Integral Duplo : Aplicações

O integral duplo pode ser usado para:

(1) Calcular volumes de sólidos

(2) Calcular áreas de domínios planos

Cálculo de volumes

Sejam $f, g : X \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Se

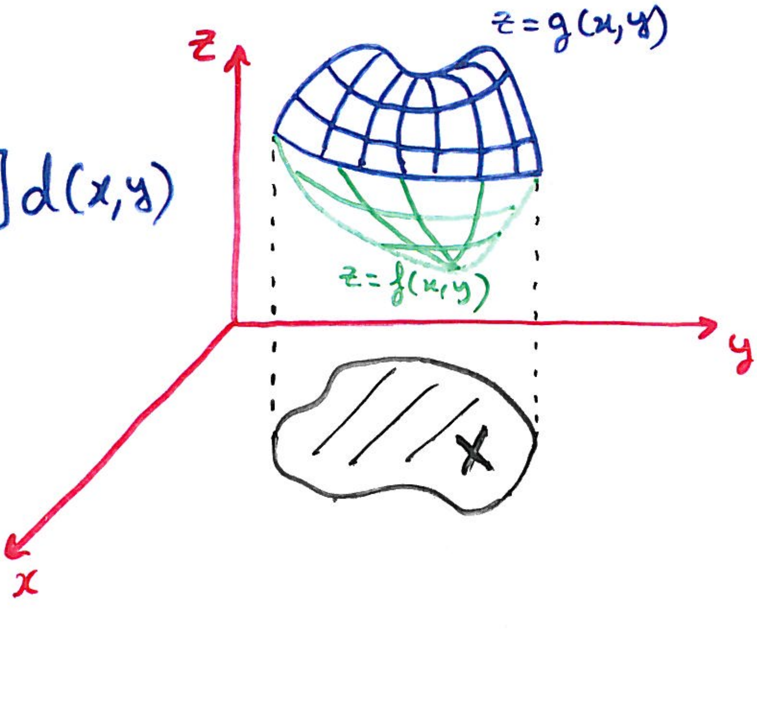
$$f(x,y) \leq g(x,y) \quad , \forall (x,y) \in X,$$

então o volume do sólido

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y) \leq z \leq g(x,y) \text{ e } (x,y) \in X\}$$

é dado por:

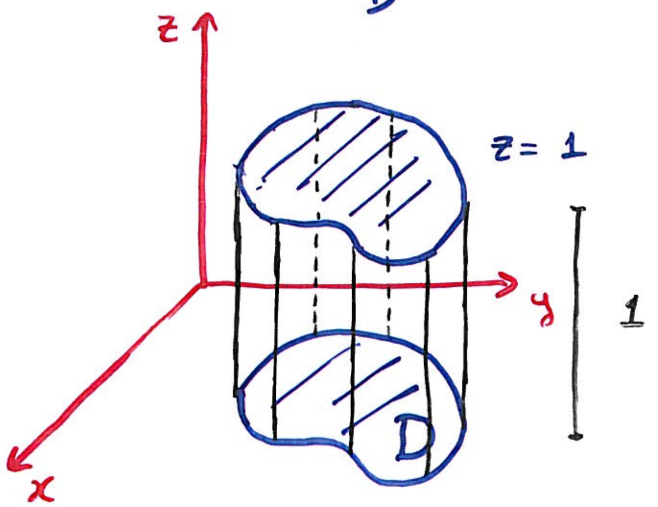
$$vol(S) = \iint_X [g(x,y) - f(x,y)]\, d(x,y)$$



Cálculo de áreas

Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitado e $\text{med}(\text{fr}(D)) = 0$. Então a área de D é dada por:

$$\text{área}(D) = \iint_D 1 \, d(x,y)$$



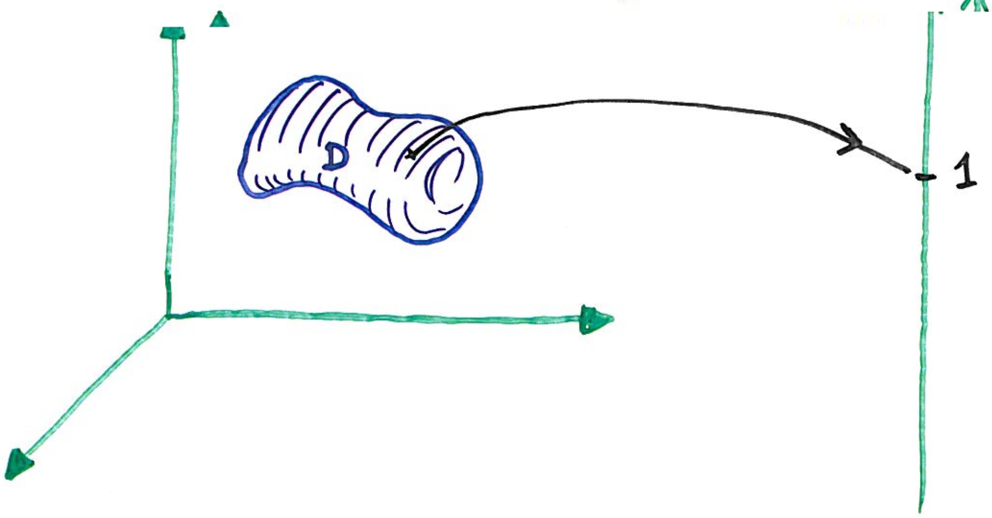
Exemplo: Apresente o integral duplo que permite calcular o volume do sólido limitado superiormente pela superfície esférica $x^2+y^2+(z-2)^2=4$ e inferiormente pela superfície cónica $x^2+y^2=z^2$

Cálculo de volumes (Integral Triplo)

Seja $D \subseteq \mathbb{R}^3$ limitado e $\text{med}(\text{fr}(D)) = 0$.

Então o volume de D é dado por:

$$\text{volume}(D) = \iiint_D 1 \, d(x,y,z)$$



Exemplo: Apresente um integral triplo que permita calcular o volume do sólido limitado pela superfície cilíndrica $(x-1)^2 + y^2 = 1$ e pelas superfícies planas $z = -1$ e $2x + y + z = 5$

5. Mudança de Variáveis

Por vezes, o cálculo de um integral

$$\int_X f(x)\,dx, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

simplifica-se, quando se passa das variáveis

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

para novas variáveis

$$u_1, u_2, \dots, u_n,$$

ou seja quando se efectua a mudança de variável

$$x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \dots, u_n), \; i = 1, \dots, n.$$

Problema: Como fica o integral

$$\int_X f(x)\,dx = \int_X f(x_1, \dots, x_n)\, d(x_1, \dots, x_n)$$

após a mudança de variável?

Seja $f: X \to \mathbb{R}$ integrável em $X \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado com $\operatorname{med}(\operatorname{fr}(X)) = 0$.

$$\int_X f(x)\,dx\,, \qquad x = (x_1, \dots, x_n)$$

Suponha-se que:
$$x_1 = \phi_1(u_1, \dots, u_n)$$
$$x_2 = \phi_2(u_1, \dots, u_n)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x_n = \phi_n(u_1, \dots, u_n)$$

e considere-se, para $U, W \overset{ab}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ $\quad (X \subseteq W)$

$$\Phi : U \longrightarrow W$$
$$(u_1, \dots, u_n) \longmapsto \Big(\underbrace{\phi_1(u_1, \dots, u_n)}_{x_1}, \dots, \underbrace{\phi_n(u_1, \dots, u_n)}_{x_n}\Big)$$

Define-se matriz jacobiana de Φ

$$J\Phi := \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial u_1} & \frac{\partial \phi_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}$$

Teorema: (Mudança de variáveis)

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável em $X \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado com $med(fr(X)) = 0$.

Sejam

- $\Phi : U \overset{ab}{\subseteq} \mathbb{R}^n \longrightarrow W \overset{ab}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ com $X \subseteq W$ bijectiva de classe C^1 com inversa Φ^{-1} de classe C^1.

- $D \subseteq U$, D compacto com $med(fr(D)) = 0$ e $\Phi(D) = X$.

Se $\underline{\det(J\Phi(u)) \neq 0}$, $\forall\, u \in D$, então

$$\boxed{\int_X f(x)\,dx = \int_D f(\Phi(u)) \cdot |\det(J\Phi(u))|\,du}$$

<u>Exemplo</u>: Calcule $\int_X f(x)\,dx$, onde

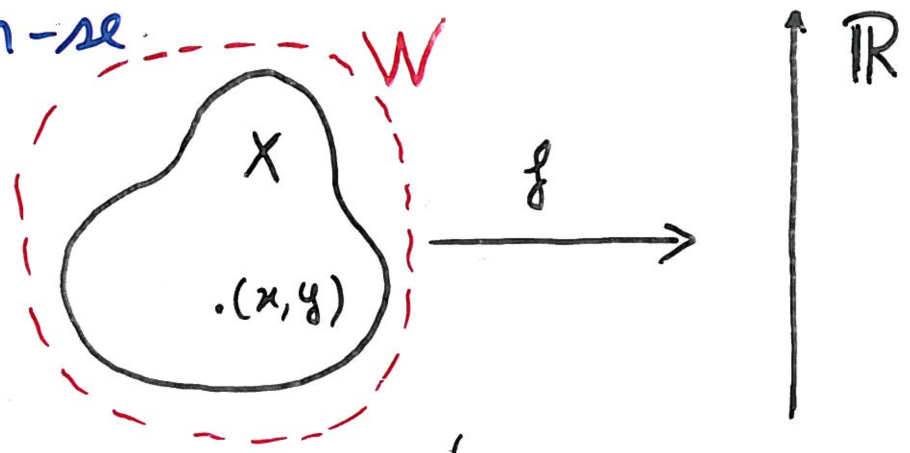
$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-1 \leq y \leq x+1,\ 1-x \leq y \leq 2-x\}$$

$$f(x,y) = y^2 - x^2,$$

fazendo a mudança de variáveis

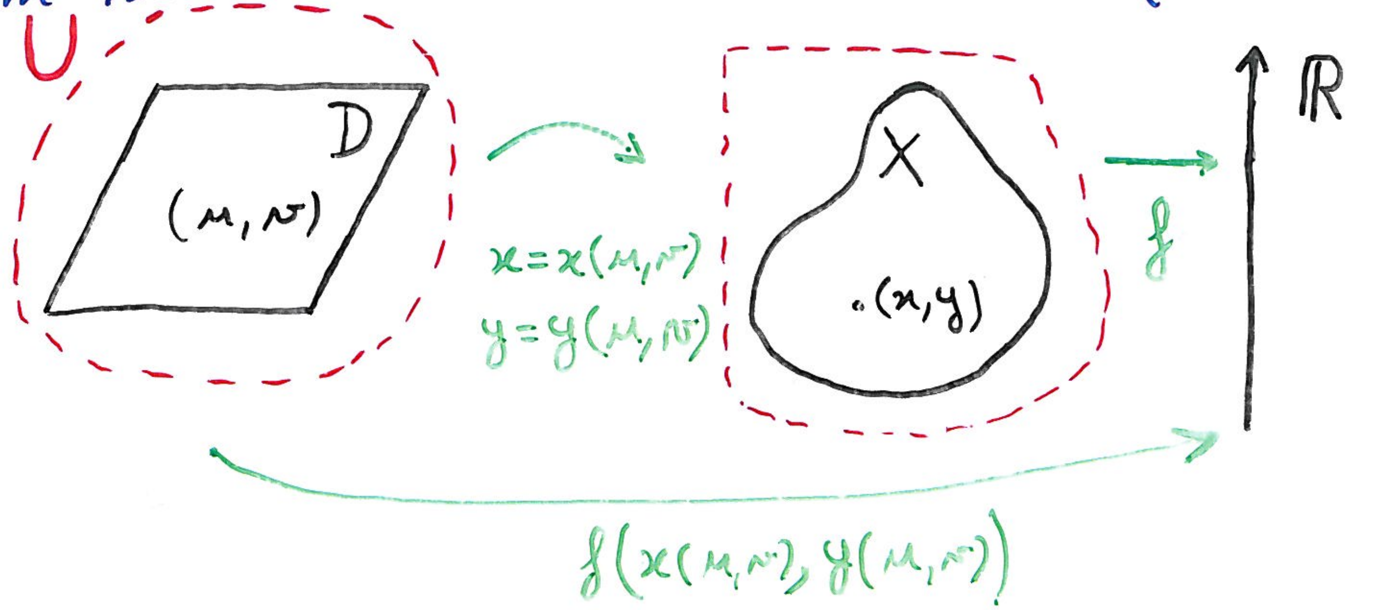
$$x = \frac{1}{2}(u+v), \qquad y = \frac{1}{2}(u-v)$$

Tem-se



$$\int_X f(x,y)\, d(x,y)$$

e após a mudança de variáveis $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$
tem-se



$$\boxed{\int_X f(x,y)\, d(x,y) = \int_D f(x(u,v), y(u,v)) \underbrace{|\det J|}_{\text{módulo do determinante}} d(u,v)}$$

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$