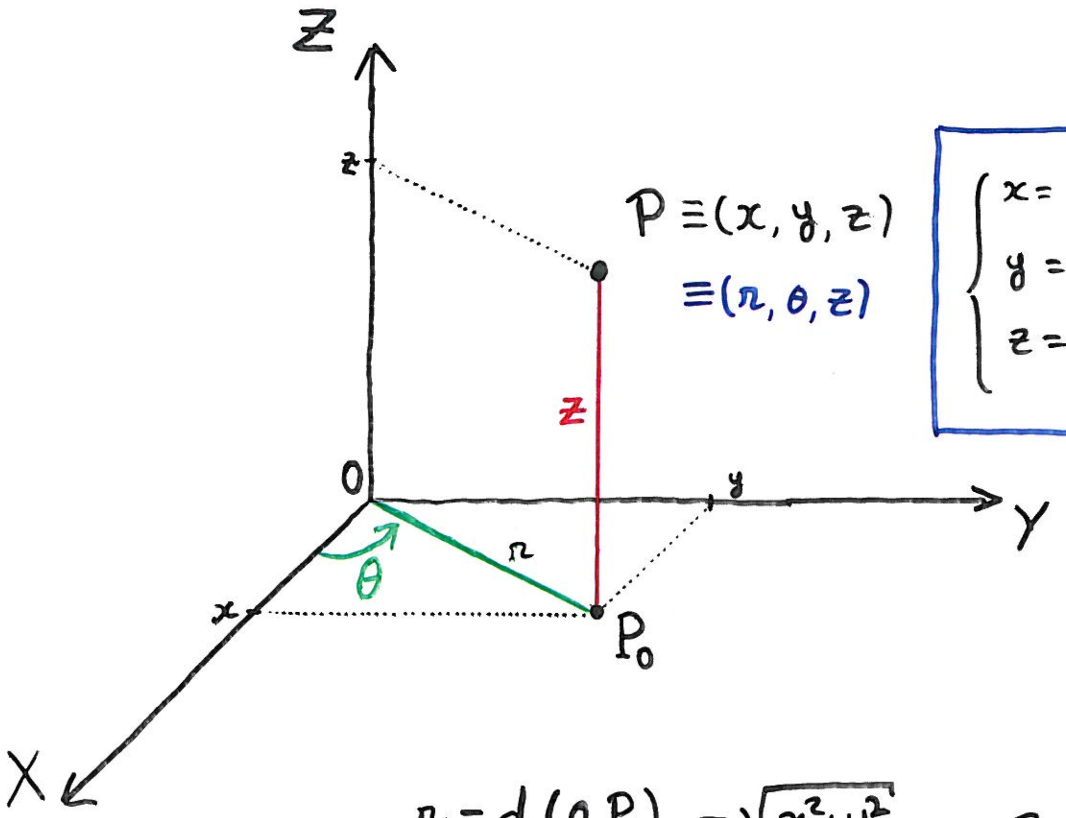
= Coordenadas Cilíndricas =

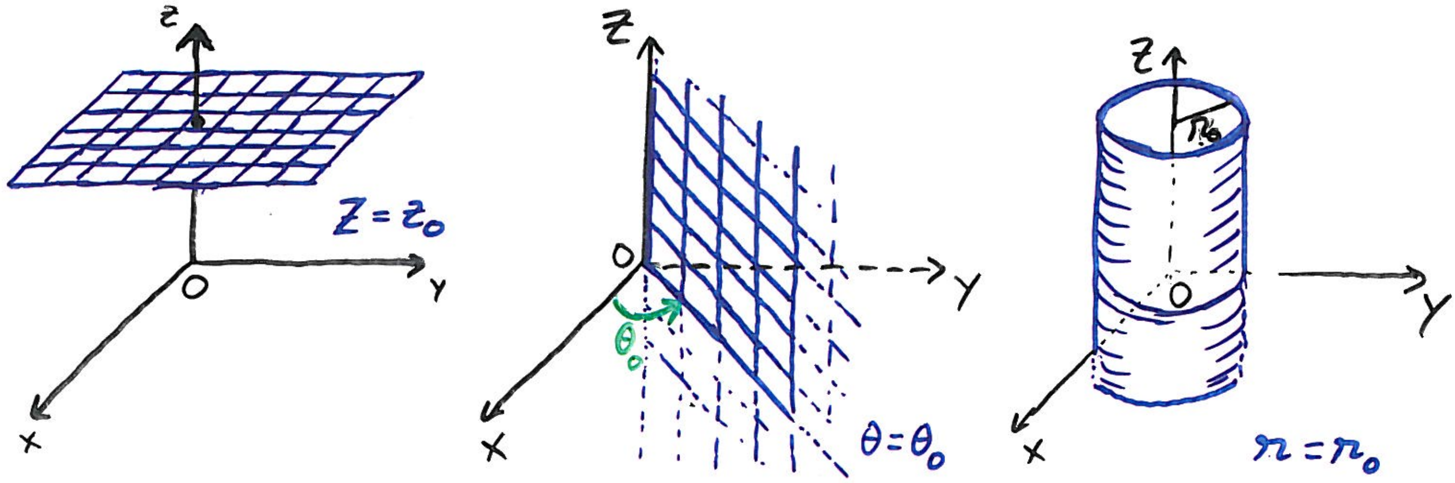


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$$

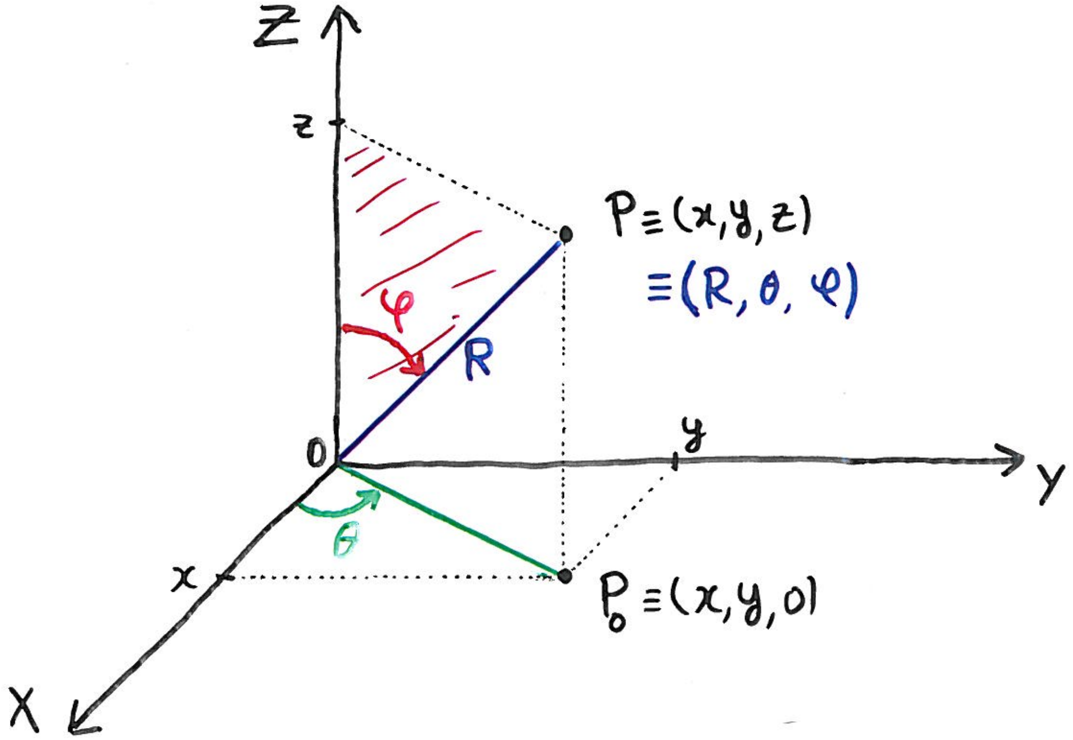
$r = d(O, P_0) = \sqrt{x^2+y^2}$, $r \geq 0$

$\theta = \measuredangle(OX^+, \vec{OP_0})$, $\theta \in [0, 2\pi[$

z = dist. de P a XOY, $z \in \mathbb{R}$



= Coordenadas esféricas =



$R = d(O,P)$, $R \in [0, +\infty[$ raio vectorial

$\theta = \measuredangle(OX^+, \vec{OP_0})$, $\theta \in [0, 2\pi[$ $P_0 = proj_{XOY} P$

$\varphi = \measuredangle(OZ^+, \vec{OP})$, $\varphi \in [0, \pi]$ co-latitude

- Referenciais: Polo O; Semieixo OX^+; Semieixo OZ^+

- Nota: Se $P \in OZ$ as suas c. esféricas não são únicas:

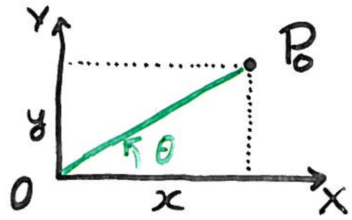
→ $P \equiv O \Rightarrow R = 0$, θ qualquer em $[0, 2\pi[$
φ " em $[0, \pi]$

→ $\begin{cases} P \in OZ^+ \\ P \neq O \end{cases} \Rightarrow R = z$, $\varphi = 0$, θ qualquer em $[0, 2\pi[$

→ $\begin{cases} P \in OZ^- \\ P \neq O \end{cases} \Rightarrow R = -z$, $\varphi = \pi$, θ qualquer em $[0, 2\pi[$

- Relação entre coordenadas cartesianas e esféricas

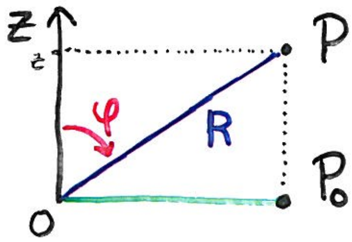
a)



$$x = \|\vec{OP_0}\| \cos\theta$$

$$y = \|\vec{OP_0}\| \operatorname{sen}\theta$$

b)



$$z = R\cos\varphi$$

$$\|\vec{OP_0}\| = R \operatorname{sen}\varphi$$

De a) e b) tem-se

$$\boxed{\begin{cases} x = R\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = R\cos\varphi \end{cases}}$$

donde se obtém

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x} \qquad (x \neq 0) \\ \dfrac{z}{R} = \cos\varphi \qquad (R \neq 0) \end{cases}$$

Integral triplo em coordenadas esféricas

• Mudança de variável

$$(x,y,z) = \Psi(R,\theta,\varphi),$$

com
$$\begin{cases} x = R\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

Tem-se

$$|\det J_\Psi(R,\theta,\varphi)| = |R^2 \operatorname{sen}\varphi| = R^2 \operatorname{sen}\varphi.$$

Assim,

$$\boxed{\iiint_{\mathcal{R}} f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \iiint_D f(R\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, R\cos\varphi)\, \underline{\underline{R^2\operatorname{sen}\varphi}}\, d(R,\theta,\varphi)}$$

Integral triplo: Aplicações

Cálculo de volumes

Seja $R \subseteq \mathbb{R}^3$ limitado e $\text{med}(\text{fr}(R)) = 0$. Então o volume de R é dado por:

$$\text{vol}(R) = \iiint_R 1 \, d(x,y,z)$$

Exemplo: Usar coordenadas cilíndricas para calcular o volume do sólido S limitado superiormente por

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$$

e inferiormente por

$$x^2 + y^2 = z^2.$$