Análise

LCC

2010/2011

Docente: José Joaquim Oliveira

Apontamentos sobre estruturas topológicas em $\mathbb{R}^n$ e sucessões vectoriais

Capítulo 1

Estruturação topológica de $\mathbb{R}^n$

Este é um capítulo de base, onde introduziremos algumas das propriedades ditas *topológicas* do espaço $\mathbb{R}^n$. São propriedades relacionadas com a noção de *proximidade*, que conferem a $\mathbb{R}^n$ a estrutura adequada para introduzir os conceitos de limite e continuidade.

1.1 O espaço vectorial $\mathbb{R}^n$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, representa-se por $\mathbb{R}^n$ o produto cartesiano de n conjuntos iguais a $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{n vezes}} \tag{1.1}$$

constituído pelas sequências finitas $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, com $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^n$, com $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, tem-se

$$X = Y \qquad \text{se e só se} \qquad x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ \ldots,\ x_n = y_n\ . \tag{1.2}$$

Quando munido das operações usuais de *adição* e *multiplicação escalar*, definidas por

$$\begin{array}{rccl} + : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (X, Y) & \longmapsto & X + Y = (x_1 + x_2, \ldots, x_n + y_n) \end{array} \tag{3a}$$

e

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (\alpha, X) & \longmapsto & \alpha \cdot X = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \end{array} \tag{3b}$$

respectivamente, $\mathbb{R}^n$ constitui um espaço vectorial real de dimensão n. Por uma questão de simplicidade, escreveremos αX em vez de $\alpha \cdot X$.

Os elementos X de $\mathbb{R}^n$ designam-se por *vectores* e os números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por *coordenadas* de X. A *base canónica* de $\mathbb{R}^n$ é o conjunto $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ onde

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0)\,,\ \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0)\,,\ \ldots\ ,\ \boldsymbol{e}_n = (0,0,\ldots,0,1) \tag{4}$$

Em $\mathbb{R}^n$, o elemento neutro da adição é o vector $\mathbf{0} = (0,0,\ldots,0)$, designado por *zero*, e dado $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, o seu *simétrico* é o vector $-X = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

1.2 Produto interno, norma e distância

Nesta secção abordaremos três conceitos que nos permitirão avaliar a "posição relativa" de vectores, o "comprimento" de um vector e a "proximidade" entre elementos de $\mathbb{R}^n$.

1.2.1 Produto interno

Um *produto interno* em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ que a cada par de vectores $X, Y \in \mathbb{R}^n$ faz corresponder um número real $< X, Y >$, verificando as seguintes propriedades (axiomas do produto interno)

PI1) $< X, X > \geq 0\,,\ \forall X \in \mathbb{R}^n$ e $< X, X >= 0$ sse $X = \mathbf{0}$ (5a)

PI2) $< X, Y > = < Y, X >\,,\ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ (5b)

PI3) $< \alpha X, Y >= \alpha\ < X, Y >\,,\ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n\,,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (5c)

PI4) $< X + Z, Y > = < X, Y > + < Z, Y >\,,\ \forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ (5d)

O espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ munido com um produto interno $< \cdot, \cdot >$ diz-se um *espaço euclidiano* e representa-se por $(\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >)$.

Exemplo 1 *Produto interno usual* ou *canónico,* definido por

$$< X, Y >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n\ , \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n\,. \tag{6a}$$

Exemplo 2 Produto interno definido em $\mathbb{R}^2$ por

$$< X, Y >= 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2\ , \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^2\,. \tag{6b}$$

■

Dos axiomas do produto interno, extrai-se facilmente o seguinte resultado.

Propriedade 1 *No espaço euclidiano* $(\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >)$*, com* $< \cdot, \cdot >$ *um produto interno qualquer, tem-se*

$$< \mathbf{0}, X >= < X, \mathbf{0} >= 0\ , \qquad \forall X \in \mathbb{R}^n\,. \tag{7}$$

Demonstração:
Fixemos arbitrariamente $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Podemos escrever $\mathbf{0} = 0\,Y$
Das propriedades $(5b$,c), vem então

$$< X, \mathbf{0} > = < \mathbf{0}, X > = < 0\,Y, X > = \; 0 < Y, X > = \; 0$$ ■

Num espaço euclidiano pode introduzir-se o conceito de ortogonalidade. Dizemos que dois vectores $X, Y \in \mathbb{R}^n$ são *ortogonais* relativamente a um produto interno $< \cdot, \cdot >$, considerado, quando $< X, Y >= 0$.

Exemplo 3 Em $\mathbb{R}^2$, munido com o produto interno canónico definido como em $(6a)$, os vectores $U = (1, 1)$ e $V = (-1, 1)$ são ortogonais e os vectores $W = (1, 2)$ e $Z = (3, -1)$ não são ortogonais.

Exemplo 4 Em $\mathbb{R}^2$, munido com o produto interno definido em $(6b)$, $U = (1, 1)$ e $V = (-1, 1)$ não são ortogonais e $W = (1, 2)$ e $Z = (3, -1)$ são ortogonais.

Um resultado importante a que faremos referência frequentemente é o seguinte.

Teorema 1 [Desigualdade de Cauchy-Schwarz]

Consideremos o espaço $\mathbb{R}^n$ munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$. Então

(a) $|< X, Y >| \leq \sqrt{< X, X >}\sqrt{< Y, Y >}\,, \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$

(b) $|< X, Y >| = \sqrt{< X, X >}\sqrt{< Y, Y >}$
se e só se $X = \alpha Y$ para algum escalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

(i) Suponhamos, em primeiro lugar, que $X = \mathbf{0}$.
Pela propriedade (7), sai que $< X, Y >= 0$, $\forall Y \in \mathbb{R}^n$, e a condição (a) é verificada como igualdade. A equivalência em (b) é verificada trivialmente com $\alpha = 0$ e $X = \alpha Y$

(ii) Suponhamos agora que $X \neq 0$.
Como $< X, X > \neq 0$, podemos considerar o vector (auxiliar) $Z = Y - \dfrac{< X, Y >}{< X, X >}\, X$.
Por $(5a)$, tem-se $< Z, Z > \geq 0$. Usando as propriedades do produto interno, tem-se sucessivamente

$$\begin{aligned}
< Z, Z > \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad < Y - \frac{< X, Y >}{< X, X >}\, X\,,\, Y - \frac{< X, Y >}{< X, X >}\, X > \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad < Y, Y > -2\,\frac{< X, Y >}{< X, X >} < X, Y > + \frac{(< X, Y >)^2}{(< X, X >)^2} < X, X > \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad < Y, Y > - \frac{(< X, Y >)^2}{< X, X >)} \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (< X, Y >)^2 \leq < X, X > \cdot < Y, Y > \\
&\Longleftrightarrow \quad | < X, Y > | \leq \sqrt{< X, X >}\sqrt{< Y, Y >}
\end{aligned}$$

e fica assim demonstrado o resultado de (a).

Para (b), do que acabamos de ver, tem-se sucessivamente

$$\begin{aligned} |< X,Y >| = \sqrt{< X,X >}\sqrt{< Y,Y >} &\iff < Z,Z >= 0 \\ &\iff Z = 0 \\ &\iff Y = \frac{< X,Y >}{< X,X >} X \end{aligned}$$

o que completa a demonstração ($\alpha =< X,Y > / < X,X >$). ■

1.2.2 Norma

Uma *norma* em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ que a cada $X \in \mathbb{R}^n$ faz corresponder um número real $\| X \|$, verificando as seguintes propriedades (axiomas da norma)

N1) $\| X \| \geq 0\,,\ \forall X \in \mathbb{R}^n$ e $\| X \| = 0$ sse $X = (0,\ldots,0)$ $(9a)$

N2) $\| \alpha X \| = |\alpha|\ \| X \|\,,\ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n\,,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $(9b)$

N3) $\| X + Y \| \leq \| X \| + \| Y \|\,,\ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ (desigualdade tringular) $(9c)$

O espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ munido com uma norma $\| \cdot \|$ diz-se um *espaço normado* e representa-se por $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$.

Exemplo 5 *Norma euclidiana* ou *norma dois,* definida por

$$\| X \|_2 = \| (x_1,\ldots,x_n) \|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \qquad (10a)$$

Exemplo 6 *Norma do máximo* ou *norma infinito,* definida por

$$\| X \|_\infty = \| (x_1,\ldots,x_n) \|_\infty = \max\{\, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n| \,\} \qquad (10b)$$

Exemplo 7 *Norma da soma* ou *norma um,* definida por

$$\| X \|_1 = \| (x_1,\ldots,x_n) \|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \qquad (10c)$$

■

Dos axiomas da norma, deduz-se facilmente o seguinte resultado.

Propriedade 2 *No espaço normado* $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$*, com* $\| \cdot \|$ *uma norma qualquer, tem-se*

$$\| -X \| = \| X \|\,, \qquad \forall X \in \mathbb{R}^n\,. \qquad (11)$$

Demonstração: Consequência imediata da propriedade $(9b)$. ■

Observações

1. Todo o produto interno $< \cdot, \cdot >$ de $\mathbb{R}^n$ induz uma norma $\| \cdot \|$ em $\mathbb{R}^n$, chamada *norma induzida*, que se define pondo, para cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\| X \| = \sqrt{< X, X >} \, . \tag{12}$$

2. Se considerarmos em $\mathbb{R}^n$ um produto interno $< \cdot, \cdot >$, e se for $\| \cdot \|$ a correspondente norma induzida, a desigualdade de Cauchy-Schwarz traduz-se por

   (a) $|< X, Y >| \leq \| X \| \| Y \| \, , \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$

   (b) $|< X, Y >| = \| X \| \| Y \|$
   se e só se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $X = \alpha Y$.

3. Nas condições da observação 2, tem-se que, dados $X, Y \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0, \ldots, 0)\}$,

$$\frac{|< X, Y >|}{\| X \| \| Y \|} \leq 1 \, ,$$

   pelo que

$$-1 \leq \frac{< X, Y >}{\| X \| \| Y \|} \leq 1 \, . \tag{13a}$$

   Podemos então concluir que, dados arbitrariamente $X, Y \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0, \ldots, 0)\}$, existe um único número real $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{< X, Y >}{\| X \| \| Y \|} \tag{13b}$$

   ou seja, tal que

$$< X, Y > = \| X \| \| Y \| \cos\theta \tag{13c}$$

   O número real θ designa-se por *ângulo* entre os vectores não nulos X e Y.

4. Dadas duas normas quaisquer em $\mathbb{R}^n$, digamos $\| \cdot \|_*$ e $\| \cdot \|_\#$, existem sempre dois números reais positivos, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, tais que

$$\alpha \, \| X \|_* \, \leq \, \| X \|_\# \, \leq \, \beta \, \| X \|_* \, , \quad \forall X \in \mathbb{R}^n \, , \tag{14}$$

   o que se traduz dizendo que em $\mathbb{R}^n$ quaisquer duas normas são *equivalentes*.

   A equivalência entre normas garante que todos os conceitos e resultados de $\mathbb{R}^n$ relacionados com a noção de proximidade e que, em geral, são definidos em termos de uma norma, serão válidos independentemente da norma considerada. Por esta razão, usaremos indiferentemente as normas $\| \cdot \|_2$, $\| \cdot \|_\infty$ e $\| \cdot \|_1$ quando falarmos de limite, continuidade, etc.. ■

1.2.3 Distância

Uma *distância* em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ que a cada par de vectores $X, Y \in \mathbb{R}^n$ faz corresponder um número real $d(X,Y)$, verificando as seguintes propriedades (axiomas da distância)

D1) $d(X,Y) \geq 0\,, \ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \quad \text{e} \quad d(X,Y) = 0$ se e só se $X = Y$ (15a)

D2) $d(X,Y) = d(Y,X)\,, \ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ (15b)

D3) $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)\,, \ \forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ (desigualdade tringular) (15c)

O espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ munido de uma distância d diz-se um *espaço métrico* e representa-se por $(\mathbb{R}^n, d)$.

Exemplo 8 *Distância euclidiana* definida por

$$d_2(X,Y) \ = \ \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}, \tag{16a}$$

com $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Exemplo 9 *Distância discreta* definida por

$$d_{0,1}(X,Y) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{se } X = Y \\ 1 & \text{se } X \neq Y \end{cases} \tag{16b}$$

■

Observações

1. Toda a norma $\| \cdot \|$ de $\mathbb{R}^n$ induz uma distância d em $\mathbb{R}^n$, definida por

$$d(X,Y) \ = \| \ X - Y \ \|\,, \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n\,. \tag{17a}$$

2. Da observação anterior, sai que todo o produto interno $< \cdot, \cdot >$ de $\mathbb{R}^n$ dá origem a uma distância d em $\mathbb{R}^n$, definida por

$$d(X,Y) = \ \sqrt{< X - Y, X - Y >}\,, \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n\,. \tag{17b}$$

3. Para além da distância euclidiana introduzida em (16a), também resultam de uma norma, por exemplo, a *distância do máximo*

$$d_\infty(X,Y) = \| \ X - Y \ \|_\infty = \ \max \{ \, |x_1 - y_1|, \, |x_2 - y_2|, \, \ldots, \, |x_n - y_n| \, \}\,, \tag{18a}$$

com $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$.

e a *distância da soma* (ou Pombalina)

$$d_1(X,Y) = \| X - Y \|_1 = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|, \qquad (18b)$$

com $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$. ■

Exercícios

1. Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a aplicação definida por $f(x,y) = xy$. Mostre que f é um produto interno em $\mathbb{R}$.

2. Seja $< \cdot, \cdot >$ um produto interno definido em $\mathbb{R}^n$.

   (a) Mostre que a norma induzida

   $$\begin{array}{rccc} || \cdot || : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & X & \mapsto & \sqrt{< X, X >} \end{array}$$

   é de facto uma norma em $\mathbb{R}^n$;

   (b) Determine a norma em $\mathbb{R}^n$ induzida pelo produto interno canónico.

3. Considere a aplicação $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$.

   (a) Verifique que h é um produto interno em $\mathbb{R}^2$;

   (b) Determine a norma em $\mathbb{R}^2$ induzida pelo produto interno apresentado.

4. Mostre que $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(X,Y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_3y_3$, para quaisquer $X = (x_1,x_2,x_3)$ e $Y = (y_1,y_2,y_3)$ em $\mathbb{R}^3$, define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

5. Verifique que, em $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno canónico, os vectores $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$ e $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ são ortogonais dois a dois.

6. Determine os vectores de $\mathbb{R}^3$ que, relativamente ao produto interno canónico, são ortogonais ao vector $U = (1,1,1)$.

7. Considere o produto interno definido em $\mathbb{R}^2$ por

$$< X, Y >= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2\,, \;\; X = (x_1, x_2)\,,\; Y = (y_1, y_2).$$

   (a) Sejam $U = (-1, 0),\; V = (0, 2)$. Calcule $< U, U >$, $< V, V >$, $< U, V >$, $< U + 2V, -2U + 3V >$.

   (b) Apresente $W, Z \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ que sejam ortogonais relativamente a $< \cdot, \cdot >$.

8. Considere as aplicações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned} \| X \|_2 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, \\ \| X \|_\infty &= \max\{\, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n| \,\}, \\ \| X \|_1 &= |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|, \end{aligned}$$

   para qualquer $X = (x_1, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$. Prove que estas aplicações são normas em $\mathbb{R}^n$.

9. Considere o espaço $\mathbb{R}^3$ munido separadamente das normas $\| \,.\, \|_2$, $\| \,.\, \|_\infty$ e $\| \,.\, \|_1$ definidas para $n = 3$. Em cada caso, calcule a correspondente norma do vectores $U = (0, 0, 1)$, $V = (1, 2, 3)$ e $W = (-4, 0, 5)$.

10. Considere as normas $\| \,.\, \|_2$, $\| \,.\, \|_\infty$ e $\| \,.\, \|_1$ definidas no exercício 8.

    (a) Para $n = 2$, esboce as correspondentes bolas $B((0, 0), 1)$.

    (b) Considere $n = 3$. Mostre que, para cada $X \in \mathbb{R}^3$, se tem

$$\| X \|_\infty \leq \| X \|_2 \leq \| X \|_1 \leq 3 \, \| X \|_\infty, \quad \forall X \in \mathbb{R}^3.$$

11. Sejam $< \cdot, \cdot >$ um produto interno em $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ a correspondente norma induzida. Mostre que:

    (a) $\| X + Y \|^2 + \| X - Y \|^2 = 2 \| X \|^2 + 2 \| Y \|^2$, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$;

    (b) $\| X + Y \| \, \| X - Y \| \leq \| X \|^2 + \| Y \|^2$, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$;

    (c) $< X + Y, X - Y >= 0$ se e só se $\| X \| = \| Y \|$;

    (d) $\| X + \lambda Y \| \geq \| X \|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, se e só se $< X, Y >= 0$.

12. Seja $d_{0,1} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(X,Y) = 0$ se $X = Y$ e $d(X,Y) = 1$ se $X \neq Y$.

    (a) Mostre que $d_{0,1}$ é uma distância em $\mathbb{R}^2$.

    (b) Esboce ou especifique cada um dos conjuntos
    $$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ d_{0,1}\left((x,y),(0,0)\right) < k\right\},$$
    onde k assume, alternativamente, os valores $\frac{1}{2}, 1, 2$.

13. Determine a norma e a distância induzidas em $\mathbb{R}^n$ pelo produto interno canónico.

14. Determine a distância induzida em $\mathbb{R}^n$ pela:

    (a) norma do máximo, isto é, pela norma $||(x_1,\ldots,x_n)||_\infty = \max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}$;

    (b) norma da soma, isto é, pela norma $||(x_1,\ldots,x_n)||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$.

15. Represente geometricamente a bola $B((2,1),2)$ quando em $\mathbb{R}^2$ se considera:

    (a) a métrica induzida pela norma euclidiana, $(x,y) \mapsto ||(x,y)||_2$;

    (b) a métrica induzida pela norma do máximo, $(x,y) \mapsto ||(x,y)||_\infty$;

    (c) a norma da soma; $(x,y) \mapsto ||(x,y)||_1$.

1.3 Algumas noções topológicas

Os conceitos que passaremos a introduzir nesta secção estão fortemente relacionados com a noção de norma. Assim, passaremos a considerar o espaço $\mathbb{R}^n$ munido de uma norma $\|\cdot\|$ e representaremos por d a correspondente distância induzida.

1.3.1 Bola no espaço $\mathbb{R}^n$

Sejam $A \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^+$. Chama-se *bola* de centro A e raio r ao conjunto

$$B(A,r) = \{\, X \in \mathbb{R}^n : \| X - A \| < r \,\} = \{\, X \in \mathbb{R}^n : d(X,A) < r \,\} \tag{19}$$

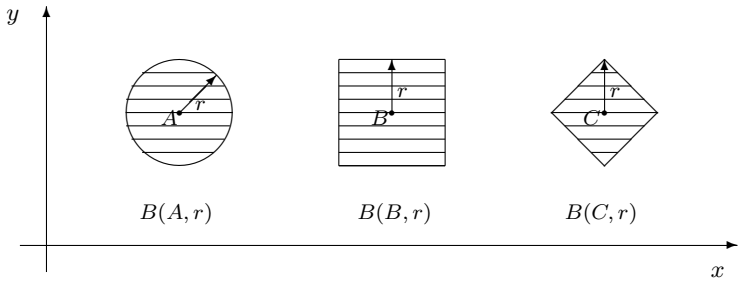

Figura 1: Bola em $\mathbb{R}^2$ segundo as normas $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$, respectivamente.

Observação

O conceito de *bola* estende a $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, a noção de intervalo aberto limitado.

1.3.2 Conjunto aberto

Consideremos um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e seja X um ponto de A.
Dizemos que X é *ponto interior* de A quando

$$\exists r > 0 : \quad B(X,r) \subseteq A \tag{20}$$

Designamos por *interior de* A o conjunto $int(A)$ constituído por todos os pontos interiores a A.
É imediato que $int(A) \subseteq A$.

Exemplo 10

(a) Se $A =]1,2] \times [-1,0[$ então $int(A) =]1,2[\times]-1,0[$.

(b) Se $B =]1,2] \times ([-1,0[\cap \mathbb{Q})$ então $int(B) = \emptyset$, porque toda a bola com centro em algum ponto de B contém pontos de ordenada irracional.

(c) Se $C = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 1 \right) : \ n \in \mathbb{N} \right\}$ então $int(C) = \emptyset$.

(d) Se $D = \{1,2\} \times \mathbb{R}$ então $int(D) = \emptyset$.

(e) Se $E = \mathbb{R}^2$ então $int(E) = \mathbb{R}^2$. ■

Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se *aberto* quando $int(A) = A$.

Exemplo 11

(a) Para quaiquer $A \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^+$, a bola $B(A,r)$ é um aberto.

(b) $A =]1,2[\times]-1,0[$ é aberto e $B =]1,2[\times (\,]-1,0[\cap \mathbb{Q})$ não é aberto.

(c) $C = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 1 \right) : \ n \in \mathbb{N} \right\}$ não é aberto.

(d) $E = \mathbb{R}^2$ é aberto. ■

1.3.3 Conjunto fronteira

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $X \in \mathbb{R}^n$.
Dizemos que X é *ponto fronteiro* de A quando qualquer bola de centro em X contém pontos em A e no seu complementar $\mathbb{R}^n \setminus A$, ou seja, quando

$$\forall r > 0, \quad B(X,r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B(X,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset. \tag{21}$$

Designamos por *fronteira* de A o conjunto $fr(A)$ constituido por todos os pontos fronteiros de A.

Exemplo 12

(a) Se $A =]1,2] \times [-1,0[$ então $fr(A) = [1,2] \times \{-1,0\} \cup \{1,2\} \times [-1,0]$.

(b) Se $B =]1,2] \times ([-1,0[\cap \mathbb{Q})$ então $fr(B) = [1,2] \times [-1,0]$, porque toda a bola com centro em algum ponto de $[1,2] \times [-1,0]$ contém pontos de ordenada irracional e pontos de ordenada racional.

(c) Se $C = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right) : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ então $fr(C) = C \cup \{(0,1)\}$.

(d) Se $D = \{1,2\} \times \mathbb{R}$ então $fr(D) = D$.

(e) Se $E = \mathbb{R}^2$ então $fr(E) = \emptyset$. ■

1.3.4 Conjunto fechado

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $X \in \mathbb{R}^n$.
Dizemos que X é *ponto aderente* ao conjunto A quando existem pontos de A arbitrariamente próximos de X (independentemente de X ser ponto de A ou não), isto é, quando

$$\forall r > 0\,, \quad B(X,r) \cap A \neq \emptyset \tag{22}$$

Designa-se por *aderência* de A, ou *fecho* de A, o conjunto $\overline{A}$ constituído por todos os pontos aderentes a A.
É imediato que $A \subseteq \overline{A}$.

Exemplo 13

(a) Se $A =]1,2] \times [-1,0[$ então $\overline{A} = [1,2] \times [-1,0]$.

(b) Se $B =]1,2] \times ([-1,0[\cap \mathbb{Q})$ então $\overline{B} = [1,2] \times [-1,0]$.

(c) Se $C = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right) : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ então $\overline{C} = C \cup \{(0,1)\}$.

(d) Se $D = \{1,2\} \times \mathbb{R}$ então $\overline{D} = D$.

(e) Se $E = \mathbb{R}^2$ então $\overline{E} = \mathbb{R}^2$. ■

Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se *fechado* quando $\overline{A} = A$.

Exemplo 14

(a) $A = [1,2] \times [-1,0]$ é fechado.

(b) $C = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right) : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ não é fechado.

(c) $E = \mathbb{R}^2$ é fechado. ■

Propriedade 3 *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Então:*

(a) $int(A) \subseteq A$, $fr(A) = fr(\mathbb{R}^n \setminus A)$, $fr(A) \subseteq \overline{A}$, $A \subseteq \overline{A}$;

(b) $\overline{A} = fr(A) \cup int(A)$; *(reunião disjunta)*

(c) $int\,(\mathbb{R}^n \setminus A) = \mathbb{R}^n \setminus \overline{A}$;

(d) $\overline{\mathbb{R}^n \setminus A} = \mathbb{R}^n \setminus int(A)$.

Demonstração:

Os resultados de **(a)** são consequência imediata das definições.

Para **(b)**, basta mostrar que $\overline{A} \subseteq fr(A) \cup int(A)$. A inclusão contrária ($\supseteq$) é consequência de **(a)**.

Seja $X \in \overline{A}$. Então $\forall r > 0\,,\ B(X,r) \cap A \neq \emptyset\,.$

- No caso em que existe $r^* > 0$ tal que $B(X, r^*) \subseteq A$, conclui-se que $X \in int(A)$.
- Caso contrário, conclui-se ainda que $\forall r > 0 :\ B(X,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$, pelo que $X \in fr(A)$.

Para **(c)**, atenda-se a que

$$\begin{aligned} X \in int(\mathbb{R}^n \setminus A) &\iff \exists r > 0 :\ B(X,r) \subset (\mathbb{R}^n \setminus A) \\ &\iff \exists r > 0 :\ B(X,r) \cap A = \emptyset \\ &\iff X \notin \overline{A} \\ &\iff X \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{A} \end{aligned}$$

Para **(d)**, atenda-se a que

$$\begin{aligned} X \in \mathbb{R}^n \setminus int(A) &\iff X \notin int(A) \\ &\iff \forall r > 0 :\ B(X,r) \not\subset A \\ &\iff \forall r > 0 :\ B(X,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset \\ &\iff X \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \end{aligned}$$

■

Teorema 2

Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é fechado(aberto) se e só se o seu complementar $\mathbb{R}^n \setminus A$ é aberto(fechado).

Demonstração: Pelas definições de conjunto fechado e aberto e pela alínea **(c)** da propriedade anterior, conclui-se que

$$\begin{aligned} A \text{ é fechado} &\Leftrightarrow A = \overline{A} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus A = \mathbb{R}^n \setminus \overline{A} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus A = int(\mathbb{R}^n \setminus A) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus A \text{ é aberto.} \end{aligned}$$

■

Teorema 3 *São válidas as seguintes propiriedades:*

1. *Se $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ são abertos, então $A \cap B$ é aberto;*
2. *Se $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ são fechados, então $A \cup B$ é fechado;*
3. *Se $(A_i)_{i\in I}$ é uma família de abertos, então $\bigcup_{i\in I} A_i$ é aberto;*
4. *Se $(A_i)_{i\in I}$ é uma família de fechados, então $\bigcap_{i\in I} A_i$ é fechado.*

Demonstração:

1. Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos.
   Mostremos que $A \cap B \subseteq int(A \cap B)$, pois a inlusão ($\supseteq$) é trivial.
   Seja $X \in A \cap B$. Então $X \in A$ e $X \in B$. Como A e B são abertos, $X \in int(A)$ e $X \in int(B)$, pelo que, existem $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tais que $B(X, r_1) \subseteq A$ e $B(X, r_2) \subseteq B$. Tomando $r = \min\{r_1, r_2\}$, tem-se que $B(X, r) \subseteq B(X, r_1) \subseteq A$ e $B(X, r) \subseteq B(X, r_2) \subseteq B$, donde $B(X, r) \subseteq A \cap B$ e $X \in int(A \cap B)$;

2. Este ponto é consequência do ponto 1. e do Teorema 2. Com efeito,
$$\begin{array}{rcl} A, B \text{ são fechados} & \Rightarrow & \mathbb{R}^n \setminus A, \mathbb{R}^n \setminus B \text{ são abertos} \\ & \Rightarrow & (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B) \text{ é aberto} \\ & \Leftrightarrow & \mathbb{R}^n \setminus (A \cup B) \text{ é aberto} \\ & \Leftrightarrow & A \cup B \text{ é fechado.} \end{array}$$

3. Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família arbitrária de abertos.
   Mostremos que $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq int\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, pois a inlusão ($\supseteq$) é trivial.
   Seja $X \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Então $X \in A_k$ para algum $k \in I$. Como A_k é aberto, então $X \in int(A_k)$, existindo $r > 0$ tal que $B(X, r) \subseteq A_k \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. Logo $X \in int\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

4. Analogamente ao ponto 2., este ponto é consequência do ponto 3. e do Teorema 2. ■

Observações

1. Há conjuntos que não são abertos nem fechados. Por exemplo, $A = [0, 1[\times[0, 2]$;
2. Há conjuntos que são, simultaneamente, abertos e fechados. Os únicos exemplos são $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ (repare-se que, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é simultaneamente aberto e fechado se e só se $int(A) = \overline{A}$ se e só se $fr(A) = \emptyset$, pela Propriedade 3, alínea (b));
3. A intersecção infinita de abertos pode não ser um aberto.
   Por exemplo, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $A_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\times]1, 2[$ é um aberto em $\mathbb{R}^2$.
   No entanto, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}\times]1, 2[$ não é um aberto em $\mathbb{R}^2$;

4. A reunião infinita de fechados pode não ser um fechado.

   Por exemplo, o conjunto $B =]0,1[\times]0,1[$, não é um fechado em $\mathbb{R}^2$.
   No entanto, $B = \bigcup_{X \in B} \{X\}$, sendo cada $\{X\}$ um conjunto fechado em $\mathbb{R}^2$;

5. Para todo o conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, tem-se que $int(A)$ é aberto e $\overline{A}$ é fechado;

6. Se $A \subseteq B$; então $int(A) \subseteq int(B)$ e $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;

7. $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B), \quad int(A \cup B) \supseteq int(A) \cup int(B)$;

8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. ■

1.3.5 Conjunto Derivado

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $X \in \mathbb{R}^n$.

Dizemos que X é *ponto de acumulação* do conjunto A quando existem pontos de A, distintos de X, arbitrariamente próximos do ponto X, ou seja, quando

$$\forall r > 0 : (B(X,r) \setminus \{X\}) \cap A \neq \emptyset. \tag{23}$$

Designa-se por *derivado* de A o conjunto A' constituído por todos os pontos de acumulação de A.

Um ponto $X \in A$ diz-se um *ponto isolado* de A quando X não é ponto de acumulação de A, ou seja, quando

$$\exists r > 0 : B(X,r) \cap A = \{X\} \tag{24}$$

Exemplos

(a) Se $A = [0,1[\times[0,1[\cup\{(1,1),(2,2)\}$ então $A' = [0,1]\times[0,1]$ e $(2,2)$ é o único ponto isolado de A.

(b) Se $B = \left\{\left(\frac{1}{n},1\right) :\ n \in \mathbb{N}\right\}$ então $B' = \{(0,1)\}$ e todos os pontos de Y são isolados.

(c) Se $C = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ então $C' = \emptyset$ e todos os pontos de A são isolados.

(d) Se $D = \{(q,1) :\ q \in \mathbb{Q}\}$ então $D' = \mathbb{R}\times\{1\}$ e B não possui pontos isolados.

■

Propriedade 4 *Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Então:*

(a) $\overline{A} = A \cup A'$.

(b) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *é fechado se e só se* $A' \subseteq A$.

Demonstração:
Para (a), a inclusão no sentido recíproco é imediata a partir das definições.
Mostremos então que se $X \in \overline{A}$ mas $X \notin A$ então $X \in A'$.
Seja $X \in \overline{A} \setminus A$. Logo

$$\forall r > 0 : B(X,r) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad X \notin A$$

pelo que

$$\forall r > 0, \exists Y \in B(X,r) \cap A \quad \wedge \quad Y \neq X$$

donde

$$\forall r > 0,\ (B(X,r) \setminus \{X\}) \cap A \neq \emptyset$$

que equivale a dizer que $X \in A'$.

O ponto (b) surge como uma consequência do ponto (a). Deixo como exercício a formalização do raciocínio. ■

1.3.6 Conjunto compacto

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
Dizemos que A é um conjunto *limitado* quando existe uma bola que contém A ou seja, quando

$$\exists X \in \mathbb{R}^n, \exists r \in \mathbb{R}^+ : A \subseteq B(X,r). \tag{25a}$$

Uma vez que é sempre possível escolher $X = (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$, A será *limitado* quando

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ : A \subseteq B((0,\ldots,0),r). \tag{25b}$$

ou equivalentemente quando

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ : \forall X \in A, \| X \| \leq r \tag{25c}$$

Dizemos que A é um conjunto *compacto* se A é simultaneamente fechado e limitado.

Exemplos

1. $\mathbb{R}^n$ não é compacto porque não é limitado.

   $\emptyset$ é compacto;

2. $A =]0,1] \times [0,1]$ e $B = [0,+\infty[\times \{2\}$ não são compactos

   (A é limitado mas não é fechado; B é fechado mas não é limitado.);

3. $E = [0,1] \times [0,1]$ e $F = ([0,1] \cup \{5\}) \times \{3\}$ são compactos. ■

Exercícios

1. Considerando em $\mathbb{R}^2$ a distância euclidiana, determine o *interior*, a *aderência*, a *fronteira* e o *derivado* de cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

   $A =]0,2[\times]1,3[$ $\qquad$ $G = [0,2] \times (\mathbb{Q} \cap [3,4])$

   $B = [0,2] \times [1,3]$ $\qquad$ $H = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 1\right) : \ n \in \mathbb{N} \right\}$

   $C = [0,2] \times]1,3]$ $\qquad$ $I = \left\{ \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} \times [1,2]$

   $D =]0,2[\times \{3,4\}$ $\qquad$ $J = \left\{ (x,y) \ : \ \ x > y^2 \right\}$

   $E = [0,2] \times \mathbb{R}$ $\qquad$ $L = B((0,0),1)$

   $F = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\qquad$ $M = \{ (x,y) \ : \ \ 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 0 < y \leq x \}$

2. Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^2$ munido da norma euclidiana.

   (a) Apresente conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ tais que A seja limitado e B não seja limitado.

   (b) Diga se cada um dos seguintes conjuntos é ou não limitado.

   $A = \{ (x,y) \ : \ \ 0 \leq x < 1 \, , \ \ 0 \leq y \leq 3 \}$

   $B = \left\{ (x,y) \ : \ \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1 \right\}$

   $C = \{ (x,y) \ : \ \ x \leq 10 \, , \ \ 0 \leq y \leq \boldsymbol{e}^x \}$

   $D = \left\{ (x,y) : x = \operatorname{sen} a, y = \operatorname{tg} a, \frac{\pi}{4} \leq a < \frac{\pi}{2} \right\}$

   $E = \{ (x,y) \ : \ \ x \leq y \}$

   $F = \{ (x,y) \ : \ \ x = 1 \, , \ -1 \leq y \leq 1 \}$

$G = \{\, (1,n) \;:\; n \in \mathbb{N} \,\}$

$H = \left\{ \left(1, \frac{1}{n}\right) \;:\; n \in \mathbb{N} \right\}$

$I = (\, [0,2] \cap \mathbb{Q} \,) \times (\, [-1,2] \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \,)$

3. Em $\mathbb{R}^2$, apresente:

   (a) uma família de abertos cuja intersecção não seja um aberto;

   (b) uma família de fechados cuja reunião não seja um fechado.

4. Quando possível, apresente um subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ que:

   (a) não seja aberto nem fechado;

   (b) seja simultaneamente aberto e fechado;

   (c) seja aberto e limitado;

   (d) seja fechado e não limitado;

   (e) seja finito e não limitado;

   (f) coincida com o seu derivado;

   (g) coincida com a sua fronteira;

   (h) cuja fronteira seja o conjunto vazio.

5. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

   (a) se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ é aberto então A não é limitado;

   (b) se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ é aberto e $B \subset \mathbb{R}^2$ é fechado então $A \cup B$ não é aberto nem fechado;

   (c) se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ é aberto e $x \in A$ então $A \backslash \{\boldsymbol{x}\}$ é aberto;

   (d) se $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^2$ e B é fechado então A é fechado;

   (e) se $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^2$ e B é fechado então $\overline{A} \subseteq B$;

   (f) se $F \subseteq \mathbb{R}^2$ é fechado e $A \subseteq \mathbb{R}^2$ é aberto então $F \setminus A$ é fechado;

   (g) $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ é aberto;

   (h) $\left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \in A \,\right\}$, com A aberto de $\mathbb{R}$, é aberto;

   (i) se $A \subseteq \mathbb{R}$ não é aberto então A é fechado;

6. Diga quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ são compactos:

$A = \{\,(x,y) :\ x \geq 0\,\}$ $\qquad$ $B = \{\,(x,y) :\ x = \operatorname{sen} a\,,\ y = \cos a\,,\ 0 \leq a \leq \pi/2\,\}$

$C = \left\{\,(x,y) :\ x^2 + y^2 < 1\,\right\}$ $\qquad$ $D = \{\,(x,y) :\ xy > 1\,\} \cap \left\{\,(x,y) :\ x^2 + y^2 < 4\,\right\}$

$E = \{\,(x,y) :\ 0 \leq x \leq 1\,\}$ $\qquad$ $F = \{\,(x,y) :\ \log x \leq y \leq \boldsymbol{e}^x\,\}$

$G \subseteq \mathbb{R}^2\,,\ \ G$ finito $\qquad$ $H = \{\,(x,y) :\ x = 1/n\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ \ 1 \leq y \leq 3\,\}$

$I = \{\,(x,y) :\ x \leq y \leq 4\,\}$ $\qquad$ $J = \{\,(x,y) :\ x = 0\,,\ \ y \in [0,1]\,\}$

$L \subset [0,2[\times]1,3[\,,\ L$ fechado $\qquad$ $M = \{\,(x,y) :\ |x| + |y| \leq 1\,\}$

Capítulo 2

Sucessões em $\mathbb{R}^m$

Neste capítulo faremos uma extensão breve das principais propriedades das sucessões de números reais às sucessões de elementos do espaço $\mathbb{R}^m$. O estudo desenvolvido neste capítulo será útil nos capítulos seguintes, nomeadamente quando introduzirmos a noção de limite no contexto das funções de várias variáveis. Em todo o capítulo, iremos considererar o espaço $\mathbb{R}^m$ munido de uma norma $\|\cdot\|$.

2.1 Sucessão; subsucessão; sucessão componente

Uma *sucessão* em $\mathbb{R}^m$, *i.e.* uma sucessão de elementos de $\mathbb{R}^m$, é uma aplicação u de domínio $\mathbb{N}$ com valores em $\mathbb{R}^m$

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & n & \longmapsto & u(n)=u_n \end{array} \tag{1}$$

que a cada $n\in\mathbb{N}$ faz corresponder um único elemento $u_n\in\mathbb{R}^m$. A imagem por u do genérico n designa-se por *termo de ordem* n ou *termo geral* da sucessão. Cada termo u_n da sucessão é um elemento de $\mathbb{R}^m$, possuindo assim m coordenadas, digamos

$$u_n=(u_{1n},\,u_{2n},\,\ldots,\,u_{mn})\,,\quad \text{para cada } n\in\mathbb{N}\,. \tag{2}$$

Para indicar a sucessão u, usaremos as notações

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\qquad (u_n)_n\,,\qquad \text{ou}\qquad (u_{1n},\,u_{2n},\,\ldots,\,u_{mn})_n\,.$$

Exemplo 15

Em $\mathbb{R}^3$, consideremos a sucessão $(u_n)_n$ definida por $u_n=\left(\frac{1}{n},0,n+1\right)$, $n\in\mathbb{N}$.

Os seus termos são $u_1=(1,0,2)$, $u_2=\left(\frac{1}{2},0,3\right)$, $u_3=\left(\frac{1}{3},0,4\right)$, $\ldots$ ■

Dada uma sucessão $(u_n)_n$ em $\mathbb{R}^m$, uma sua *subsucessão* é uma qualquer restrição da aplicação $u\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, digamos a

$$\mathbb{N}^* = \{n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots\} \qquad \text{com} \qquad n_1 < n_2 < \cdots < n_p < \ldots$$

Tal subsucessão representa-se por $\left(u_{n_p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$.

Exemplo 16

Consideremos a sucessão $(u_n)_n$ de $\mathbb{R}^3$ definida no Exemplo 15. Uma subsucessão de $(u_n)_n$ é, por exemplo, a sucessão constituída pelos termos de ordem par, *i.e.* por

$$u_{n_1} = u_2 = \left(\frac{1}{2}, 0, 3\right), \quad u_{n_2} = u_4 = \left(\frac{1}{4}, 0, 5\right), \quad u_{n_3} = u_6 = \left(\frac{1}{6}, 0, 7\right), \ \ldots$$

escrita na forma geral por

$$(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}} = (u_{2p})_{p\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2p}, 0, 2p+1\right)_{p\in\mathbb{N}}.$$

Outro exemplo é a sucessão constituída pelos termos cuja ordem é múltipla de 10,

$$u_{n_1} = \boldsymbol{u}_{10} = \left(\frac{1}{10}, 0, 11\right), \quad u_{n_2} = \boldsymbol{u}_{20} = \left(\frac{1}{20}, 0, 21\right), \quad u_{n_3} = \boldsymbol{u}_{30} = \left(\frac{1}{30}, 0, 31\right), \quad \ldots$$

escrita na forma geral por

$$(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}} = (u_{10p})_{p\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{10p}, 0, 10p+1\right)_{p\in\mathbb{N}}.$$

Não são subsucessões de $(u_n)_n$:

1. sequências finitas
$$(1,0,2)\,, \left(\frac{1}{2}, 0, 3\right), \left(\frac{1}{3}, 0, 4\right);$$
2. troca de ordem de alguns termos
$$(1,0,2)\,, \left(\frac{1}{3}, 0, 4\right), \left(\frac{1}{2}, 0, 3\right), \left(\frac{1}{4}, 0, 5\right), \left(\frac{1}{5}, 0, 6\right), \ldots;$$
3. existência de termos que não são termos de $(u_n)_n$
$$(1,0,2)\,, (1,0,0)\,, \left(\frac{1}{3}, 0, 4\right), \left(\frac{1}{4}, 0, 5\right), \left(\frac{1}{5}, 0, 6\right), \ldots$$

■

Dada uma sucessão $(u_n)_n$ em $\mathbb{R}^m$,

$$u_n = (u_{1n}, u_{2n}, \ldots, u_{mn})_n,$$

designa-se por *sucessão das primeiras componentes* de $(u_n)_n$ à sucessão em $\mathbb{R}$, $(u_{1n})_n$, isto é

$$u_{11}, u_{12}, u_{13}, \ldots, u_{1n}, \ldots.$$

A sucessão em $\mathbb{R}$, $(u_{2n})_n$, cujos termos são

$$u_{21}, u_{22}, u_{23}, \ldots, u_{2n}, \ldots,$$

designa-se por *sucessão das segundas componentes.*
Assim, definem-se as m *sucessões componentes* em $\mathbb{R}$

$$(u_{kn})_n\,, \quad k = 1, 2, \ldots, m\,.$$

da sucessão $(u_n)_n$.
Definir uma sucessão em $\mathbb{R}^m$ equivale assim a definir m sucessões em $\mathbb{R}$. Esta identificação será aproveitada ao longo de todo o capítulo, na medida em que irá permitir uma transposição imediata, para sucessões de $\mathbb{R}^m$, das propriedades já estudadas para as sucessões reais no Cálculo.

2.2 Sucessão limitada

Uma sucessão $(u_n)_n$ diz-se *limitada* quando o conjunto dos seus termos,

$$\mathcal{T} = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}\,,$$

é limitado em $\mathbb{R}^m$, ou seja, quando

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ : \ \| u_n \| \leq M\,, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Propriedade 5
Toda a subsucessão de uma sucessão limitada é também limitada.

Demonstração: Sendo $(u_n)_n$ uma sucessão limitada, então o conjunto dos seus termos

$$\mathcal{T} = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$$

é limitado. Dada uma subsucessão $(u_{n_p})_p$ de $(u_n)_n$, tem-se que o conjuntos dos seus termos

$$\mathcal{S} = \{u_{n_p} : p \in \mathbb{N}\}$$

está contido em $\mathcal{T}$, logo S é também limitado, donde a subsucessão $(u_{n_p})_p$ é limitada. ■

Um resultado importante, que se revela muito útil quando se trata de averiguar se uma sucessão é limitada, é o seguinte.

Teorema 4

Uma sucessão $(u_n)_n$ é limitada em $\mathbb{R}^m$ se e só se cada uma das suas m sucessões componentes, $(u_{kn})_n$, $k = 1, 2, \ldots, m$, é limitada em $\mathbb{R}$.

Demonstração

Vamos fazer a demonstração recorrendo à norma infinito (*cf.* a definição (10*b*) do capítulo I).

- Suponha-se que $(u_n)_n$ é limitada em $\mathbb{R}^m$.
  Então $\quad \exists M \in \mathbb{R}^+ : \quad \| u_n \|_\infty \leq M \,, \quad \forall n \in \mathbb{N} \,,$
  ou seja, $\quad \exists M \in \mathbb{R}^+ : \quad \max \{ \mid u_{1n} \mid, \mid u_{2n} \mid, \ldots, \mid u_{mn} \mid \} \leq M \,.$
  Consequentemente, $\quad \exists M \in \mathbb{R}^+ : \quad \forall n \in \mathbb{N} \,, \quad (\mid u_{1n} \mid \leq M \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \mid u_{mn} \mid \leq M) \,,$
  pelo que cada sucessão $(u_{kn})_n$ é limitada em $\mathbb{R}$.

- Reciprocamente, suponha-se que cada sucessão $(u_{kn})_n$ é limitada em $\mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, m$.
  Então

$$\begin{array}{llll} \exists M_1 \in \mathbb{R}^+ : & \mid u_{1n} \mid \leq M_1 \,, & \forall n \in \mathbb{N}, \\ \exists M_2 \in \mathbb{R}^+ : & \mid u_{2n} \mid \leq M_2 \,, & \forall n \in \mathbb{N}, \\ \ldots \qquad\quad & \ldots \qquad\quad & \ldots \qquad\quad & \ldots \\ \exists M_m \in \mathbb{R}^+ : & \mid u_{mn} \mid \leq M_m \,, & \forall n \in \mathbb{N}, \end{array}$$

  e pondo $M = \max \{M_1, M_2, \cdots, M_m\}$, resulta

$$(\mid u_{1n} \mid \leq M, \quad \mid u_{2n} \mid \leq M, \quad \cdots, \quad \mid u_{mn} \mid \leq M) \,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

  donde

$$\| u_n \|_\infty \leq M \,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

  significando que a sucessão $(u_n)_n$ é limitada em $\mathbb{R}^m$. ■

Exemplo 17

Consideremos em $\mathbb{R}^2$ as sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ definidas por

$$u_n = \left(1 \,, \, \frac{(-1)^n}{n^2} \right) \,, \quad v_n = \left(n \,, \, \frac{(-1)^n}{n^2} \right) \,, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Pelo Teorema 4, é imediato que $(u_n)_n$ é limitada e que e $(v_n)_n$ não é limitada. ■

2.3 Limite de uma sucessão

Dada uma sucessão $(u_n)_n$ em $\mathbb{R}^m$ e um elemento $L \in \mathbb{R}^m$, dizemos que a sucessão $(u_n)_n$ *converge* para L, ou que L é o *limite* da sucessão $(u_n)_n$, quando existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão estão tão próximos de L quanto se queira. Ou seja, a partir de uma ordem suficientemente grande, todos os termos da sucessão estão arbitrariamente próximos de L.
Formalmente, dizemos que $(u_n)_n$ *converge* para L, denotando-se por

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L \quad \text{ou} \quad u_n \to L$$

se

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow \| u_n - L \| < \delta \tag{5}$$

ou equivalentemente

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow u_n \in B(L, \delta) \tag{6}$$

Da definição (6) sai que, quando $\lim_n u_n = L$, é possível colocar todos os termos da sucessão numa bola aberta centrada em L com raio arbitrariamente pequeno, à excepção, possivelmente, de um número finito de termos (aqueles até à ordem p, *inclusive*).

Se uma sucessão $(u_n)_n$ converge para algum $L \in \mathbb{R}^m$, diz-se que $(u_n)_n$ é *convergente*. Caso contrário, diz-se que $(u_n)_n$ é *divergente*.

Exercício 1
Sejam $(u_n)_n$ uma sucessão de $\mathbb{R}^m$ e $L \in \mathbb{R}^m$.

(a) Use a definição de limite para mostrar que

$$\lim_n u_n = L \implies \lim_n \| u_n \| = \| L \| \tag{7}$$

Sugestão: Comece por mostrar que

$$\| u_n \| \leq \| L \| + \| u_n - L \| \quad \wedge \quad \| L \| \leq \| u_n \| + \| u_n - L \|$$

e conclua que

$$| \| u_n \| - \| L \| | \leq \| u_n - L \|$$

(b) Mostre que o recíproco da implicação (7) é verdadeiro se e só se $L = (0, \ldots, 0)$. ■

Teorema 5

Sejam $(u_n)_n$ *uma sucessão em* $\mathbb{R}^m$ *e* $L \in \mathbb{R}^m$, *com*

$$u_n = (u_{1n}, u_{2n}, \ldots, u_{mn}), \quad L = (l_1, l_2, \ldots, l_m).$$

Então $(u_n)_n$ *converge para* L *se e só se cada uma das suas* m *sucessões componentes* $(u_{kn})_n$ *converge para* l_k, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Demonstração (recorrendo à norma infinito)

- Suponha-se que $(u_n)_n$ converge para L.
  Então $\forall \delta > 0\,, \quad \exists p \in \mathbb{N} :\ n > p \Longrightarrow \| u_n - L \|_\infty < \delta\,,$
  ou seja, $\forall \delta > 0\,, \quad \exists p \in \mathbb{N} :\ n > p \Longrightarrow \max \{ \mid u_{1n} - l_1 \mid, \ldots, \mid u_{mn} - l_m \mid \} < \delta\,,$
  donde $\forall \delta > 0\,, \quad \exists p \in \mathbb{N} :\ n > p \Longrightarrow (\mid u_{1n} - l_1 \mid < \delta \wedge \ldots \wedge \mid u_{mn} - l_m \mid < \delta)\,,$
  pelo que cada sucessão $(u_{kn})_n$ converge para $l_k\,,\ k = 1, 2, \ldots, m$.

- Reciprocamente, suponha-se que cada sucessão $(u_{kn})_n$ converge para $l_k\,,\ k = 1, 2, \ldots, m$. Então, dado $\delta > 0$, arbitrário,

  $$\begin{array}{llll} \exists p_1 \in \mathbb{N}\ : & n > p_1 \implies |u_{1n} - l_1| < \delta \\ \exists p_2 \in \mathbb{N}\ : & n > p_2 \implies |u_{2n} - l_2| < \delta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \exists p_m \in \mathbb{N}\ : & n > p_m \implies |u_{mn} - l_m| < \delta \end{array}$$

  e pondo $p = \max \{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$, resulta que

  $$n > p \implies (\mid u_{1n} - a_1 \mid < \delta\,, \quad \mid u_{2n} - a_2 \mid < \delta\,, \quad \cdots, \quad \mid u_{mn} - a_m \mid < \delta)$$

  Consequentemente,

  $$\forall \delta > 0\,, \ \exists p \in \mathbb{N} :\ n > p \implies \| u_n - L \|_\infty < \delta$$

  significando que a sucessão $(u_n)_n$ converge para L. ∎

O Teorema 5 permite estender, de forma imediata, às sucessões em $\mathbb{R}^m$ muitos dos resultados conhecidos para sucessões de números reais. Alguns exemplos são os seguintes.

Propriedade 6

(a) *Se* $(u_n)_n$ *é convergente em* $\mathbb{R}^m$ *então o seu limite é único.*

(b) *Se* $(u_n)_n$ *converge para* $L \in \mathbb{R}^m$ *então qualquer sua subsucessão converge para* L.

(c) *Toda a sucessão convergente é limitada.*

(d) *Dadas as sucessões* $(u_n)_n$ *e* $(v_n)_n$ *convergentes para* U *e* V*, respectivamente, então*

$$(i) \quad \lim_n (u_n + v_n) = U + V \tag{8a}$$

$$(ii) \quad \lim_n (\alpha u_n) = \alpha U \ , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{8b}$$

$$(iii) \quad \lim_n \langle u_n \, , v_n \rangle = \langle U \, , V \rangle \qquad \text{produto interno euclidiano} \tag{8c}$$

$$(iv) \quad \lim_n \| \, u_n \, \| = \| \, U \, \| \qquad \text{norma qualquer} \tag{8d}$$

Demonstração:

(a) Seja $(u_n)_n$ uma sucessão convergente em $\mathbb{R}^m$.

Suponhamos que existem $A, B \in \mathbb{R}^m$, $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, tais que $\lim_n u_n = A$ e $\lim_n u_n = B$. Pelo Teorema 5, conclui-se que, por um lado, cada $(u_{kn})_n$ converge para a_k e, por outro lado, cada $(u_{kn})_n$ converge para b_k. Da unicidade do limite de sucessões reais, sai que $a_k = b_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, donde se conclui que $A = B$.

(b) Seja $(u_n)_n$ uma sucessão convergente para A, com

$$u_n = (u_{1n}, u_{2n}, \ldots, u_{mn}) \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \, , \qquad A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

Pelo Teorema 5, cada $(u_{kn})_n$ converge para a_k.

Seja agora $\left(u_{n_p}\right)_p$ uma subsucessão de $(u_n)_n$, com

$$u_{n_p} = \left(u_{1n_p}, u_{2n_p}, \ldots, u_{mn_p}\right), \ \ \forall p \in \mathbb{N} \, .$$

Para cada $k = 1, 2, \ldots, m$, a sucessão real $\left(u_{kn_p}\right)_p$ é uma subsucessão da sucessão real $(u_{kn})_n$ e, portanto, também $\left(u_{kn_p}\right)_p$ converge para a_k. Logo, $\left(u_{n_p}\right)_p$ converge para A.

(c) Seja $(\boldsymbol{u}_n)_n$ uma sucessão convergente. Pelo Teorema 5, cada uma das suas sucessões componentes é também convergente (em $\mathbb{R}$), logo limitada. Pelo Teorema 4, a sucessão dada é também limitada.

(d) Para a parte (i), basta atender a que as sucessões componentes de $(u_n + v_n)_n$ são $(u_{kn} + v_{kn})_n$, cada uma convergente para $a_k + b_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$ e mais uma vez usar o Teorema 5.

Para a parte (ii), analogamente basta atender a que as sucessões componentes de $(\alpha u_n)_n$ são $(\alpha u_{kn})_n$, cada uma convergente para αa_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ e usar o Teorema 5.

Para a parte (iii), atenda-se a que

$$\langle u_n \, , v_n \rangle = u_{1n} v_{1n} + u_{2n} v_{2n} + \cdots + u_{mn} v_{mn}$$

e a que cada sucessão real $(u_{kn} v_{kn})_n$ converge para $a_k b_k$.

Logo, a sucessão real $(u_{1n} v_{1n} + u_{2n} v_{2n} + \cdots + u_{mn} v_{mn})_n$ converge para $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_m$, ou seja, para $\langle A \, , B \rangle$.

Para a parte (iv), atender ao Exercício 1. No caso particular da norma euclidiana, bastaria usar o resultado de (iii) e atender a que $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot , \cdot \rangle}$.

Teorema 6 [Bolzano-Weierstrass ($\mathbb{R}^m$)]

Qualquer sucessão limitada em $\mathbb{R}^m$ *possui uma subsucessão convergente.*

Demonstração:
Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão limitada em $\mathbb{R}^m$. Pelo Teorema 4, as suas sucessões componentes, $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}},\ k = 1, 2, \ldots, m$, são também limitadas (em $\mathbb{R}$). Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass para sucessões reais, concluimos que, em particular a sucessão componente $(u_{1n})_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsucessão convergente, digamos $(u_{1n_p})_{p\in\mathbb{N}}$, para um número real l_1.
A subsucessão $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, logo a sua $2^{\underline{a}}$ sucessão componente $(u_{2n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ é também limitada e mais uma vez pelo teorema de Bolzano-Weierstrass para sucessões reais conclui-se a existência de $(u_{2n_{p_s}})_{s\in\mathbb{N}}$ subsucessão de $(u_{2n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ convergente para um número real l_2.
Assim a subsucessão $(u_{n_{p_s}})_{s\in\mathbb{N}}$ é uma subsucessão de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com a $1^{\underline{a}}$ e a $2^{\underline{a}}$ sucessão componente convergentes para l_1 e l_2 respectivamente.

Procedendo de forma análoga, durante mais $m-2$ etapas, constró-se uma subsucessão de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para um $L = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$. ■

2.4 Sucessão de Cauchy

A terminar este capítulo, vamos agora identificar o conceito de sucessão de Cauchy, no contexto das sucessões em $\mathbb{R}^m$.

À semelhança do que se passa em $\mathbb{R}$, dizemos que uma sucessão $(\boldsymbol{u}_n)_n$ de elementos de $\mathbb{R}^m$ é uma *sucessão de Cauchy* quando a partir de uma ordem suficientemente grande, todos os termos da sucessão estão arbitrariamente próximos uns dos outros. Formalmente, dizemos que uma sucessão $(u_n)_n$ em $\mathbb{R}^n$ é de *Cauchy* quando

$$\forall \delta > 0,\ \exists p \in \mathbb{N}\colon\ k > p,\ \ell > p \implies \| u_k - u_\ell \| < \delta \tag{9}$$

Em termos de sucessões componentes, podemos estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 7
Seja $(u_n)_n$ uma sucessão em $\mathbb{R}^m$ com $u_n = (u_{1n},\ u_{2n},\ \ldots,\ u_{mn})$. Então $(u_n)_n$ é sucessão de Cauchy se e só se cada sucessão componente $(u_{kn})_n$ é sucessão de Cauchy.

Demonstração: Exercício (usar a norma infinito). ■

Como consequência do Teorema 5, do Teorema 7, e da equivalência, em $\mathbb{R}$, das noções de sucessão de Cauchy e de sucessão convergente, obtém-se o seguinte resultado.

Teorema 8
Em $\mathbb{R}^m$, uma sucessão $(u_n)_n$ é de Cauchy se e só se é convergente.

Demonstração:

Articulando de forma conveniente os resultados referidos, vem sucessivamente

$$
\begin{aligned}
&(u_n)_n \text{ é uma sucessão de Cauchy em } \mathbb{R}^m \\
&\qquad \Longleftrightarrow (u_{kn})_n \text{ é uma sucessão de Cauchy em } \mathbb{R}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, m \qquad \text{(Teorema 7)} \\
&\qquad \Longleftrightarrow (u_{kn})_n \text{ é uma sucessão convergente em } \mathbb{R}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, m \\
&\qquad \Longleftrightarrow (u_n)_n \text{ é uma sucessão convergente em } \mathbb{R}^m\,. \qquad \text{(Teorema 5)}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 2

1. Considere a seguinte sucessão em $\mathbb{R}^4$:

$$(v_n)_n = \left(1 - \frac{1}{n}, (-1)^n, \frac{2n+3}{3n}, \cos(n\pi)\right)_n.$$

   (a) Identifique as sucessões componentes da sucessão $(v_n)_n$;

   (b) Determine o termo de ordem 7 da sucessão $(v_n)_n$;

   (c) Determine a subsucessão dos termos pares de $(v_n)_n$;

   (d) Determine a subsucessão dos termos ímpares de $(v_n)_n$;

   (e) Apresente uma sucessão $(w_n)_n$ em $\mathbb{R}^4$ que não seja subsucessão de $(v_n)_n$, mas que

$$\{w_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{v_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

   (f) Mostre que a sucessão $(v_n)_n$ é limitada.

2. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \{(3,2,1), (1,0,0), (0,0,0)\}.$$

   (a) Apresente, caso exista, uma sucessão em $\mathbb{R}^3$ cujo conjunto dos seus termos seja A;

   (b) Apresente, caso exista, uma sucessão em $\mathbb{R}^3$ não limitada cujo conjunto dos seus termos contenha A;

   (c) Apresente, caso exista, uma sucessão em $\mathbb{R}^3$ cujo conjunto dos seus termos contenha A e a sucessão das $3^{\underline{a}}$ componentes seja constante;

   (d) Apresente, caso exista, uma sucessão em $\mathbb{R}^3$ não limitada que possua uma subsucessão com o conjunto dos termos estritamente contido em A.

3. Mostre que um sucessão $(u_n)_n$ em $\mathbb{R}^m$ é limitada se e só se cada uma das suas m sucessões componentes é limitada em $\mathbb{R}$.
   Sugestão: Use a norma do máximo.

4. Considere a seguinte sucessão em $\mathbb{R}^3$:

$$(u_n)_n = \left(\frac{1}{n}, (-1)^n, n\text{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_n .$$

   (a) Identifique a sucessão das 3ª componentes da sucessão $(u_n)_n$;

   (b) Apresente, caso exista, uma subsucessão de $(u_n)_n$ limitada;

   (c) Apresente, caso exista, uma subsucessão de $(u_n)_n$ não limitada;

   (d) A sucessão $(u_n)_n$ é limitada? Justifique.

5. Usando a definição de limite de uma sucessão, mostre que

$$\lim_n \left(\frac{2}{n+5}, \frac{4n+2}{n+5}\right) = (0,4)$$

6. Calcule, caso existam, $\lim_n a_n$ e $\lim_n b_n$ para:

   (a) $a_n = \left(\frac{\sqrt{n}}{n^2}, -2+\frac{4n}{1+n^3}, 3\right)$, $\quad b_n = \left(\frac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3}, \sqrt[3]{n^3+1}, 0\right)$

   (b) $a_n = (\cos(n\pi), 0, \text{sen}(n\pi))$, $\quad b_n = \left((-1)^n\frac{n+1}{e^n}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)$

   (c) $a_n = \left(\frac{n}{\log^2(n+3)}, 0\right)$, $\quad b_n = \left(\frac{\text{sen}\, n}{n}, n\text{sen}\frac{1}{n}, \text{sen}\frac{\pi}{n}\right)$

   (d) $a_n = (\pi, 0, e)$, $\quad b_n = \begin{cases} \left(\frac{n+1}{2n}, 0\right) & \text{se } n \text{ é par} \\ \left(\frac{1}{2}, e^{-n}\right) & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

   (e) $a_n = \begin{cases} \left(\frac{1+n}{2n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) & \text{se } n \text{ é par} \\ \left(\frac{1-n}{2n}, e^{-n}\right) & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

   (f) $a_n = \begin{cases} \left(n^2+2, \frac{1}{n}\right) & \text{se } n < 12 \\ \left(\frac{n+3}{-2n}, e^{-n}\right) & \text{se } n \geq 12 \end{cases}$

   (g) $a_n = \begin{cases} \left(\frac{\cos n}{n+1}, 0\right) & \text{se } n = 3k-2 \\ (0,0) & \text{se } n = 3k-1, \quad k = 1,2,3,\ldots \\ \left(e^{-n^2}, \log(n) - \log(n+1)\right) & \text{se } n = 3k \end{cases}$

7. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é *verdadeira* ou *falsa*:

   (a) toda a subsucessão de uma sucessão convergente é convergente;

   (b) toda a subsucessão de uma sucessão divergente é divergente;

   (c) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são sucessões divergentes então $(u_n + v_n)_n$ é divergente;

   (d) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são sucessões divergentes então $(\langle u_n, v_n\rangle)_n$ é divergente;

   (e) $\lim_n u_n = 0$ se e só se $\lim_n \| u_n \| = 0$;

   (f) $\lim_n u_n = a$, com $a \neq 0$, se e só se $\lim_n \| u_n \| = \| a \|$;

   (g) se $(u_n)_n$ e $(w_n)_n$ são sucessões tais que $\lim_n u_n = \lim_n w_n = 0$ e $(v_n)_n$ é outra sucessão de $\mathbb{R}^m$ para a qual, a partir de uma certa ordem p, se tem $\| u_n \| \leq \| v_n \| \leq \| w_n \|$, $\forall n > p$, então $\lim_n v_n = 0$;

   (h) se $(u_n)_n$ e $(w_n)_n$ são sucessões tais que $\lim_n u_n = \lim_n w_n = a$, com $a \neq 0$, e $(v_n)_n$ é uma sucessão para a qual, a partir de uma certa ordem p, se tem $\| u_n \| \leq \| v_n \| \leq \| w_n \|$, $\forall n > p$, então $\lim_n v_n = a$;

   (i) se $(u_n)_n$ é uma sucessão limitada então $(u_n)_n$ é uma sucessão de Cauchy;

   (j) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são sucessões tais que $(u_n)_n$ e $(u_n - 2v_n)_n$ são convergentes então $(v_n)_n$ é convergente;

   (k) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são sucessões reais convergentes então $\left(1 + u_n\,,\, \frac{u_n}{n}\,,\, u_n - 2v_n\right)_n$ é uma sucessão de Cauchy;

   (l) se $(u_n)_n$ é uma sucessão tal que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito então $(u_n)_n$ é convergente;

   (m) se $(u_n)_n$ é uma sucessão tal que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \{(1,1,1),(1,2,3)\}$ então $(u_n)_n$ é divergente.

8. Quando possível, apresente uma sucessão de $\mathbb{R}^3$ que seja:

   (a) de Cauchy mas não convergente;

   (b) de Cauchy mas não limitada;

   (c) limitada mas não de Cauchy;

   (d) não limitada e que possua uma subsucessão convergente;

   (e) convergente para $(0, 1, \boldsymbol{e})$;

   (f) divergente e possua uma subsucessão de Cauchy;

   (g) convergente para $(0,0,0)$ e com todos os termos na bola $B((0,0,0),1)$;

   (h) divergente e com todos os termos na bola $((0,0,0),1)$;

(i) convergente para $(0,0,0)$ e com todos os termos em $\mathbb{R}^3 \setminus B((0,0,0),1)$;

(j) de Cauchy e que possua uma subsucessão divergente;

(k) divergente e que possua uma subsucessão convergente para $(e,\pi,\sqrt{2})$;

(l) convergente e que possua uma subsucessão não limitada;

(m) convergente para $(0,0,0)$ e que possua uma subsucessão convergente para $(0,1,0)$;

(n) de Cauchy, com termos em $B((0,0,0),1)$ e em $B((5,5,5),1)$.