos arbitrariamente grandes); caso contrário, $x(t)$ diz-se não oscilatória.

O objectivo principal deste capítulo é o do estudo de condições suficientes para a estabilidade global de soluções de EDFR's escalares do tipo

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \in I, \quad (2.1)$$

onde $I = [0, +\infty)$ e $f : I \times C \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Definição 2.3 Diz-se que a equação (2.1) é globalmente assintoticamente estável quando, para quaisquer soluções $x_1, x_2 : [-h, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, se tem

$$x_1(t) - x_2(t) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty. \quad (2.2)$$

Se a equação (2.1) possui uma solução de equilíbrio $x(t) \equiv k$, $k \in \mathbb{R}$, então diz-se que o equilíbrio é *globalmente assintoticamente estável*, ou *globalmente atractivo*, quando todas as soluções convergem para k quando $t \rightarrow +\infty$.

Um dos principais domínios onde as EDFR's constituem uma ferramenta importante é no estudo da dinâmica populacional de espécies biológicas. Por conseguinte, em determinados modelos, como os (2.29) e (2.36) da secção 2.4, consideram-se apenas soluções com significado biológico, ou seja, soluções com condição inicial num subconjunto C_α de C , com $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$C_\alpha := \{\varphi \in C : \varphi(\theta) \geq \alpha \text{ para } \theta \in [-h, 0) \text{ e } \varphi(0) > \alpha\}.$$

Neste contexto é comum dizer-se, fazendo um abuso de linguagem, que uma EDFR é globalmente assintoticamente estável quando quaisquer duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ com *condição inicial admissível*, ou seja, com condição inicial em C_α , verificam (2.2).

2.2 Resumo histórico

O modelo de crescimento de uma população proposto por Verhulst em 1837, conhecido pela *Lei Logística de Crescimento*, é dado pela EDO

$$\dot{y}(t) = py(t) \left(1 - \frac{1}{k}y(t) \right), \quad t \geq 0, \quad (2.3)$$

onde as constantes positivas p e k representam, respectivamente, a taxa de crescimento e a capacidade máxima do *habitat* para a espécie.

Com o objectivo de tornar a equação (2.3) mais realista, em 1948 Hutchinson propôs a seguinte equação logística com atraso:

$$\dot{y}(t) = py(t) \left(1 - \frac{1}{k}y(t-h) \right), \quad t \geq 0, \quad (2.4)$$

onde a constante positiva h , i.e. o atraso no tempo, expressa o período de maturação da espécie. Uma vez que, por razões biológicas, só tem interesse estudar as soluções positivas, é natural trabalhar apenas com condições iniciais em C_0 .

De notar que a EDFR (2.4) assume a forma

$$\dot{x}(t) = p(1 + x(t))x(t - h), \quad (2.5)$$

conhecida por equação de Wright, se se transladar o equilíbrio positivo $y(t) \equiv k$ para a origem através da mudança de variável $x(t) = \frac{y(t)}{k} - 1$.

O trabalho de E. Wright de 1955 [16] foi pioneiro na utilização de condições do tipo $\frac{3}{2}$ para o estudo da estabilidade global de soluções de EDFR's escalares. Mais concretamente, em [16] demonstra-se que, se $ph \leq \frac{3}{2}$ então, qualquer solução $y(t)$ de (2.4) com condição inicial

$$y_0 = \psi, \quad \psi \in C_0,$$

converge para o equilíbrio k quando $t \rightarrow +\infty$. Ainda nesse trabalho, o autor deixou a conjectura de que as mesmas conclusões se poderiam obter com a hipótese mais fraca $ph < \frac{\pi}{2}$. Esta questão constitui ainda um problema em aberto.

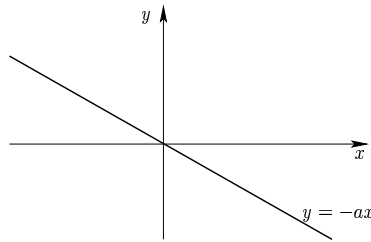
Mais tarde, em 1970, J. Yorke [18] estudou a família de EDFR's escalares (2.1), com $f : [0, +\infty) \times C^\beta \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $C^\beta := \{\phi \in C : \|\phi\| < \beta\}$, $\beta > 0$, sob as seguintes hipóteses **(Y)**:

(Y1) Para toda a sucessão $t_n \rightarrow +\infty$ e $\phi_n \in C^\beta$, se $\phi_n \rightarrow c \neq 0$, então $f(t_n, \phi_n)$ não converge para zero quando $n \rightarrow +\infty$;

(Y2) Existe $a > 0$ tal que

$$-a\mathcal{M}(\phi) \leq f(t, \phi) \leq a\mathcal{M}(-\phi), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \phi \in C^\beta,$$

onde $\mathcal{M}(\phi) := \max\{0, \max_{s \in [-h, 0]} \phi(s)\}$.



Nestas condições, J. Yorke demonstrou que, se $ah < \frac{3}{2}$, então toda a solução $x(t)$ da equação (2.1), com condição inicial $\|x_0\| \leq \frac{2}{3}\beta$, converge para o único equilíbrio zero quando $t \rightarrow +\infty$.

Posteriormente, em [17], Yoneyama substituiu a constante a , presente na hipótese **(Y2)**, por uma função contínua e não negativa $a(t)$, e obteve as mesmas conclusões que J. Yorke, impondo, no lugar de $ah < \frac{3}{2}$, as condições

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+h} a(s)ds < \frac{3}{2} \quad (2.6)$$

e

$$\inf_{t \geq 0} \int_t^{t+h} a(s)ds > 0. \quad (2.7)$$

De referir que, nos trabalhos de J. Yorke e Yoneyama, a hipótese **(Y1)** é usada para determinar o comportamento das soluções não oscilatórias e as restantes hipóteses para o comportamento das soluções oscilatórias.

Desde o trabalho de E. Wright em 1955, outros trabalhos relacionados com este assunto foram surgindo, nomeadamente trabalhos envolvendo o estudo da estabilidade global de soluções de EDFR's escalares com atraso ilimitado. Contudo, equações com atraso ilimitado não são objecto de estudo nesta tese.

Já recentemente, em 2002, surgiram os trabalhos que constituem o principal suporte bibliográfico para o desenvolvimento deste capítulo, os trabalhos de E. Liz, V. Tkachenko e S. Trofimchuk [7] e de T. Faria [1].

Em [1], a autora estuda a estabilidade global do equilíbrio $x(t) \equiv 0$ (cuja existência é forçada pelas hipóteses que impõe) da equação

$$\dot{x}(t) = (1 + x(t))F(t, x_t), \quad t \in I, \quad (2.8)$$

onde $I = [0, +\infty)$ ou $I = \mathbb{R}$ e $F : I \times C \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Como condição inicial admissível, considera-se

$$x_0 = \phi, \quad \phi \in C_{-1}. \quad (2.9)$$

Notar que a equação de Wright (2.5) é um caso particular de (2.8).

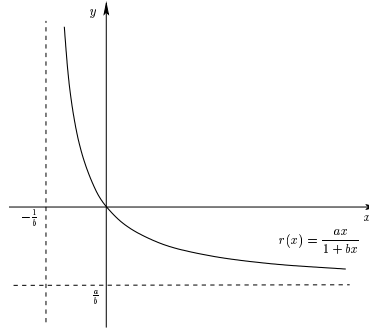
As hipóteses impostas em [1] sobre a função F não são novas na literatura (ver as hipóteses **(A)** no início da secção 2.4). Contudo, em [1] estas são usadas no contexto de equações (2.8), e não de equações (2.1) como tradicionalmente acontece.

Em [7], estuda-se a estabilidade global do equilíbrio $x(t) \equiv 0$ da equação (2.1), com $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}$ uma função verificando a condição de Carathéodory. A principal inovação reside na substituição da hipótese de Yorke **(Y2)** pela hipótese mais geral

(Y2*) Existem $a < 0$ e $b \geq 0$ tais que, sendo $r(x) = \frac{ax}{1+bx}$,

$$r(\mathcal{M}(\phi)) \leq f(t, \phi) \leq r(-\mathcal{M}(-\phi)), \quad t \geq 0,$$

onde a primeira desigualdade é válida para qualquer $\phi \in C$, a segunda para qualquer $\phi \in C$ tal que $\phi > -b^{-1} \in [-\infty, 0)$, e $\mathcal{M}(\phi) = \max\{0, \max_{s \in [-h, 0]} \phi(s)\}$ é o funcional de Yorke.



Para além da hipótese (Y2*), usada para controlar o comportamento das soluções oscilatórias, os autores trabalham ainda sob as hipóteses

(Y0*) Para cada $q \in \mathbb{R}$, existe $v(q) \in \mathbb{R}$, tal que

$$f(t, \phi) \leq v(q), \quad \forall t \in I, \forall \phi \geq q;$$

(Y1*) Para qualquer função contínua $w : [-h, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ com limite não nulo no infinito, o integral $\int_0^{+\infty} f(s, w_s) ds$ é divergente.

Enquanto que a hipótese (Y0*), conjuntamente com (Y2*), é usada para garantir a limitação de soluções em $[-h, +\infty)$, a hipótese (Y1*) é usada para controlar o comportamento das soluções não oscilatórias. De notar que a condição (Y1*) foi introduzida em [13] no lugar de (Y1), tornando supérflua a condição (2.7) no resultado de Yoneyama.

O resultado principal de [7] estabelece que:

Teorema 2.1 *Seja f uma função nas condições das hipóteses (Y0*)-(Y2*).*

Se $b > 0$ e $a \in [-\frac{3}{2}, 0)$, ou $b = 0$ e $a \in (-\frac{3}{2}, 0)$, então todas as soluções $x(t)$ de (2.1) convergem para zero quando $t \rightarrow +\infty$.

São três os principais objectivos a alcançar neste capítulo.

O primeiro objectivo é a demonstração de um critério de estabilidade global do equilíbrio $x(t) \equiv 0$ da equação (2.1) sob hipóteses um pouco mais

gerais do que as consideradas em [7]. Compare-se as hipóteses **(Y0*)**-(**Y2***) com as **(H1)**-(**H3**) a enunciar no início da secção 2.3.

O segundo objectivo é o estudo da estabilidade global do equilíbrio $x(t) \equiv 0$ da equação (2.8) assumindo para F hipóteses similares às hipóteses **(H1)**-(**H3**).

Finalmente, como último objectivo, pretende-se aplicar os resultados obtidos ao modelo (2.36), estudado em [7], e a diversos exemplos de dinâmica de populações presentes em [1].

2.3 Resultado principal

Nesta secção, estuda-se um critério de estabilidade global para equações diferenciais funcionais do tipo

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \in I, \quad (2.10)$$

onde $I = [0, +\infty)$ e $f : I \times C \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Para tal admite-se o seguinte conjunto de hipóteses **(H)**: Existe uma função $\lambda : I \rightarrow I$ seccionalmente contínua tal que

(H1) Para cada $q \in \mathbb{R}$, existe $v(q) \in \mathbb{R}$, tal que

$$f(t, \phi) \leq \lambda(t)v(q), \quad \forall t \in I, \forall \phi \in C, \phi \geq q;$$

(H2) Para qualquer função contínua $w : [-h, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ com limite não nulo no infinito, o integral $\int_0^{+\infty} f(s, w_s)ds$ é divergente;

(H3) Existem $a < 0$ e $b \geq 0$ tais que, sendo $r(x) := \frac{ax}{1+bx}$,

$$\lambda(t)r(\mathcal{M}(\phi)) \leq f(t, \phi) \leq \lambda(t)r(-\mathcal{M}(-\phi)), \quad t \geq 0,$$

onde a primeira desigualdade é válida para qualquer $\phi \in C$, a segunda para qualquer $\phi \in C$ tal que $\phi > -b^{-1} \in [-\infty, 0)$, e $\mathcal{M}(\phi) = \max\{0, \max_{s \in [-h, 0]} \phi(s)\}$ é o funcional de Yorke;

(H4) Existe $T \geq h$ tal que

$$\sup_{t \geq T} \int_{t-h}^t \lambda(s)ds \leq 1.$$

Fazendo o reescalamento no tempo $t \mapsto ht$ na equação (2.10), pode considerar-se, sem perda de generalidade, o atraso h igual a 1. Se $b > 0$,

a mudança de variável $x \mapsto bx$ permite considerar, sem perda de generalidade, $b = 1$ na hipótese **(H3)**. É de referir ainda que a mudança de variável $x \mapsto -x$ transforma a equação (2.10) em $x(t) = -f(t, -x_t)$, pelo que é suficiente que uma das funções $f(t, \phi)$, $-f(t, -\phi)$ satisfaça as hipóteses **(H)**.

Desta forma, no que se segue, assume-se $b \in \{0, 1\}$ e $h = 1$, sendo, nesta situação, o espaço de fase $C = C([-1, 0]; \mathbb{R})$.

Nota 2.1 No caso $b = 0$, a hipótese **(H1)** é consequência de **(H3)**. Com efeito, se $b = 0$, por **(H3)** tem-se

$$f(t, \phi) \leq -a\lambda(t)\mathcal{M}(-\phi), \quad \forall t \geq 0, \forall \phi \in C,$$

donde $f(t, \phi) \leq -a\lambda(t)\max\{0, -q\}$, sendo $q = \min \phi$.

Nota 2.2 Pelas hipóteses **(H2)** e **(H3)**, conclui-se que $x(t) \equiv 0$ é o único equilíbrio da equação (2.10).

Nota 2.3 Das hipóteses **(H2)** e **(H3)**, conclui-se que $\int_0^{+\infty} \lambda(t)dt = +\infty$. Com efeito, considerando em **(H2)** $w(t) \equiv w$, $w \in (-b^{-1}, 0)$, da hipótese **(H3)** sai que $0 \leq f(t, w) \leq \lambda(t)c$, onde c é uma constante positiva. Consequentemente, por **(H2)** e por comparação de integrais impróprios tem-se

$$\int_0^{+\infty} \lambda(t)dt = +\infty.$$

Proposição 2.2 *Seja f satisfazendo **(H1)**, **(H3)** e **(H4)**.*

Se $x : [-1, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução da equação (2.10) não extensível à direita, então $\beta = +\infty$ e $x(t)$ é limitada em $[-1, +\infty)$.

Dem. Para $b = 0$, o resultado é conhecido [13, 17], pelo que se abordará apenas o caso $b = 1$.

Por **(H3)** tem-se

$$f(t, \phi) \geq \lambda(t) \frac{a\mathcal{M}(\phi)}{1 + \mathcal{M}(\phi)} \geq \lambda(t)a, \quad \forall \phi \in C, \forall t \in I.$$

Considere-se $x(t) = x(t, \gamma)$ uma solução de (2.10), com condição inicial $\gamma \in C$ em $t = 0$, definida em $[-1, \beta)$, com $\beta \in (0, +\infty]$. Sejam $q, Q \in \mathbb{R}$ tais que $q \leq \gamma(s) \leq Q$, para todo $s \in [-1, 0]$.

Para $t \in [0, \beta_0]$, com $\beta_0 < \beta$, tem-se

$$x(t) - \gamma(0) = \int_0^t f(s, x_s)ds \geq a \int_0^t \lambda(s)ds \geq a \int_0^{\beta_0} \lambda(s)ds,$$

donde

$$x(t) \geq \min \left\{ \gamma(0) + a \int_0^{\beta_0} \lambda(s) ds, q \right\} =: k \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [-1, \beta_0]. \quad (2.11)$$

Por **(H1)**, para $t \in [0, \beta_0]$, com $\beta_0 < \beta$, tem-se

$$x(t) - \gamma(0) = \int_0^t f(s, x_s) ds \leq |v(k)| \int_0^t \lambda(s) ds \leq |v(k)| \int_0^{\beta_0} \lambda(s) ds,$$

donde

$$x(t) \leq \gamma(0) + |v(k)| \int_0^{\beta_0} \lambda(s) ds, \quad \forall t \in [0, \beta_0]. \quad (2.12)$$

De (2.11) e de (2.12) conclui-se, pelo teorema de continuação de soluções [5], que $\beta = +\infty$.

Sejam $q', Q' \in \mathbb{R}$ tais que $q' \leq x(t) \leq Q'$, para todo $t \in [-1, 2]$. Seguidamente mostra-se que $x(t)$ satisfaz

$$x(t) \geq \min\{q', 0\} + a(L + 2) =: k', \quad t \geq 0, \quad (2.13)$$

sendo $L := \int_0^T \lambda(s) ds \in \mathbb{R}_0^+$ e T como em **(H4)**.

Suponha-se, por absurdo, que existem $\delta \in (0, 1)$ e $u > 2$ tais que $x(u) = \min\{q', 0\} + (1 + \delta)a(L + 2)$, sendo u o menor real nestas condições. Assim, para $w \in (u - 1 - \delta, u)$, da representação integral da solução tem-se, por **(H4)**,

$$x(u) - x(w) = \int_w^u f(s, x_s) ds \geq a \int_w^u \lambda(s) ds \geq a(L + 2),$$

donde

$$x(w) \leq x(u) - a(L + 2) = \min\{q', 0\} + \delta a(L + 2) < 0.$$

Desta forma, para qualquer $s \in (u - \delta, u)$, tem-se $x_s < 0$ e conseqüentemente $\mathcal{M}(x_s) = 0$. Pela hipótese **(H3)**, conclui-se que $0 \leq f(s, x_s) = \dot{x}(s)$, para $s \in (u - \delta, u)$, ou seja, $x(s)$ é não decrescente em $(u - \delta, u]$ o que contradiz a natureza de u .

Uma vez que $x(t) \geq k'$ para todo $t \geq -1$, pela hipótese **(H1)**, existe $v(k') \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(t, x_t) \leq \lambda(t)v(k'), \quad t \geq 0.$$

Utilizando a desigualdade anterior num procedimento análogo ao efectuado no parágrafo anterior, demonstra-se que

$$x(t) \leq \max\{Q', 0\} + |v(k')|(L + 2), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.14)$$

Finalmente, de (2.13) e de (2.14) conclui-se que a solução $x(t)$ é limitada. $\square$

Nos lemas que se seguem considera-se f uma função contínua satisfazendo o conjunto de hipóteses **(H)** e $x : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução da equação (2.10). Representar-se-á por M e m os limites

$$M := \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup x(t); \quad m := \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf x(t),$$

cujas existências em $\mathbb{R}$ é garantida pela proposição anterior.

Lema 2.3 *Se x é uma solução não estritamente oscilatória da equação (2.10), então $M = m = 0$.*

Dem. Suponha-se que existe $t_0 \geq 0$ tal que $x(t) \leq 0$ para $t \geq t_0 - 1$. Assim, para $t \geq t_0$, $x_t \leq 0$, donde $\mathcal{M}(x_t) = 0$, e, pela hipótese **(H3)** tem-se que $0 \leq f(t, x_t) = \dot{x}(t)$. Consequentemente, x é uma função não decrescente em $[t_0, +\infty)$, logo existe o limite de $x(t)$ quando $t \rightarrow +\infty$ e

$$M = m = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq 0. \quad (2.15)$$

Se $M < 0$, então, da hipótese **(H2)** e da forma integral da solução, tem-se

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds \rightarrow +\infty$$

quando $t \rightarrow +\infty$, o que contradiz (2.15). Assim $M = m = 0$.

A mesma conclusão se obtém no caso de x ser uma solução eventualmente não negativa. $\square$

Suponha-se agora que a solução x é estritamente oscilatória. Então, existe uma sucessão positiva $s_n \nearrow +\infty$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x(s_n) < 0$ e $x(s_n)$ é um mínimo local estrito à esquerda de x , e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(s_n) = m.$$

Além disso, para cada n , existe $\eta_n \in [s_n - 1, s_n]$ tal que $x(\eta_n) = 0$ e $x(t) < 0$, para qualquer $t \in (\eta_n, s_n]$. Com efeito, se $x(t) < 0$ em $[s_n - 1, s_n]$, então $x_t < 0$ para t numa vizinhança suficientemente pequena de s_n , donde, por **(H3)**, $\dot{x}(t) \geq 0$ nessa vizinhança, o que contradiz o facto de $x(s_n)$ ser mínimo local estrito à esquerda de x .

Por outro lado, existe uma sucessão positiva $t_n \nearrow +\infty$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x(t_n) > 0$ e $x(t_n)$ é um máximo local estrito à esquerda de x , e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n) = M.$$

Analogamente se conclui que, para cada n , existe $\xi_n \in [t_n - 1, t_n)$ tal que $x(\xi_n) = 0$ e $x(t) > 0$, para qualquer $t \in (\xi_n, t_n]$.

A partir daqui, e até ao final da presente secção, consideram-se fixadas sucessões $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nas condições acima introduzidas.

Lema 2.4 *Tem-se $m \geq r \left(-\frac{r(M)}{2} \right)$.*

Dem. Seja $\epsilon > 0$ e considere-se $t_0 \geq T$, para T como em **(H4)**, tal que

$$m - \epsilon < x(t) < M + \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Seja $j \in \mathbb{N}$ tal que $s_j > t_0 + 3$. Para $t \in [\eta_j - 1, \eta_j)$ tem-se, pela hipótese **(H3)**,

$$f(t, x_t) \geq \lambda(t)r(\mathcal{M}(x_t)) \geq \lambda(t)r(M + \epsilon),$$

donde

$$\begin{aligned} x(t) &= -(x(\eta_j) - x(t)) = - \int_t^{\eta_j} f(s, x_s) ds \\ &\leq \int_t^{\eta_j} -\lambda(s)r(M + \epsilon) ds = -r(M + \epsilon) \int_t^{\eta_j} \lambda(s) ds. \end{aligned}$$

Como $x(s) < 0$ para qualquer $s \in (\eta_j, s_j]$, tem-se, para $t \in [\eta_j, s_j]$,

$$\mathcal{M}(x_t) = \max\{0, \max_{s \in [t-1, t]} x(s)\} \leq -r(M + \epsilon) \int_{t-1}^{\eta_j} \lambda(s) ds,$$

donde se conclui que

$$r(\mathcal{M}(x_t)) \geq r \left(-r(M + \epsilon) \int_{t-1}^{\eta_j} \lambda(s) ds \right), \quad \forall t \in [\eta_j, s_j]. \quad (2.16)$$

Por outro lado, para $t \in [\eta_j, s_j]$,

$$\int_{t-1}^t \lambda(s) ds \leq 1 \Rightarrow \int_{\eta_j}^t \lambda(s) ds + \int_t^{t-1} \lambda(s) ds \geq \int_{\eta_j}^t \lambda(s) ds - 1,$$

pelo que

$$-r(M + \epsilon) \int_{t-1}^{\eta_j} \lambda(s) ds \leq r(M + \epsilon) \left(\int_{\eta_j}^t \lambda(s) ds - 1 \right).$$

Assim, para $t \in [\eta_j, s_j]$,

$$r \left(-r(M + \epsilon) \int_{t-1}^{\eta_j} \lambda(s) ds \right) \geq r \left(r(M + \epsilon) \left(\int_{\eta_j}^t \lambda(s) ds - 1 \right) \right). \quad (2.17)$$

Das desigualdades (2.16) e (2.17) e da hipótese **(H3)**, tem-se

$$\begin{aligned} x(s_j) &= x(s_j) - x(\eta_j) = \int_{\eta_j}^{s_j} f(t, x_t) dt \\ &\geq \int_{\eta_j}^{s_j} \lambda(t) r(\mathcal{M}(x_t)) dt \geq \int_{\eta_j}^{s_j} \lambda(t) r \left(-r(M + \epsilon) \int_{t-1}^{\eta_j} \lambda(s) ds \right) dt \\ &\geq \int_{\eta_j}^{s_j} \lambda(t) r \left(r(M + \epsilon) \left(\int_{\eta_j}^t \lambda(s) ds - 1 \right) \right) dt. \end{aligned}$$

Efectuando a mudança de variável $y = r(M + \epsilon) \left(\int_{\eta_j}^t \lambda(s) ds - 1 \right)$, obtém-se

$$\begin{aligned} x(s_j) &\geq \int_{-r(M+\epsilon)}^{r(M+\epsilon)(\int_{\eta_j}^{s_j} \lambda(s) ds - 1)} \frac{1}{r(M + \epsilon)} r(y) dy \\ &\geq \frac{1}{r(M + \epsilon)} \int_{-r(M+\epsilon)}^0 r(y) dy. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Como a função $r(y)$ é convexa em $(-1, +\infty)$, pela desigualdade de Jensen, tem-se

$$x(s_j) \geq r \left(\frac{1}{r(M + \epsilon)} \int_{-r(M+\epsilon)}^0 y dy \right) = r \left(-\frac{r(M + \epsilon)}{2} \right).$$

Finalmente, fazendo $j \rightarrow +\infty$ e $\epsilon \rightarrow 0^+$, obtém-se

$$m \geq r \left(-\frac{r(M)}{2} \right). \square$$

Corolário 2.5 *Se $a \in (-2, 0)$ e $b = 1$, então $m > -1$ e $r \left(-\frac{r(M)}{2} \right) > -1$.*

Dem. A função $y \mapsto r \left(-\frac{r(y)}{2} \right)$ é decrescente em $(0, +\infty)$ uma vez que $r(y)$ é decrescente no seu domínio. Tem-se ainda que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} r \left(-\frac{r(y)}{2} \right) = \frac{-a^2}{2 - a}.$$

Pelo Lema 2.4, para $a \in (-2, 0)$, tem-se

$$m \geq r \left(-\frac{r(M)}{2} \right) > \frac{-a^2}{2-a} > -1. \square$$

Lema 2.6 *Se $a \in (-2, 0)$, então $M \leq r(m)$.*

Dem. Se $b = 1$, então o corolário anterior garante que $m > -1$, donde $r(m)$ está bem definido. Seja $\epsilon > 0$ tal que $m - \epsilon > -1$. Considere-se $t_0 \geq T$ tal que

$$m - \epsilon < x(t) < M + \epsilon, \quad t \geq t_0. \quad (2.19)$$

Seja $j \in \mathbb{N}$ tal que $t_j > t_0 + 2$.

Para $t \in [\xi_j, t_j]$, de (2.19) tem-se $x_t > m - \epsilon$, donde $\mathcal{M}(-x_t) \leq -m + \epsilon$ e

$$r(-\mathcal{M}(-x_t)) \leq r(m - \epsilon). \quad (2.20)$$

Das hipóteses **(H3)**, **(H4)** e de (2.20), vem que

$$\begin{aligned} x(t_j) &= x(t_j) - x(\xi_j) = \int_{\xi_j}^{t_j} f(t, x_t) ds \\ &\leq \int_{\xi_j}^{t_j} \lambda(t) r(-\mathcal{M}(-x_t)) dt \leq \int_{\xi_j}^{t_j} \lambda(t) r(m - \epsilon) dt \\ &\leq r(m - \epsilon) \int_{t_j-1}^{t_j} \lambda(t) dt \leq r(m - \epsilon). \end{aligned}$$

Fazendo $j \rightarrow +\infty$ e $\epsilon \rightarrow 0^+$, conclui-se que

$$M \leq r(m).$$

Se $b = 0$, então $r(y) = ay$ está definida em $\mathbb{R}$ e o resultado conclui-se de forma análoga. $\square$

Está-se agora em condições de demonstrar um primeiro critério para a estabilidade global da solução nula da equação (2.10).

Teorema 2.7 *Seja $f : I \times C \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo as hipóteses **(H)**.*

Se

$$a \in \left[-\sqrt[3]{2}, 0 \right) \text{ e } b > 0, \text{ ou } a \in \left(-\sqrt[3]{2}, 0 \right) \text{ e } b = 0,$$

então todas as soluções da equação diferencial (2.10) estão definidas em $[-h, +\infty)$ e convergem para zero quando $t \rightarrow +\infty$.

Dem. Já foi observado que não se perde generalidade ao supor $h = 1$ e $b = 1$, no caso de ser $b > 0$. Pela Proposição 2.2 sabe-se que todas as soluções de (2.10) estão definidas e são limitadas em $[-1, +\infty)$.

Seja $x : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução de (2.10) e considere-se

$$M := \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup x(t); \quad m := \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf x(t).$$

Pelo Lema 2.3, se x é uma solução não estritamente oscilatória, então $M = m = 0$. Suponha-se então que x é estritamente oscilatória. Neste caso, $m \leq 0 \leq M$ e, pelos Lemas 2.4 e 2.6, tem-se que, se $M = 0$ ou se $m = 0$, então $M = m = 0$. Suponha-se então, por absurdo, que $m < 0 < M$.

Caso $b = 1$.

Dos Lemas 2.4 e 2.6 e do Corolário 2.5, conclui-se a desigualdade

$$M \leq r \circ r \left(-\frac{r(M)}{2} \right),$$

ou seja,

$$M \leq \frac{-a^3 M}{2 + (2 - a - a^2)M}.$$

Para $a \in [-\sqrt[3]{2}, 0)$, como $M > 0$, vem que

$$1 < -\frac{a^3}{2},$$

pois $2 - a - a^2 > 0$, o que é absurdo.

Caso $b = 0$.

Nesta situação, $r(x) = ax$. Pelos Lemas 2.4 e 2.6, obtém-se a desigualdade

$$M \leq -\frac{a^3 M}{2},$$

pelo que

$$a \leq -\sqrt[3]{2},$$

o que contradiz o facto de ser $a \in (-\sqrt[3]{2}, 0)$. $\square$

Nota 2.4 O resultado anterior seria obtido para $a \in [-\sqrt{2}, 0)$, se uma desigualdade dual à presente no Lema 2.4, isto é, $M \leq r \left(-\frac{r(m)}{2} \right)$, fosse demonstrada. Contudo, devido a problemas relacionados com o domínio da função $r(x)$ e com a desigualdade de Jensen, os argumentos então utilizados não são válidos numa situação dual.

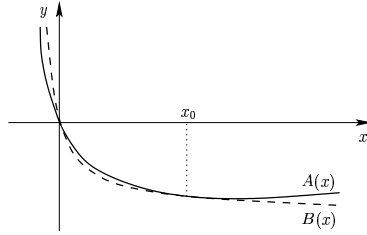
O próximo objectivo é obter o resultado anterior com $\sqrt[3]{2}$ substituído por $\frac{3}{2}$, isto é, com $a \in [-\frac{3}{2}, 0)$, no caso $b > 0$, e com $a \in (-\frac{3}{2}, 0)$, no caso $b = 0$. Para isso será necessário impor uma condição adicional à função λ .

Tal como anteriormente, o estudo que se segue será efectuado para $h = 1$ e $b \in \{0, 1\}$. Em virtude da Proposição 2.2 e do Lema 2.3, bastará considerar soluções de (2.10) estritamente oscilatórias.

Definição 2.4 Para $a < -1$ e $b = 1$, definam-se as funções $A : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $B : (\frac{1}{a-1}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$A(x) = \begin{cases} x + r(x) + \frac{1}{r(x)} \int_x^0 r(t) dt, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases};$$

$$B(x) = \begin{cases} \frac{1}{r(x)} \int_{-r(x)}^0 r(t) dt, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$



Segue-se a apresentação de algumas propriedades das funções introduzidas na definição anterior, cujas demonstrações são predominantemente algébricas.

Proposição 2.8 [8]

1. As funções A e B são contínuas nos respectivos domínios;
2. A função A é duas vezes derivável em $x = 0$, tendo-se $A'(0) = a + \frac{1}{2} < 0$ e $A''(0) = -(2a + \frac{1}{3}) > 0$;
3. A função B é derivável em $(\frac{1}{a-1}, +\infty)$, tendo-se $B'(x) < 0$, para todo $x \in (\frac{1}{a-1}, +\infty)$;
4. O ponto $x_0 := -(a + 1)$ é o único ponto $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $r(x_0) = -x_0$, verificando-se a igualdade $A(x_0) = B(x_0)$;

5. A função A é derivável em $(-1, +\infty)$, tendo-se $A'(x) < 0$, para todo $x \in (-1, x_0)$.

Definição 2.5 Para $a < -1$ e $b = 1$, definam-se as funções D e R por

$$D : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} A(x), & r(x) < -x \\ B(x), & r(x) \geq -x \end{cases} ;$$

$$R : (\nu, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{(A'(0))^2 x}{A'(0) - \frac{A''(0)}{2} x},$$

onde $\nu := \frac{2A'(0)}{A''(0)} < 0$.

Nota 2.5 Note-se que $R(x)$ tem a forma $R(x) = \frac{\alpha x}{1 + \beta x}$, com $\alpha = A'(0) < 0$ e $\beta = -\frac{A''(0)}{2A'(0)} > 0$. De notar ainda que, para $a \in [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, tem-se $R(x) > \nu$ para $x > 0$. Com efeito, sendo $\alpha = A'(0) = a + \frac{1}{2} \in [-1, 0)$, tem-se, para $x > 0$,

$$R(x) > \frac{\alpha}{\beta} = -\alpha\nu \geq \nu.$$

Pelas propriedades apresentadas na Proposição 2.8, conclui-se que D é uma função contínua e decrescente.

No que se segue, $x : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução estritamente oscilatória da equação (2.10) e supõe-se que f satisfaz as hipóteses **(H)** com $\lambda(t) > 0$, para t grande, e.g. $t \geq T$. Assim, como $\int_0^{+\infty} \lambda(t) dt = +\infty$ (ver Nota 2.3), a função

$$s : [T, +\infty) \rightarrow [s(T), +\infty)$$

$$t \mapsto \int_0^t \lambda(v) dv \tag{2.21}$$

é crescente, bijectiva e derivável. Denotando-se por $t := t(s)$ a sua inversa e fazendo a mudança de variável $y(s) = x(t(s))$ na equação (2.10), para $s \geq s(T)$ obtém-se

$$\dot{y}(s) = \dot{x}(t(s))\dot{t}(s) = \dot{x}(t(s)) \frac{1}{\dot{s}(t(s))} = f(t(s), x_{t(s)}) \frac{1}{\lambda(t(s))},$$

isto é, a EDFR escalar

$$\dot{y}(s) = g(s, \mathcal{K}(s, y_s)), \quad s \geq s(T), \tag{2.22}$$

onde

$$g(s, \phi) := \frac{1}{\lambda(t(s))} f(t(s), \phi)$$

e

$$\mathcal{K} : [s(T), +\infty) \times C \rightarrow C,$$

é definida por $\mathcal{K}(s, \phi)(u) := \phi(-\sigma(s, u))$, para $u \in [-1, 0]$, com

$$\sigma(s, u) := \int_{t(s)+u}^{t(s)} \lambda(v) dv, \text{ para } (s, u) \in [s(T), +\infty) \times [-1, 0].$$

Notar que, por **(H4)**, para $s \geq s(T)$ e $u \in [-1, 0]$, tem-se

$$\sigma(s, u) \leq \int_{t(s)-1}^{t(s)} \lambda(v) dv \leq 1,$$

pelo que $\phi(-\sigma(s, u))$ está bem definido se $\phi \in C$.

Lema 2.9 *Nas condições referidas acima, e sendo $r(x) = \frac{ax}{1+bx}$ como em **(H3)**, tem-se*

$$r(\mathcal{M}(\phi)) \leq g(s, \mathcal{K}(s, \phi)) \leq r(-\mathcal{M}(-\phi)), \quad \forall s \geq s(T),$$

onde a primeira desigualdade é válida para qualquer $\phi \in C$ e a segunda para qualquer $\phi \in C$ tal que $\phi > -b^{-1} \in [-\infty, 0]$.

Dem. Sejam $\phi \in C$ e $s \in \mathbb{R}^+$ tal que $t(s) \geq T$. Assim,

$$\sup\{\phi(-\sigma(s, u)) : u \in [-1, 0]\} \leq \sup\{\phi(u) : u \in [-1, 0]\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{K}(s, \phi)) \leq \mathcal{M}(\phi)$$

$$\Rightarrow r(\mathcal{M}(\mathcal{K}(s, \phi))) \geq r(\mathcal{M}(\phi)).$$

Da hipótese **(H3)**, tem-se então que

$$\begin{aligned} g(s, \mathcal{K}(s, \phi)) &= \frac{1}{\lambda(t(s))} f(t(s), \mathcal{K}(s, \phi)) \\ &\geq \frac{1}{\lambda(t(s))} \lambda(t(s)) r(\mathcal{M}(\mathcal{K}(s, \phi))) \\ &\geq r(\mathcal{M}(\phi)). \end{aligned}$$

De forma análoga se demonstra a segunda desigualdade para todo $s \in \mathbb{R}^+$ tal que $t(s) \geq T$ e para todo $\phi \in C$ tal que $\phi > -b^{-1}$. $\square$

Notação Considerem-se sucessões $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como as introduzidas na página 45. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definam-se,

$$\begin{aligned}\tilde{s}_n &:= s(s_n); & \tilde{\eta}_n &:= s(\eta_n); \\ \tilde{t}_n &:= s(t_n); & \tilde{\xi}_n &:= s(\xi_n).\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y(\tilde{s}_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(t(\tilde{s}_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(s_n) = m,$$

e, analogamente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y(\tilde{t}_n) = M$. Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$y(\tilde{\eta}_n) = x(t(\tilde{\eta}_n)) = x(\eta_n) = 0,$$

e, analogamente, $y(\tilde{\xi}_n) = 0$. Finalmente, para $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{s}_n \geq s(T+1)$, tem-se $\tilde{\eta}_n \in [\tilde{s}_n - 1, \tilde{s}_n]$ e $y(s) < 0$ para todo $s \in (\tilde{\eta}_n, \tilde{s}_n]$. Com efeito

$$\begin{aligned}\tilde{s}_n - \tilde{\eta}_n &= s(s_n) - s(\eta_n) = \int_0^{s_n} \lambda(v) dv - \int_0^{\eta_n} \lambda(v) dv \\ &= \int_{\eta_n}^{s_n} \lambda(v) dv \leq 1.\end{aligned}$$

Por outro lado, como $s \mapsto t(s)$ é crescente,

$$\tilde{\eta}_n < s \leq \tilde{s}_n \Rightarrow \eta_n < t(s) \leq s_n \Rightarrow x(t(s)) < 0 \Rightarrow y(s) < 0.$$

Analogamente, para $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{t}_n \geq s(T+1)$, tem-se $\tilde{\xi}_n \in [\tilde{t}_n - 1, \tilde{t}_n]$ e $y(s) > 0$ para todo $s \in (\tilde{\xi}_n, \tilde{t}_n]$.

Lema 2.10 *Sejam $a < -1$ e $b = 1$. Se $r(M) < -M$, então $m \geq A(M)$.*

Dem. Seja $a < -1$ e, de momento, considere-se $b = 0$ ou $b = 1$. Se $r(M) < -M$, então $\frac{M}{r(M)} \in (-1, 0)$. Seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $t_1 := \frac{M+\epsilon}{r(M+\epsilon)} \in (-1, 0)$.

Considere-se $s_0 \geq s(T)$ tal que

$$m - \epsilon < y(s) < M + \epsilon, \quad \forall s > s_0. \quad (2.23)$$

Seja $j \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{s}_j > s_0 + 3$. A função

$$z(s) := \begin{cases} r(M + \epsilon)(s - \tilde{\eta}_j), & s \in [\tilde{\eta}_j + t_1, \tilde{\eta}_j + t_1 + 1] \\ M + \epsilon, & s \in [\tilde{\eta}_j + t_1 - 1, \tilde{\eta}_j + t_1] \end{cases}$$

é solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} \dot{z}(s) = r(z(s - 1)), & s \in [\tilde{\eta}_j + t_1, \tilde{\eta}_j + t_1 + 1] \\ z(s) = M + \epsilon, & s \in [\tilde{\eta}_j + t_1 - 1, \tilde{\eta}_j + t_1] \end{cases}.$$

Note-se que $M + \epsilon = z(s) > y(s)$, para todo $s \in [\tilde{\eta}_j + t_1 - 1, \tilde{\eta}_j + t_1]$. De seguida mostra-se que

$$z(s) > y(s), \quad s \in [\tilde{\eta}_j + t_1, \tilde{\eta}_j]. \quad (2.24)$$

Por absurdo, suponha-se que existe $t_* \in [\tilde{\eta}_j + t_1, \tilde{\eta}_j]$ tal que $z(t_*) = y(t_*)$ com $z(s) > y(s)$ para todo $s \in [\tilde{\eta}_j + t_1, t_*)$. Para $s \in [t_*, \tilde{\eta}_j]$, tem-se

$$s - 1 \in [\tilde{\eta}_j + t_1 - 1, \tilde{\eta}_j + t_1] \Rightarrow z(s - 1) = M + \epsilon > y(u), \quad \forall u \in [s - 1, s]$$

$$\Rightarrow z(s - 1) > \mathcal{M}(y_s)$$

$$\Rightarrow r(z(s - 1)) < r(\mathcal{M}(y_s)),$$

e, pelo Lema 2.9, vem que

$$\dot{z}(s) = r(z(s - 1)) < r(\mathcal{M}(y_s)) \leq g(s, \mathcal{K}(s, y_s)) = \dot{y}(s).$$

Assim,

$$\dot{z}(s) < \dot{y}(s), \quad \forall s \in [t_*, \tilde{\eta}_j],$$

e conseqüentemente

$$y(\tilde{\eta}_j) - y(t_*) > z(\tilde{\eta}_j) - z(t_*) \Rightarrow y(t_*) < z(t_*),$$

o que é absurdo. Desta forma, conclui-se (2.24).

Para $s \in [\tilde{\eta}_j, \tilde{s}_j]$, tem-se, por z ser decrescente e por (2.24), que $y_s \leq z(s - 1)$, donde se conclui que $r(\mathcal{M}(y_s)) \geq r(z(s - 1))$. Assim,

$$y(\tilde{s}_j) = y(\tilde{s}_j) - y(\tilde{\eta}_j) = \int_{\tilde{\eta}_j}^{\tilde{s}_j} \dot{y}(s) ds = \int_{\tilde{\eta}_j}^{\tilde{s}_j} g(s, \mathcal{K}(s, y_s)) ds$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_{\tilde{\eta}_j}^{\tilde{s}_j} r(\mathcal{M}(y_s))ds \geq \int_{\tilde{\eta}_j}^{\tilde{s}_j} r(z(s-1))ds = \int_{\tilde{\eta}_j-1}^{\tilde{s}_j-1} r(z(s))ds \\
&= \int_{\tilde{\eta}_j-1}^{\tilde{\eta}_j+t_1} r(M+\epsilon)ds + \int_{\tilde{\eta}_j+t_1}^{\tilde{s}_j-1} r(r(M+\epsilon)(s-\tilde{\eta}_j))ds \\
&= r(M+\epsilon)(t_1+1) + \int_{r(M+\epsilon)t_1}^{r(M+\epsilon)(\tilde{s}_j-1-\tilde{\eta}_j)} \frac{1}{r(M+\epsilon)} r(s)ds \\
&\geq (M+\epsilon) + r(M+\epsilon) + \frac{1}{r(M+\epsilon)} \int_{M+\epsilon}^0 r(s)ds. \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Tomando agora $b = 1$, da definição da função A resulta que

$$y(\tilde{s}_j) \geq A(M+\epsilon).$$

Fazendo $j \rightarrow +\infty$ e $\epsilon \rightarrow 0^+$, conclui-se que

$$m \geq A(M). \square$$

Corolário 2.11 *Sejam $a < -1$ e $b = 1$. Então $m \geq D(M)$.*

Dem. Se $M = 0$, pelo Lema 2.4 tem-se $m = 0$.

Se $M > 0$, da demonstração do Lema 2.4, nomeadamente da desigualdade (2.18), fazendo $j \rightarrow +\infty$ e $\epsilon \rightarrow 0^+$ obtém-se $m \geq B(M)$. O resultado é agora consequência imediata do lema anterior e da definição de D . $\square$

Corolário 2.12 *Se $b = 0$ e $a < -1$, então*

$$m \geq \left(a + \frac{1}{2}\right) M \quad e \quad M \leq \left(a + \frac{1}{2}\right) m.$$

Dem. Seja $\epsilon > 0$. Para $r(x) = ax$, da desigualdade (2.25) obtém-se

$$y(\tilde{s}_j) \geq (M+\epsilon) + a(M+\epsilon) + \frac{1}{M+\epsilon} \int_{M+\epsilon}^0 s ds,$$

donde

$$y(\tilde{s}_j) \geq \left(a + \frac{1}{2}\right) (M+\epsilon).$$

Fazendo agora $j \rightarrow +\infty$ e $\epsilon \rightarrow 0^+$, tem-se a primeira desigualdade.

A segunda desigualdade obtém-se de forma dual. $\square$

Lema 2.13 *Se $a < -1$ e $b = 1$, então $(A(x) - R(x))x > 0$, $\forall x \in (\nu, x_0) \setminus \{0\}$, onde $\nu := \frac{2A'(0)}{A''(0)}$. Além disso, se $a \in [-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}]$, então $D(x) > R(x)$, para $x > 0$.*

Dem. Apesar de a demonstração deste resultado ser um pouco extensa, esta só envolve raciocínios elementares da análise real, daí se ter optado por a omitir. Ver [8].□

Corolário 2.14 *Se $a \in [-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}]$ e $b = 1$, então $m > \nu$.*

Dem. Como consequência do Corolário 2.11, do Lema 2.13 e do facto de a função D ser decrescente, tem-se

$$\begin{aligned} m &\geq D(M) > D(+\infty) = B(+\infty) \\ &\geq R(+\infty) = -A'(0) \frac{2A'(0)}{A''(0)} = -A'(0)\nu. \end{aligned}$$

Note-se que existe $B(+\infty)$ em $\mathbb{R}$ pois B é uma função decrescente e limitada inferiormente em $\mathbb{R}_0^+$. Como $A'(0) = a + \frac{1}{2} \in [-1, 0)$ e $\nu < 0$, tem-se $m > \nu$.□

Lema 2.15 *Se $a \in [-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}]$, $b = 1$ e $m < 0$, então $M < R(m)$.*

Dem. Por um lado, seguindo um raciocínio análogo ao da demonstração do Lema 2.10, tem-se

$$M \leq A(m).$$

Por outro lado, pelo Corolário 2.14 e pelo Lema 2.13, tem-se

$$\begin{cases} m \in (\nu, 0) \\ A(x) < R(x), \forall x \in (\nu, 0) \end{cases}.$$

Consequentemente, $M \leq A(m) < R(m)$.□

Está-se agora em condições de cumprir o objectivo proposto logo após o Teorema 2.7.

Teorema 2.16 *Seja $f : I \times C \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo as hipóteses (H), com $\lambda(t) > 0$ para t grande.*

Se

$$a \in \left[-\frac{3}{2}, 0\right) \text{ e } b > 0, \text{ ou } a \in \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \text{ e } b = 0,$$

então todas as soluções da equação diferencial (2.10) estão definidas em $[-h, +\infty)$ e convergem para zero quando $t \rightarrow +\infty$.

Dem. Sem perda de generalidade, sejam $h = 1$ e $b \in \{0, 1\}$.

Uma vez que o Teorema 2.7 garante o resultado no caso de $a \in (-\frac{5}{4}, 0) \subseteq (-\sqrt[3]{2}, 0)$, assumamos então que $a \in [-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}]$.

Seja $x : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução de (2.10) e

$$M := \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup x(t); \quad m := \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf x(t).$$

Pelo Lema 2.3, basta considerar o caso em que $x(t)$ é uma solução estritamente oscilatória. Suponha-se por absurdo que $m < M$. Pelos Lemas 2.4 e 2.6, $m < 0 < M$.

Caso $b = 1$.

Como consequência do Corolário 2.11 e do Lema 2.13, tem-se $R(M) < m$. Como $R(w) > \nu$ para $w > 0$ (cf. Nota 2.5), então $R(M)$ pertence ao domínio de R , donde $R(R(M)) > R(m)$. Pelo Lema 2.15, tem-se

$$M < R(R(M)). \quad (2.26)$$

Por outro lado,

$$R \circ R(w) = \frac{-A'(0)^3 w}{-A'(0) + \frac{A''(0)}{2}(1 + A'(0))w},$$

tendo-se $\frac{A''(0)}{2}(1 + A'(0)) \geq 0$, $-A'(0) > 0$ e $(R \circ R)'(0) \leq 1$, donde

$$(R \circ R)(w) \leq w, \quad \forall w \geq 0,$$

o que contradiz (2.26).

Caso $b = 0$.

Pelo Corolário 2.12 têm-se as desigualdades

$$m \geq \left(a + \frac{1}{2}\right) M \quad \text{e} \quad M \leq \left(a + \frac{1}{2}\right) m,$$

donde $M \leq \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 M$, o que é absurdo pois $a > -\frac{3}{2}$. $\square$

Nota 2.6 Comparando o Teorema 2.1, i.e., Theorem 2 de [7], com o resultado anterior, este último é bastante mais geral. No entanto, desde que a função λ verifique $\lambda(t) > 0$ para t grande, a mudança de variável $y(s) = x(t(s))$, com $t(s)$ a inversa da função definida em (2.21), transforma uma função satisfazendo o conjunto de hipóteses **(H)** numa que satisfaz as hipóteses **(Y0*)**, **(Y1*)** e **(Y2*)** de [7].

Trabalhando com uma condição de Yorke um pouco mais geral (confrontar **(Y2*)** com **(H3)**), conseguiu-se, seguindo uma estratégia semelhante à em [7], demonstrar o resultado principal para $a \in [-\sqrt[3]{2}, 0)$.

Fazendo a mudança de variável anteriormente referida, obteve-se uma situação análoga à de [7], donde, reproduzindo os raciocínios do artigo, se conseguiu demonstrar o resultado para $a \in [-\frac{3}{2}, -\sqrt[3]{2})$. De notar ainda que, para a situação estudada em [7] (i.e., com a condição de Yorke **(Y2*)** em vez de **(H3)**), também dificuldades adicionais surgem para $a \in [-\frac{3}{2}, -\sqrt[3]{2})$, o que levou à definição e estudo das funções $A(x)$, $B(x)$, $D(x)$ e $R(x)$.

2.4 Modelos de dinâmica de populações

Tal como anteriormente se referiu, as EDFR's são importantes na modelação da dinâmica populacional de espécies biológicas. Obviamente, no caso de uma única espécie biológica, a equação de crescimento é escalar. Sendo o crescimento populacional de uma espécie proporcional à população existente, é importante estudar EDFR's escalares em $C = C([-h, 0]; \mathbb{R})$ do tipo

$$\dot{y}(t) = y(t)f(t, y_t), \quad t \in I, \quad (2.27)$$

onde $h \in \mathbb{R}^+$, $I = [0, +\infty)$ e $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Habitualmente, o atraso de tempo h representa o período de maturação da espécie.

Por razões biológicas, é apenas significativo estudar soluções positivas. Assim, consideram-se apenas soluções com condição inicial

$$y_0 = \psi, \quad \text{com } \psi \in C_0. \quad (2.28)$$

Suponha-se que existe um ponto de equilíbrio positivo y_* que, sem perda de generalidade, se pode supor $y_* = 1$. Fazendo a mudança de variável $x(t) = y(t) - 1$ no PVI (2.27)-(2.28), isto é, trasladando o equilíbrio para a origem, obtém-se o PVI

$$\dot{x}(t) = (1 + x(t))F(t, x_t), \quad t \in I, \quad (2.29)$$

$$x_0 = \varphi, \quad \varphi \in C_{-1}, \quad (2.30)$$

onde $F : I \times C \rightarrow \mathbb{R}$ é a função contínua definida por $F(t, \phi) = f(t, \phi + 1)$.

Nota 2.7 A solução $x(t)$ do PVI (2.29)-(2.30), definida em $[-h, \alpha)$, com $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ou $\alpha = +\infty$, verifica

$$x(t) > -1, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.31)$$

Com efeito, sendo $x(t)$ solução de (2.29), tem-se

$$1 + x(t) = (1 + x(0))e^{\int_0^t F(s, x_s) ds} > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Isto significa que as soluções dos PVI's (2.27)-(2.28) são positivas para $t \geq 0$.

A estabilidade global da solução nula da equação (2.29) foi estudada em [1] sob o conjunto de hipóteses **(A)**:

- (A1)** Existem $T_0 \geq 0$ e $a : I \rightarrow I$ uma função seccionalmente contínua tais que,
 $\forall \epsilon > 0, \exists \eta = \eta(\epsilon) > 0, \forall \varphi \in C_{-1}$ e $t \geq T_0$,

$$\begin{cases} F(t, \varphi) \leq -\eta a(t), & \text{se } \varphi \geq \epsilon \\ F(t, \varphi) \geq \eta a(t), & \text{se } \varphi \leq -\epsilon \end{cases};$$

- (A2)** Para a função a da hipótese **(A1)** tem-se $\int_0^{+\infty} a(t) dt = \infty$;

- (A3)** Existe uma função $b : I \rightarrow I$ seccionalmente contínua tal que

$$-b(t)\mathcal{M}(\varphi) \leq F(t, \varphi) \leq b(t)\mathcal{M}(-\varphi) \text{ para } t \in I, \varphi \in C_{-1};$$

- (A4)** Para a função b da hipótese **(A3)**, existe $T \in I$ tal que $\int_{t-h}^t b(s) ds \leq \frac{3}{2}$, para $t \geq T$.

O principal resultado de [1] é o teorema que seguidamente se enuncia e que, como se verá, permitiu melhorar alguns critérios de estabilidade global para modelos de crescimento populacional estudados na literatura.

Teorema 2.17 *Seja F uma função satisfazendo as hipóteses **(A1)**-(**A4**). Então, a solução $x(t)$ de qualquer PVI (2.29)-(2.30) está definida e é limitada inferiormente para além de -1 em $[0, +\infty)$ e satisfaz $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.*

Para a obtenção deste resultado, em [1] são abordados separadamente os casos das soluções não oscilatórias e das soluções oscilatórias. Esta abordagem pôs em evidência que apenas as hipóteses **(A1)** e **(A2)** são necessárias na demonstração do resultado para as soluções não oscilatórias (Lemma 3.4 de [1]) e que apenas as hipóteses **(A3)** e **(A4)** são necessárias na demonstração do resultado para as soluções oscilatórias (Lemma 3.5 de [1]).

Tal como é afirmado em [1], as hipóteses **(A1)**-(**A2**) poderiam ter sido substituídas pela hipótese mais fraca **(H2*)**, a introduzir de seguida, enriquecendo assim ligeiramente o Teorema 2.17 (ver Lema 2.18).

De referir que **(A3)** implica $F(t, \varphi) \leq b(t)$, para $t \in I$ e $\varphi \in C_{-1}$. Desta forma, $F(t, \varphi)$ é limitada superiormente em $K \times C_{-1}$, para cada intervalo compacto $K \subseteq I$, donde, pelo Lemma 3.1 de [1], as soluções $x(t)$ dos PVI's (2.29)-(2.30) estão definidas em $[-h, +\infty)$.

Considere-se a EDFR (2.29) com a função F satisfazendo o seguinte conjunto de hipóteses **(H*)**:

Existe uma função $\lambda : I \rightarrow I$ seccionalmente contínua tal que:

(H1*) Para cada $q > -1$, existe $v(q) \in \mathbb{R}$, tal que

$$F(t, \phi) \leq \lambda(t)v(q), \quad \forall t \in I, \forall \phi \in C, \phi \geq q;$$

(H2*) Para qualquer função contínua $w : [-h, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ com $\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = w^* > -1$ e $w^* \neq 0$, o integral $\int_0^{+\infty} F(t, w_t)dt$ é divergente;

(H3*) Existem $a < 0$ e $b \geq 0$ tais que, sendo $r(x) = \frac{ax}{1+bx}$,

$$\lambda(t)r(\mathcal{M}(\phi)) \leq F(t, \phi) \leq \lambda(t)r(-\mathcal{M}(-\phi)), \quad \forall t \in I,$$

onde a primeira desigualdade é válida para todo $\phi \in C$ tal que $\phi > -1$ e a segunda para todo $\phi \in C$ tal que $\phi > \max\{-1, -b^{-1}\} \in [-\infty, 0)$.

Nota 2.8 À semelhança do que acontece com as hipóteses **(H)**, no caso $b = 0$ **(H1*)** é consequência de **(H3*)**.

Lema 2.18 *Suponha-se que $F(t, \varphi)$ satisfaz as hipóteses **(A3)** e **(H2*)**. Considere-se $x(t)$ uma solução da equação (2.29) com condição inicial $x_0 \in C_{-1}$.*

Se $x(t)$ é não oscilatória, então $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Dem. Se $x(t)$ é eventualmente não negativa, então existe $t_0 > 0$ tal que $x(t) \geq 0$ para $t \geq t_0 - h$. Sendo $x_t \geq 0$ para $t \geq t_0$, por **(A3)** tem-se

$$F(t, x_t) \leq b(t)\mathcal{M}(-x_t) = 0.$$

Assim, por (2.31), $\dot{x}(t) \leq 0$ para $t \geq t_0$, donde $x(t)$ é não crescente em $[t_0, +\infty)$ e consequentemente existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = c \geq 0$. Supondo que $c > 0$, por **(H2*)** e **(A3)** tem-se

$$1 + x(t) = (1 + x(0))e^{\int_0^t F(s, x_s)ds} \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow +\infty$, o que é absurdo. Logo $c = 0$.

Se $x(t)$ é eventualmente não positiva, o resultado prova-se de forma análoga. $\square$

O teorema seguinte é o resultado principal desta secção e constitui um melhoramento do Teorema 2.17.

Teorema 2.19 *Assumindo as hipóteses $(\mathbf{H}^*)$ e considerando*

$$\Lambda = \Lambda(T) := \sup_{t \geq T} \int_{t-h}^t \lambda(s) ds, \text{ para algum } T \geq h,$$

tem-se:

- (i) *Se $b = 0$ e $\Lambda a \in [-\frac{3}{2}, 0)$, para algum $T \geq h$, então as soluções dos PVI's (2.29)-(2.30) convergem para zero quando $t \rightarrow +\infty$;*
- (ii) *Se $b \neq \frac{1}{2}$ e $\Lambda a \in [-\sqrt[3]{2}, 0)$, ou se $b = \frac{1}{2}$ e $\Lambda a \in (-\sqrt[3]{2}, 0)$, para algum $T \geq h$, então as soluções dos PVI's (2.29)-(2.30) convergem para zero quando $t \rightarrow +\infty$;*
- (iii) *Se $b \neq \frac{1}{2}$ e $\Lambda a \in [-\frac{3}{2}, -\sqrt[3]{2})$, ou se $b = \frac{1}{2}$ e $\Lambda a \in (-\frac{3}{2}, -\sqrt[3]{2}]$, para algum $T \geq h$, e $\lambda(t) > 0$ para t grande, então as soluções dos PVI's (2.29)-(2.30) convergem para zero quando $t \rightarrow +\infty$.*

Dem. Sem perda de generalidade, seja $\Lambda = 1$.

Se $b = 0$, o resultado é consequência imediata do Teorema 2.17 e do Lema 2.18, pelo que se pode supor $b > 0$.

Para $\phi \in C$, tem-se

$$\mathcal{M}(e^\phi - 1) = e^{\mathcal{M}(\phi)} - 1 \quad (2.32)$$

e

$$-\mathcal{M}(-e^\phi + 1) = e^{-\mathcal{M}(-\phi)} - 1. \quad (2.33)$$

Com efeito, se $\phi \leq 0$, então $\mathcal{M}(e^\phi - 1) = 0 = \mathcal{M}(\phi) = e^{\mathcal{M}(\phi)} - 1$. Se $\phi(s_0) = \max_{s \in [-h, 0]} \phi(s) > 0$, para algum $s_0 \in [-h, 0]$, então $\mathcal{M}(e^\phi - 1) = e^{\phi(s_0)} - 1 = e^{\mathcal{M}(\phi)} - 1$. De forma análoga se demonstra a segunda igualdade.

Para demonstrar os pontos (ii) e (iii) considerar-se-ão dois casos distintos: $b \geq \frac{1}{2}$ e $0 < b < \frac{1}{2}$.

Caso $b \geq \frac{1}{2}$.

A mudança de variável $z(t) = \log(1 + x(t))$, $t \geq 0$, transforma (2.29) na equação

$$\dot{z}(t) = g(t, z_t), \quad (2.34)$$

onde $g(t, \phi) := F(t, e^\phi - 1)$. De seguida, demonstra-se que a equação (2.34) verifica as hipóteses **(H)**.

A equação (2.34) verifica **(H1)**: Para $\phi \in C$ tal que $\phi \geq q$, tem-se $e^\phi - 1 \geq e^q - 1 > -1$, donde, por **(H1*)**, existe $v(q) \in \mathbb{R}$ tal que

$$g(t, \phi) = F(t, e^\phi - 1) \leq \lambda(t)v(q).$$

A equação (2.34) verifica **(H2)**: Seja $w : [-h, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = w^* \neq 0$. Então $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{w(t)} - 1 = e^{w^*} - 1 > -1$ e $e^{w^*} - 1 \neq 0$, donde, por **(H2*)**,

$$\int_0^{+\infty} g(t, w_t) dt = \int_0^{+\infty} F(t, e^{w_t} - 1) dt = \infty.$$

A equação (2.34) verifica **(H3)**: Seja $r(x) = \frac{ax}{1+bx}$ como em **(H3*)** e defina-se $r_1 : \left(-\frac{1}{b-\frac{1}{2}}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$ por $r_1(x) = \frac{ax}{1+(b-\frac{1}{2})x}$, se $b > \frac{1}{2}$, ou $r_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $r_1(x) = ax$, se $b = \frac{1}{2}$. Facilmente se verifica que

$$\begin{cases} r_1(x) \leq r(e^x - 1), & \text{se } x \in [0, +\infty) \\ r_1(x) \geq r(e^x - 1), & \text{se } x \in \left(-\frac{1}{b-\frac{1}{2}}, 0\right) \end{cases}.$$

Seja $\phi \in C$. Pela hipótese **(H3*)** e pela igualdade (2.32), tem-se

$$\begin{aligned} g(t, \phi) &= F(t, e^\phi - 1) \geq \lambda(t)r(\mathcal{M}(e^\phi - 1)) = \lambda(t)r(e^{\mathcal{M}(\phi)} - 1) \\ &\geq \lambda(t)r_1(\mathcal{M}(\phi)). \end{aligned}$$

Seja $\phi \in C$ tal que $\phi > -\frac{1}{b-\frac{1}{2}}$. Tem-se, $e^\phi - 1 > -\frac{1}{b}$ e $-\mathcal{M}(-\phi) > -\frac{1}{b-\frac{1}{2}}$, donde, pela hipótese **(H3*)** e pela igualdade (2.33), vem

$$\begin{aligned} g(t, \phi) &= F(t, e^\phi - 1) \leq \lambda(t)r(-\mathcal{M}(-e^\phi + 1)) = \lambda(t)r(e^{-\mathcal{M}(-\phi)} - 1) \\ &\leq \lambda(t)r_1(-\mathcal{M}(-\phi)). \end{aligned}$$

Invocando os Teoremas 2.7 e 2.16, o resultado sai para o caso $b \geq \frac{1}{2}$.

Caso $0 < b < \frac{1}{2}$.

Efectuando a mudança de variável $z(t) = -\log(1 + x(t))$, $t \geq 0$, na equação (2.29), obtém-se

$$\dot{z}(t) = k(t, z_t), \quad (2.35)$$

onde $k(t, \phi) := -F(t, e^{-\phi} - 1)$. Procedendo de forma análoga ao caso $b \geq \frac{1}{2}$, demonstra-se que a equação (2.35) verifica as hipóteses **(H)**, onde agora a função racional que aparece em **(H3)** é dada por $r_2(x) = \frac{ax}{1+(\frac{1}{2}-b)x}$, $x \in \left(-\frac{1}{\frac{1}{2}-b}, +\infty\right)$. $\square$

Nota 2.9 O resultado anterior pode ainda ser aplicado a equações com atrasos dependentes do tempo t expressos por funções positivas $\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)$, desde que estas sejam contínuas e limitadas. Nesta situação, tem-se $h = \sup_{t \geq 0} h(t)$, para $h(t) := \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i(t)$. No Teorema 2.19, $\Lambda = \Lambda(T)$ poderá ser então definido por $\sup_{t \geq T} \int_{t-h(t)}^t \lambda(s) ds$.

O próximo objectivo é estabelecer um critério de estabilidade global para as soluções de uma equação que pode ser escrita na forma

$$\dot{x}(t) = \lambda(t)x(t)f(t, \mathcal{L}(t, x_t)), \quad t \in I, \quad (2.36)$$

onde $I = [0, +\infty)$, $\lambda : I \rightarrow I$ é uma função contínua tal que $\lambda(t) > 0$ para t grande, e $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathcal{L} : I \times C \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas.

Mais uma vez, por razões biológicas, consideram-se apenas soluções com condição inicial

$$x_0 = \psi, \quad \psi \in C_0, \quad (2.37)$$

por forma a obterem-se soluções positivas para $t \geq 0$.

O modelo (2.36) foi anteriormente estudado em [7].

No que se segue, supõe-se que as funções f e $\mathcal{L}$ em (2.36) satisfazem as seguintes hipóteses **(h)**:

(h1) Para cada $q \in (-1, 0)$, existe $v(q) \in \mathbb{R}$, tal que

$$f(t, x+1) \leq v(q), \quad \forall t \in I, \forall x \in [q, 0];$$

(h2) $xf(t, x+1) < 0$, $\forall t \in I, \forall x > -1, x \neq 0$;

(h3) Para qualquer função contínua $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ com $\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = w^* > 0$ e $w^* \neq 1$, o integral $\int_0^{+\infty} \lambda(t)f(t, w(t))dt$ diverge;

(h4) Existem $a < 0$ e $b \geq 0$ tais que, para $r(x) = \frac{ax}{1+bx}$, se tem

$$x(f(t, x+1) - r(x)) \geq 0, \quad \forall x > \max\{-1, -b^{-1}\}, \quad \forall t \geq 0;$$

(h5) $\min \phi \leq \mathcal{L}(t, \phi) \leq \max \phi$, $\forall t \geq 0, \forall \phi \in C$.

Nota 2.10 A continuidade de f e a hipótese **(h2)** obrigam a que, para além do equilíbrio $x(t) \equiv 0$, a equação (2.36) possua um outro equilíbrio, $x(t) \equiv 1$. Naturalmente, modelos do tipo de (2.36) que possuem apenas mais um equilíbrio $x(t) \equiv k > 0$ para além do nulo, também se enquadram nesta situação. Para isso basta fazer a mudança de variável $y(t) = \frac{x(t)}{k}$.

De referir ainda que, se $b \leq 1$, então **(h1)** é consequência de **(h4)**.

Teorema 2.20 *Considere-se a equação (2.36) verificando as hipóteses **(h1)**-**(h5)**.*

Se $b \neq \frac{1}{2}$ e existe $T \geq h$ tal que $|a| \sup_{t \geq T} \int_{t-h}^t \lambda(s) ds \leq \frac{3}{2}$, então a solução $x(t)$ do PVI (2.36)-(2.37) converge para 1 quando $t \rightarrow +\infty$.

Se $b = \frac{1}{2}$, a mesma conclusão se obtém para $|a| \sup_{t \geq T} \int_{t-h}^t \lambda(s) ds < \frac{3}{2}$.

Dem. Seja $\Lambda = \Lambda(T) := \sup_{t \geq T} \int_{t-h}^t \lambda(s) ds$. Fazendo a mudança de variável $y(t) = x(t) - 1$ em (2.36), obtém-se a equação

$$\dot{y}(t) = (1 + y(t))\lambda(t)f(t, \mathcal{L}(t, y_t + 1)), \quad t \geq 0. \quad (2.38)$$

Considerando $F(t, \phi) := \lambda(t)f(t, \mathcal{L}(t, \phi + 1))$, com $t \in I$ e $\phi \in C$, a equação (2.38) tem a forma (2.29). Assim, se F verificar as hipóteses **(H*)**, o presente resultado sai por aplicação directa do Teorema 2.19.

Das hipóteses **(h1)** e **(h2)**, facilmente se verifica que a função F satisfaz **(H1*)**.

Sejam $t \geq 0$ e $\phi \in C$ tal que $\phi > -1$. Se $\mathcal{L}(t, \phi + 1) \geq 1$, então, por **(h4)** e **(h5)**,

$$\begin{aligned} F(t, \phi) &= \lambda(t)f(t, (\mathcal{L}(t, \phi + 1) - 1) + 1) \\ &\geq \lambda(t)r(\mathcal{L}(t, \phi + 1) - 1) \geq \lambda(t)r(\mathcal{M}(\phi)). \end{aligned}$$

Se $\mathcal{L}(t, \phi + 1) < 1$, então, por **(h5)**, tem-se $-1 < \mathcal{L}(t, \phi + 1) - 1 \leq 0$, donde, da hipótese **(h2)**, vem que

$$F(t, \phi) = \lambda(t)f(t, (\mathcal{L}(t, \phi + 1) - 1) + 1) \geq 0 \geq \lambda(t)r(\mathcal{M}(\phi)).$$

Seja $\phi \in C$ tal que $\phi > \max\{-1, -b^{-1}\}$. Se $\mathcal{L}(t, \phi + 1) \geq 1$, então, por **(h2)**,

$$F(t, \phi) = \lambda(t)f(t, (\mathcal{L}(t, \phi + 1) - 1) + 1) \leq 0 \leq \lambda(t)r(-\mathcal{M}(-\phi)).$$

Se $\mathcal{L}(t, \phi + 1) < 1$, então, por **(h5)**, $\max\{-1, -b^{-1}\} < \mathcal{L}(t, \phi + 1) - 1 < 0$, e, por **(h4)**, vem

$$\begin{aligned} F(t, \phi) &= \lambda(t)f(t, (\mathcal{L}(t, \phi + 1) - 1) + 1) \\ &\leq \lambda(t)r(\mathcal{L}(t, \phi + 1) - 1) \leq \lambda(t)r(-\mathcal{M}(-\phi)), \end{aligned}$$

pois $\mathcal{L}(t, \phi + 1) - 1 \geq -\max(-\phi) \geq -\mathcal{M}(-\phi)$. Isto demonstra que a função F verifica **(H3*)**.

Seja $w : [-h, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = w^* > -1$ e $w^* \neq 0$. A função

$$\begin{aligned} p : [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \mathcal{L}(t, w_t + 1) \end{aligned}$$

é contínua e, por de **(h5)**, verifica $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = w^* + 1 \neq 1$, donde **(H2*)** é consequência de **(h3)**. $\square$

Nota 2.11 Da comparação deste estudo do modelo (2.36) com o efectua-do em [7], há a salientar três pontos relevantes:

1. A demonstração aqui apresentada é mais simples do que a presente em [7], uma vez que o modelo (2.36) foi estudado como um caso particular do modelo (2.29);
2. Em [7], os autores parecem ter omitido a imposição de uma hipótese similar a **(H1*)**, sem a qual não há a garantia de que as soluções de (2.36) sejam limitadas em $[0, +\infty)$;
3. A condição $\int_0^{+\infty} \lambda(t) dt = +\infty$ exigida em [7] é supérflua, uma vez que é consequência das restantes hipóteses do modelo.

2.5 Exemplos

Nesta secção, aplica-se o critério de estabilidade global dado pelo Teorema 2.19 a diversos exemplos de EDF's escalares que servem de modelo ao crescimento de populações singulares. De notar que alguns dos resultados apresentados melhoram os existentes na literatura.

Exemplo 2.1 Considere-se o PVI

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -p(t)y(t-h)(a-y(t))(b+y(t)), \quad t \geq 0, \\ y_0 &= \psi, \end{aligned} \tag{2.39}$$

com

$$\psi \in C, \quad \psi(\theta) \in [-b, a] \text{ para } \theta \in [-h, 0] \text{ e } \psi(0) \in (-b, a),$$

onde $a, b > 0$ e $p : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ é uma função contínua tal que $p(t) > 0$, para t grande, e $\int_0^{+\infty} p(s) ds = +\infty$.

Este exemplo foi anteriormente estudado em [1, 9, 11].

Teorema 2.21 *Considere-se o PVI (2.39). Suponha-se que $a \neq b$ e que existe $T \geq h$ tal que*

$$ab \int_{t-h}^t p(s)ds \leq \frac{3}{2}, \text{ para } t > T. \quad (2.40)$$

Então, a solução $y(t)$ de (2.39) converge para zero quando $t \rightarrow +\infty$.

Dem. Para $a = b$, o resultado foi provado em [9].

Considere-se $a \neq b$. Fazendo, como em [1], a mudança de variável

$$x(t) = \frac{1 + \frac{y(t)}{b}}{1 - \frac{y(t)}{a}} - 1,$$

o PVI (2.39) é transformado no PVI

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (1 + x(t))p(t) \frac{-abx(t-h)}{1 + \frac{b}{a+b}x(t-h)}, \quad t \geq 0 \\ x_0 &= \varphi, \quad \varphi \in C_{-1} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Este PVI é um modelo da forma (2.29)-(2.30), com

$$F(t, \phi) := p(t) \frac{-ab\phi(-h)}{1 + \frac{b}{a+b}\phi(-h)}. \quad (2.42)$$

Segue-se a demonstração de que (2.42) verifica as hipóteses **(H*)**.

Considerando

$$r(x) := \frac{-abx}{1 + \frac{b}{a+b}x} \quad \text{e} \quad \lambda(t) := p(t),$$

então $F(t, \phi) = p(t)r(\phi(-h))$, pelo que F satisfaz **(H3*)**. Note-se que **(H1*)** é satisfeita com $v(q) := r(q)$ para $q > -1$ pois, como $\frac{b}{a+b} < 1$, $r(q)$ está definida em $(-1, +\infty)$.

Considere-se agora $w : [-h, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = w^* > -1$ e $w^* \neq 0$. Tem-se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-abw(t-h)}{1 + \frac{b}{a+b}w(t-h)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

o que, juntamente com a hipótese $\int_0^{+\infty} p(t)dt = +\infty$, implica a divergência do integral $\int_0^{+\infty} F(t, w_t)dt$. Isto prova que F satisfaz **(H2*)**.

Aplicando o Teorema 2.19 ao PVI (2.41), conclui-se que $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, donde $y(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. $\square$

Note-se que em [9] as mesmas conclusões são obtidas sob a hipótese

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \int_{t-h}^t p(s)ds \leq \frac{3}{2}, \text{ para } t \geq 0 \text{ grande,} \quad (2.43)$$

e em [1] sob a hipótese

$$b(a+b) \int_{t-h}^t p(s)ds \leq \frac{3}{2}, \text{ para } t \geq 0 \text{ grande.} \quad (2.44)$$

Claramente (2.40) é uma hipótese mais fraca do que (2.43) e (2.44).

Exemplo 2.2 Considere-se a equação

$$\dot{N}(t) = \lambda(t)N(t) \frac{k - N^l(t - \alpha(t))}{k + \nu(t)N^l(t - \alpha(t))}, \quad t \geq 0, \quad (2.45)$$

onde $k, l \in \mathbb{R}^+$, $\alpha, \nu \in C(\mathbb{R}_0^+; \mathbb{R}_0^+)$, a função α é limitada e $\lambda : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ é uma função contínua tal que $\lambda(t) > 0$ para t grande. Por razões biológicas, consideram-se apenas soluções com condição inicial admissível

$$N_0 = \psi, \quad \psi \in C_0. \quad (2.46)$$

De notar que o atraso, ao ser definido pela função limitada α , é dependente do tempo. Seja $h > 0$ tal que $\alpha(t) \leq h$, para todo $t \in \mathbb{R}_0^+$, e considere-se $C := C([-h, 0]; \mathbb{R})$.

Facilmente se verifica que $N(t) \equiv k^{\frac{1}{l}}$ é o único equilíbrio positivo da equação (2.45).

Este exemplo, usualmente designado na literatura por “food-limited population model”, foi anteriormente estudado por muitos autores (ver e.g. [1, 3, 7, 11, 12]).

Sob as hipóteses

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda(t)}{1 + \nu(t)} dt = +\infty \quad (2.47)$$

e

$$\sup_{t \geq h} l \int_{t-h}^t \frac{\lambda(s)}{1 + \nu(s)} ds < \frac{3}{2}, \quad (2.48)$$

So e Yu [12] demonstraram que o equilíbrio $k^{\frac{1}{l}}$ de (2.45) é uniformemente e assintoticamente estável e, em [7], provou-se o teorema que seguidamente se enuncia.

Teorema 2.22 *Suponha-se que a condição (2.47) é satisfeita. Seja $\nu_0 := \inf_{t \in \mathbb{R}_0^+} \nu(t)$.*

(i) *Se $\nu_0 \neq 1$ e, para algum $T > h$,*

$$\sup_{t \geq T} \frac{l}{1 + \nu_0} \int_{t-h}^t \lambda(s) ds \leq \frac{3}{2},$$

então qualquer solução de (2.45) com condição inicial em C_0 converge para $k^{\frac{1}{l}}$ quando $t \rightarrow +\infty$.

(ii) *Se $\nu_0 = 1$, a mesma conclusão se obtém se $\sup_{t \geq T} l \int_{t-h}^t \lambda(s) ds < 3$.*

Dem. Fazendo a mudança de variável

$$M(t) = \frac{N(t)^l}{k} - 1$$

no PVI (2.45)-(2.46), obtém-se o PVI

$$\dot{M}(t) = (1 + M(t))l\lambda(t) \frac{-M(t - \alpha(t))}{1 + \nu(t)(1 + M(t - \alpha(t)))}, \quad t \geq 0, \quad (2.49)$$

$$M_0 = \varphi, \quad \varphi \in C_{-1}. \quad (2.50)$$

Considerando

$$F(t, \varphi) := \lambda(t) \frac{-l\varphi(-\alpha(t))}{1 + \nu(t)(1 + \varphi(-\alpha(t)))}, \quad t \geq 0, \quad \varphi \in C,$$

o PVI (2.49)-(2.50) tem a forma do PVI (2.29)-(2.30). Seguidamente demonstra-se que F verifica o conjunto de hipóteses **(H*)**.

Definindo

$$r(x) := \frac{-\frac{l}{1+\nu_0}x}{1 + \frac{\nu_0}{1+\nu_0}x},$$

tem-se, para $x > 0$,

$$\frac{-lx}{1 + \nu(t)(x + 1)} \geq \frac{-lx}{1 + \nu_0(x + 1)} = r(x)$$

e analogamente, para $x \in (-1, 0)$,

$$\frac{-lx}{1 + \nu(t)(x + 1)} \leq \frac{-lx}{1 + \nu_0(x + 1)} = r(x).$$

Isto implica que F satisfaz as hipóteses **(H1*)** e **(H3*)**.

A verificação de **(H2*)** faz-se facilmente usando a hipótese $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda(t)}{1+\nu(t)} dt = +\infty$ e critérios de comparação para integrais impróprios.

Aplicando o Teorema 2.19 ao PVI (2.49)-(2.50), conclui-se que $M(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, donde $N(t) \rightarrow k^{\frac{1}{\tau}}$ quando $t \rightarrow +\infty$. $\square$

Note-se que a demonstração aqui apresentada é mais simples do que a presente em [7].

Exemplo 2.3 Considere-se a EDFR, para modelos biológicos periódicos de uma única população, proposta por Golpalsamy e *et al.* [2],

$$\dot{N}(t) = s(t)N(t) \frac{k(t) - N(t - m\omega)}{k(t) + c(t)s(t)N(t - m\omega)}, \quad t \geq 0, \quad (2.51)$$

onde $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in \mathbb{R}^+$ e s, c, k são funções contínuas, positivas e ω -periódicas. Mais uma vez, atendendo a que se trata de um modelo biológico, consideram-se apenas soluções com condição inicial admissível

$$N_0 = \psi, \quad \psi \in C_0. \quad (2.52)$$

Em [2], os autores provaram a existência de uma única solução ω -periódica positiva $N^*(t)$, que satisfaz $K_* \leq N^*(t) \leq K^*$, $t \in [0, \omega]$, sendo $K_* = \min_{0 \leq t \leq \omega} k(t)$ e $K^* = \max_{0 \leq t \leq \omega} k(t)$.

Definam-se as funções

$$\nu(t) := \frac{s(t)c(t)N^*(t)}{k(t)}; \quad \lambda(t) := \frac{s(t)N^*(t)[c(t)s(t) + 1]}{k(t) + c(t)s(t)N^*(t)},$$

que, por definição das funções s, c, k, N^* , são contínuas, positivas e ω -periódicas.

O resultado que se segue apresenta condições suficientes para a estabilidade assintótica global da solução periódica $N^*(t)$.

Teorema 2.23 *Seja $\nu_0 := \min_{t \in [0, m\omega]} \nu(t)$.*

Se $\nu_0 \neq 1$ e

$$\frac{1}{1 + \nu_0} \int_0^{m\omega} \lambda(t) dt \leq \frac{3}{2}, \quad (2.53)$$

então a solução $N(t)$ do PVI (2.51)-(2.52) satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (N(t) - N^*(t)) = 0.$$

Se $\nu_0 = 1$, a mesma conclusão se obtém se

$$\int_0^{m\omega} \lambda(t) dt < 3. \quad (2.54)$$

Dem. Fazendo a mudança de variável

$$x(t) = \frac{N(t)}{N^*(t)} - 1$$

no PVI (2.51)-(2.52), obtém-se o PVI

$$\dot{x}(t) = (1 + x(t))\lambda(t) \frac{-x(t - m\omega)}{1 + \nu(t)(1 + x(t - m\omega))}, \quad t \geq 0. \quad (2.55)$$

$$x_0 = \varphi, \quad \varphi \in C_{-1} \quad (2.56)$$

O PVI (2.55)-(2.56) tem a forma do PVI (2.49)-(2.50), com $l = 1$ e $\alpha(t) = m\omega$, donde, pela demonstração do Teorema 2.22, se conclui que $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (N(t) - N^*(t)) = 0. \square$$

Note-se que em [1] as mesmas conclusões foram obtidas sob a hipótese mais forte

$$\int_0^{m\omega} \lambda(t) ds \leq \frac{3}{2}. \quad (2.57)$$

Nota 2.12 Nos dois primeiros exemplos consideraram-se as funções $p(t)$ e $\lambda(t)$ como sendo contínuas. Na verdade, bastariam ser seccionalmente contínuas.

Bibliografia

- [1] T. Faria, Global attractivity in scalar delayed differential equations with applications to populations models, to appear in *J. Math. Anal. Appl.*
- [2] K. Gopalsamy, M. R. S. Kulenović & G. Ladas, Environmental periodicity and time delay in 'food limited' population model, *J. Math. Anal. Appl.* **147** (1990), 545-555.
- [3] E. A. Grove, G. Ladas & C. Qian, Global attractivity in a 'food limited' population model, *Dynamic. Syst. Appl.* **2** (1993), 243-250.
- [4] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Krieger Publishing Company, Florida, 1980.
- [5] J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [6] Y. Kuang, *Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics*, Academic Press, San Diego, 1993.
- [7] E. Liz, V. Tkachenko & S. Trofimchuk, Yorke and Wright 3/2-stability theorems from a unified point of view, to appear in *Discrete Contin. Dynam. Systems*.
- [8] E. Liz, M. Pinto, G. Robledo, V. Tkachenko & S. Trofimchuk, Wright type delay differential equations with negative Schewarzian, *Discrete Contin. Dynam. Systems* **9** (2003), 309-321.
- [9] H. Matsunaga, R. Miyazaki & T. Hara, Global attractivity results for nonlinear delay differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **234** (1999), 77-90.
- [10] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New-York, 1983.

- [11] C. Qian, Global attractivity in nonlinear delay differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **197** (1996), 529-547.
- [12] J. W.-H. So & J. S. Yu, On the uniform stability for a 'food limited' population model with time delay, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **125** (1995), 991-1002.
- [13] J. W.-H. So, J. S. Yu & M.-P. Chen, Asymptotic stability for scalar delay differential equations, *Funkcial. Ekvac.* **39** (1996), 1-17.
- [14] A. E. Taylor, *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley & Sons, New-York, 1958.
- [15] A. E. Taylor, & D. C. Lay, *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley & Sons, New-York, 1980.
- [16] E. M. Wright, A non-linear difference-differential equation, *J. Reine Angew. Math.* **194** (1955), 66-87.
- [17] T. Yoneyama, The $3/2$ stability theorem for one-dimensional delay-differential equation, *J. Math. Anal. Appl.* **125** (1987), 161-173.
- [18] J. A. Yorke, Asymptotic stability for one dimensional delay-differential equations, *J. Differential Equations* **7** (1970), 189-202.