Integrais Múltiplos

- Integral de Riemann

Apresentemos uma Noção intuitiva ($n=2$)

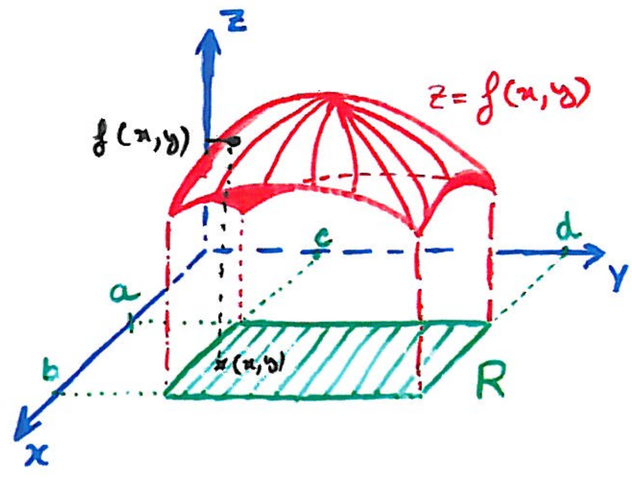
Seja

$$f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

função limitada definida em

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

e, por simplicidade suponha-se $f(x,y) > 0$



Pretende-se calcular o Volume do sólido $\mathcal{S}$ limitado por

- Rectângulo R.
- Planos: $x=a$; $x=b$; $y=c$; $y=d$
- Superfície $z = f(x,y)$

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in R \text{ e } 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

Método da exaustão:

• Aproximar sucessivamente o valor de

$$vol(\mathcal{S})$$

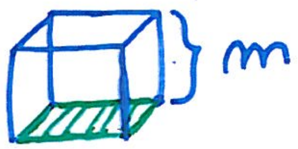
por defeito e por excesso obtendo, em cada passo, "melhores aproximações":

$\boxed{1^{\circ}\text{ Passo}}$

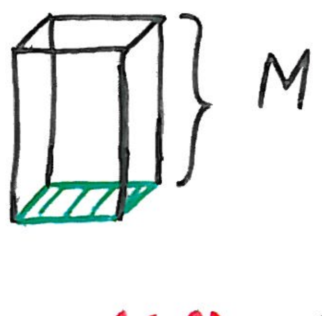
Defina-se

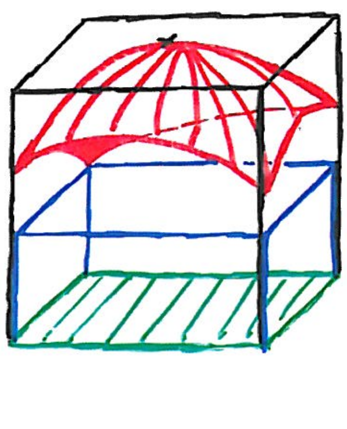
$$m = \inf_{(x,y)\in R} f(x,y) \; ; \qquad M = \sup_{(x,y)\in R} f(x,y)$$

→ Por defeito: $s = vol(\mathcal{S}) \simeq m \times \text{área}(R)$



→ Por excesso: $S = vol(\mathcal{S}) \simeq M \times \text{área}(R)$



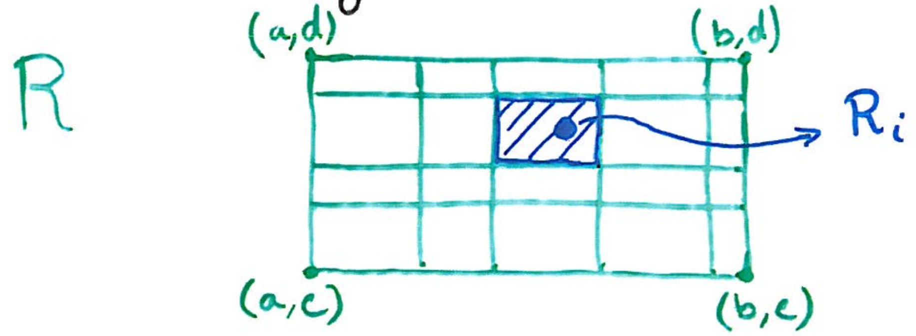


$$s \leq vol(\mathcal{S}) \leq S$$

Para melhorar

Procede-se da seguinte forma:

a) Decompor o rectângulo R em vários subrectângulos R_i

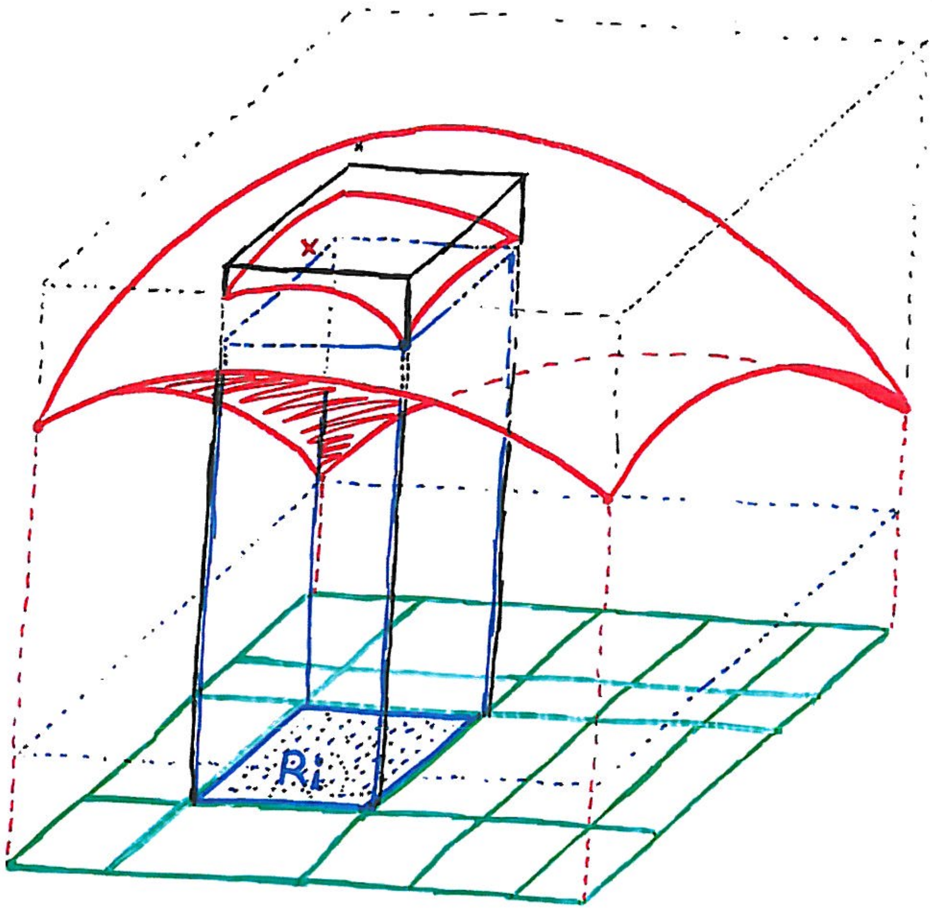


b) Em cada R_i, aplica-se o procedimento do 1° Passo. Assim

$$m_i = \inf_{(x,y)\in R_i} f(x,y) \qquad M_i = \sup_{(x,y)\in R_i} f(x,y)$$

O volume de cada porção S_i do sólido S que assenta sobre R_i pode ser aproximado

- Por defeito: $s_i = m_i \times \text{área}\,(R_i)$
- Por excesso: $S_i = M_i \times \text{área}\,(R_i)$



$s_i = m_i \times$ área (R_i) (Volume do paralelepípedo interior)

$S_i = M_i \times$ área (R_i) (Volume do paralelepípedo exterior)

c) Estima-se então o volume de $\mathcal{S}$ por:

$$s = \sum_i s_i = \sum_i m_i \times \text{área}(R_i) \quad \text{(defeito)}$$

$$S = \sum_i S_i = \sum_i M_i \times \text{área}(R_i) \quad \text{(Excesso)}$$

Aproximações óptimas

- Aumentando o número de subrectângulos R_i, as sucessivas aproximações melhoram, onde

  s, por defeito, vai aumentando;

  S, por excesso, vai diminuindo

- Fazendo o nº de subrectângulos R_i tender para $+\infty$, se existir o volume do sólido $\mathcal{S}$, então

  a "maior" das aproximações por defeito

  e a "menor" das aproximações por excesso

  irão, ambas, confundir-se com vol ($\mathcal{S}$).

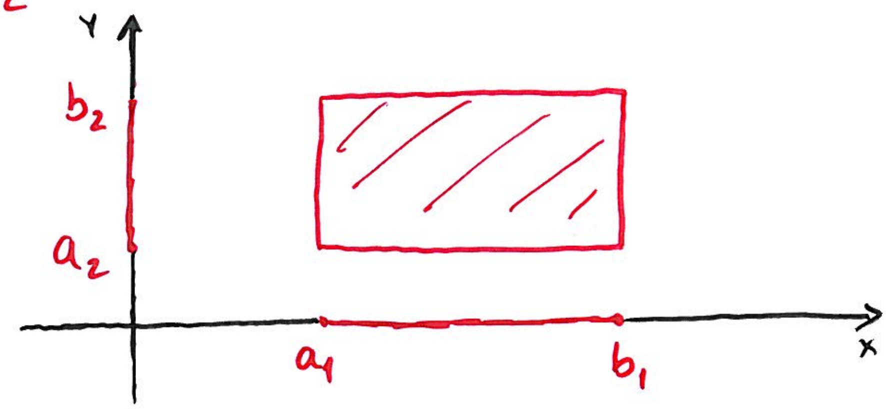
Formalização do integral (em $\mathbb{R}^n$)

- **Bloco** em $\mathbb{R}^n$

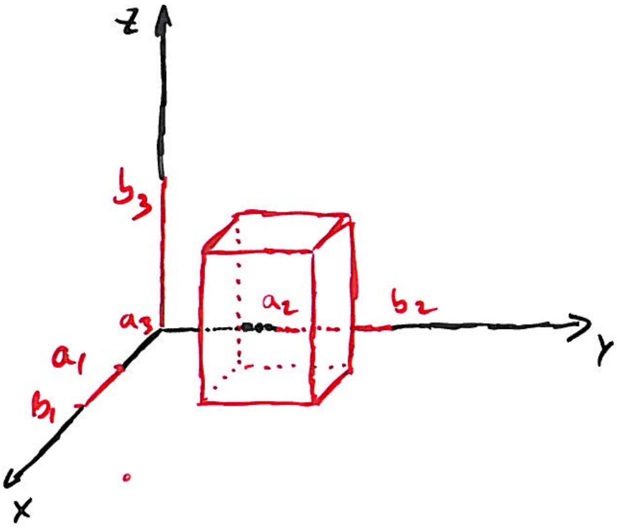
$$R = \underbrace{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]}_{\text{produto cartesiano de } n \text{ intervalos}}$$

- Em $\mathbb{R}$

- Em $\mathbb{R}^2$



- Em $\mathbb{R}^3$



O volume do bloco R é definido por:

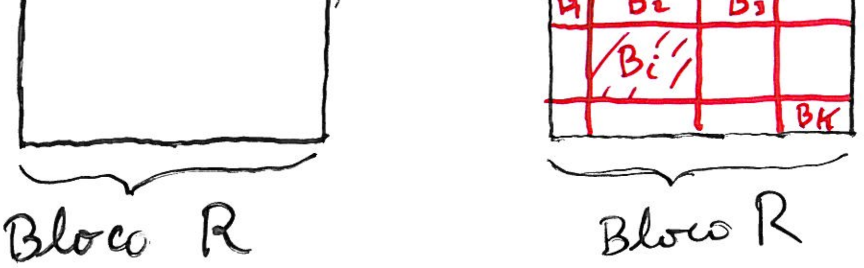
$$vol(R) = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_n - a_n)$$

Notas:

- Um segmento de recta no plano tem volume zero.
- Um rectângulo no espaço tem volume zero
- Um ponto na recta tem volume zero.

Uma partição $\mathcal{P}$ de um bloco R é uma decomposição de R em sub-blocos

Em $\mathbb{R}^2$



Bloco R   Bloco R

Partição : $\mathcal{P} = \{B_1, B_2, \ldots, B_K\}$

2 Integral sobre um bloco

Seja
$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{limitada}$$
e A um bloco em $\mathbb{R}^n$.

Definam-se
$$m = \inf_{x \in A} f(x) \quad ; \quad M = \sup_{x \in A} f(x)$$

Somas de Darboux

Seja $\mathcal{P}$ partição arbitrária do bloco A em sub-blocos B. Definam-se
$$m_B = \inf_{x \in B} f(x) \quad ; \quad M_B = \sup_{x \in B} f(x)$$

- Define-se somas de Darboux de f relativamente à partição $\mathcal{P}$ por

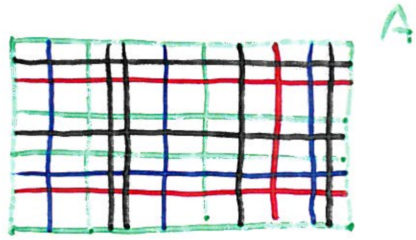
→ soma inferior
$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{B \in \mathcal{P}} m_B \times \mathrm{vol}(B)$$
aproximação por defeito

→ soma superior
$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{B \in \mathcal{P}} M_B \times \mathrm{vol}(B)$$
aproximação por excesso

Definição: Integral sobre um bloco

Considere todas as partições $\mathcal{P}$ de um bloco A

→ Integral inferior de f em A



$$\underline{\int_A} f = \underline{\int_A} f(x)\,dx := \sup_{\mathcal{P}} s(f, \mathcal{P})$$

i.e. o maior das somas inferiores.

→ Integral superior de f em A

$$\overline{\int_A} f = \overline{\int_A} f(x)\,dx := \inf_{\mathcal{P}} S(f, \mathcal{P})$$

i.e. o menor das somas inferiores.

Definição: f diz-se integrável sobre o bloco A quando

$$\underline{\int_A} f(x)\,dx = \overline{\int_A} f(x)\,dx$$

e o valor comum chama-se integral de f sobre A, representando-se por

$$\int_A f = \int_A f(x)\,dx\,.$$