Função Implícita (motivação)

1

$$\underbrace{x+2y-1=0}_{F(x,y)=0} \begin{cases} \Rightarrow x=-2y+1 \\ \Rightarrow y=\dfrac{-x+1}{2} \end{cases}$$

A equação define explicitamente e globalmente x como função de y

$$\boxed{x = x(y) = -2y+1}$$

e y como função de x

$$\boxed{y = y(x) = \frac{-x+1}{2}}$$

(2)

$$x^2 - y = 0 \Rightarrow y = x^2$$

$$x^2 - y = 0 \Rightarrow x = \sqrt{y}, \text{ para } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$$

$$x^2 - y = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{y}, \text{ para } x \leq 0 \text{ e } y \geq 0$$

A equação define explicitamente e localmente x como função de y, para $y \geq 0$

(3) $x^2 + y^2 + 1 = 0$ impossível

A equação não define uma das variáveis como função da outra.

(4)

$$e^{2y^2x} + \log(x + y\cos x) - 2 = 0$$

A equação não pode ser resolvida explicitamente em ordem a x, nem em ordem a y. Contudo pode existir (localmente) $y = y(x)$ (ou $x = x(y)$) função que resolva a equação

→ $(x, y) = (0, e)$ é solução

Para $x = 0$,

$$e^0 + \log(0 + y\cos 0) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = e$$

$x = 0 \Rightarrow y = e$

Será que, para x "próximo de zero", existe um único y tal que (x, y) é solução da equação?

Será que $y = y(x)$, para x próximo de zero?

⑤ O que foi referido para uma equação, pode ser dito para um sistema

Exemplo:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+y=3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z=-1+2x \\ y=3-3x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z=z(x) \\ y=y(x) \end{cases}$$

Sistema resolúvel em ordem a y e z.

⑥ • Em que condições é possível resolver o seguinte sistema?

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \\ \dots \\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \end{cases} \overset{?}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y_1=g_1(x_1,\dots,x_n) \\ \dots \\ y_m=g_m(x_1,\dots,x_n) \end{cases}$$

O Teorema da função implícita apresenta condições suficientes para se concluir a existência de solução.