Tópicos de Geometria Euclidiana

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

2021/2022

Docente: José Joaquim Oliveira

Departamento de Matemática

Universidade do Minho

Conteúdo

Notas iniciais

Este documento surge como uma aglutinação de notas pessoais que se desenvolveram ao longo dos anos lectivos de 2020/2021 e 2021/2022 na leccionação da unidade curricular *Tópicos de Geometria Euclidiana* do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário da Universidade do Minho.

O objectivo final para a construção deste texto foi fornecer aos alunos um texto de apoio tão próximo quanto possível da forma como o docente lecciona as aulas. Esta necessidade surgiu com a situação pandémica, que o mundo tem vivido desde final de 2019, que obrigou, em vários períodos de tempo, as aulas serem leccionadas em modo *on-line* e vários alunos terem faltado por imposição das autoridades de saúde.

1 Axiomas base da geometria plana

Para a geometria é irrelevante definir *ponto*, *recta*, ou *plano*. Relevante é estudar as relações que se estabelecem estre as diferentes entidades. Nestas notas considera-se o plano euclidiano $\mathcal{E}$ como um conjunto de pontos e as rectas como subconjuntos de $\mathcal{E}$ em que são válidos os axiomas que abaixo se apresentam. Situados neste contexto da teoria de conjuntos, importa agora definir alguma terminologia: Diz-se que uma recta r passa por um ponto P (ou que a recta r incide num ponto P) quando $P \in r$. Pontos que pertencem a uma mesma recta dizem-se colineares, mas concretamente:

Definição 1.1. *Três ou mais pontos distintos do plano euclidiano, $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{E}$, com $n \geq 3$, dizem-se colineares se existe uma recta r tal que*

$$\{P_1, \ldots, P_n\} \subseteq r.$$

Axiomas de incidência (estabelecem as relações base entre pontos e rectas no plano euclidiano)

(A1) Por cada par de pontos distintos passa uma e uma só recta;

(A2) Cada recta contém pelo menos dois pontos;

(A3) Existem pelo menos três pontos não colineares.

O axioma (A1) garante que, dados dois pontos distintos A, B em $\mathcal{E}$, existe uma só recta que passa por ambos. Essa recta denota-se por (AB). Claro que a recta (AB) é a mesma que a recta (BA).

Definição 1.2. *Duas rectas distintas dizem-se:*

1. *concorrentes se tiverem algum ponto em comum;*
2. *paralelas se não tiverem pontos em comum.*

Exercício 1. *Mostre que rectas concorrentes têm um e um só ponto em comum.*

Mesmo sendo o conjunto de axiomas (A1)-(A3) insuficiente para descrever o que a "intuição nos diz sobre a geometria plana", é possível, desde já, demonstrar as seguintes propriedades. As provas ficam como exercício.

Proposição 1. *Para cada recta $r \subseteq \mathcal{E}$ existe pelo menos um ponto $P \notin r$.*

Proposição 2. *Para cada $P \in \mathcal{E}$, existe pelo menos uma recta r tal que $P \notin r$.*

Proposição 3. *Para cada $P \in \mathcal{E}$, existem rectas $r, s \subseteq \mathcal{E}$ tais que $P \in (r \cap s)$ e $r \neq s$.*

Proposição 4. *Existem pelo menos três rectas, $r, s, l \subseteq \mathcal{E}$ tais que $(r \cap s \cap l) = \emptyset$.*

O axioma que se segue permite medir distâncias entre pontos de $\mathcal{E}$.

Axioma de medida

(A4) Existe uma função

$$\begin{array}{rccl} \overline{\cdot}: & \mathcal{E}\times\mathcal{E} & \to & [0,+\infty[\\ & (P,Q) & \mapsto & \overline{PQ} \end{array}$$

que verifica as seguintes propriedades:

- $\overline{PQ}=0$ se e só se $P=Q$;
- $\overline{PQ}=\overline{QP}$, para quaisquer $P,Q\in\mathcal{E}$.

Note que não se exige a desigualdade triangular. Esta propriedade é um teorema a ser demonstrado adiante.

Definição 1.3. *Sejam $A,B,C\in\mathcal{E}$.*
Chama-se distância entre A e B ao número real não negativo $\overline{AB}$.
Diz-se que A e B estão à mesma distância de C, ou equidistantes de C, se

$$\overline{AC}=\overline{BC}.$$

Da análise real é conhecida a bijecção que se estabelece entre o conjunto dos números reais e uma recta. Com este propósito, surge o axioma conhecido como o axioma da recta graduada.

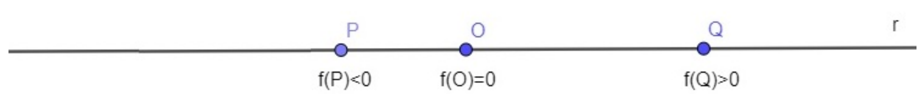
Axioma da recta graduada.

(A5) Cada recta $r\subseteq\mathcal{E}$ possui algum sistema de coordenadas isto é, existe uma função bijectiva $f:r\to\mathbb{R}$ tal que

$$\overline{PQ}=|f(P)-f(Q)|,\qquad \forall P,Q\in r.$$

Um sistema de coordenadas, f, definido numa recta r, define uma orientação em r, em que a *origem* é definida como o ponto $O\in r$ tal que $f(O)=0$, a *parte positiva* é composta pelos pontos $P\in r$ tais que $f(P)>0$ e a *parte negativa* é composta pelos pontos $P\in r$ tais que $f(P)<0$. A parte positiva e a parte negativa de uma recta serão exemplos de "semi-rectas"como se verá adiante.

Figura 1: Recta graduada



Dada uma recta r qualquer, existe mais do que um sistema de coordenadas definido em r. De facto, o axioma $(A5)$ garante que existe um sistema de coordenadas em r, f. Então $g:r\to\mathbb{R}$ definida por $g(P)=-f(P)$ é também um sistema de coordenadas em r (inverte a orientação definida por f). Fixado $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, é ainda um sistemas de coordenadas em r a função $h_\alpha:r\to\mathbb{R}$ definida por $h_\alpha(P)=f(P)+\alpha$. (Pensar: O que faz estes sistema de coordenadas relativamente ao sistema de coordenadas original, f?)

O axioma (A5) permite ainda definir segmento de recta e semi-recta.

Definição 1.4. *Sejam P e Q dois ponto distintos em $\mathcal{E}$.*

Sendo r a recta que passa por P e Q, define-se segmento de recta de extremos P e Q, representando-se por $[PQ]$, como sendo o conjunto

$$[PQ] = \{R \in r : f(P) \leq f(R) \leq f(Q)\},$$

onde f é um sistema de coordenadas de r tal que $f(P) < f(Q)$.

Chama-se comprimento do segmento de recta $[PQ]$ ao número real $\overline{PQ}$.

Aparentemente, a Definição 1.4, onde se define segmento de recta, depende do sistema de coordenadas, f, que está definido em r. No exercício que se segue, mostra-se que a definição de segmento de recta é independente do sistema de coordenadas considerado.

Exercício 2. *Seja r uma recta, $P, Q \in r$ dois pontos distintos e f um sistema de coordenadas definido em r tal que $f(P) < f(Q)$. Mostre que:*

1. *Se g é um sistema de coordenadas em r tal que $g(P) < g(Q)$, então*

$$\{R \in r : f(P) \leq f(R) \leq f(Q)\} = \{R \in r : g(P) \leq g(R) \leq g(Q)\};$$

2. *Se g é um sistema de coordenadas em r tal que $g(Q) < g(P)$, então*

$$\{R \in r : f(P) \leq f(R) \leq f(Q)\} = \{R \in r : g(Q) \leq g(R) \leq g(P)\}.$$

Proposição 5. *Sejam $P, Q \in \mathcal{E}$.*

Se $P \neq Q$, então $[PQ] = [QP]$.

Dem. Proposta de exercício ao leitor. $\square$

Definição 1.5. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathcal{E}$ todos distintos.*

Chama-se polígono, denotando-se por $P_1P_2 \cdots P_n$, ao conjunto

$$[P_1P_2] \cup [P_2P3] \cup \cdots \cup [P_{n-1}P_n] \cup [P_nP_1],$$

desde que não sejam colineares os pontos P_n, P_1, P_2, nem P_{n-1}, P_n, P_1, nem P_{i-1}, P_i, P_{i+1} com $i \in \{2, \ldots, n-1\}$.

Cada um dos segmentos de recta $[P_iP_{i+1}]$ designa-se por lado do polígono.

Definição 1.6.

1. *Dois segmentos de recta $[PQ]$ e $[AB]$ dizem-se congruentes se*

$$\overline{PQ} = \overline{AB},$$

   representando-se por $[PQ] \cong [AB]$;

2. *Diz-se que o ponto R está entre os pontos P e Q se $R \in [PQ]$ e $R \notin \{P, Q\}$;*

3. *Diz-se que uma recta r intersecta o segmento de recta $[AB]$ se $r \cap [AB] \neq \emptyset$.*

Exercício 3. *Seja r uma recta e A, B pontos pertencentes à recta r.*

Mostre que existe o ponto médio do segmento de recta $[AB]$, ou seja, que existe M pertencente à recta r tal que $[AM] \cong [MB]$.

Definição 1.7. *Sejam $r \in \mathcal{E}$ uma recta, $P \in r$ e f um sistema de coordenadas em r.*

Chama-se semi-recta de r com origem em P a cada um dos conjuntos

$$\{Q \in r : f(Q) \leq f(P)\}, \quad \{Q \in r : f(Q) \geq f(P)\}.$$

A semi-recta de origem P e que contém o ponto $Q \neq P$ denota-se por $[PQ)$.

Duas semi-rectas $[PQ)$ e $[AB)$ dizem-se <u>colineares</u> se existe uma recta r tal que $[PQ) \cup [AB) \subseteq r$.

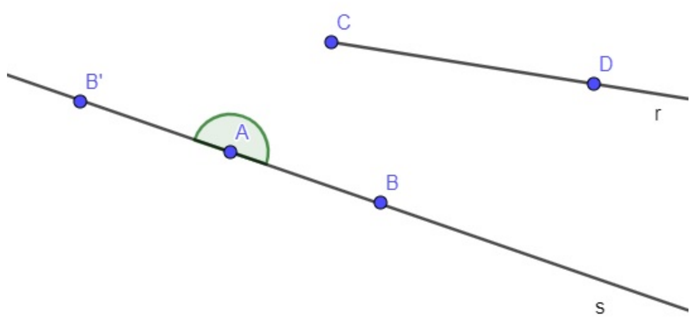
Definição 1.8. *Define-se <u>ângulo</u> (não orientado) como sendo a reunião de duas semi-rectas distintas, não colineares e com a mesma origem.*

A origem comum das semi-rectas chama-se <u>vértice</u> do ângulo.

Cada uma das semi-rectas chama-se <u>lado</u> do ângulo.

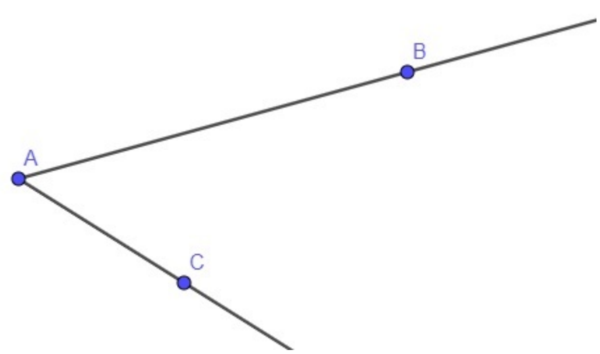
Tendo em consideração a Definição 1.8, não são ângulos as representações presentes na Figura 2, mas é ângulo a representação presente na Figura 3.

Figura 2: Não são ângulos



Observação: Um ângulo fica determinado quando se identifica um ponto como vértice, A, e mais dois pontos B, C tais que A, B, C são três pontos não colineares. Usa-se a notação $\angle BAC$ (ou $\angle CAB$) para o identificar (Figura 3). Na sequência de pontos $\angle BAC$, no meio coloca-se o vértice do ângulo. Assim, $\angle BAC \neq \angle ABC$.

Figura 3: Ângulo $\angle BAC$



Definição 1.9. *Sejam $A, B, C \in \mathcal{E}$ três pontos não colineares.*
Define-se triângulo como sendo o conjunto

$$[AB] \cup [BC] \cup [CA],$$

representando-se por $\triangle ABC$ (sendo irrelevante a ordem pela qual os pontos são listados).

- *Cada um dos pontos A, B, C chama-se vértice do $\triangle ABC$;*
- *Cada um dos segmentos de recta $[AB], [BC], [CA]$ chama-se lado (ou aresta) do $\triangle ABC$;*
- *Cada um dos ângulos $\angle ABC$, $\angle ACB$ e $\angle BAC$ chama-se ângulo interno do $\triangle ABC$;*

Para definir o interior de um ângulo ou mesmo de um triângulo é necessário definir semiplano. Mas é necessário garantir a existências de semiplanos. A existência de semiplanos será garantida por um axioma.

Previamente é necessário introduzir a noção de conjuntos convexos.

Definição 1.10. *Um conjunto $X \subseteq \mathcal{E}$ diz-se convexo se*

$$\forall P, Q \in X, \qquad [PQ] \subseteq X.$$

Exercício 4. *Da lista que se segue, identifica os conjuntos convexos:*

1. *uma recta;*
2. *um ângulo;*
3. *uma semi-recta.*

Axioma de separação

(A6) Dada r uma recta, existem $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{E}$ convexos tais que

- $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$, $\mathcal{H}_1 \cap r = \emptyset$, $r \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$ e $\mathcal{E} = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup r$;
- Se $P \in \mathcal{H}_1$ e $Q \in \mathcal{H}_2$, então $[PQ] \cap r \neq \emptyset$.

Definição 1.11. *Seja r um recta.*
Os conjuntos $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ cuja existência está garantida pelo axioma (A6) chamam-se semiplanos limitados por r.

Proposição 6. *Sejam P, Q pontos e r uma recta tais que $P, Q \in \mathcal{E} \setminus r$.*
Então $[PQ]$ intersecta r se e só se P, Q estão em diferentes semiplanos limitados por r.

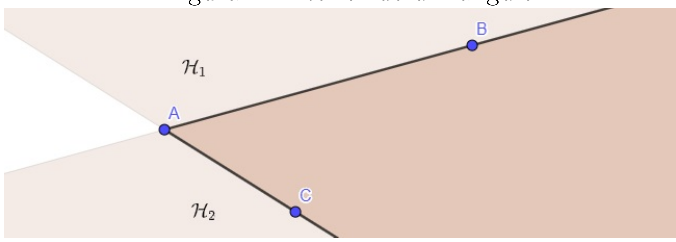
Dem. Prova deixada como exercício ao leitor. □

Proposição 7. *Considere um $\triangle ABC$. Então:*

1. *Se r é uma recta que não passa por nenhum dos vértices do $\triangle ABC$, então r não intersecta os três lados do $\triangle ABC$;*
2. *Se r é uma recta que intersecta o $\triangle ABC$, então r intersecta pelo menos dois lados (conhecido com axioma de Pach).*

Dem. Proposta de exercício. Deve consultar [1] para obter a solução. □

Figura 4: Interior de um ângulo



Definição 1.12. *Sejam A, B, C três pontos não colineares.*

Define-se <u>*interior*</u> *de $\angle BAC$ como sendo*

$$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2,$$

onde $\mathcal{H}_1$ é o semiplano limitado pela recta (AC) que contém B e $\mathcal{H}_2$ é o semiplano limitado pela recta (AB) que contém C (ver Figura 4).

O interior de $\angle BAC$ denota-se por $\operatorname{int}(\angle BAC)$.

Definição 1.13. *Considere-se um $\triangle ABC$.*

Define-se <u>*interior*</u> *do $\triangle ABC$ como sendo a intersecção do interior dos três ângulos internos de $\triangle ABC$, representando-se por* $\operatorname{int}(\triangle ABC)$.

Exercício 5. *Considere-se um $\triangle ABC$.*

1. *Prove que*
$$[BC] \setminus \{B, C\} \subseteq int(\angle BAC).$$

2. *Prove que*
$$(\triangle ABC) \cup int(\triangle BAC).$$
é um conjunto convexo.

Definição 1.14. *Um polígono $P_1P_2 \cdots P_n$ diz-se* <u>*convexo*</u> *se a intersecção dos interiores dos seus ângulos é não vazia.*

Tendo em consideração as definições de conjunto convexo (Definição 1.10) e de polígono (Definição 1.5), conclui-se que qualquer polígono não é um conjunto convexo. No entanto, é usual na literatura classificar polígonos como sendo convexos caso a condição descrita na Definição 1.14 esteja satisfeita. Como consequência, qualquer triângulo é um polígono convexo.

Teorema 8. *Seja l^+ uma semi-recta de origem A tal que $(l^+ \setminus \{A\}) \subseteq int(\angle BAC)$. Então l^+ intersecta $[BC]$.*

Dem. Proposta de exercício. Deve consultar [1] para obter a solução. □

O axioma a introduzir de seguida permite medir ângulos. A unidade de medida a adoptar aqui é o grau. Mas poderia ser o grado ou o radiano. Comece-se por definir o conjunto de todos os ângulos no plano euclidiano. Considere-se

$$\mathcal{A} = \left\{\angle ABC : \ A, B, C \text{ são pontos não colineares de } \mathcal{E}\right\}.$$

Axioma de medida de ângulos

(A7) Existe uma função

$$m: \begin{array}{rcl} \mathcal{A} & \to &]0,180[\\ \angle ABC & \mapsto & m(\angle ABC) \end{array} \qquad \text{(medida em graus)}$$

tal que:

- se A, B são pontos distintos e $\mathcal{H}$ um dos semiplanos limitado pela recta (AB), então, dado $\alpha \in]0,180[$, existe uma única semi-recta $[AC)$, com $C \in \mathcal{H}$, tal que

$$m(\angle BAC) = \alpha;$$

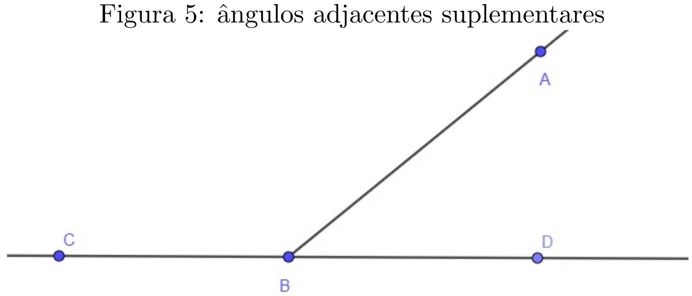
- se $D \in$int$(\angle BAC)$, então

$$m(\angle BAC) = m(\angle BAD) + m(\angle CAD).$$

Definição 1.15.

1. *Dois ângulos dizem-se congruentes se têm a mesma medida.* *(usa-se a notação $\angle ABC \cong \angle DEF$ caso $m(\angle ABC) = m(\angle DEF)$)*
2. *Dois ângulos dizem-se complementares se a soma das suas medidas for 90.*
3. *Dois ângulos dizem-se suplementares se a soma das suas medidas for 180.*
4. *Dois ângulos dizem-se adjacentes se têm um dos lados em comum e a intersecção dos seus interiores for vazio.*
5. *Dois ângulos $\angle ABC$ e $\angle ABD$ dizem-se adjacentes suplementares se C, B, D são colineares e $B \in [CD]$ (ver Figura 5).*
6. *Dois ângulos $\angle ABC$ e $\angle DBE$ dizem-se verticalmente opostos se $\angle DBE$ é constituído pelas semi-rectas opostas às semi-rectas que definem $\angle ABC$ (ver Figura 6).*

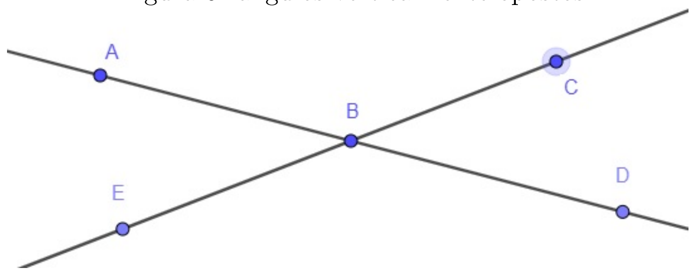
Figura 5: ângulos adjacentes suplementares



Definição 1.16. *Sejam $\angle ABC$ e $\angle CBE$ dois ângulos adjacentes.*
Diz-se que a semi-recta $[BC)$ é bissectriz do ângulo $\angle ABE$ se $m(\angle ABC) = m(\angle CBE)$.

O axioma que se segue permite estabelecer relações entre medidas de diferentes ângulos.

Figura 6: ângulos verticalmente opostos



Axioma

(A8) Se $\angle ABC$ e $\angle ABD$ são adjacentes suplementares, então

$$m(\angle ABC) + m(\angle ABD) = 180.$$

Proposição 9. *Quaisquer dois ângulos verticalmente opostos são congruentes.*

Dem. Sejam $\angle ABC$ e $\angle DBE$ dois ângulos verticalmente opostos.

Suponha-se que D, B, A são colineares e $B \in [DA]$ (a situação em que E, B, A são colineares prova-se de forma análoga). Consequentemente, E, B, C são colineares e $B \in [EC]$. Desta forma, os ângulos $\angle CBD$ e $\angle EBD$ são adjacentes suplementares e o axioma (A8) garante que

$$m(\angle CBD) + m(\angle EBD) = 180. \tag{1}$$

De igual forma, tem-se que $\angle DBC$ e $\angle ABC$ são adjacentes suplementares e novamente pelo axioma (A8) tem-se

$$m(\angle DBC) + m(\angle ABC) = 180. \tag{2}$$

Assim, por (1) e (2) tem-se

$$m(\angle ABC) = 180 - m(\angle DBC) = m(\angle EBD),$$

o que termina a prova. □

Definição 1.17.

1. *Um ângulo $\angle ABC$ diz-se* <u>*agudo*</u> *se $m(\angle ABC) < 90$.*
2. *Um ângulo diz-se* <u>*obtuso*</u> *se for suplementar a um ângulo agudo.*
3. *Um ângulo diz-se* <u>*recto*</u> *se for congruente com um seu adjacente suplementar.*
4. *Duas rectas concorrentes dizem-se* <u>*perpendiculares*</u> *se algum dos quatro ângulos por elas formado for recto.*

Se r e s são duas rectas perpendiculares, então qualquer dos quatros ângulos formados com semi-rectas de r e s é recto (verifique). Usa-se a notação $r \perp s$ para indicar que as rectas r e s são perpendiculares.

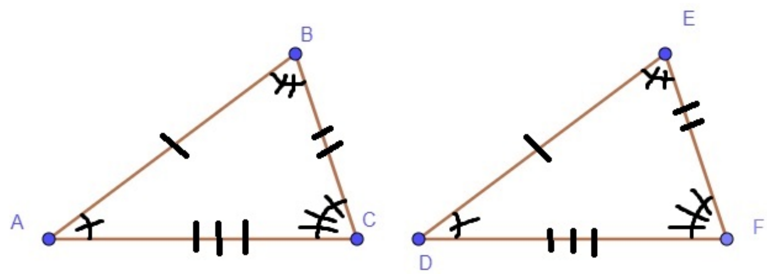
Exercício 6. *Considere um segmento de recta $[AB]$ e $X \in [AB]$ com $X \neq A$ e $X \neq B$.*
Justifique que $A \notin [XB]$.

2 Congruência de triângulos

Nesta secção estudam-se os vários critério de congruências de triângulos. Desde já é necessário clarificar o que se entende por *congruência de triângulos* com a definição que se segue.

Definição 2.1. *Dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dizem-se* <u>*congruentes*</u> *se existe uma bijecção entre os vértices (por exemplo $A \mapsto D$, $B \mapsto E$ e $C \mapsto F$) de tal forma que lados e ângulos correspondentes são congruentes (no exemplo $[AB] \cong [DE]$, $[BC] \cong [EF]$, $[CA] \cong [FD]$, $\angle CAB \cong \angle EDF$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ e $\angle BCA \cong \angle EFD$).*

Figura 7: Triângulos congruentes



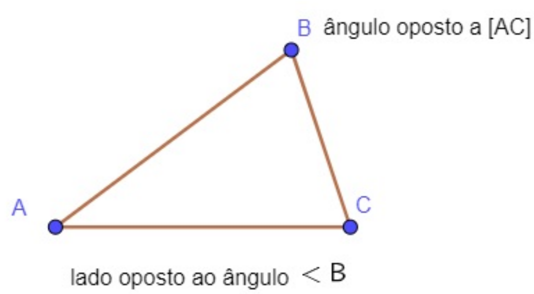
Pelo exemplo da Figura 7, os triângulos são congruentes, denotando-se por $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Atenção, a ordem pela qual se apresentam os vértices conta, sendo esta indicadora da bijecção presente. Assim, ainda no exemplo da Figura 7, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ mas $\triangle ABC \ncong \triangle FED$.

Num $\triangle ABC$, qualquer um dos seus ângulos internos fica identificado pelo seu vértice. Consequentemente, para simplificação da escrita, notar-se-á apenas por $\angle A$ o ângulo interno $\angle BAC$.

Definição 2.2. *Um triângulo diz-se:*

1. <u>*equilátero*</u> *se possui os três lados congruentes;*
2. <u>*isósceles*</u> *se possui dois lados congruentes, sendo o restante lado conhecido como* <u>*base*</u> *do triângulo isósceles;*
3. <u>*escaleno*</u> *se não for isósceles.*

Figura 8: Lado e ângulo oposto

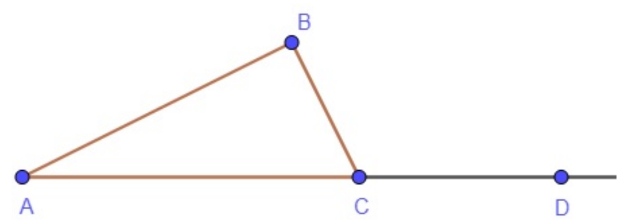


Definição 2.3. *Num triângulo, chama-se ângulo oposto a um lado, ao ângulo interno cujo vértice não pertence ao referido lado.*

Num triângulo, chama-se lado oposto a um ângulo interno, ao lado que não contém o vértice do referido ângulo interno.

Chama-se ângulo externo de um triângulo a um ângulo adjacente suplementar com um dos seus ângulos internos. (Na Figura 9, o $\angle DCB$ é externo ao $\triangle ABC$.)

Figura 9: Ângulo externo de um triângulo



Definição 2.4. *Um triângulo diz-se rectângulo se um dos seus ângulos internos for recto. O lado oposto ao ângulo recto chama-se hipotenusa. Os lados opostos a ângulos não rectos chamam-se catetos.*

O objectivo nesta secção é apresentar critérios de congruência de triângulos, ou seja, obter a conclusão de que dois triângulos são congruentes, comparando apenas três medidas entre lados e ângulos internos.

O primeiro critério de convergência é apresentado como um axioma:

Axioma

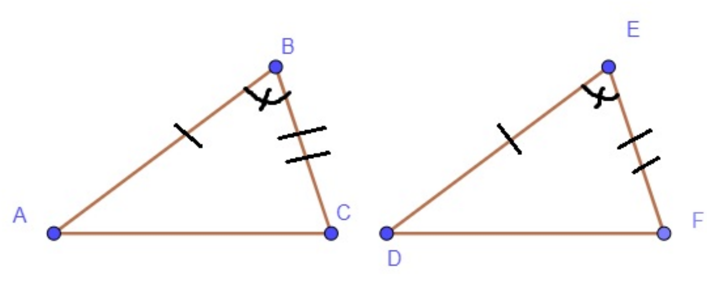
(A9) Dados dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, para os quais está definida a correspondência

$$A \mapsto D, \quad B \mapsto E \quad \text{e} \quad C \mapsto F$$

tal que $[AB] \cong [DE]$, $\angle B \cong \angle E$ e $[BC] \cong [EF]$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

O axioma (A9) é conhecido como o **critério LAL**.

Figura 10: Critério LAL



Como primeira consequência do critério **LAL** tem-se que os dois ângulos internos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

Proposição 10. *Considere o* $\triangle ABC$.
Se $[AC] \cong [BC]$, *então* $\angle A \cong \angle B$.

Dem. Considere a correspondência

$$C \mapsto C, \quad B \mapsto A \quad \text{e} \quad A \mapsto B.$$

Pelo critério **LAL** conclui-se que $\triangle CAB \cong \triangle CBA$, donde se obtém que $\angle A \cong \angle B$. □

Corolário 11. *Um triângulo equilátero tem os ângulos internos todos congruentes.*

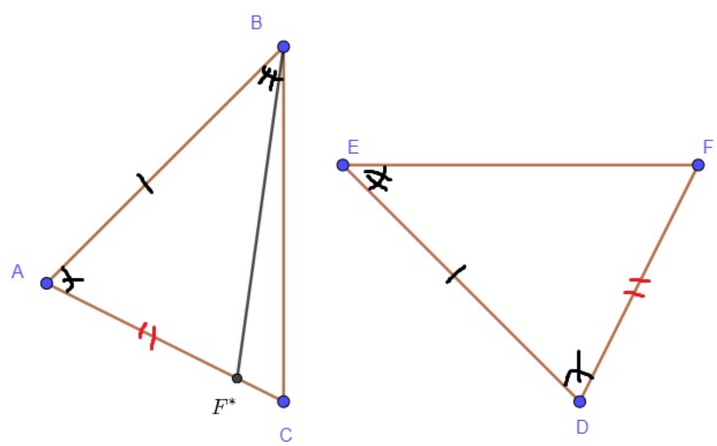
Dem. Proposta de exercício ao leitor. □

Teorema 12 (critério **ALA**).
Dados dois triângulos, $\triangle ABC$ *e* $\triangle DEF$, *para os quais está definida a correspondência*

$$A \mapsto D, \quad B \mapsto E \quad e \quad C \mapsto F$$

tal que $\angle A \cong \angle D$, $[AB] \cong [DE]$ *e* $\angle B \cong \angle E$, *então* $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Figura 11: Prova do critério ALA



Dem. Pelo Axioma (A9), é suficiente provar que $[AC] \cong [DF]$.
Suponha-se que $\overline{AC} > \overline{DF}$. Então existe $F^* \in [AC]$ tal que $\overline{AF^*} = \overline{DF}$, ou seja $[AF^*] \cong [DF]$ (ver Figura 11).
Pelo critério **LAL** conclui-se que $\triangle ABF^* \cong \triangle DEF$, donde se tem

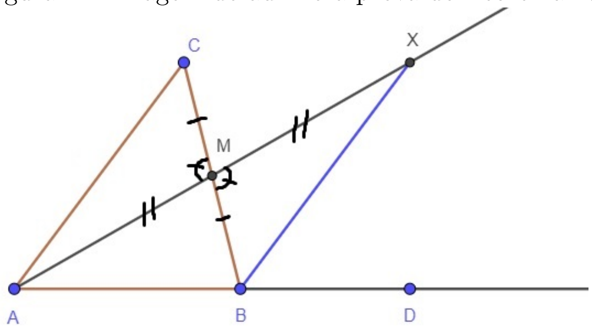
$$m(\angle ABC) = m(\angle DEF) = m(\angle ABF^*),$$

o que contradiz o Axioma (A7). Consequentemente $\overline{AC} \leq \overline{DF}$.
De forma análoga se mostra que não pode acontecer $\overline{AC} < \overline{DF}$ (exercício) e conclui-se então que $\overline{AC} = \overline{DF}$, ou seja $[AC] \cong [DF]$. □

Exercício 7. *Se num* $\triangle ABC$ *se tem* $\angle A \cong \angle B$, *então* $[AC] \cong [BC]$.

Teorema 13. *A medida de um ângulo externo de um triângulo é maior do que a medida de cada um dos ângulos internos não adjacente.*

Figura 12: Imagem de auxílio à prova do Teorema 13



Dem. Considere $\triangle ABC$.

Comece-se por mostrar que $m(\angle C) < m(\angle DBC)$, em que $\angle DBC$ é adjacente suplementar a $\angle ABC$ e $D \in (AB)$. (Portanto $\angle DBC$ é externo a $\triangle ABC$, ver Figura 12)

Considere $M \in [BC]$ tal que $[CM] \cong [BM]$ (M é o ponto médio de $[BC]$)

Considerando a semi-recta $[AM)$, escolha o ponto $X \in [AM)$ tal que $[AM] \cong [MX]$. Como os ângulos $\angle BMX$ e $\angle AMC$ são verticalmente opostos, então são congruentes e consequentemente, pelo critério **LAL**,

$$\triangle AMC \cong \triangle XMB.$$

Assim sendo, tem-se $m(\angle C) = m(\angle XBC)$ e como $X \in \text{int}(\angle DBC)$ (justifique porquê) conclui-se, pelo Axioma (A7), que

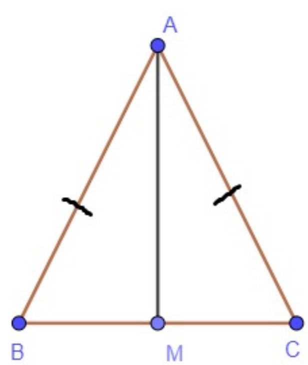
$$m(\angle DBC) = m(\angle DBX) + m(\angle XBC) > m(\angle XBC) = m(\angle C).$$

□

Proposição 14. *Sejam $\triangle ABC$ isósceles de base $[BC]$ e M o ponto médio de $[BC]$.*

Então $(AM) \perp (BC)$ e $m(\angle A) = 2m(\angle CAM)$

Figura 13: Imagem de auxílio à prova da Proposição 14



Dem. Considerem-se os triângulos $\triangle AMB$ e $\triangle AMC$ e a bijecção

$$A \mapsto A, \quad M \mapsto M \quad \text{e} \quad B \mapsto C.$$

Sendo o $\triangle ABC$ isósceles, pela Proposição 10, os ângulos $\angle B$ e $\angle C$ são congruentes. Mais, $[BA] \cong [CA]$ por hipótese e $[BM] \cong [MC]$ pois M é ponto médio de $[BC]$. Pelo critério **LAL** conclui-se que

$$\triangle AMB \cong \triangle AMC. \tag{3}$$

Consequentemente $\angle CMA \cong \angle BMA$ e sendo estes ângulos adjacentes suplementares, são rectos o que implica que $(BC) \perp (AM)$. Finalmente, ainda por (3), tem-se $\angle CAM \cong \angle BAM$, logo $[AM)$ é a bissectriz do ângulo $\angle BAC$.

□

Teorema 15. *Dados r uma recta e A um ponto, existe uma única recta que passa por A e é perpendicular a r.*

Dem. Proposta de exercício. □

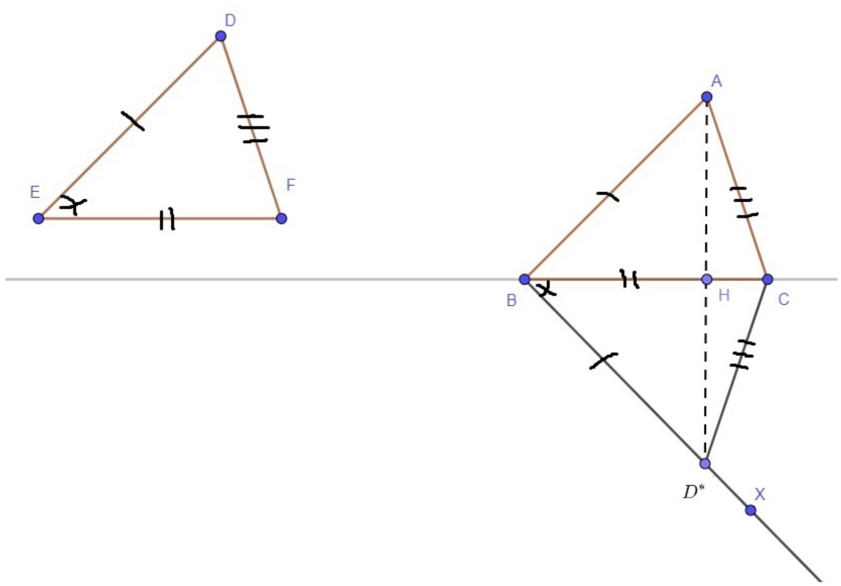
Teorema 16 (critério **LLL**).

Dados dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, para os quais está definida a correspondência

$$A \mapsto D, \quad B \mapsto E \quad e \quad C \mapsto F$$

tal que $[AC] \cong [DF]$, $[AB] \cong [DE]$ e $[BC] \cong [EF]$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Figura 14: Imagem de auxílio à prova do Teorema 16



Dem. Considere-se a recta (BC).

No semiplano limitado por (BC) que não contém o ponto A, considere a semi-recta $[BX)$ tal que $m(\angle CBX) = m(\angle FED)$. Em seguida, defina $D^* \in [BX)$ tal que $[D^*B] \cong [DE]$. Pelo critério LAL, obtém-se

$$\triangle D^*BC \cong \triangle DEF, \tag{4}$$

donde $[D^*C] \cong [DF]$ e, conjuntamente com a hipótese, obtém-se $[D^*C] \cong [AC]$.

O segmento $[AD^*]$ intersecta a recta (CB) num ponto H (explique porquê). Três casos podem ocorrer

1. $H \in [BC]$;
2. $C \in [BH] \setminus \{B\}$;
3. $B \in [CH] \setminus \{C\}$.

Caso 1. Quer o $\triangle ABD^*$, quer o $\triangle ACD^*$ são isósceles, logo (Proposição 10) $\angle BAD^* \cong \angle BD^*A$ e $\angle AD^*C \cong \angle CAD^*$. Assim

$$m(\angle BAC) = m(\angle BAD^*) + m(\angle D^*AC) = m(\angle BD^*A) + m(\angle AD^*C) = m(\angle BD^*C).$$

Finalmente, pelo critério **LAL** obtém-se que

$$\triangle D^*BC \cong \triangle ABC,$$

e, juntamente com (4), conclui-se que

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

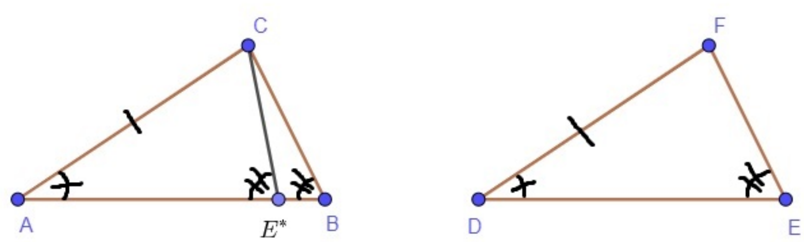
Os casos 2. e 3. são deixados como exercício. □

Teorema 17 (critério **LAA**).
Dados dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, para os quais está definida a correspondência

$$A \mapsto D, \quad B \mapsto E \quad e \quad C \mapsto F$$

tal que $[AC] \cong [DF]$, $\angle A \cong \angle D$ e $\angle B \cong \angle E$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Figura 15: Imagem de auxílio à prova do Teorema 17



Dem. Considerando o critério **LAL**, é suficiente provar que $[AB] \cong [DE]$.
Suponha-se que $[AB] \ncong [DE]$. Então uma das duas situações seguintes acontece:

1. $\overline{DE} < \overline{AB}$;
2. $\overline{DE} > \overline{AB}$.

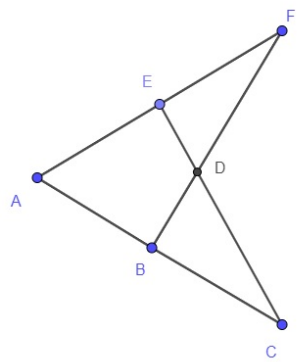
Suponha-se que acontece 1.. Assim é possível considerar um ponto $E^* \in [AB]$ tal que $[AE^*] \cong [DE]$. Nesta situação, pelo critério **LAL**, conclui-se que $\triangle CAE^* \cong \triangle FDE$, donde se conclui que $\angle AE^*C \cong \angle E$. Como por hipótese $\angle B \cong \angle E$, então $\angle B \cong \angle AE^*C$, o que é absurdo pois contradiz o Teorema 13.
O caso 2. é deixado como exercício ao leitor. □

Exercício 8.

1. *Mostre que* **ALL** *não é critério de congruência de triângulos.*
2. *Mostre que dois triângulos rectângulos são congruentes se eles possuem as hipotenusas e um dos catetos congruentes.*
3. *Considere a Figura 16.*

   Mostre que se $\angle AFB \cong \angle ACE$ *e* $[AF] \cong [AC]$, *então* $[EF] \cong [BC]$.

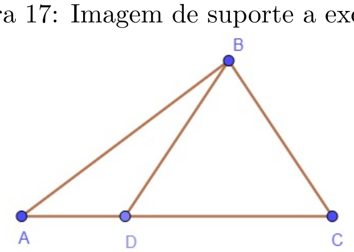
Figura 16: Imagem de suporte a exercício



4. *Considere a Figura 17.*

   Mostre que se $[DB] \cong [CB]$, *então* $m(\angle ADB) > 90$.

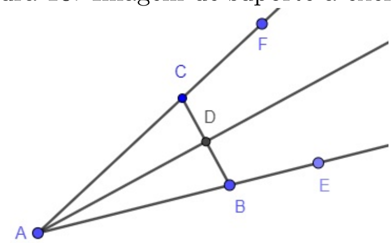
Figura 17: Imagem de suporte a exercício



5. *Considere a Figura 18.*

   Mostre que se $\angle BAD \cong \angle DAC$ *e* $\angle EBD \cong \angle FCD$, *então* D *é o ponto médio do segmento* $[CB]$.

Figura 18: Imagem de suporte a exercício



6. *Seja* $ABCD$ *um quadrilátero (polígono com quatro lados) convexo tal que os lados opostos são congruentes, ou seja,* $[AB] \cong [CD]$ *e* $[AD] \cong [CB]$. *Mostre que:*

   (a) *Os ângulos opostos são congruentes;*

   (b) *As diagonais, isto é os segmentos de recta* $[AC]$ *e* $[BD]$, *se intersectam no ponto médio de ambas.*

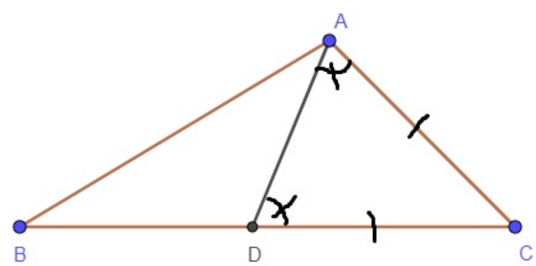
3 Desigualdade Triangular

A quando da apresentação do axioma (A4), foi referido que a desigualdade triangular é um teorema. Teorema esse que é agora demonstrado. A desigualdade triangular afirma que, dados três pontos distintos, $A, B, C \in \mathcal{E}$, tem-se $\overline{AB} \leq \overline{BC} + \overline{CA}$. Para isso é necessário previamente demonstrar que, em qualquer triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo. Mais concretamente tem-se o resultado que se segue.

Teorema 18. *Seja $\triangle ABC$. Então*
$m(\angle B) < m(\angle A)$ *se e só se* $\overline{AC} < \overline{BC}$.

Dem. Considere um $\triangle ABC$. (Observe a Figura 19)
É necessário demonstrar uma equivalência, ou seja uma dupla implicação.

Figura 19: Imagem de apoio à prova do Teorema 18



($\Leftarrow$) Assume-se que $\overline{AC} < \overline{BC}$. Então existe $D \in [BC]$ tal que $[DC] \cong [CA]$.
O $\triangle DAC$ é isósceles, logo $\angle ADC \cong \angle CAD$. Consequentemente

$$m(\angle CDA) < m(\angle BAC).$$

Sendo $\angle CDA$ um ângulo externo ao $\triangle BDA$, pelo Teorema 13, conclui-se que

$$m(\angle B) = m(\angle CBA) < m(\angle CDA) < m(\angle BAC) = m(\angle A).$$

($\Rightarrow$) Assuma-se, por hipótese, que $m(\angle B) < m(\angle A)$.
Se $\overline{AC} = \overline{BC}$, então o $\triangle ABC$ é isósceles, logo $\angle B \cong \angle A$, o que contradiz a hipótese.
Se $\overline{AC} > \overline{BC}$, então pela implicação contrária anteriormente provada, conclui-se que $m(\angle B) > m(\angle A)$, o que contradiz a hipótese.
Por exclusão de partes conclui-se que $\overline{AC} < \overline{BC}$.

□

Teorema 19 (Desigualdade triangular).
Em qualquer triângulo, a medida de um dos lados é menor que a soma das medidas dos outros dois.

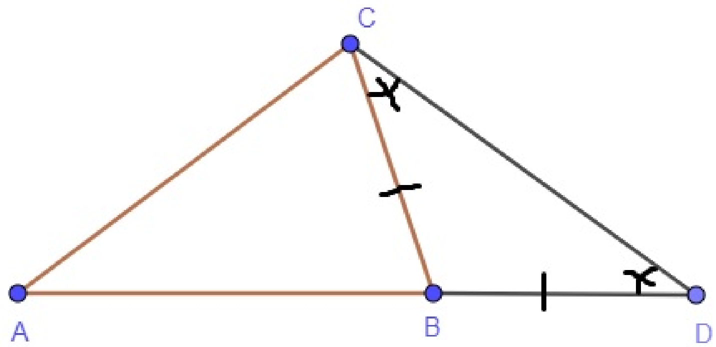
Dem. Considere um $\triangle ABC$. (Observe a Figura 20)
Na semirecta $[AB)$, considere um ponto D tal que $B \in [AD]$ e $[BD] \cong [BC]$. Desta forma tem-se

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BC}. \tag{5}$$

Por construção, $[BD] \cong [BC]$, logo o $\triangle DBC$ é isósceles e daí se obtém que

$$m(\angle BDC) = m(\angle DCB).$$

Figura 20: Imagem de auxílio à prova do Teorema 19



Considerando agora o $\triangle ACD$, da igualdade anterior obtém-se que

$$m(\angle BDC) < m(\angle DCA).$$

Pelo Teorema 18 aplicado a $\triangle ACD$ sai que $\overline{AC} < \overline{AD}$ e, por (5), conclui-se que

$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}.$$

□

Definição 3.1. *Sejam $A, B \in \mathcal{E}$ tais que $A \neq B$.*

Chama-se <u>mediatriz</u> do segmento $[AB]$ ao conjunto dos pontos de $\mathcal{E}$ que estão equidistantes, ou seja à mesma distância, de A e de B.

Exercício 9. *Considere $A, B \in \mathcal{E}$, com $A \neq B$, e M o ponto médio do segmento $[AB]$.*

1. *Mostre que existe uma e uma só recta que passa em M e é perpendicular a $[AB]$.*
2. *Considere a recta m cuja existência e unicidade está provada na alínea anterior.*

   Mostre que m é a mediatriz de $[AB]$.

Exercício 10. *Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ tais que $[AB] \cong [DE]$, $[BC] \cong [EF]$ e $m(\angle ABC) > m(\angle DEF)$.*

Mostre que $\overline{AC} > \overline{DF}$.

Definição 3.2. *Sejam l uma recta e $A \in \mathcal{E} \setminus l$. (O ponto A não pertence à recta l).*

Chama-se <u>projecção ortogonal de A sobre l</u> ao ponto $B \in l$ tal que $(AB) \perp l$.

A distância mínima de um ponto A a uma recta l é medida na perpendicular, ou seja é a medida do segmento $[AB]$ em que B é a projecção ortogonal de A sobre a recta l. Para demonstrar este facto é necessário provar que a somas das medidas dos ângulos de um triângulo é sempre menor ou igual a 180.

Teorema 20. *A soma dos ângulos internos de um qualquer triângulo é menor ou igual a 180.*

Ideia da prova:

1. Provar que a soma das medidas de dois ângulos internos de um triângulo é sempre menor que 180;

2. Dado $\triangle ABC$ é possível construir um outro triângulo, $\triangle XYW$ em que a soma da medida dos ângulos internos de $\triangle XYW$ é igual à soma das medidas dos ângulos internos do $\triangle ABC$, mas em que um dos ângulo internos do $\triangle XYW$ mede metade (ou menos) que $m(\angle BAC)$.

3. Por absurdo assuma-se que a soma das medidas dos ângulos internos de $\triangle ABC$ é igual a $180+\delta$, com $\delta > 0$.

4. Por um processo iterativo, é possível construir um $\triangle X^*Y^*W^*$ em que um dos seus ângulos internos mede menos de δ e que a soma das medidas dos seus ângulos internos é igual à soma das medidas dos ângulos internos do $\triangle ABC$.

5. Conclui-se então que $\triangle X^*Y^*W^*$ possui dois ângulos internos cuja soma das suas medidas é maior que 180, o que é absurdo.

Dem. (Teorema 20).
Considere um $\triangle ABC$. (Recorde a construção presente na Figura 12)
Tem-se $\triangle AMC \cong \triangle XMB$, pelo que $\angle ACB \cong \angle XBC$ e $\angle MXB \cong \angle MAC$.
Por um lado, pelo facto de $\angle ACB \cong \angle XBC$, conclui-se que

$$m(\angle ABC) + m(\angle ACB) = m(\angle ABC) + m(\angle XBC). \tag{6}$$

Daqui pode deduzir-se que a soma da medida de dois quaisquer ângulos internos de um triângulo é menor que 180.

Por outro lado, pelo facto de $\angle MXB \cong \angle MAC$ e por (6), deduz-se que a soma das medias dos ângulos internos dos $\triangle ABC$ e $\triangle ABX$ é igual. Mais, tem-se uma das seguintes situações:

1. $m(\angle AXB) \leq \frac{m(\angle CAB)}{2}$;

2. $m(\angle BAX) \leq \frac{m(\angle CAB)}{2}$.

Consequentemente, iterando o processo a quantidade de vezes necessária, dado $\delta > 0$ é possível construir um $\triangle A^*B^*C^*$ em que a soma das medidas dos seus ângulos internos é igual à soma das medidas dos ângulos internos do $\triangle ABC$ e um dos ângulos internos de $\triangle A^*B^*C^*$ mede menos de δ. Seja o $\angle C^*A^*B^*$ esse ângulo.

Assumindo que a soma das medidas dos ângulos internos do $\triangle ABC$ é $180+\delta$, com $\delta > 0$, e como $m(\angle C^*A^*B^*) < \delta$, resulta que

$$m(\angle C^*B^*A^*) + m(\angle A^*C^*B^*) > 180,$$

o que contradiz o facto previamente demonstrado de que a soma da medida de dois quaisquer ângulos internos de um triângulo é menor que 180.

Conclui-se então que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor ou igual a 180.

□

Exercício 11. *Sejam l uma recta e $A \in \mathcal{E} \setminus l$, ou seja $A \notin l$.*
Mostre que, se $C \in l$, então $\overline{AB} \leq \overline{AC}$, onde B é a projecção ortogonal de A sobre l.

Tendo presente o resultado do exercício anterior, faz sentido definir distância de um ponto a uma recta.

Definição 3.3. *Sejam l uma recta e A um ponto.*
Define-se distância de A a l, denotando-se por $dist(A,l)$, como sendo:

- *$dist(A,l) = 0$, caso $A \in l$;*
- *$dist(A,l) = \overline{AB}$, caso $A \notin l$, onde B é a projecção ortogonal de A sobre l.*

A mediatriz foi definida como sendo o conjunto dos pontos equidistantes a dois pontos dados. Agora que está definida a distância entre uma recta e um ponto dado, é lícito pensar no conjuntos dos pontos equidistantes a duas rectas dadas. Para já, e enquanto não for introduzido o axioma das paralelas, abordaremos apenas a situação em que as rectas são concorrentes. Este problema pode ser reduzido ao de encontrar o conjunto dos pontos interiores de um dado ângulo equidistantes a ambos os lados.

Proposição 21. *Considere um ângulo* $\angle ABC$*.*

Então a <u>*bissectriz*</u> *de* $\angle ABC$ *(retirando-lhe o ponto* B*) é o conjuntos dos pontos de* $int(\angle ABC)$ *que se encontram à mesma distância dos lados de* $\angle ABC$*.*

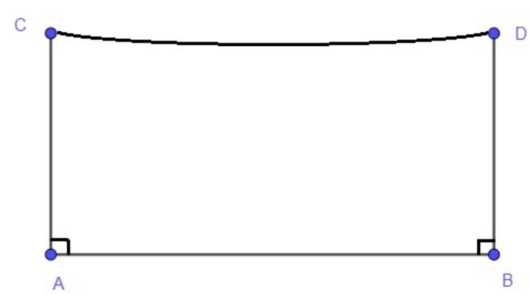
Dem. Exercício a cargo do leitor. □

Exercício 12. *Um quadriláterconvexo,* $ABDC$*, diz-se de* <u>*Saccheri*</u> *se os ângulos adjacentes à base* $[AB]$ *forem rectos e* $[BD] \cong [AC]$ *(ver Figura 21).*

Mostre que:

1. *As diagonais* $[AD]$ *e* $[CB]$ *são congruentes;*
2. $\triangle BDC \cong \triangle ACD$*;*
3. $\angle D \cong \angle C$ *e* $\max\{m(\angle C), m(\angle D)\} \leq 90$*.*

Figura 21: Quadrilátero de Saccheri

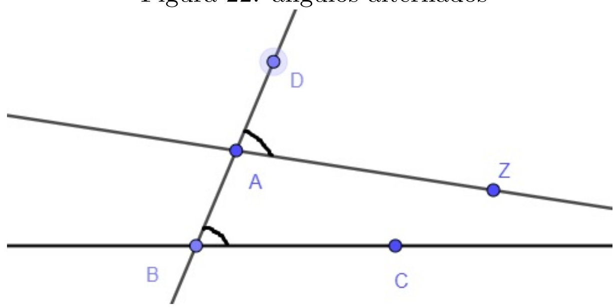


4 Axioma das paralelas

Até ao momentos, todos os resultados estudados foram provados sem recurso ao axioma das paralelas (apresentado abaixo). Consequentemente são todos válidos quer na geometria Euclidiana (onde se assume o axioma das paralelas) quer na geometria Hiperbólica (onde não se assume o axioma das paralelas).

Comece-se por introduzir a definição de ângulos alternados.

Figura 22: ângulos alternados

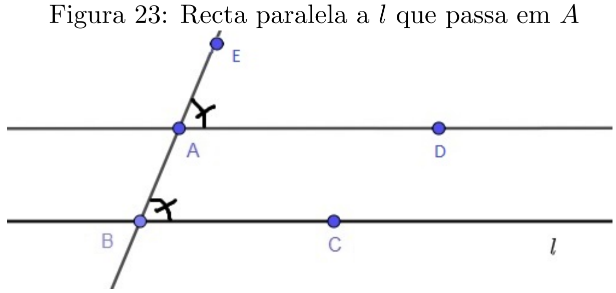


Definição 4.1. *Considere três rectas como as apresentadas na Figura 22.*
Chamam-se ângulos alternados aos ângulos $\angle ZAD$ e $\angle CBA$.

Dada uma recta l e um ponto $A \notin l$, já foi resolvido o problema de encontrar uma recta perpendicular a l que passa no ponto A. Mais, a recta perpendicular a l passando por A é única. O problema que se segue é o seguinte:

$\mathcal{P}$: Como encontrar uma recta paralela a l que passa pelo ponto A?

Figura 23: Recta paralela a l que passa em A

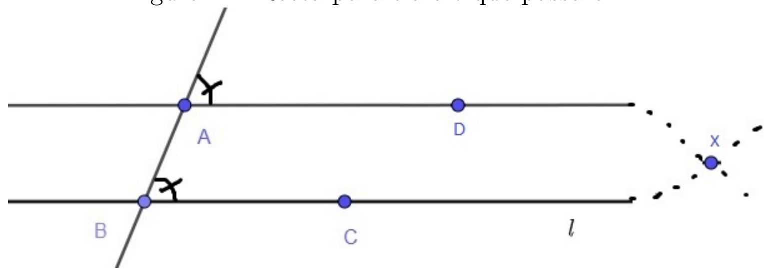


Considere dois pontos distintos, B e C, pertencentes à recta l. Sendo $A \neq B$, considere a recta (AB). A recta (AB) delimita o plano euclidiano $\mathcal{E}$ em dois semiplanos. No semiplano limitado por (AB) que contém C, o Axioma (A7) garante que existe uma única semi-recta, de origem A, $[AD)$, tal que $m(\angle BAD) = 180 - m(\angle CBA)$. O Axioma (A8) assegura que $\angle CBA \cong \angle DAE$. A proposição que se segue garante que as rectas (AD) e l são paralelas (representa-se por $(AD) \parallel l$).

Proposição 22. *Considere três rectas nas condições da Figura 23.*
Então $(BC) \parallel (AD)$

Dem. Suponha-se que (BC) não é paralela a (AD). Então existe pelo menos um ponto em comum, X. Ver Figura 24. Considerando o $\triangle ABX$ conclui-se que a soma das medidas dos ângulos internos é superior a 180, o que é absurdo pois contradiz o Teorema 20. □

Figura 24: Recta paralela a l que passa em A



A questão $\mathcal{P}$, acima apresentada, está resolvida, mas será que só existe uma recta nessas condições? Sim, na geometria Euclidiana; Não na geometria hiperbólica.

Axioma [axioma das Paralelas]

(A9) Por qualquer ponto não pertencente a uma recta dada, l, passa, no máximo, uma recta paralela a l.

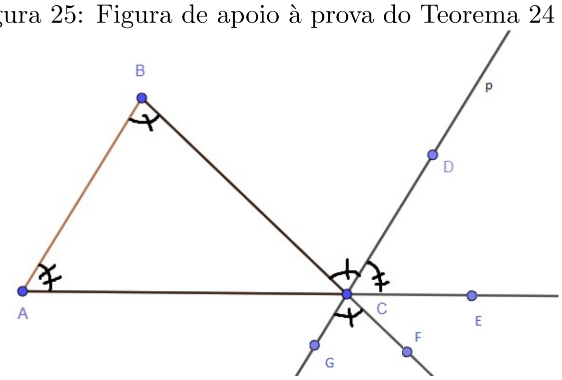
O primeiro resultado exclusivo da geometria euclidiana é o recíproco da Proposição 22.

Proposição 23.
Se uma recta, l, intersectar duas rectas paralelas l_1 e l_2, então os ângulos alternados são congruentes.

Dem. Sejam A e B os pontos de intercepção da recta l com as rectas l_1 e l_2, respectivamente.
Pela construção prévia à Proposição 22, juntamente com a própria Proposição 22, existe uma recta, (AD), paralela a l_2 que passa em A e cujos ângulos alternados definidos com l são congruentes. Pelo axioma (A9), $l_1 = (AB)$. □

Teorema 24. *A soma da medida dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180.*

Figura 25: Figura de apoio à prova do Teorema 24



Dem. Considere um $\triangle ABC$.
Considere a recta (AB) e a recta p que é paralela a (AB) e que passa no ponto C. No semiplano limitado por (AC) que contém o ponto B, considere um ponto D pertencente a p. Considere os pontos E, F e G tais que:

- $E \in (AC)$ tal que C está entre E e A;
- $F \in (BC)$ tal que C está entre F e B;

- $G \in (DC)$ tal que C está entre D e G.

Pela Proposição 23, tem-se $\angle BAC \cong \angle ECD$ e $\angle ABC \cong \angle FCG$. Sendo $\angle FCG$ e $\angle DCB$ verticalmente oposto, então são congruentes. Assim sendo

$$m(\angle CAB) + m(\angle ABC) + m(\angle ACB) = m(\angle ECD) + m(\angle DCB) + m(\angle ACB) = 180.$$

$\square$

Exercício 13.
Mostre que num quadrilátero de Saccheri, Figura 21, tem-se $m(\angle C) = m(\angle D) = 90$.

Exercício 14.
Considere um polígono convexo com n lados, com $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.
Mostre que a soma das medidas dos seus ângulos internos é igual a $180 \cdot (n-2)$.

Exercício 15. *Considere um quadrilátero convexo $ABCD$.*
Mostre que são equivalentes as seguintes afirmações:

1. *Os ângulos opostos de $ABCD$ são congruentes (i.e. $\angle A \cong \angle C$ e $\angle B \cong \angle D$);*
2. *Os lados opostos de $ABCD$ são paralelos (i.e. $[AB] \parallel [CD]$ e $[BC] \parallel [DA]$).*

Definição 4.2. *Chama-se <u>paralelogramo</u> a um quadrilátero convexo que satisfaz uma (e consequentemente as duas) das condições apresentadas no exercício anterior.*

Exercício 16. *Considere um paralelogramo $ABCD$.*
Mostre que $[AB] \cong [CD]$ e $[BC] \cong [DA]$.

Exercício 17. *Sejam l_1, l_2 duas rectas paralelas.*
Mostre que,

$$dist(A, l_1) = dist(B, l_1), \qquad \forall A, B \in l_2.$$

Exercício 18. *Mostre que, em qualquer triângulo, o segmento de recta que une os pontos médios de dois lados é paralelo ao terceiro lado do triângulo.*

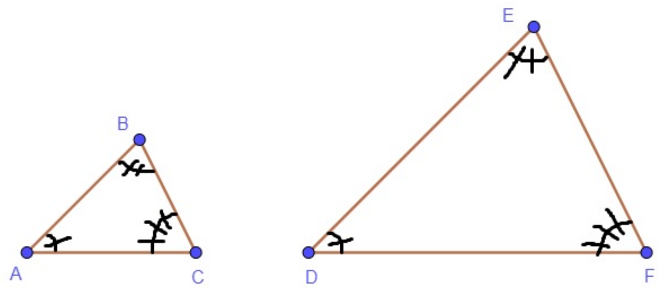
5 Semelhança de Tiângulos

Nesta secção estudam-se os vários critério de semelhança de triângulos. Desde já é necessário clarificar o que se entende por *semelhança de triângulos* com a definição que se segue.

Definição 5.1. *Dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, dizem-se* <u>*semelhantes*</u> *se existe uma bijecção entre os vértices (por exemplo $A \mapsto D$, $B \mapsto E$ e $C \mapsto F$) de tal forma que ângulos correspondentes são congruentes e lados correspondentes são proporcionais (no exemplo: $\angle CAB \cong \angle EDF$, $\angle ABC \cong \angle DEF$, $\angle BCA \cong \angle EFD$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$).*

A razão entre lados correspondentes chama-se <u>*razão de semelhança*</u> *(no exemplo, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$ é a razão de semelhança).*

Figura 26: Triângulos semelhantes



Pelo exemplo da Figura 26, os triângulos semelhantes denotam-se por $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Mas atenção, aqui novamente a ordem conta, pois a notação identifica a bijecção. Assim, ainda no exemplo da Figura 26, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ mas $\triangle ABC \nsim \triangle FED$.

À semelhança do que acontece com a congruência de triângulos, não é necessário verificar todas as medidas dos ângulos e todas as razões dos lados para se concluir a semelhança entre dois triângulos dados. Nesta secção apresentam-se critérios de semelhança de triângulos, ou seja, a conclusão de que dois triângulos são semelhantes, comparando apenas três medidas entre lados e ângulos internos.

Teorema 25 (critério **AAA**).
Se dois triângulos têm, de um para o outro, os ângulos internos congruentes, então são semelhantes.

Dem. Considere os $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ tais que $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$.

Seja $\lambda = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$.

Pretende-se mostrar que

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}.$$

É suficiente mostrar que $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \lambda$. Para isso consideram-se três casos

1. $\lambda \in \mathbb{N}$;

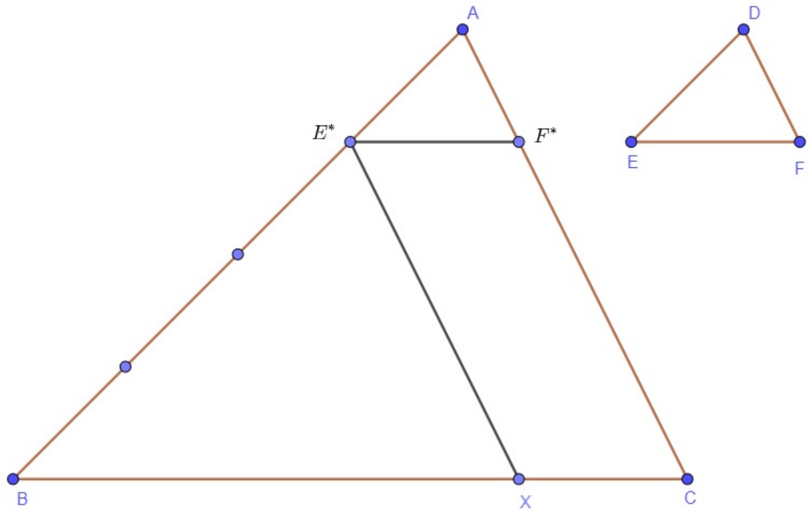
2. $\lambda \in \mathbb{Q}$;

3. $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Primeiro caso: $\lambda \in \mathbb{N}$

Para $\lambda = 1$ tem-se que $[AB] \cong [DE]$ e, pelo critério de congruência **ALA**, obtém-se que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ e está provado.

Figura 27: Imagem de suporte à prova do Teorema 25



Para o caso $\lambda = 2$, consideram-se E^* ponto médio de $[AB]$ e F^* ponto médio de $[BC]$ e prova-se (exercício da secção anterior) que $\triangle ABC \sim \triangle AE^*F^*$ e $\triangle AE^*F^* \cong \triangle DEF$, donde se conclui que $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = 2$.

Para os restantes valores naturais de λ procede-se por indução.

Suponha-se o resultado é válido para $\lambda - 1$.

Seja E^* o ponto de $[AB]$ tal que $\overline{AE^*} = \frac{1}{\lambda}\overline{AB}$, donde $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE^*}} = \lambda = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$ e consequentemente $\overline{AE^*} = \overline{DE}$.

Sejam $F^* \in [AC]$ e $X \in [BC]$ tais que $[E^*F^*] \parallel [BC]$ e $[E^*X] \parallel [AC]$. Pelo critério **ALA** tem-se $\triangle DEF \cong \triangle AE^*F^*$, logo

$$\overline{AF^*} = \overline{DF}. \tag{7}$$

Considerando o paralelogramo E^*XCF, tem-se

$$\overline{E^*X} = \overline{CF^*}. \tag{8}$$

Mais, os triângulos $\triangle ABC$, $\triangle E^*BX$ e $\triangle DEF$ têm ângulos correspondentes congruentes e, por construção

$$\overline{BE^*} = \overline{AB} - \overline{E^*A} = (\lambda - 1)\overline{E^*A} = (\lambda - 1)\overline{DF} \Rightarrow \frac{\overline{BE^*}}{\overline{DE}} = \lambda - 1.$$

Pela hipótese de indução, obtém-se

$$\overline{E^*X} = (\lambda - 1)\overline{DF}. \tag{9}$$

Finalmente, por (7), (8) e (9), tem-se

$$\overline{AC} = \overline{AF^*} + \overline{F^*C} = \overline{DF} + \overline{E^*X} = \overline{DF} + (\lambda - 1)\overline{DF} = \lambda\overline{DF},$$

donde

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \lambda,$$

como se pretendia demonstrar.

Segundo caso: $\lambda \in \mathbb{Q}$

Tem-se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \lambda = \frac{p}{q}, \qquad \text{com } p, q \in \mathbb{N} \text{ e } m.d.c.(p,q) = 1.$$

Considere um outro $\triangle PQR$ tal que $\angle P \cong \angle A$, $\angle Q \cong \angle B$ e $\angle R \cong \angle C$ e

$$\overline{PQ} = p\overline{DE} \ \left(= q\overline{AB}\right).$$

Como $p \in \mathbb{N}$, aplicando as ideias, como para o caso $\lambda = \mathbb{N}$, aos $\triangle PQR$ e $\triangle DEF$, tem-se

$$\overline{PR} = p\overline{DF} \tag{10}$$

Como $\overline{PQ} = q\overline{AB}$, e igualmente aplicando os processos a $\triangle PQR$ e $\triangle ABC$, tem-se

$$\overline{PR} = q\overline{AC}. \tag{11}$$

Finalmente, por (10) e (11) conclui-se que

$$p\overline{DF} = q\overline{AC} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{p}{q} = \lambda.$$

Terceiro caso: $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Sejam $s, t \in \mathbb{Q}$ tais que $s < \lambda < t$.

Mostrando que $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \in]s,t[$, conclui-se que $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \lambda$, pois $s, t \in \mathbb{Q}$ são arbitrários verificando $s < \lambda < t$.

Seja $s \in \mathbb{Q}$ tal que $s < \lambda$. Assim $s < \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} \Leftrightarrow s\overline{DE} < \overline{AB}$.

Considerem-se $E^* \in [AB]$ e $F^* \in [AC]$ tais que $\overline{AE^*} = s\overline{DE}$ e $[E^*F^*] \parallel [BC]$.

Desta forma $\triangle E^*AF^*$ e $\triangle EDF$ têm os ângulos correspondentes congruentes e $\frac{\overline{AE^*}}{\overline{DE}} = s \in \mathbb{Q}$. Pelo segundo caso, obtém-se

$$\frac{\overline{AF^*}}{\overline{DF}} = s \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} > s,$$

pois $\overline{AF^*} < \overline{AC}$.

Fixando $t \in \mathbb{Q}$ tal que $t > \lambda$, de forma se obtém

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} < t.$$

Finalmente,

$$s < \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} < t, \qquad \forall s, t \in \mathbb{Q} \text{ com } s < \lambda < t,$$

donde se obtém

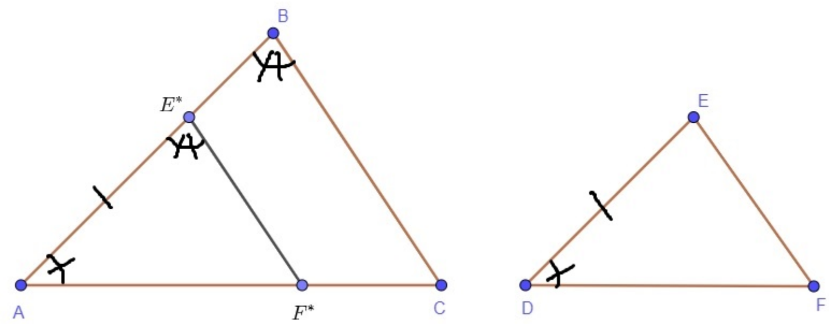
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \lambda.$$

□

Por força do Teorema 24, é suficiente testar dois ângulos para que os três sejam congruentes. Desta forma o critério **AAA** é na verdade o critério **AA**.

Teorema 26 (critério LAL)**.**
Se dois triângulos têm, de um para o outro, um ângulo congruente e os lados que lhes pertencem proporcionais, então são semelhantes.

Figura 28: Imagem de suporte à prova do Teorema 26



Dem. Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$.

Pretende-se mostrar que se $\angle A \cong \angle D$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Sem perda de generalidade, suponha-se que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} > 1$. No lado $[AB]$ considere um ponto E^* tal que $[AE^*] \cong [DE]$. Considere ainda a recta, p, que passa em E^* e é paralela a $[BC]$. O ponto de intersecção de p com $[AC]$ denote-se por F^*.

Sendo $[E^*F^*] \parallel [BC]$, tem-se que $\angle AE^*F^* \cong \angle ABC$ e consequentemente $\triangle ABC \sim \triangle AE^*F^*$.

Assim,

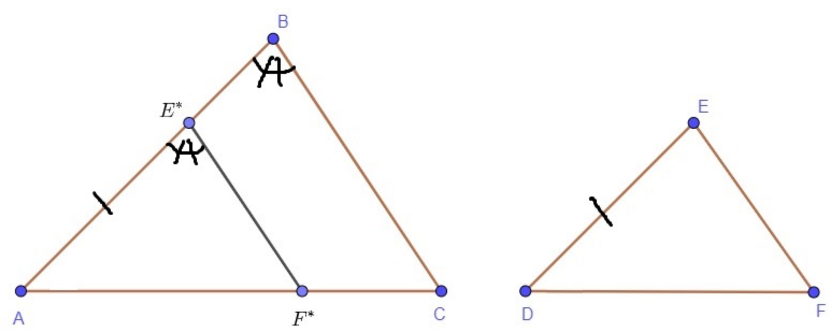
$$\frac{\overline{AF^*}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE^*}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AF^*}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AF^*}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}},$$

donde $[AF^*] \cong [DF]$. Desta forma, o critério **ALA** da congruência de triângulos permite concluir que $\triangle AE^*F^* \cong \triangle DEF$, e consequentemente $\angle DEF \cong \angle AE^*F^* \cong \angle ABC$, donde, pelo critério **AA** se conclui que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. □

Teorema 27 (critério LLL).

Se dois triângulos têm, de um para o outro, todos os lados proporcionais, então são semelhantes.

Figura 29: Imagem de suporte à prova do Teorema 27



Dem. Considere $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ tais que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}.$$

Sem perda de generalidade, suponha-se que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} > 1$. No lado $[AB]$ considere um ponto E^* tal que $[AE^*] \cong [DE]$. Considere ainda a recta, p, que passa em E^* e é paralela a $[BC]$. O ponto de intersecção de p com $[AC]$ denote-se por F^*.

Sendo $[E^*F^*] \parallel [BC]$, tem-se que $\angle AE^*F^* \cong \angle ABC$ e, pelo critério **AA**, conclui-se que $\triangle ABC \sim \triangle AE^*F^*$. Consequentemente,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE^*}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{E^*F^*}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{E^*F^*}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{E^*F^*}},$$

donde $[EF] \cong [E^*F^*]$.

Pelas mesmas razões, tem-se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE^*}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF^*}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF^*}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF^*}},$$

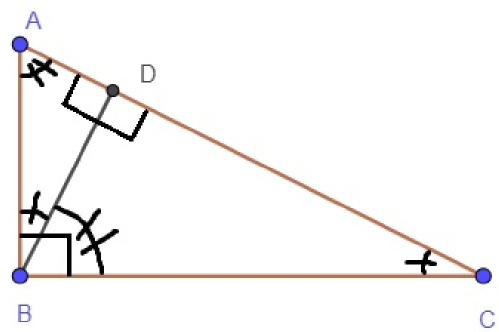
donde $[DF] \cong [AF^*]$.

Pelo critério **LLL**, tem-se $\triangle AE^*F^* \cong \triangle DEF$. Sendo $\triangle ABC \sim \triangle AE^*F^*$, conclui-se que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. □

Teorema 28 (Teorema de Pitágoras)**.**

Num triângulo rectângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Figura 30: Imagem de suporte à prova do Teorema 28



Dem. Seja $\triangle ABC$ um triângulo rectângulo em que o $\angle B$ é recto.

Considere D a projecção ortogonal de B na recta (AC). O Teorema 24 garante que $\angle A$ e $\angle C$ são ângulos agudos, pelo que $D \in [AC]$.

Pelo critério **AA** tem-se que $\triangle DBC \sim \triangle BAC \sim \triangle DAB$. Destas semelhanças obtêm-se as igualdades

$$\begin{cases} \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad \text{(porque } \triangle DBC \sim \triangle BAC) \\ \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BA}} \quad \text{(porque } \triangle DAB \sim \triangle BAC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{BC}^2 = \overline{DC} \cdot \overline{AC} \\ \overline{AB}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AC} \end{cases} \Rightarrow \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2$$

□

Teorema 29 (Teorema de Thales)**.**

Sejam a, b, c três rectas paralelas e r, s duas rectas concorrentes com a.

Então os segmentos, na recta r, obtidos da intersecção de r com a, b, c são proporcionais aos segmentos, na recta s, obtidos da intersecção de s com a, b, c.

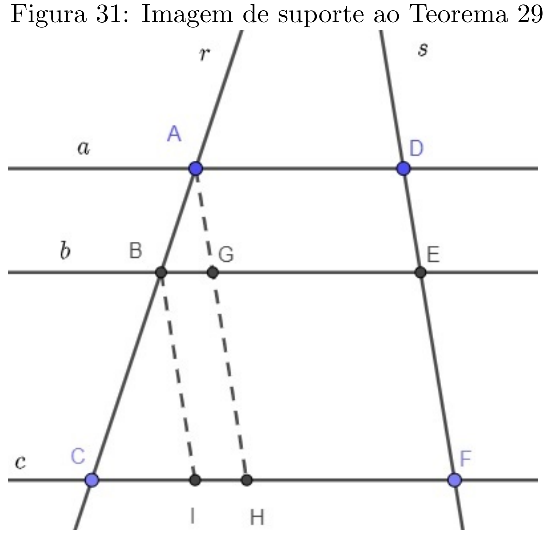
Dem. Na Figura 31, tem-se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}.$$

Fica como proposta de exercício a prova deste resultado.

Sugestão: Prove que $\triangle BCI \sim \triangle ABG$. □

Figura 31: Imagem de suporte ao Teorema 29



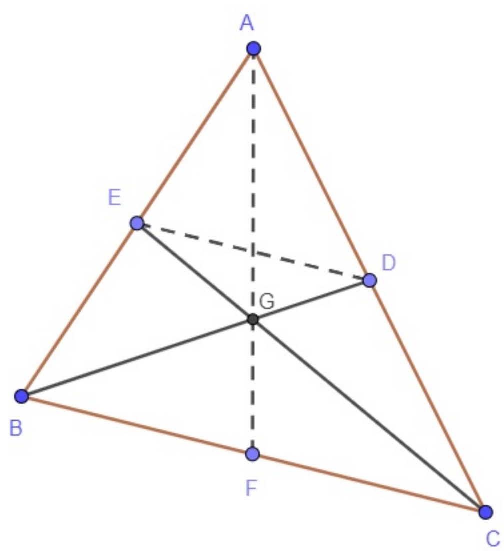
Definição 5.2. *Chama-se* *mediana* *de um triângulo a cada um dos segmentos de recta que une cada vértice ao ponto médio do lado oposto.*

Teorema 30. *As três medianas de um triângulo intersectam-se num mesmo ponto.*

Mais, a distância de cada vértice ao ponto de intersecção das medianas é igual a $\frac{2}{3}$ *do comprimento da respectiva mediana.*

Dem. Considere um $\triangle ABC$.

Figura 32: Imagem de suporte à prova do Teorema 30



Sejam D, E, F os pontos médios dos lados do $\triangle ABC$ (ver Figura 32).

Tem-se $\triangle ABC \sim \triangle AED$ (justifique porquê) com razão de semelhança 2. Consequentemente $\overline{BC} = 2\overline{DE}$.

Considerando G o ponto de intercepção das medianas $[BD]$ e $[CE]$, tem-se $\triangle GBC \sim \triangle GDE$

(justifique porquê), também com razão de semelhança 2. Consequentemente

$$\overline{BG} = 2\overline{DG} \quad \text{e} \quad \overline{CG} = 2\overline{GE}.$$

Considerando agora H o ponto de intersecção das medianas $[AF]$ e $[CE]$, e repetindo a análise, conclui-se que

$$\overline{AH} = 2\overline{HF} \quad \text{e} \quad \overline{CH} = 2\overline{EH}.$$

Mas então $G, H \in [CE]$ com $\overline{CH} = 2\overline{EH}$ e $\overline{CG} = 2\overline{EG}$, o que implica que $G = H$, tendo-se

$$\overline{CE} = \overline{CG} + \overline{GE} = \overline{CG} + \frac{1}{2}\overline{CG} = \frac{3}{2}\overline{CG},$$

ou seja

$$\overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CE}.$$

De igual forma se conclui que

$$\overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BD} \quad \text{e} \quad \overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AF}.$$

□

Definição 5.3. *Seja $\triangle ABC$.*
Chama-se <u>*baricentro*</u> *ao ponto de intersecção das medianas do $\triangle ABC$.*

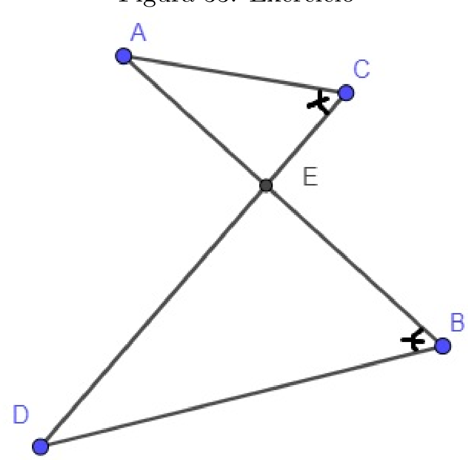
Exercício 19. *Mostre que, em qualquer quadrilátero convexo, os pontos médios dos lados são vértices de um paralelogramo.*

Exercício 20. *Seja r uma recta paralela ao lado $[AB]$ de um $\triangle ABC$ que intersecta o lado $[AC]$. Mostre que*

1. *A recta r intersecta o lado $[BC]$;*
2. *Se A^* é o ponto de intersecção de r com $[AC]$ e B^* é o ponto de intersecção de r com $[BC]$, então $\triangle ABC \sim \triangle A^*B^*C$.*

Exercício 21. *Considere o quadrilátero $ABCD$ da Figura 33, em que $\angle C \cong \angle B$, $\overline{EC} = 8$, $\overline{AE} = 6$ e $\overline{DC} = 22$.*
Determine $\overline{BE}$.

Figura 33: Exercício



6 Circunferência

Nesta secção apresentam-se a *circunferência* e algumas das suas propriedades base.

Definição 6.1. *Sejam $O \in \mathcal{E}$ e $r > 0$.*

Define-se circunferência de centro em O e raio r como sendo o conjunto

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{E} : \overline{AO} = r\}.$$

Define-se interior, ou círculo, da circunferência $\mathcal{C}$ como sendo o conjunto

$$int(\mathcal{C}) = \{A \in \mathcal{E} : \overline{AO} < r\},$$

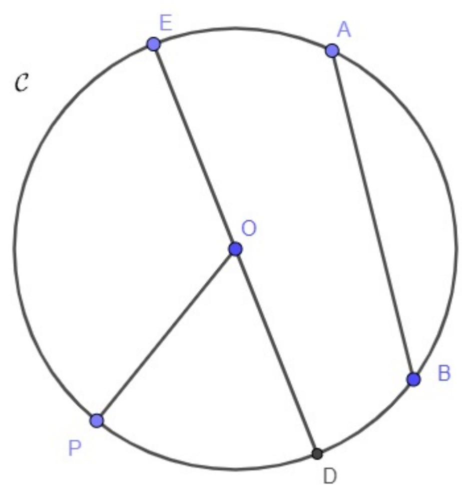
e exterior da circunferência $\mathcal{C}$ como sendo o conjunto

$$ext(\mathcal{C}) = \{A \in \mathcal{E} : \overline{AO} > r\}.$$

Define-se também (observe a Figura 34):

- *corda como sendo um segmento de recta $[AB]$ em que $A, B \in \mathcal{C}$;*
- *diâmetro como sendo uma corda que contém o centro O, por exemplo $[ED]$ na Figura 34;*
- *raio como sendo um segmento recta $[OP]$, com $P \in \mathcal{C}$.*

Figura 34: Circunferência



Observe que, na Definição 6.1, usa-se a palavra *raio* para denotar quer a distância de um ponto de uma circunferência ao seu centro, quer o segmento de recta de extremos o centro da circunferência e um ponto pertencente à circunferência. Esta ambiguidade não trás qualquer problema porque, por um lado o contexto em que a palavra será usada não deixará dúvidas e por outro, a medida do raio $[OP]$ de uma circunferência é sempre igual ao seu raio $r > 0$.

Para verificar que um qualquer diâmetro é eixo de simetria de uma circunferência, necessita-se de definir *ponto simétrico* e *eixo de simetria*.

Definição 6.2. *Sejam $A \in \mathcal{E}$ e s uma recta.*
Considerem-se p a recta perpendicular a s que passa em A e I a projecção ortogonal de A sobre s ($\{I\} = s \cap p$).

Chama-se *ponto simétrico* *de A relativamente a s:*

- *ao ponto A, caso $A \in s$;*
- *ao ponto $A^* \in p$ tal que $\overline{AI} = \overline{A^*I}$, caso $A \notin s$.*

Definição 6.3. *Seja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ não vazio e s uma recta.*

A recta s diz-se *eixo de simetria* *de $\mathcal{A}$ se para todo o ponto $A \in \mathcal{A} \setminus s$, o ponto simétrico de A relativamente a s também pertence a $\mathcal{A}$.*

Seguem-se alguns resultados sobre a geometria da circunferência, cuja prova é deixada como exercício.

Teorema 31. *Qualquer recta que contém o centro de uma circunferência é um eixo de simetria dessa circunferência.*

Dem. Proposta de exercício. □

Teorema 32. *O diâmetro de uma circunferência intersecta qualquer corda, que lhe seja perpendicular, no seu ponto médio.*

Dem. Proposta de exercício. □

Teorema 33. *Numa circunferência $\mathcal{C}$, a mediatriz de uma sua corda contém um diâmetro de $\mathcal{C}$.*

Dem. proposta de exercício. □

Teorema 34. *Numa circunferência $\mathcal{C}$, cordas paralelas têm a mesma mediatriz.*

Dem. proposta de exercício. □

Para prosseguir com propriedades de um circunferência, é necessário introduzir e noção de *arco*

Definição 6.4. *Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência e $[PQ]$ um dos seus diâmetros.*

Chama-se *semicircunferência* *ao conjunto*

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{H},$$

onde $\mathcal{H}$ é um semiplano limitado pela recta (PQ).

Definição 6.5. *Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O.*

Chama-se *arco de circunferência* *de $\mathcal{C}$*

- *a cada uma das semicircunferências de $\mathcal{C}$;*
- *a cada um dos conjuntos*

  $$\mathcal{C} \cap int(\angle POQ) \quad e \quad \mathcal{C} \setminus (\{P, Q\} \cup int(\angle POQ)),$$

  onde $P, Q \in \mathcal{C}$ e $O \notin [PQ]$;
- *à circunferência $\mathcal{C}$.*

Após a definição de arco de uma circunferência, é necessário medi-lo. Para isso define-se *amplitude* de um arco.

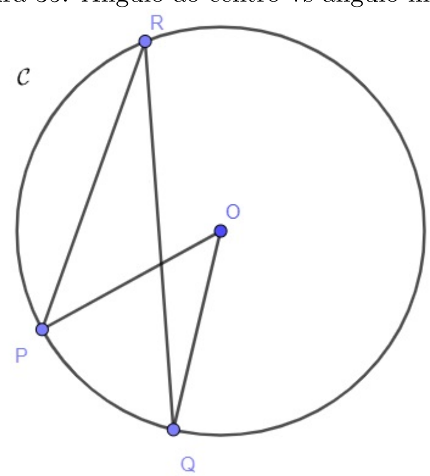
Definição 6.6. *Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O.*
Define-se amplitude de um arco como sendo um número do intervalo $]0, 360]$ tal que

- *a amplitude da circunferência é 360;*
- *a amplitude de uma semicircunferência é 180;*
- *caso $P, Q \in \mathcal{C}$ e $O \notin [PQ]$, a amplitude de $\mathcal{C} \cap int(\angle POQ)$ é $m(\angle POQ)$, e a amplitude de $\mathcal{C} \setminus (\{P, Q\} \cup int(\angle POQ))$ é $360 - m(\angle POQ)$.*

Definição 6.7. *Dois arcos de circunferência dizem-se congruentes se têm a mesma amplitude.*

Seguem-se as definições de ângulo ao centro e de ângulo inscrito numa circunferência.

Figura 35: Ângulo ao centro vs ângulo inscrito



Definição 6.8. *Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O e $P, Q, R \in \mathcal{C}$. (Ver Figura 35)*
Chama-se ângulo ao centro da circunferência $\mathcal{C}$ ao ângulo $\angle POQ$.
Chama-se ângulo inscrito na circunferência $\mathcal{C}$ ao ângulo $\angle PRQ$. Neste caso, o arco $\mathcal{C} \cap int(\angle PRQ)$ diz-se arco interno a $\angle PRQ$ (ou arco subentendido por $\angle PRQ$), e o arco $\mathcal{C} \setminus (\{P, Q\} \cup int(\angle PRQ))$ diz-se arco externo a $\angle PRQ$ (ou arco capaz de $\angle PRQ$).

Seguem mais algumas propriedades elementares das circunferências, cujas provas, mais uma vez, são bons exercícios de revisão das matérias leccionadas anteriormente nesta unidade curricular.

Teorema 35. *Sejam $[AB]$ e $[CD]$ duas cordas de uma circunferência $\mathcal{C}$ tais que $[AB] \parallel [CD]$ e B, D pertencem ao mesmo semiplano limitado pela mediatriz das cordas.*
Então $[BD] \cong [AC]$ e o arco interno a $\angle BAD$ é congruente com o arco interno a $\angle ABC$.

Dem. Proposta de exercício.
Comece por representar a mediatriz das cordas. Pelo Teorema 34, a mediatriz é comum a ambas as coras. (Ver Figura 36)

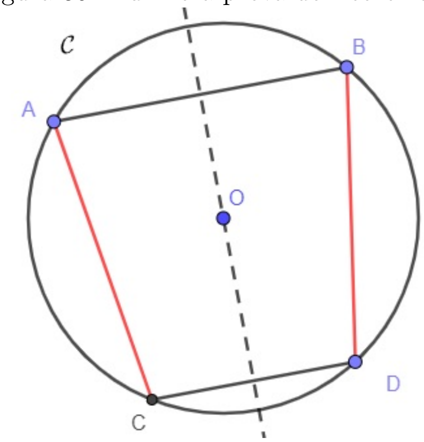
$\square$

Teorema 36. *Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O e $A, B, C, D \in \mathcal{C}$.*
Então

$$\big(\angle AOB \cong \angle COD\big) \Leftrightarrow \big([AB] \cong [CD]\big).$$

Dem. Proposta de exercício. $\square$

Figura 36: Auxílio à prova do Teorema 35



Teorema 37. *Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência, $A \in \mathcal{C}$ e $X \in int(\mathcal{C})$.*

Então a recta (AX) intersecta a circunferência $\mathcal{C}$ num outro ponto diferente de A.

Dem. Proposta de exercício. $\square$

Teorema 38 (Teorema do arco capaz)**.**

A medida de um ângulo inscrito, $\angle ABC$ numa circunferência $\mathcal{C}$ é igual a metade da amplitude do arco subentendido por $\angle ABC$.

Dem. Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O e $A, B, C \in \mathcal{C}$ três pontos distintos.

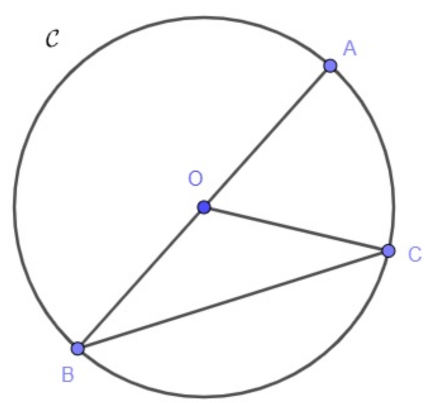
Denote-se por $\widehat{AC}$ o arco subentendido por $\angle ABC$.

Uma e uma só das três situações seguintes acontece:

1. O centro O da circunferência $\mathcal{C}$ pertence ao $\angle ABC$;
2. O centro O da circunferência $\mathcal{C}$ pertence a $int(\angle ABC)$;
3. O centro O da circunferência $\mathcal{C}$ não pertence a $int(\angle ABC) \cup \angle ABC$.

Prove-se cada um dos casos separadamente.

Figura 37: Auxílio à prova do Teorema 38



1. Suponha-se que $O \in \angle ABC$. Sem perda de generalidade, suponha-se que $O \in [BA]$. (ver Figura 37).

   Sendo $[OB]$ e $[OC]$ dois raios da circunferência $\mathcal{C}$, então $[OB] \cong [OC]$, donde o $\triangle OBC$ é isósceles de base $[BC]$. Pela Proposição 10, tem-se $\angle ABC \cong \angle BCO$.

   Como a soma dos ângulos internos de $\triangle OBC$ é 180, tem-se

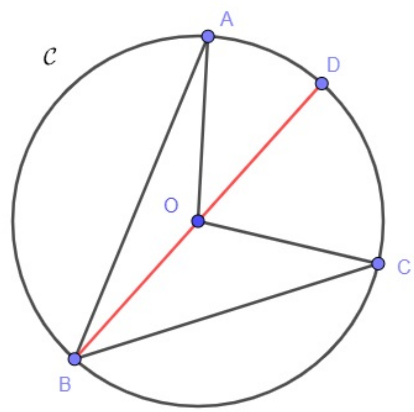
$$m(\angle AOC) = m(\angle ABC) + m(\angle BCO) = 2m(\angle ABC),$$

   donde

$$m(\angle ABC) = \frac{1}{2}m(\angle AOC).$$

   Pela definição de amplitude de um arco, Definição 6.6, conclui-se que a amplitude de $\widehat{AC}$ é igual a metade da medida do ângulo ao centro $\angle AOC$.

Figura 38: Auxílio à prova do Teorema 38



2. Suponha-se que $O \in int\angle ABC$. (ver Figura 38)

   Consequentemente, à excepção da origem B, a semi-recta $[BO)$ está contida no interior do $\angle ABC$. Seja D o ponto de intersecção do $\widehat{AC}$ com a semi-recta $[BO)$.

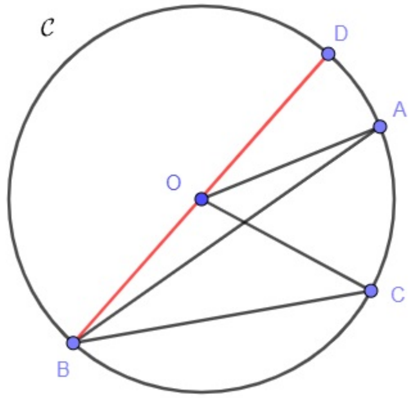
   Desta forma, tem-se $m(\angle ABC) = m(\angle ABD) + m(\angle DBC)$ e o centro O pertence a ambos os ângulos inscritos $\angle ABD$ e $\angle DBC$. Tendo em consideração o ponto 1. demonstrado acima, conclui-se que

$$\begin{aligned} m(\angle ABC) &= m(\angle ABD) + m(\angle DBC) = \frac{1}{2}m(\angle AOD) + \frac{1}{2}m(\angle DOC) \\ &= \frac{1}{2}(m(\angle AOD) + m(\angle DOC)) \\ &= \frac{1}{2}m(\angle AOC). \end{aligned}$$

3. Suponha-se que $O \notin (int(\angle ABC) \cup \angle ABC)$.

   Considere a semi-recta $[BO)$ e denote por D o ponto de intersecção de $[BO)$ com a circunferência $\mathcal{C}$ (diferente de B). Sem perda de generalidade, assuma-se que o arco subentendido por $\angle DBC$ contém o ponto A. (ver Figura 39).

Figura 39: Auxílio à prova do Teorema 38



Desta forma, o ponto O pertence ao $\angle DBC$ e ao $\angle DBA$. Mais uma vez, pelo ponto 1. demonstrado acima, conclui-se que

$$\begin{aligned} m(\angle ABC) &= m(\angle DBC) - m(\angle DBA) = \frac{1}{2}m(\angle DOC) - \frac{1}{2}m(\angle DOA) \\ &= \frac{1}{2}(m(\angle DOC) - m(\angle DOA)) \\ &= \frac{1}{2}m(\angle AOC). \end{aligned}$$

□

Os dois resultados que se seguem são consequências imediatas do Teorema 38.

Corolário 39. *Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência e $P, Q, R \in \mathcal{C}$ três pontos distintos tais que $[PQ]$ é um diâmetro de $\mathcal{C}$.*

Então o $\triangle PQR$ é um triângulo rectângulo.

Dem. Proposta de exercício. □

Definição 6.9. *Chama-se ângulo* <u>*ex-inscrito*</u> *a uma circunferência $\mathcal{C}$ a qualquer ângulo adjacente suplementar a um ângulo inscrito em $\mathcal{C}$.*

Na Figura 40, está representado o $\angle ABC$ que é ex-inscrito à circunferência $\mathcal{C}$ porque um dos lado contém a corda $[BA]$ de $\mathcal{C}$ e o outro lado é a semi-recta $[BC)$ que é oposta à semi-recta $[BC)$ que contém a corda $[BD]$.

A medida de um ângulo ex-inscrito é apresentada pelo corolário do Teorema do arco capaz que se segue.

Corolário 40. *Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O, $A, B \in \mathcal{C}$ e $C \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{C}$ tais que o $\angle ABC$ é um ângulo ex-inscrito a $\mathcal{C}$.*

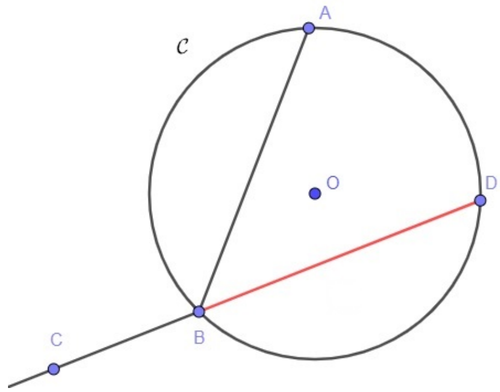
Então

$$m(\angle ABC) = 180 - \frac{1}{2}m(\angle AOD),$$

onde D é o ponto de intersecção da circunferência $\mathcal{C}$ com a semi-recta oposta a $[BC)$.

Dem. Proposta de exercício. □

Figura 40: ângulo ex-inscrito

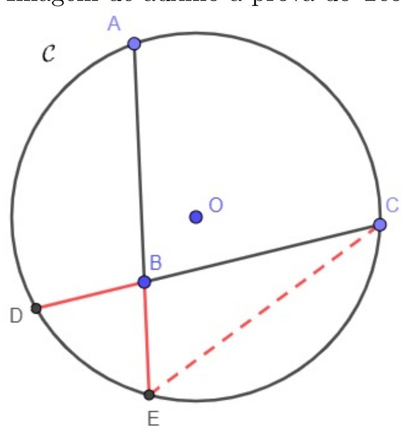


Teorema 41. *Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O, $A, C \in \mathcal{C}$ e $B \in int(\mathcal{C})$.*
Então

$$m(\angle ABC) = \frac{1}{2}(m(\angle AOC) + m(\angle DOE)),$$

onde D é o ponto da intersecção da circunferência $\mathcal{C}$ com a semi-recta oposta a $[BC)$, e E é o ponto da intersecção da circunferência $\mathcal{C}$ com a semi-recta oposta a $[BA)$.

Figura 41: Imagem de auxílio à prova do Teorema 41



Dem. Siga o raciocínio com o auxílio da Figura 41.
Observe que o $\angle ABC$ é externo ao $\triangle BEC$. Consequentemente,

$$m(\angle ABC) = m(\angle BCE) + m(\angle BEC).$$

Como $\angle BCE$ e $\angle BEC$ são ângulos inscritos em $\mathcal{C}$, pelo Teorema 38 conclui-se que

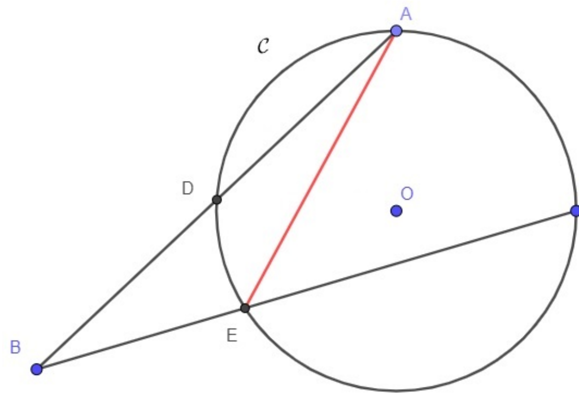
$$m(\angle ABC) = \frac{1}{2}(m(\angle DBE) + m(\angle ABC)).$$

$\square$

Teorema 42. *Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O, $A, C \in \mathcal{C}$ e $B \in ext(\mathcal{C})$ tais que $[BA]$ intersecta $\mathcal{C}$ em $D \neq A$ e $[BC]$ intersecta $\mathcal{C}$ em $E \neq C$.*
Então

$$m(\angle ABC) = \frac{1}{2}(m(\angle AOC) - m(\angle DOE)).$$

Figura 42: Imagem de auxílio à prova do Teorema 42



Dem. Siga o raciocínio com o auxílio da Figura 42.

Observe que o $\angle AEC$ é externo ao $\triangle ABE$. Consequentemente,

$$m(\angle AEC) = m(\angle ABC) + m(\angle BAE),$$

donde

$$m(\angle ABC) = m(\angle AEC) - m(\angle BAE). \tag{12}$$

Como $\angle AEC$ e $\angle BAE$ são ângulos inscritos em $\mathcal{C}$, pelo Teorema 38 tem-se que

$$m(\angle AEC) = \frac{1}{2}m(\angle AOC) \quad \text{e} \quad m(\angle BAE) = \frac{1}{2}m(\angle DOE)$$

e de (12) conclui-se que

$$m(\angle ABC) = \frac{1}{2}(m(\angle AOC) - m(\angle DOE)).$$

□

Teorema 43. *Sejam $A, B, C \in \mathcal{E}$ três pontos não colineares.*

Então existe uma, e uma só, circunferência $\mathcal{C}$ tal que $\{A, B, C\} \subseteq \mathcal{C}$.

Dem. Proposta de exercício. □

Definição 6.10. *Dado um $\triangle ABC$, chama-se circuncentro do triângulo ao centro da circunferência que contém todos os vértices do $\triangle ABC$.*

No que segue, apresentam-se as várias posições de rectas relativamente a uma dada circunferência.

Definição 6.11. *Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência e r uma recta. Diz-se que*

- *a recta r é exterior à circunferência $\mathcal{C}$ se $\#(\mathcal{C} \cap r) = 0$;*
- *a recta r é tangente à circunferência $\mathcal{C}$ se $\#(\mathcal{C} \cap r) = 1$. Chama-se ponto de tangência ao ponto que é comum à circunferência e à recta;*
- *a recta r é secante à circunferência $\mathcal{C}$ se $\#(\mathcal{C} \cap r) = 2$;*

Exercício 22. *Mostre que não existem rectas que intersectam uma qualquer circunferência em mais do que dois pontos.*

Teorema 44. *Para qualquer $\triangle ABC$, existe uma, e uma só, circunferência tangente a todos os lados de $\triangle ABC$.*

Dem. Proposta de exercício. $\square$

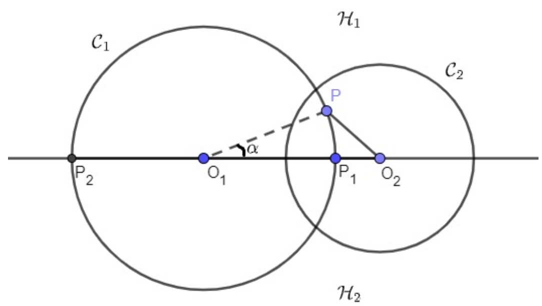
Definição 6.12. *Dado um $\triangle ABC$, chama-se incentro do triângulo ao centro da circunferência inscrita, isto é, da circunferência tangente a todos os lado do $\triangle ABC$.*

Teorema 45. *Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ duas circunferências, com centros em O_1 e O_2 e raios r_1 e r_2 respectivamente, tais que*

$$\mathcal{C}_1 \cap int(\mathcal{C}_2) \neq \emptyset \quad e \quad \mathcal{C}_1 \cap ext(\mathcal{C}_2) \neq \emptyset. \tag{13}$$

Então as circunferência $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ intersectam-se em exactamente dois pontos.

Figura 43: Imagem de auxílio à prova do Teorema 45



Dem. Sem perda de generalidade, suponha-se que $r_2 \leq r_1$.

Considere a recta (O_1O_2) e $\mathcal{H}_1$ um dos semiplanos limitado por esta.

Considere a função

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,180[& \to & \mathbb{R} \\ & \alpha & \mapsto & |O_2P| \end{array},$$

onde $P \in \mathcal{H}_1$ é o único ponto de $\mathcal{C}_1$ tal que $m(\angle PO_1O_2) = \alpha$ (ver Figura 43).

Defina-se $m = \min\{\overline{O_2P} : P \in (O_1O_2) \cap \mathcal{C}_1\}$ (na Figura 43, tem-se $m = \overline{O_2P_1}$ e $M = \overline{O_2P_2}$).

Tem-se que $f(]0,180[) =]m, M[$ (consequência do axioma (A7)) e f é estritamente crescente (provar).

Sendo f uma função monótona em que quer o domínio quer o contradomínio são intervalos, então f é contínua.

Mais, por (13) prova-se que existem $P', P'' \in \mathcal{C}_1$ tal que $\overline{O_2P'} < r_2$ e $\overline{O_2P''} > r_2$ (prove).

Pelo teorema do valor intermédio existe um único α^* tal que $f(\alpha^*) = r_2$ (a unicidade vem porque a monotonia de f é estrita). Consequentemente existe $P^* \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{H}_1$ tal que $m(\angle P^*O_1O_2) = \alpha^*$ e $|O_2P^*| = f(\alpha^*) = r_2$. Logo $P^* \in \mathcal{C}_2$. Conclui-se então que $P^* \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

Finalmente, pelo Teorema 31, a recta (O_1O_2) é um eixo de simetria das circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, donde se conclui que, no semiplano $\mathcal{H}_2$, existe um único ponto comum às duas circunferências que é o ponto simétrico de P^* relativamente à recta (O_1O_2). $\square$

Exercício 23.

1. *Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência, t uma recta e $T \in \mathcal{C} \cap t$*

   Mostre que a recta t é tangente a $\mathcal{C}$ se e só se a recta perpendicular a t no ponto T contém um diâmetro de $\mathcal{C}$.

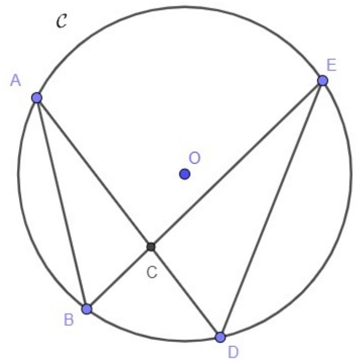
2. *Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ duas circunferências de centros em O_1 e O_2 respectivamente.*

   Mostre que se existe $A \in [O_1O_2]$ tal que $A \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, então $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A\}$.

3. *Considere a Figura 44.*

   Mostre que $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.

Figura 44: Imagem de auxílio a exercício

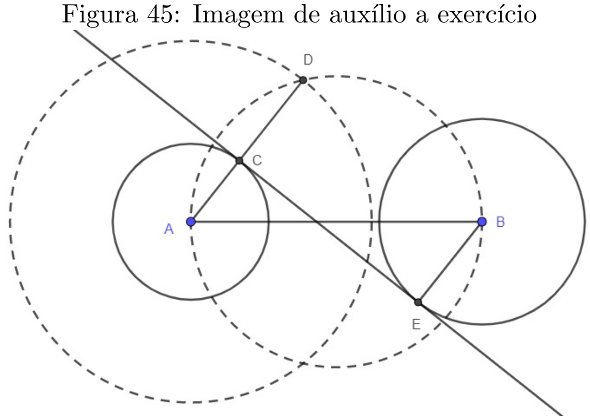


4. *Na Figura 45 estão representadas duas circunferências, uma de centro em A e outra de centro em B. O ponto C pertence à circunferência de centro A e o ponto E pertence à circunferência de centro em B.*

   Suponha que existe o ponto $D \in [AC)$ pertencente à intersecção da circunferência de centro A e raio $\overline{AC} + \overline{BE}$ com a circunferência de diâmetro $[AB]$.

   Mostre que se $[EB] \parallel [AC]$, então a recta (EC) é tangente às duas circunferências.

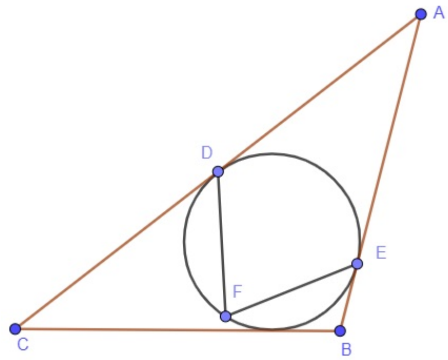
Figura 45: Imagem de auxílio a exercício



5. *Considere um $\triangle ABC$ isósceles em que $m(\angle ABC) = 100$. Considerando a circunferência, $\mathcal{C}$, inscrita em $\triangle ABC$, o ponto D é o ponto de tangência do lado $[CA]$ com $\mathcal{C}$ e o ponto E é o ponto de tangência do lado BA com $\mathcal{C}$. (Observe a Figura 46)*

   Sendo $F \in \mathcal{C} \setminus \{D, E\}$ determine os possíveis valores para $m(\angle DFE)$.

Figura 46: Imagem de auxílio a exercício



7 Construções de Régua e Compasso

Construções de régua e compasso são construções geométricas realizadas no plano euclidiano apenas com dois instrumentos, uma *régua não graduada* e um *compasso*, a partir de um conjunto finito de pontos iniciais, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{E}$, e respeitando um conjunto de regras pré-definidas.

- A régua, sem graduação, serve para desenhar rectas, semi-rectas e segmentos de recta.
- O compasso serve para desenhar arcos de circunferências e transferir medidas. Este instrumento é constituído por duas pontas, a ponta *seca* e a ponta *móvel*. A ponta seca coloca-se sempre sobre o ponto que será o centro da circunferência a construir, enquanto que a ponta móvel é a ponta que marca os pontos equidistantes ao centro.

Regras a seguir na realização de construções de régua e compasso:

1. Não é permitido seleccionar pontos aleatórios (sejam estes pertencentes a uma recta, a uma circunferência, ou ao plano euclidiano);
2. Com a régua não graduada só é possível desenhar uma recta que passa em dois pontos pré-estabelecidos;
3. Com o compasso só é possível desenhar uma circunferência de centro num ponto pré-estabelecido e de raio igual ao comprimento de um segmento de recta, cujos extremos sejam pontos pré-estabelecidos.

Para que as regras acima descritas possam ser utilizadas, falta definir o que se entende por *ponto pré-estabelecido*.

Definição 7.1. *Chama-se ponto pré-estabelecido, num dado momento do processo de execução de uma construção de régua e compasso, a um ponto do plano euclidiano $\mathcal{E}$ que:*

- *pertença ao conjunto inicial de pontos $\mathcal{P}$ fornecido para a realização da construção;*
- *seja a intersecção de duas circunferências previamente construídas;*
- *seja a intersecção de duas rectas previamente construídas;*
- *seja a intersecção de uma recta com uma circunferência previamente construídas.*

Das regras acima descritas, segue imediatamente que, para que uma construção de régua e compasso se processe é necessário que o conjunto inicial de pontos $\mathcal{P}$ tenha pelo menos dois pontos.

Atenda-se ao exemplo que se segue.

Exemplo: Dados dois pontos distintos no plano euclidiano, ou seja $A, B \in \mathcal{E}$, pretende-se obter a mediatriz do segmento de recta $[AB]$.

Processo de construção:

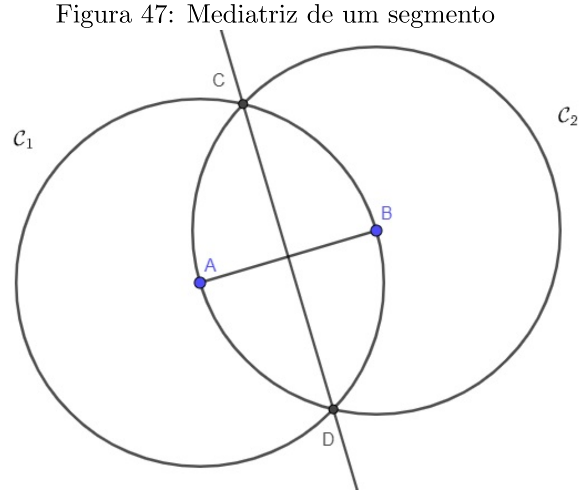
1. Colocando a ponta seca do compasso no ponto A e com uma abertura igual a $\overline{AB}$, constrói-se a circunferência de centro A e raio $[AB]$. Designe-se por $\mathcal{C}_1$ esta circunferência;
2. Colocando a ponta seca do compasso no ponto B e com uma abertura igual a $\overline{AB}$, constrói-se a circunferência de centro B e raio $[AB]$. Designe-se por $\mathcal{C}_2$ esta circunferência;
3. Identificam-se com as letras C e D os pontos de intersecção das circunferências, $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, construídas anteriormente;

4. Com a régua não graduada constrói-se a recta que passa pelos pontos C e D. Esta é a mediatriz do segmento de recta $[AB]$.

Veja a Figura 47 e observe a construção finalizada.

Justificação do processo:
Os pontos de $\mathcal{C}_1$ são equidistantes ao ponto A e os pontos de $\mathcal{C}_2$ são equidistantes ao ponto B. Consequentemente, os pontos D e C são equidistantes de A e de B, logo (Definição 3.1) D, C pertencem à mediatriz do segmento de recta $[AB]$. Como anteriormente se verificou que a mediatriz de um segmento de recta é uma recta, o axioma (A1) permite concluir que a recta (CD) é a solução pedida.

Figura 47: Mediatriz de um segmento



Tal como acontece neste primeiro exemplo, qualquer construção de régua e compasso é composta por duas etapas distintas: O *processo de construção* e a *justificação do processo.*

Processo de construção Nesta etapa são descritos, de forma sequencial, todos os procedimentos seguidos na construção do desenho levando à solução do problema apresentado;

Justificação do processo Nesta etapa apresentam-se as justificações necessárias para garantir que o desenho efectuado conduz à solução do problema posto.

A obtenção da mediatriz de um segmento de recta é uma das construções clássicas de régua e compasso. Segue-se uma lista com outras construções clássicas, igualmente elementares:

- Dados dois pontos, $A, B \in \mathcal{E}$ com $A \neq B$, e $P \in \mathcal{E}$, desenhar a recta que passa por P e é perpendicular à recta (AB);
- Dados dois pontos, $A, B \in \mathcal{E}$ com $A \neq B$, e $P \in \mathcal{E} \setminus (AB)$, desenhar a recta paralela a (AB) que passa por P;
- Construir a bissectriz de um ângulo $\angle ABC$ dado;
- Construir um triângulo equilátero, dado um dos seus lados, segmento de recta $[AB]$.
- Transportar, somar e subtrair segmentos de recta;
- Transportar, somar e subtrair ângulos.

Entenda-se por *transportar um segmento de recta*, como seja construir um segmento recta congruente com um previamente fornecido, numa dada semi-recta e com um dos extremos na origem.
Entenda-se por *somar dois segmentos de recta*, como seja construir um segmento recta com comprimento igual à soma dos dois segmentos de recta dados, numa dada semi-recta e com um dos extremos na origem.
Entenda-se por *subtrair dois segmentos de recta*, como seja construir um segmento recta com comprimento igual à diferença entre o comprimento de um segmento de recta dado e o comprimento de um outro de menor valor, numa dada semi-recta e com um dos extremos na origem.
Entenda-se por *transportar um ângulo*, como construir um ângulo, dado um dos seus lados, congruente com um ângulo previamente fornecido.
Entenda-se por *somar dois ângulos*, como construir um ângulo, dado um dos seus lados, cuja sua medida é igual à soma das medidas de dois ângulos dados.
Entenda-se por *subtrair dois ângulos*, como construir um ângulo, dado um dos seus lados, cuja sua medida é igual à diferença entre a medida de um dado ângulo com a de outro dado de menor medida.

As construções listadas anteriormente são elementares e, por serem elementares, frequentemente aparecem nas construções sem as justificações que as suportam. Compreende-se essa situação pois, em construções de uma complexidade superior, torna-se complicada a leitura se as justificações elementares não forem omitidas. Mas atenção, as justificações são sempre parte integrante das construções de régua e compasso.

Exercício 24. *Fica como exercício a obtenção de cada uma das construções indicada na lista anterior.*

Uma construção um pouco mais complexa é a obtenção da recta tangente a uma circunferência dada e que passa num ponto dado exterior à circunferência. Fica o desafio de executar esta construção.

Exercício 25. *Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência, de centro O e raio $[OA]$, e P um ponto exterior à circunferência.*

Obtenha, através de construção de régua e compasso, as rectas tangentes a $\mathcal{C}$ que passam por P.

Uma generalização da construção efectuada no exercício anterior é a de colocar, em lugar do ponto P uma outra circunferência. A resolução do ponto 4. do Exercício 23 (ver Figura 45), na secção anterior, ajuda na resolução do exercício que se segue.

Exercício 26. *Observe a Figura 45.*

Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ duas circunferências de centros A e B e raios $[AC]$ e $[BD]$ respectivamente.

1. *Fazendo depender das posições relativas das duas circunferências, diga quantas rectas tangentes às duas circunferências existem.*

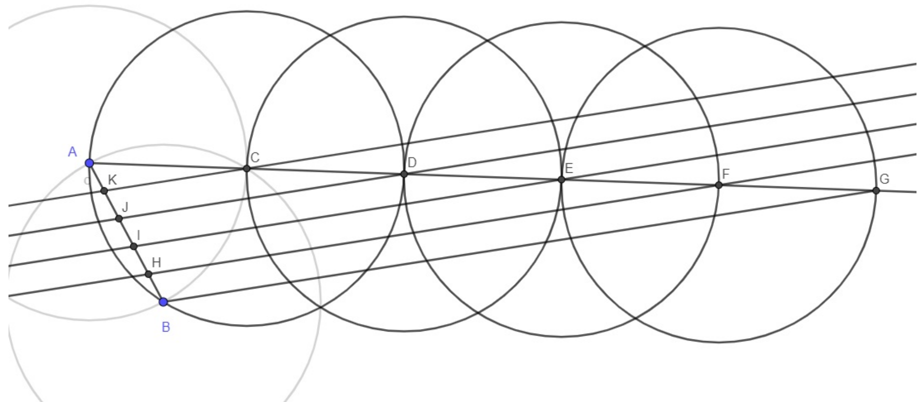
2. *Através de construções de régua e compasso, obtenha, nas situações em que é possível, as rectas tangentes às duas circunferências dadas.*

Divisão de um segmento de recta em n partes iguais:

Uma outra construção clássica é a divisão de um segmento de recta em n ($n \in \mathbb{N}$) partes iguais. Para isso faz-se uso do Teorema 29 (Teorema de Thales). Observe a Figura 48, na qual se apresenta a divisão do segmento de recta $[AB]$ em cinco partes iguais. Note que estão omitidos os passos de construção das rectas paralelas ao segmento de recta $[GB]$. Fica o desafio para completar o processo de construção e escrever a justificação do processo de construção de régua e compasso.

Note ainda que o processo apresentado para a divisão do segmento de recta em 5 partes iguais pode ser replicado para efectuar a divisão do segmento em n partes iguais, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Figura 48: Divisão de um segmento de recta em 5 segmentos congruentes entre si



Segmento com comprimento igual $\sqrt{n}$ vezes o comprimento de um segmento dado:

Dado um segmento de recta $[AB]$ e $n \in \mathbb{N}$, é possível obter, por construção de régua e compasso, um outro segmento de recta cujo comprimentos é $\sqrt{n} \cdot \overline{AB}$. Aqui é o Teorema de Pitágoras que suporta a justificação da construção.

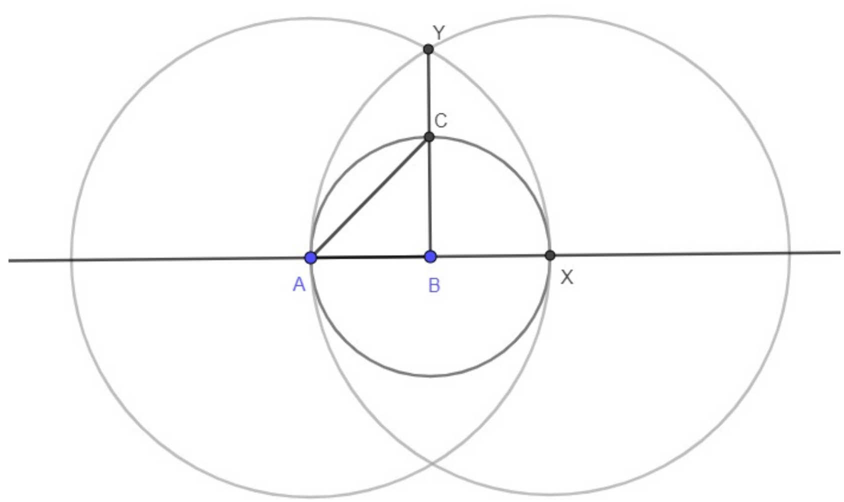
Comece-se por construir um segmento de comprimento $\sqrt{2}.\overline{AB}$. (ver Figura 49).

Considerando a recta (AB), constrói-se um segmento de recta $[BC]$ tal que $[AB] \perp [BC]$ e $[AB] \cong [BC]$. Desta forma, o $\triangle ABC$ é rectângulo com $\angle ABC$ recto. Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AB}^2} \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{2}.\overline{AB},$$

donde o segmento $[AC]$ é a reposta ao problema.

Figura 49: Construção de um segmento de comprimento $\sqrt{2}.\overline{AB}$



Para construir um segmento de comprimento $\sqrt{3}.\overline{AB}$, é necessário partir de um segmento de comprimentos $\sqrt{2}.\overline{AB}$. (ver Figura 50)

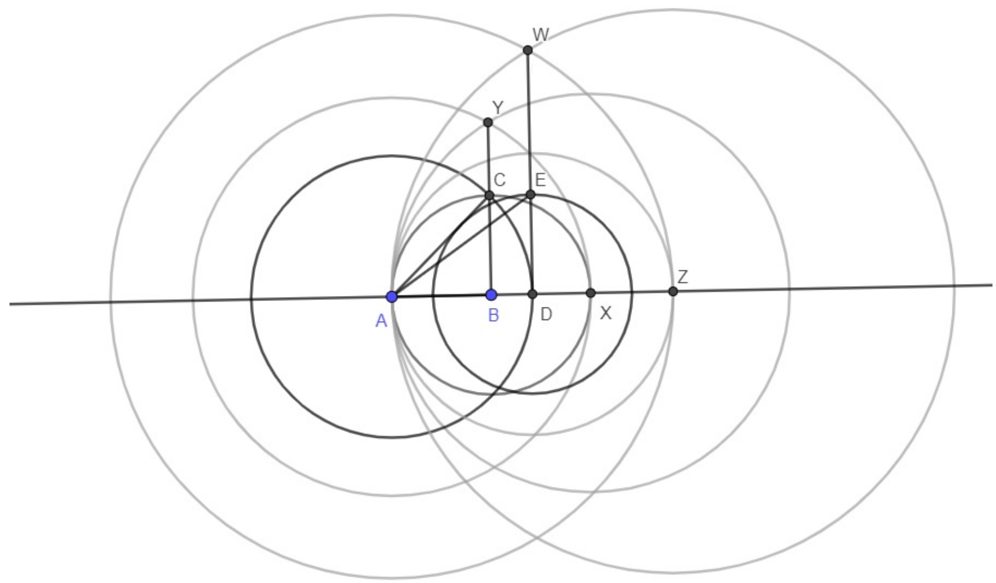
Colocando a ponta seca do compasso no ponto A e a ponta móvel no ponto C, desenha-se uma circunferência e marca-se com a letra D um dos pontos de intersecção desta com a recta (AB).

Constrói-se um segmento de recta $[DE]$ tal que $[AB] \perp [DE]$ e $[AB] \cong [DE]$. O $\triangle ADE$ é rectângulo e o Teorema de Pitágoras assegura que

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{AE} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2} \Leftrightarrow \overline{AE} = \sqrt{\overline{AB}^2 + 2\overline{AB}^2} \Leftrightarrow \overline{AE} = \sqrt{3}.\overline{AB},$$

donde o segmento $[AE]$ é a reposta ao problema.

Figura 50: Construção de um segmento de comprimento $\sqrt{3}.\overline{AB}$



Iterando o processo $n-1$ vezes, $n \in \mathbb{N}$, constrói-se um segmento de recta com comprimento igual a $\sqrt{n}.\overline{AB}$.

Exercício 27. *Através de uma construção de régua e compasso, divida um segmento em média e extrema razão. Ou seja, dado $[AB]$, pretende-se encontrar $C \in [AB]$ tal que*

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Segmento com comprimento igual ao produto dos comprimentos de dois segmentos dados:

Dados dois segmentos de recta, como construir um outro segmento de recta com comprimento igual ao produto dos comprimentos dos segmentos de rectas dados?

Para responder a este problema, para além dos segmentos dados, é também necessário fornecer um segmento de recta com comprimento igual à unidade. Note que, caso o segmento de comprimentos igual à unidade não for fornecido, o problema não fica bem posto no sentido em que a resposta ao problema será ambígua. Imagine-se que são dados dois segmentos de recta, $[AB]$ e $[CD]$ em que $\overline{CD} = 2\overline{AB}$ (Figura 51). Claro que se considerar $\overline{AB} = 1$, então o segmento recta pedido é congruente com o segmento de recta $[CD]$. Mas caso assuma que $\overline{AB} = 2$, então a resposta terá que ser um segmento de recta que não pode ser congruente $[CD]$. Esta situação ilustra a ambiguidade da resposta ao problema. Esta dificuldade fica ultrapassada caso seja fornecido um segmento de recta com comprimento igual à unidade.

Novamente, a justificação da solução do problema apresentada abaixo assenta no Teorema de Thales

Figura 51: Dois segmentos de recta

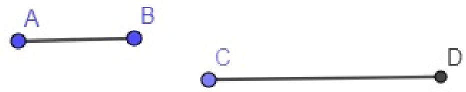
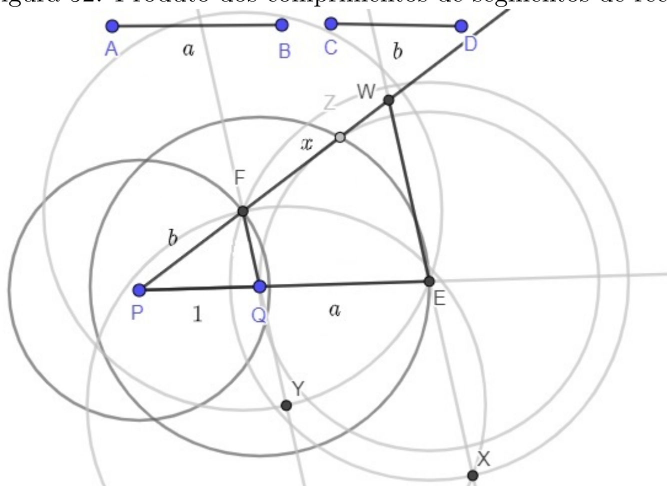


Figura 52: Produto dos comprimentos de segmentos de recta



Considere dois segmentos de recta, $[AB]$ e $[CD]$, e designe-se $a = \overline{AB}$ e $c = \overline{CD}$. Seja $[PQ]$ um segmento de recta tal que $\overline{PQ} = 1$.

Constrói-se, respeitando as regras das construções de régua e compasso, a Figura 52, onde o $[QE] \cong [AB]$, $[PF] \cong [CD]$ e os segmentos de recta $[QF]$ e $[EW]$ são paralelos.

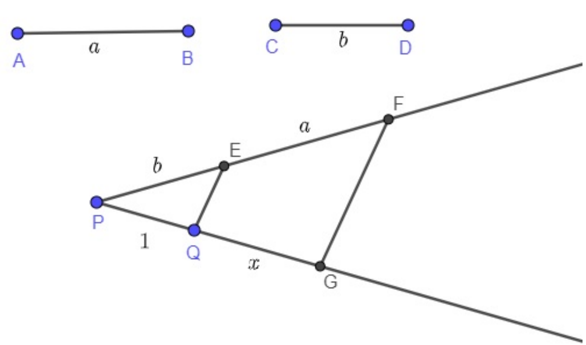
Designe-se por x o comprimento do segmento de recta $[FW]$. Pelo Teorema 29 (Teorema de Thales) obtém-se

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{x} \Leftrightarrow x = ab,$$

donde se conclui que o segmento de recta $[FW]$ tem comprimento igual ao produto do comprimento do segmento de recta $[AB]$ pelo comprimento do segmento de recta $[CD]$.

Segmento com comprimento igual ao quociente entre os comprimentos de dois segmentos dados:

Figura 53: Quociente entre dos comprimentos de segmentos de recta



Dados dois segmentos de recta, $[AB]$ e $[CD]$, e um outro $[PQ]$ tal que $\overline{PQ} = 1$, pretende-se agora obter um segmento de recta cujo seu comprimento é igual ao quociente entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Para isso, procede-se à construção de régua e compasso cujo resultado final é apresentado na Figura 53, onde $a = \overline{AB}$ e $b = \overline{CD}$. Ao contrário do que acontece na Figura 52, aqui todas as construções intermédias estão omitidas e por isso se desafia o aluno a proceder à sua construção.

Aplicado novamente o Teorema de Thales, mas na Figura 53, obtém-se

$$\frac{1}{x} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow x = \frac{a}{b},$$

e consequentemente, o segmento $[QG]$ é a solução do problema.

Exercício 28. *Assuma que são fornecidos quatro segmentos de recta, $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$ e $[PQ]$, com comprimento a, b, c e 1 respectivamente, onde $c > b$.*

Por uma construção de régua e compasso, obtenha um segmento de recta cujo comprimentos x, é solução da equação

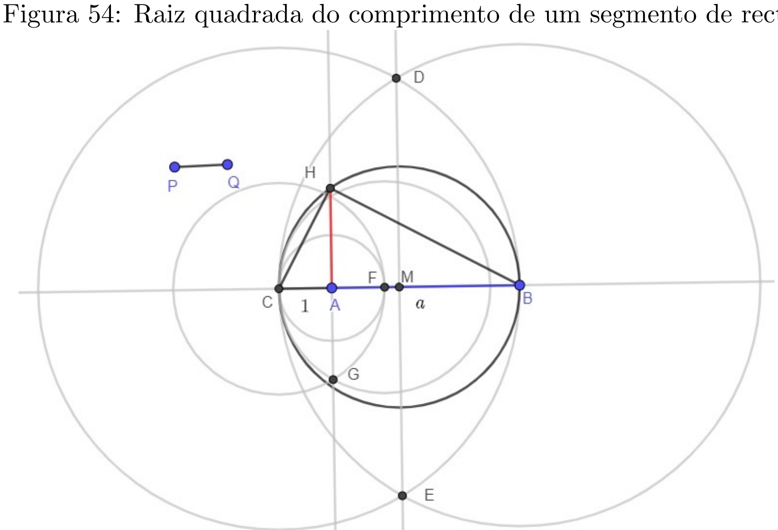
$$ax + b = c.$$

Segmento com comprimento igual à raiz quadrada do comprimentos de um segmento dado:

Dados $[AB]$ um segmento de recta e $[PQ]$ um segmento de recta de comprimento igual à unidade, como obter um segmento de recta com comprimento igual a $\sqrt{\overline{AB}}$?

Observe a construção de régua e compasso presente na Figura 54.

Figura 54: Raiz quadrada do comprimento de um segmento de recta



Na recta que contém o segmento de recta $[AB]$ constrói-se um segmento de recta $[CA]$, congruente com $[PQ]$, surgindo assim o segmento de recta $[CB]$ com comprimento igual a $(a+1)$, onde $a = \overline{AB}$. Segue-se a obtenção do ponto médio M do segmento de recta $[CB]$ e da circunferência de centro em M e raio $\overline{MB}$. Depois desenha-se a recta perpendicular a $[CB]$ que passa pelo ponto A e denota-se por H o ponto de intersecção desta recta com a circunferência. Consequentemente, o $\triangle CBH$ é um triângulo rectângulo, onde $\angle BHC$ é recto e $[CB]$ a hipotenusa. O segmento $[AH]$ é a solução do problema, ou seja, $\overline{AH} = \sqrt{a}$.

Justificação: Observe que são também triângulos rectângulos o $\triangle CAH$ e $\triangle BAH$. Aplicando o Teorema de Pitágoras a cada um dos triângulos rectângulos, obtém-se

$$(1+a)^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2 = (1^2 + \overline{AH}^2) + (a^2 + \overline{AH}^2) = 1 + 2\overline{AH}^2 + a^2,$$

e, pelo caso notável da multiplicação, segue que

$$1 + 2a + a^2 = 1 + 2\overline{AH}^2 + a^2,$$

donde se conclui que

$$\overline{AH} = \sqrt{a}.$$

Exercício 29. *Considere um segmento de recta* $[PQ]$ *tal que* $\overline{PQ} = 1$.

Por uma construção de régua e compasso, obtenha um segmento de recta cujo comprimentos x*, sendo* x *uma solução da equação*

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Considere-se uma recta r do plano euclidiano e $A, B \in r$. Suponha-se que $\overline{AB} = 1$ e considere-se o sistema de coordenadas em r, $f : r \to \mathbb{R}$, tal que $f(A) = 0$ e $f(B) = 1$. Sendo f uma função bijectiva, os pontos da recta r estão identificados com os números reais.

Definição 7.2. *Sejam* $r \in \mathcal{E}$*,* $A, B \in r$ *e* $f : r \to \mathbb{R}$ *sistema de coordenadas tal que* $f(A) = 0$ *e* $f(B) = 1$.

Chamam-se <u>números de régua e compasso</u> aos números 0*,* 1 *e a todos os outros números reais que correspondem a pontos da recta* r *que podem ser obtidos por construções de régua e compasso.*

A prova das respostas às perguntas formuladas abaixo está fora do programa desta Unidade Curricular. Contudo o estudante pode consultar a bibliografia indicada para ter acesso às provas.

1. Será que todo o número real é número de régua e compasso?

   A resposta é não (consultar [4]).

2. Quais os números reais que são números de régua e compasso?

   Este conjunto forma um subcorpo do corpo dos números reais e é constituído pelos números 0, 1 e por todos os números reais que podem ser obtidos através do número 1 e das operações

   $$+ \quad - \quad \times \quad \div \quad \sqrt{\ }$$

   Consultar [4] para obtenção das provas.

Na prática, são todos os números que se podem obter através de uma máquina de calcular usando as teclas:

$$(\quad) \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 0 \quad + \quad - \quad \times \quad \div \quad \sqrt{\ }$$

Por exemplo, o número

$$\left(3327 \div \left(5702 - \sqrt{5 - \sqrt{3}}\right)\right) \times \sqrt{(3 \times 5) \div \left(\sqrt{3 + 2 \times \sqrt{15}}\right)}$$

é um número de régua e compasso.

Mas, por exemplo,

$$\sqrt[3]{2}$$

não é número de régua e compasso.

Concretizando, dado um segmento de recta de comprimento igual à unidade, um outro segmento de recta é possível de ser obtido por construção de régua e compasso se e só se o seu comprimento é um número de régua e compasso. Esta caracterização permite identificar se determinado problema de construção geométrica plana é ou não possível de ser construído respeitando as regras de construções de régua e compasso.

Contudo, na prática algumas situações não são tão imediatas como à partida se possa pensar porque, por exemplo, se o comprimento do segmento de recta que é necessário construir for dado como a solução, x_0, de uma equação real, então decidir se a solução x_0 é um número de régua e compasso pode ser um problema difícil. Neste sentido:

1. A solução de uma equação do $1^{\underline{o}}$ grau com coeficientes racionais é um número de régua e compasso;

2. As soluções reais de uma equação do $2^{\underline{o}}$ grau com coeficientes racionais são números de régua e compasso;

3. As soluções reais de uma equação do $3^{\underline{o}}$ grau com coeficientes racionais são números de régua e compasso se e só se a equação tem uma solução racional.

Os pontos 1. e 2. são fáceis de verificar (exercício).
O ponto 3. é um Teorema cuja demostração é feita em [4, página 42].

Exercício 30. *Seja* $[PQ]$ *um segmento de recta do plano euclidiano tal que* $\overline{PQ} = 1$.

Por uma construção de régua e compasso, obtenha dois segmentos de recta com comprimento igual, respectivamente, a cada uma das soluções da equação

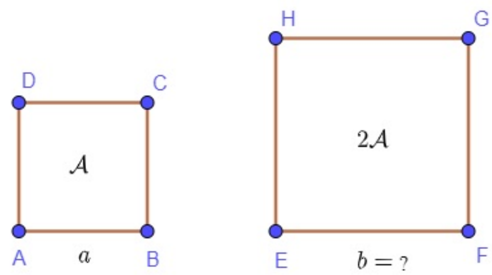
$$3x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0.$$

8 Construções de Régua e Compasso: Problemas Clássicos

Nesta secção estudam-se alguns dos mais conhecidos problemas clássicos de construções de régua e compasso.

I - Duplicação do quadrado

Figura 55: Duplicação do quadrado



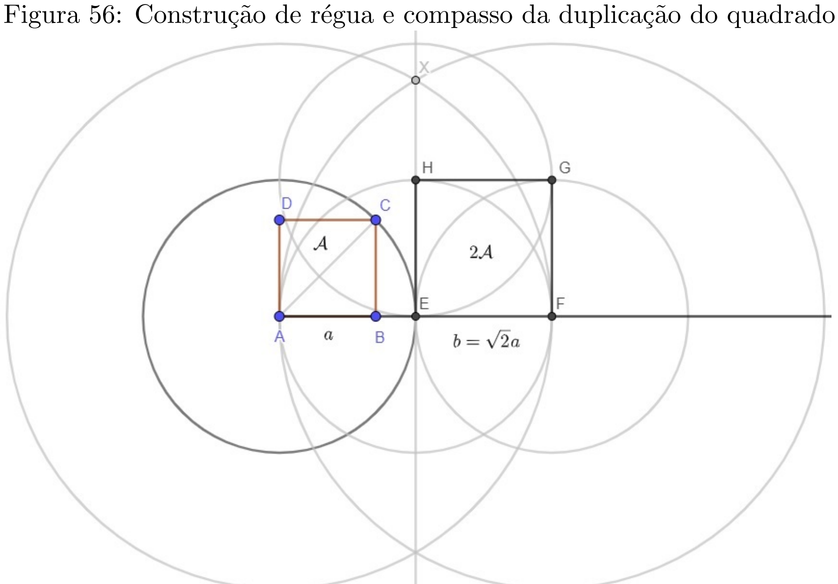
O problema da duplicação do quadrado consiste em, dado um quadrado $ABCD$, onde $a > 0$ é o comprimento do lado, obter por construção de régua e compasso um outro quadrado $EFGH$ cuja área é o dobro da área do quadrado dado, ou seja $2a^2$ (ver Figura 55).

Tem-se $\mathcal{A} = a^2$, e pretende-se desenhar um segmento de recta, de comprimento b, tal que $b^2 = 2\mathcal{A}$. Consequentemente,

$$b^2 = 2a^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{2}a.$$

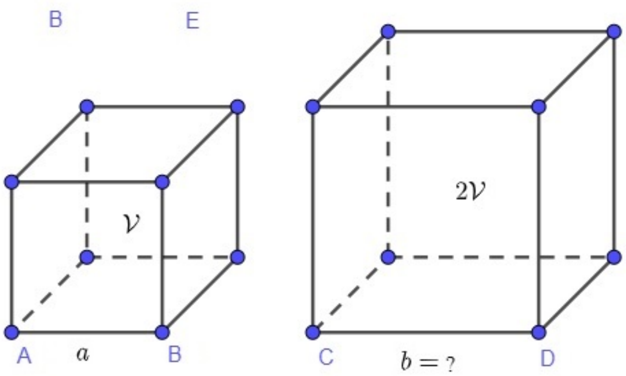
Como $\sqrt{2}$ é um número de régua e compasso, a solução do problema obtém-se através da construção de um segmento de recta de comprimento $\sqrt{2}a$. Observe a construção presente na Figura 56.

Figura 56: Construção de régua e compasso da duplicação do quadrado



II - Duplicação do cubo

Figura 57: Duplicação do cubo



O problema da duplicação do cubo consiste em, dado um segmento de recta $[AB]$, de comprimento a, correspondendo à aresta de um cubo, obter por construção de régua e compasso um outro segmento de recta $[CD]$ de tal forma que o cubo de aresta $[CD]$ tem o dobro do volume do cubo de aresta $[AB]$ (ver Figura 57).

Tem-se $\mathcal{V} = a^3$, e pretende-se desenhar um segmento de recta, de comprimento b tal que $b^3 = 2\mathcal{A}$. Consequentemente,

$$b^3 = 2a^3 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{2}a.$$

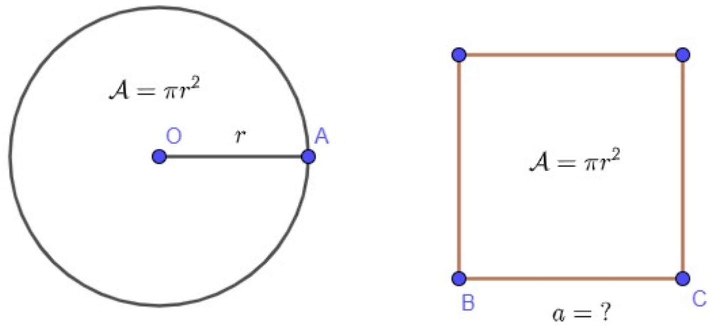
Assim sendo, a solução para o problema da duplicação do cubo resume-se a desenhar um segmento de recta de comprimento $\sqrt[3]{2}a$. Mas o número real $\sqrt[3]{2}$ não é um número de régua e compasso, logo não é possível desenhar um segmento de recta nas condições pedidas respeitando as regras das construções de régua e compasso.

Resumindo, o problema da duplicação do cubo não tem solução.

III - Quadratura do círculo

O problema da quadratura do círculo consiste em, dada uma circunferência, obter por construção de régua e compasso um quadrado com área igual à área do círculo definido pela circunferência dada (ver Figura 58).

Figura 58: Quadratura do círculo



Sendo $r > 0$ o raio da circunferência, então a área do círculo é $\mathcal{A} = \pi r^2$. Pretende-se desenhar um segmento de recta de comprimento a tal que $a^2 = \mathcal{A} = \pi r^2$. Consequentemente,

$$a^2 = \pi r^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{\pi} r.$$

Desta forma, a solução para o problema da quadratura do círculo resume-se a desenhar um segmento de recta de comprimento $\sqrt{\pi} r$. Mas o número real $\sqrt{\pi}$ não é um número de régua e compasso, logo não é possível desenhar um segmento de recta nas condições pedidas respeitando as regras das construções de régua e compasso.

Resumindo, o problema da quadratura do círculo também não tem solução.

IV - Construção de um polígono regular com n lados ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$)

Antes de apresentar o problema, é necessário definir *polígono regular.*

Definição 8.1. *Chama-se polígono regular a um polígono convexo em que todos os seus lados são congruentes e todos os seus ângulos são congruentes.*

Não sendo objectivo aqui estudar as propriedades dos polígonos regulares, refira-se, sem prova, que todo o polígono regular pode ser inscrito numa circunferência. Mais, qualquer polígono regular com n lados ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$) pode ser dividido em n triângulos isósceles congruentes, em que a medida do ângulo oposto à base é $\frac{360}{n}$.

De volta ao problema, este consiste em, dados $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ e uma circunferência, $\mathcal{C}$, de centro O e raio $[OA]$, construir com régua e compasso um polígono regular com n lados inscrito na circunferência $\mathcal{C}$. Denote-se por $r \in \mathbb{R}^+$, o comprimento do raio, isto é $r = \overline{OA}$.

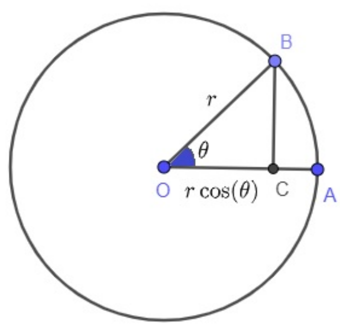
Desenhar o polígono, com n lados, inscrito na circunferência $\mathcal{C}$, é equivalente a ser possível dividir a circunferência em n arcos de circunferência todos congruentes entre si. Como a amplitude de uma circunferência é 360, então a amplitude de cada arco deverá ser

$$\frac{360}{n}.$$

Como a amplitude de um arco de circunferência é igual à medida do correspondente ângulo ao centro, o problema fica resolvido se for possível construir, com régua e compasso, um ângulo de amplitude

$$\theta = \frac{360}{n}.$$

Figura 59: Pré-requisito para construção de um polígono regular



Observando a Figura 59, conclui-se que é possível construir o ângulo de amplitude θ se e só se for possível construir um segmento de recta, $[OC]$, com comprimento

$$r\cos(\theta) = r\cos\left(\frac{360}{n}\right).$$

Como o segmento de recta de comprimento r, $[OA]$, é fornecido com o problema, então é possível construir o segmento de recta $[OC]$ se e só se o número

$$\cos\left(\frac{360}{n}\right)$$

é um número de régua e compasso. Provou-se assim o seguinte resultado.

Proposição 46. *Seja $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.*

É possível construir, com régua e compasso, um polígono regular com n lados se e só se o número real

$$\cos\left(\frac{360}{n}\right)$$

é um número de régua e compasso.

Exercício 31. *Considere O, A dois pontos distintos do plano euclidiano e $\mathcal{C}$ a circunferência de centro em O e em que o segmento de recta $[OA]$ é um dos seus raios.*

1. *Através de uma construção de régua e compasso, obtenha um quadrado inscrito em $\mathcal{C}$;*

2. *Através de uma construção de régua e compasso, obtenha um octógono regular inscrito em $\mathcal{C}$ (entende-se por octógono regular um polígono regular com 8 lados);*

3. *Dado $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, descreva um processo que permite obter, através de uma construção com régua e compasso, um polígono regular com 2^n lados inscrito em $\mathcal{C}$;*

4. *Dado um polígono regular com $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ lados inscrito em $\mathcal{C}$ e $m \in \mathbb{N}$, descreva um processo que permita obter, através de uma construção de régua e compasso, um polígono regular com $2^m \cdot n$ lados inscrito em $\mathcal{C}$.*

Exercício 32. *Considere O, A dois pontos distintos do plano euclidiano e $\mathcal{C}$ a circunferência de centro em O e em que o segmento de recta $[OA]$ é um dos seus raios.*

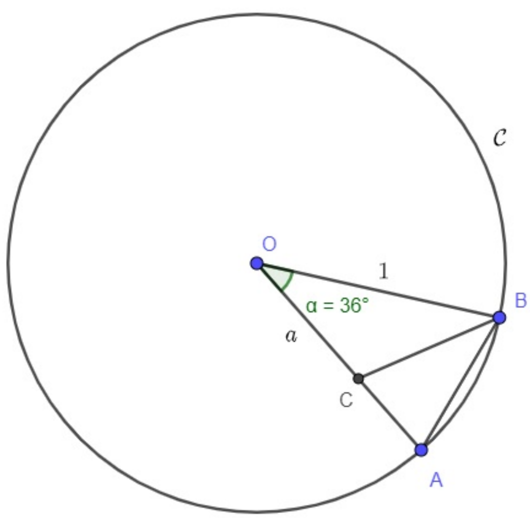
Através de uma construção de régua e compasso, obtenha um triângulo equilátero inscrito em $\mathcal{C}$;

Dada uma circunferência $\mathcal{C}$, de centro em O e $[OA]$ um dos seus raios, será possível construir um decágono (polígono com 10 lados) regular inscrito em $\mathcal{C}$?

A resposta é sim.

Sem perda de generalidade, suponha-se que $\overline{AO} = 1$. Como $\frac{360}{10} = 36$ é necessário construir um triângulo isósceles, $\triangle AOB$, em que a medida do ângulo oposto à base é 36, isto é $m(\angle AOB) = 36$. Consequentemente cada um dos outros dois ângulos internos do triângulo mede 72.

Figura 60: Pré-requisito para construção de um decágono regular



Sendo a semi-recta $[BC)$ a bissectriz do $\angle ABO$, prova-se o seguite

1. $[BA] \cong [OC]$ (verifique);

2. $\triangle OAB \sim \triangle BAC$ (verifique).

Consequentemente

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}},$$

que é equivalente a (denotando $a = \overline{BA} = \overline{OC}$)

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a},$$

ou seja, para obter o comprimento do lado do decágono regular é dividir o raio $[OA]$ em média e extrema razão. Algo que é possível e já foi pedido num exercício anterior. Note que

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a} \Leftrightarrow a^2 + a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

e como a representa o comprimento de um segmento de recta, tem-se

$$a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Consequentemente a é um número de régua e compasso, logo é possível construir um segmento de recta com comprimento igual a a, donde se conclui que é possível construir um decágono regular inscrito em $\mathcal{C}$.

Exercício 33. *Considere O, A dois pontos distintos do plano euclidiano e $\mathcal{C}$ a circunferência de centro em O e em que o segmento de recta $[OA]$ é um dos seus raios.*

1. *Através de uma construção de régua e compasso, obtenha um decágono regular inscrito em C;*

2. *Partindo do desenho obtido na alínea anterior, obtenha, com régua e compasso, um pentágono regular inscrito em $\mathcal{C}$.*

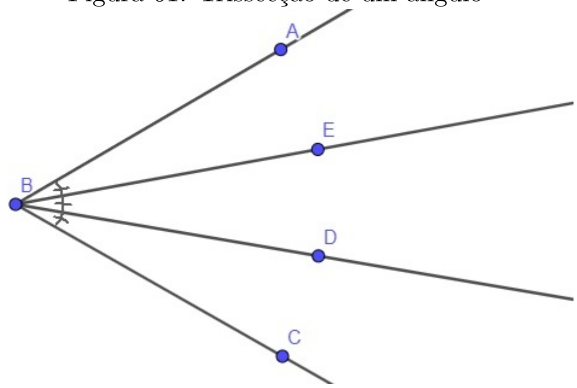
Um heptágono (polígono com 7 lados) regular é o polígono regular com menor número de lados que não é possível de ser construído com régua e compasso. Para provar isso é suficiente mostrar que o número real

$$\cos\left(\frac{360}{7}\right)$$

que não é um número de régua e compasso. Sai fora do âmbito do programa o estudo das ferramentas matemáticas que permitem provar este facto. O estudante poderá consultar [4] para obter os conhecimentos necessários para a prova.

V - Trissecção de um ângulo

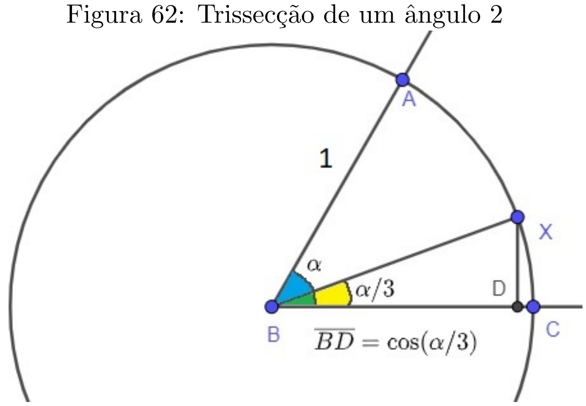
Figura 61: Trissecção de um ângulo



O problema da trissecção de um ângulo consiste em, dado um $\angle ABC$, obter por construção de régua e compasso duas semi-rectas, $[BD)$ e $[BE)$, que dividem o $\angle ABC$ em três ângulos congruentes (Figura 61). Ou seja, por construção de régua e compasso obter $D, E \in int(\angle ABC)$ tais que

$$\angle CBD \cong \angle DBE \cong \angle EBA.$$

Figura 62: Trissecção de um ângulo 2



Sem perda de generalidade, suponha-se que os pontos A e C pertence à circunferência de centro B e raio $[BC]$, com $\overline{BC} = 1$. O problema resolve-se construindo, com régua e compasso, o ponto X tal que $m(\angle CBX) = \alpha/3$, pois o trabalho seguinte é bissectar o $\angle ABX$ que é uma das construções elementares já abordadas. O ponto X obtém-se como a intersecção da circunferência com a recta perpendicular a (BC) que passa em D. Para construir de régua e compasso o ponto D, é necessário e suficiente que o comprimento do segmento de recta $\overline{BD}$ seja um número de régua e compasso, isto é que o número

$$\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$$

seja um número de régua e compasso.

Como se verifica abaixo, apesar de existirem ângulos possíveis de serem trissectados através de uma construção de régua e compasso, este problema não tem solução para um ângulo arbitrariamente dado. Para comprovar este facto, é suficiente indicar um ângulo impossível de ser trissectado por uma construção de régua e compasso.

Das propriedades das funções trigonométricas estudadas numa Unidade Curricular de Análise Matemática ou de Geometria ao nível de um curso de licenciatura em Matemática, para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\cos(3\beta) &= \cos(\beta + 2\beta) = \cos(\beta)\cos(2\beta) - \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(2\beta) \\
&= \cos(\beta)\big(\cos^2(\beta) - \operatorname{sen}^2(\beta)\big) - \operatorname{sen}(\beta)2\operatorname{sen}(\beta)\cos(\beta) \\
&= \cos^3(\beta) - \cos(\beta)\operatorname{sen}^2(\beta) - 2\operatorname{sen}^2(\beta)\cos(\beta) \\
&= \cos^3(\beta) - 3\cos(\beta)\operatorname{sen}^2(\beta) \\
&= \cos^3(\beta) - 3\cos(\beta)\big(1 - \cos^2(\beta)\big) \\
&= 4\cos^3(\beta) - 3\cos(\beta),
\end{aligned}$$

donde

$$\cos(3\beta) = 4\cos^3(\beta) - 3\cos(\beta).$$

Considerando $\beta = 20°$, ou seja $\beta = \frac{\pi}{9}$, e sabendo que $\cos(60°) = \frac{1}{2}$, tem-se que $x = \cos(20°)$ é solução da equação cúbica

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x \Leftrightarrow 8x^3 - 6x - 1 = 0. \tag{14}$$

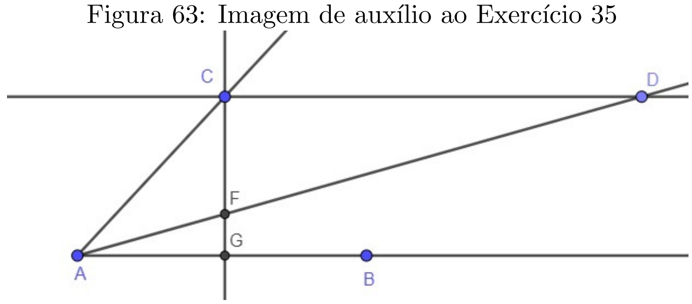
Facilmente se verifica que a equação (14) não tem raízes racionais, donde $\cos(20°)$ não é um número de régua e compasso, logo não é possível trissectar um ângulo de medida $\alpha = 60 = 3\beta$ através de uma construção de régua e compasso.

Exercício 34. *Considere um $\angle ABC$ tal que $m(\angle ABC) = 90$.*

Através de uma construção de régua e compasso, obtenha a trissecção de $\angle ABC$.

[Sugestão: Obtenha um triângulo equilátero]

Figura 63: Imagem de auxílio ao Exercício 35



Exercício 35. *Considere um $\angle CAB$.*

Em seguida considere a construção presente na Figura 63. Ou seja, a recta (CD) é paralela à semi-recta $[AB)$, a recta (CG) é perpendicular à recta (AB), em que $\{G\} = (AB) \cap (CG)$, e a semi-recta $[AD)$ intersecta a recta (CG) no ponto F de tal forma que $\overline{FD} = 2\overline{AC}$.

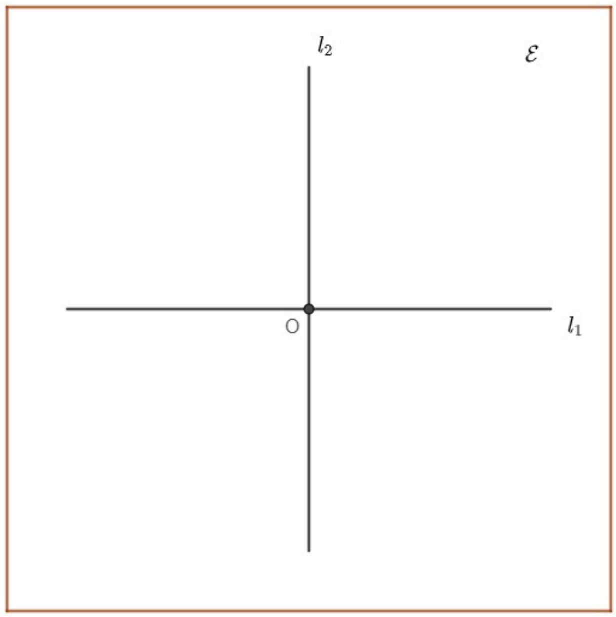
1. *Encontre o circuncentro do $\triangle CFD$, denotando-o por M;*
2. *Mostre que são isósceles o $\triangle ACM$ e o $\triangle CMD$;*
3. *Mostre que $m(\angle GAF) = \frac{1}{3}m(\angle CAB)$;*
4. *Partindo do $\angle CAB$, é possível construir a Figura 63 respeitando as construções de régua e compasso? Justifique a sua resposta.*

9 Geometria Analítica

Nesta breve secção introduzem-se as coordenadas cartesianas de pontos do plano euclidiano $\mathcal{E}$, a equação cartesiana de uma recta, a equação de uma circunferência e a distância entre dois pontos de $\mathcal{E}$.

No plano euclidiano $\mathcal{E}$, considerem-se duas rectas perpendiculares, l_1 e l_2, e designe-se por O o ponto de intersecção de l_1 com l_2.

Figura 64: Plano Cartesiano



Pelo Axioma (A5), Axioma da recta graduada, é possível considerar em cada uma das rectas l_1 e l_2 um sistema de coordenadas $f_1 : l_1 \to \mathbb{R}$ e $f_2 : l_2 \to \mathbb{R}$ tais que $f_1(O) = 0$ e $f_2(O) = 0$ (ver Figura 64).

Definição 9.1. *Chama-se sistema de eixos cartesianos, ou referencial cartesiano ao conjunto de duas rectas perpendiculares, l_1, l_2 em $\mathcal{E}$, cada uma monida de um sistema de coordenadas $f_1 : l_1 \to \mathbb{R}$ e $f_2 : l_2 \to \mathbb{R}$ tais que $f_1(O) = 0$ e $f_2(O) = 0$, onde O é o ponto de intersecção das rectas l_1 e l_2.*

O ponto de intersecção O designa-se de origem.

Uma das rectas, por exemplo l_1, designa-se por eixo horizontal, ou eixo das abcissas, enquanto que a outra recta, l_2, designa-se por eixo vertical, ou eixo das ordenadas.

O plano euclidiano monido de um sistema de eixos cartesianos chama-se plano cartesiano.

Note que, estando definido um sistema de coordenadas em cada uma das rectas que define um sistema de eixos cartesianos, estão em cada eixo está definida uma orientação.

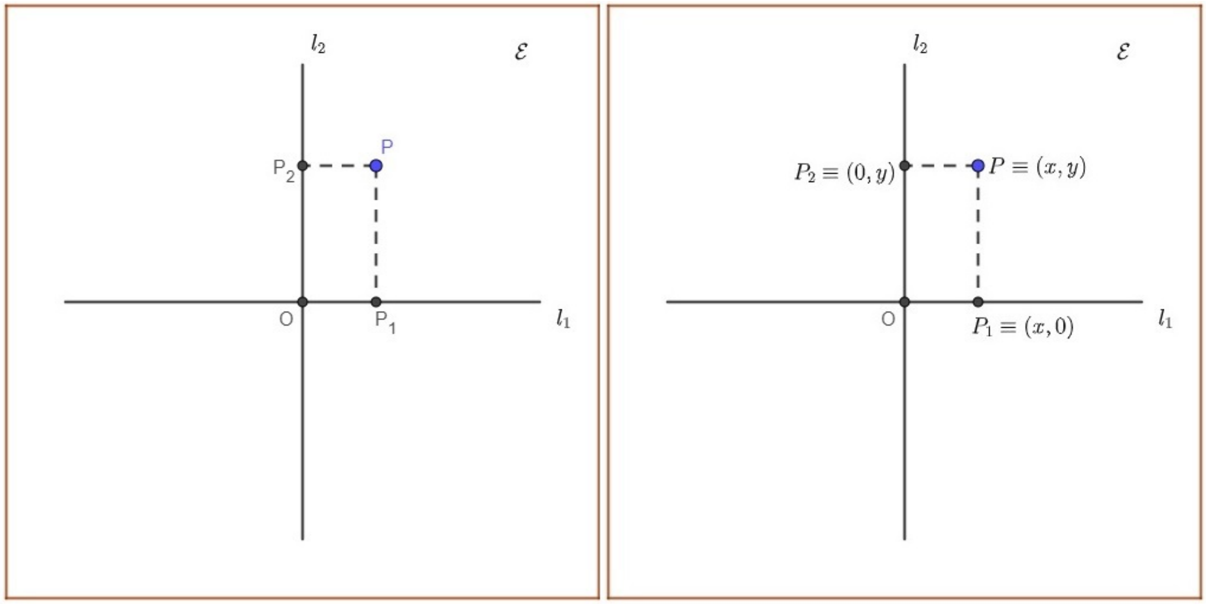
Para cada ponto $P \in \mathcal{E}$, considere-se $P_1 \in l_1$, respectivamente $P_2 \in l_2$, a projecção ortogonal de P sobre a rectas l_1, respectivamente sobre a recta l_2, (ver imagem à esquerda na Figura 65). Desta forma é possível definir a função

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{F}: & \mathcal{E} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & P & \mapsto & \big(f_1(P_1), f_2(P_2)\big) \end{array} \tag{15}$$

que estabelece uma bijecção entre o conjunto dos pontos do plano euclidiano $\mathcal{E}$ e o conjunto $\mathbb{R}^2$. Recorde que

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Figura 65: Ponto no plano Cartesiano



Definição 9.2. *Considere-se a bijecção $\mathcal{F}$ definida em* (15) *e $P \in \mathcal{E}$.*

Chama-se <u>*coordenadas de P*</u> *à imagem $\mathcal{F}(P) = (f_1(P_1), f_2(P_2))$, onde P_1 é a projecção ortogonal de P sobre a recta l_1 e P_2 é a projecção ortogonal de P sobre a recta l_2.*

A componente $x = f_1(P_1)$ chama-se <u>*abcissa*</u> *de P e a componente $y = f_2(P_2)$ chama-se* <u>*ordenada*</u> *de P. Usa-se a notação $P \equiv (x, y)$ para representar o ponto P através das suas coordenadas.*

Resumindo, cada ponto P de $\mathcal{E}$ é identificado pelas suas coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e cada par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ identifica um único ponto P no plano euclidiano (ver imagem à direita na Figura 65).

Dados dois quaisquer pontos de plano euclidiano, $A \equiv (a_1, a_2)$ e $B \equiv (b_1, b_2)$, como obter a distância entre os pontos A e B?

A resposta é dada pelo resultado que se segue.

Proposição 47. *Sejam $A \equiv (a_1, a_2)$ e $B \equiv (b_1, b_2)$ dois pontos em $\mathcal{E}$.*

Então

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}. \tag{16}$$

Dem. Sejam $A \equiv (a_1, a_2)$ e $B \equiv (b_1, b_2)$ dois pontos em $\mathcal{E}$.

Pela Definição 1.3, a distância entre os pontos A e B é dada por $\overline{AB}$. Três situações podem ocorrer:

1. Se $A = B$, então pelo Axioma de medida, (A4), tem-se que $\overline{AB} = 0$. Como a bijecção $\mathcal{F}$ garante que $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$ a igualdade (16) verifica-se;

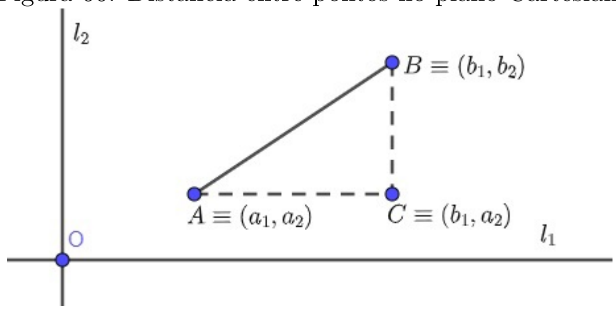
2. Caso a reta (AB) seja paralela a um dos eixos cartesianos. Suponha-se que $(AB) \parallel l_1$ (análogo se $(AB) \parallel l_2$). Considerando A' a projecção ortogonal de A sobre l_1 e B' a projecção ortogonal de B sobre l_1, tem-se $[AB] \cong [A'B']$ (verifique), pelo que

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} = |f_1(B') - f_1(A')| = |a_1 - b_1| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2}.$$

Como $(AB) \parallel l_1$, então $a_2 = b_2$ e a igualdade (16) verifica-se;

3. Se a recta (AB) não é paralela nem perpendicular a l_1, então o ponto $C \equiv (b_1, a_2)$ não pertence a (AB), donde é possível considerar o $\triangle ABC$. Desta forma a projecção ortogonal de B e de C sobre l_1 coincidem e o mesmo acontece com a projecção ortogonal de C e A sobre l_2. Consequentemente, o $\angle ACB$ é recto, donde, pelo Teorema de Pitágoras, Teorema 28, obtém-se

Figura 66: Distância entre pontos no plano Cartesiano



$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2},$$

ou seja

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}. \tag{17}$$

□

Dados um ponto $A \equiv (a_1, a_2)$ e um número real $r > 0$, a circunferência $\mathcal{C}$ de centro A e raio r, é o conjunto de pontos $P \equiv (x, y)$ de $\mathcal{E}$ que estão à distância r de A, Definição 6.1, ou seja o conjunto de pontos $P \in \mathcal{E}$ tais que

$$\overline{AP} = r.$$

Pela Proposição 47 obtém-se $\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} = r$, pelo que

$$\mathcal{C} = \left\{P \equiv (x, y) \in \mathcal{E} : (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2\right\}.$$

Esta conclusão dá consistência à definição que se segue.

Definição 9.3. *Sejam $A \equiv (a_1, a_2)$ e $r > 0$.*
Chama-se equação da circunferência de centro A e raio r à equação

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2.$$

Dado um qualquer número real $a \in \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos do plano cuja abcissa é igual a a é $\{P \equiv (a, y) : y \in \mathbb{R}\}$, pelo que é uma recta paralela ao eixo das ordenadas, designada por recta vertical, e a equação que a identifica é

$$x = a.$$

O conjunto dos pontos do plano cuja ordenada é igual a a é $\{P \equiv (x, a) : y \in \mathbb{R}\}$, pelo que é uma recta paralela ao eixo das abcissas, designada por recta horizontal, e a equação que a identifica é

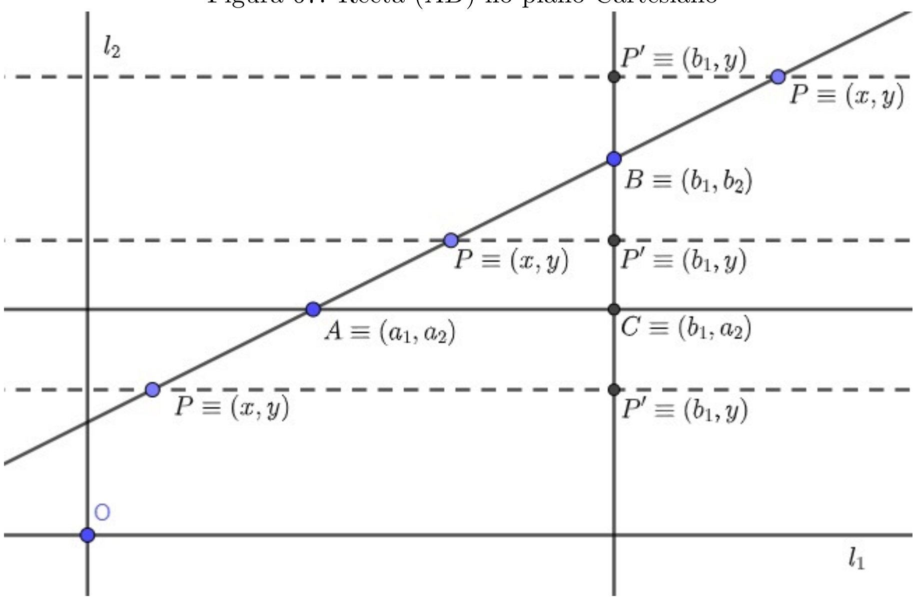
$$y = a.$$

Por último, a questão que se impõe neste momento é a seguinte: Dados dois pontos $A \equiv (a_1, a_2)$ e $B \equiv (b_1, b_2)$ distintos do plano euclidiano, como obter uma caracterização dos pontos $P \equiv (x, y)$ pertencentes à recta (AB)?

Sendo A e B distintos, então existem pontos $P \equiv (x, y)$ da recta (AB) em cada uma das três situações seguintes (ver Figura 67):

1. $P \in [AB]$;
2. $A \in [PB]$;
3. $B \in [PA]$.

Figura 67: Recta (AB) no plano Cartesiano



Suponhamos que a recta (AB) não é vertical nem horizontal (situação anteriormente abordada).

Considere-se C o ponto de intersecção das rectas identificadas pelas equações $x = b_1$ e $y = a_2$, tendo-se $C \equiv (b_1, a_2)$, e P' a projecção ortogonal do ponto P sobre a recta vertical $x = b_1$. Então tem-se $P' \equiv (b_1, y)$.

Em cada uma das três situações distintas em que os pontos P da recta se encontram, verifica-se que (ver Figura 67)

$$\triangle ACB \sim \triangle PP'B,$$

pelo critério **AA** da semelhança de triângulos (verifique). Consequentemente

$$\frac{x - b_1}{a_1 - b_1} = \frac{y - b_2}{a_2 - b_2}. \tag{18}$$

Assim sendo, todo o ponto $P \equiv (x, y)$ pertence à recta (AB) verifica a equação (18). Reciprocamente, qualquer ponto $P \equiv (x_0, y_0)$ que verifica a equação (18) é também um ponto da recta (AB). Com efeito, considere Q o ponto de intersecção da recta (AB) com a recta vertical $x = x_0$, cujas coordenadas são $Q \equiv (x_0, y^*)$. Como $Q \in (AB)$, então as coordenadas de Q verificam a equação (18). Consequentemente, com $x = x_0$, tem-se que y_0 e y^* são soluções de uma equação do 1º grau em y, logo $y_0 = y^*$, donde $P = Q$, ou seja P pertence à recta (AB).

Definição 9.4. *Sejam $A \equiv (a_1, a_2)$ e $B \equiv (b_1, b_2)$ pontos do plano euclidiano $\mathcal{E}$ tais que a recta (AB) não é vertical nem horizontal.*

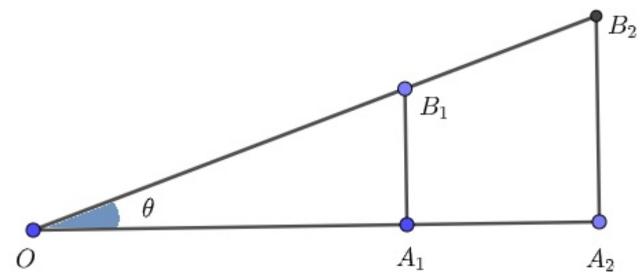
Define-se a equação (18) como sendo a equação cartesiana da recta (AB).

10 Funções Trigonométricas

Nesta secção apresentam-se as funções trigonométricas, com destaque para as funções seno e cosseno. As noções trigonométricas são suportadas pelas propriedades das semelhanças de triângulos.

Considere os triângulos rectângulos, $\triangle OA_1B_1$ e $\triangle OA_2B_2$ apresentados na Figura 68, onde $m(\angle OA_1B_1) = m(\angle OA_2B_2) = 90$ e $\theta = m(\angle A_2OB_2) \in]0, 90[$.

Figura 68: Triângulos rectângulos semelhantes



Uma vez que os triângulos $\triangle OA_1B_1$ e $\triangle OA_2B_2$ têm um ângulo em comum, o $\angle A_2OB_2$, e $\angle OA_1B_1 \cong \angle OA_2B_2$, então pelo critério **AA** da semelhança de triângulos, conclui-se que

$$\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OA_2B_2.$$

Consequentemente, ângulos correspondentes têm a mesma medida e lados correspondentes são proporcionais, donde

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}}. \tag{19}$$

Por (19) obtêm-se as razões

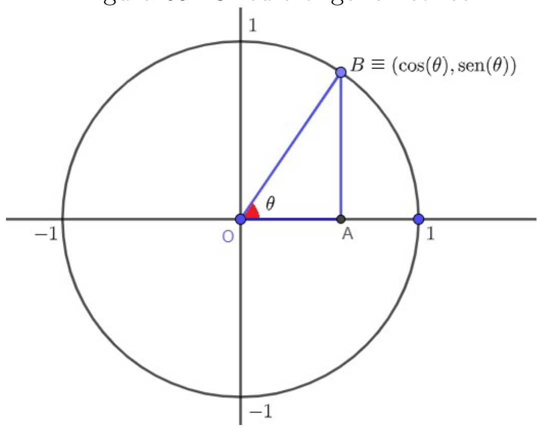
- $\dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}$;
- $\dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}$;
- $\dfrac{\overline{OB_2}}{\overline{A_2B_2}} = \dfrac{\overline{OB_1}}{\overline{A_1B_1}}$;
- $\dfrac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}} = \dfrac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}}$;
- $\dfrac{\overline{OA_2}}{\overline{A_2B_2}} = \dfrac{\overline{OA_1}}{\overline{A_1B_1}}$;
- $\dfrac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \dfrac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}$.

que, por dependerem apenas da medida do $\angle A_2OB_2$, ou seja de θ, e não dos triângulos rectângulos $\triangle OA_1B_1$ e $\triangle OA_2B_2$ considerados, se designam por *razões trigonométricas*.

Definição 10.1. *Seja* $\theta \in]0, 90[$.

1. *Define-se* <u>*seno de* θ</u>, *denotando-se por* $\operatorname{sen}(\theta)$, *como sendo a razão* $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}$;
2. *Define-se* <u>*cosseno de* θ</u>, *denotando-se por* $\cos(\theta)$, *como sendo a razão* $\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}}$;
3. *Define-se* <u>*tangente de* θ</u>, *denotando-se por* $tg(\theta)$, *como sendo a razão* $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}$;
4. *Define-se* <u>*cotangente de* θ</u>, *denotando-se por* $cotg(\theta)$, *como sendo a razão* $\frac{\overline{OA_1}}{\overline{A_1B_1}}$;
5. *Define-se* <u>*secante de* θ</u>, *denotando-se por* $\sec(\theta)$, *como sendo a razão* $\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}$;
6. *Define-se* <u>*cossecante de* θ</u>, *denotando-se por* $cosec(\theta)$, *como sendo a razão* $\frac{\overline{OB_1}}{\overline{A_1B_1}}$.

Figura 69: Círculo trigonométrico



Uma vez que as razões trigonométricas não dependem do triângulo rectângulo, mas apenas do ângulo, por simplicidade de cálculo, pode-se considerar sempre um triângulo rectângulo onde a hipotenusa tem comprimentos igual à unidade. Desta forma, o comprimento do cateto contido num dos lados do $\angle AOB$ é igual ao cosseno de θ e o comprimento do cateto oposto ao $\angle AOB$ é igual ao seno de θ (ver Figura 69). Desta forma, considerando-se a circunferência de centro em O (origem do referencial cartesiano) e raio 1, cujo circulo que define se designa de círculo trigonométrico, tem-se que o vértice B do $\triangle OAB$ tem por coordenadas $B \equiv (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$.

Aplicado o Teorema de Pitágoras, Teorema 28, ao $\triangle OAB$ obtém-se

$$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2,$$

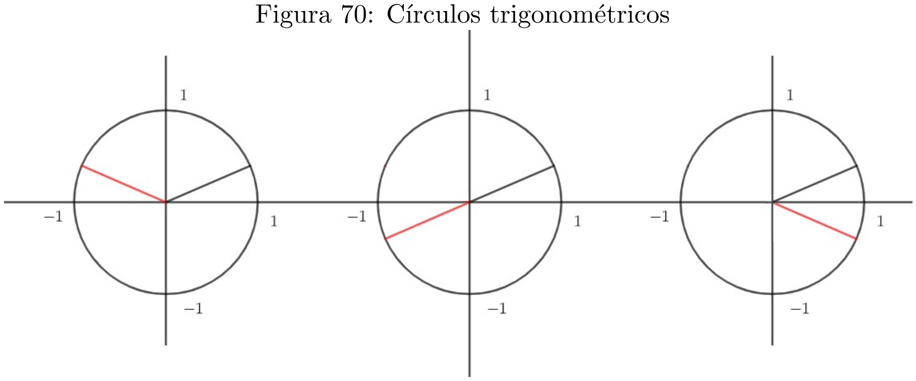
ou seja

$$1 = \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta), \qquad \forall \theta \in]0, 90[, \tag{20}$$

conhecida como a Fórmula Fundamental da Trigonometria.

Para $\theta \notin]0, 90[$ já não é possível (em geometria euclidiana) construir um triângulo rectângulo onde θ é a medida de um ângulo que não o recto. No entanto é possível definir funções (e não razões) trigonométricas por forma a estender as propriedades verificadas para $\theta \in]0, 90[$, nomeadamente a Fórmula Fundamental da Trigonometria, a outros números reais θ.

Figura 70: Círculos trigonométricos



Definição 10.2. *Define-se:*

1. $\operatorname{sen}(0) = 0$, $\operatorname{sen}(90) = 1$, $\cos(0) = 1$ *e* $\cos(90) = 0$*;*

2. $\operatorname{sen}(\theta) = \begin{cases} \operatorname{sen}(180-\theta), & \theta \in \,]90,180] \\ -\operatorname{sen}(\theta-180), & \theta \in \,]180,270] \\ -\operatorname{sen}(360-\theta), & \theta \in \,]270,360] \end{cases}$ *;* $\quad \cos(\theta) = \begin{cases} -\cos(180-\theta), & \theta \in \,]90,180] \\ -\cos(\theta-180), & \theta \in \,]180,270] \\ \cos(360-\theta), & \theta \in \,]270,360] \end{cases}$ *;*

3. $\operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}(\varphi)$*, onde* $\theta = (\varphi + 360k) \in \mathbb{R} \setminus [0,360]$ *com* $\varphi \in [0,360]$ *e* $k \in \mathbb{Z}$*;*

4. $\cos(\theta) = \cos(\varphi)$*, onde* $\theta = (\varphi + 360k) \in \mathbb{R} \setminus [0,360]$ *com* $\varphi \in [0,360]$ *e* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Exercício 36. *Mostre que*

1. $\operatorname{sen}(\theta) = \cos(90-\theta)$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

2. $1 = \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

11 Isometrias no Plano

Esta secção é dedicada ao estudo de transformações no plano, mais concretamente ao estudo de *isometrias* no plano. Para isso assume-se que o estudante está familiarizado com noções base de Álgebra Linear, mais concretamente com propriedades do espaço vectorial $\mathbb{R}^2$ sobre o corpo $\mathbb{R}$. Importa também recordar algumas definições base sobre funções que é necessário saber para o estudo presente nesta secção.

Definição 11.1. *Sejam $F : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma função, $P \in \mathcal{E}$ e $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{E}$.*

1. *O ponto P diz-se* <u>*ponto fixo*</u> *de F se $F(P) = P$;*
2. *O conjunto $\mathcal{X}$ diz-se* <u>*conjunto invariante por F*</u> *se*

$$F(\mathcal{X}) = \{F(X) : X \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathcal{X}.$$

As isometrias no plano euclidiano $\mathcal{E}$ são funções de $\mathcal{E}$ em $\mathcal{E}$ que preservam as distâncias entre os pontos. Mais formalmente tem-se a definição que se segue.

Definição 11.2 (Isometria)**.** *Seja $I : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma função bijectiva.*
Diz-se que a função I é uma <u>*isometria*</u> *no plano se*

$$\overline{AB} = \overline{I(A)I(B)}, \quad \forall A, B \in \mathcal{E}.$$

Recordando a bijecção (15) estabelecida entre o plano euclidiano $\mathcal{E}$ e o conjunto $\mathbb{R}^2$, não existe ambiguidade em se referir a uma isometria como sendo uma função bijectiva de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que preserva as distâncias.

Um primeiro resultado, garante que qualquer isometria no plano preserva as medias dos ângulos.

Proposição 48. *Sejam A, B, C três ponto de $\mathcal{E}$ não colineares e $I : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma isometria.*
Então $m(\angle ABC) = m(\angle I(A)I(B)I(C))$.

Dem. Sejam $A, B, C \in \mathcal{E}$ não colineares e $I : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma isometria. Por simplicidade, denote por A', B' e C' os pontos correspondentes, respectivamente, às imagens A, B e C pela isometria I. Considere o $\triangle ABC$ e o $\triangle A'B'C'$. Por definição de isometria, tem-se

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \quad \overline{BC} = \overline{B'C'} \quad \text{e} \quad \overline{AC} = \overline{A'C'},$$

donde, pelo critério **LLL** da congruência de triângulos, se obtém que

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

Consequentemente $m(\angle ABC) = m(\angle A'B'C')$, o que conclui a prova. □

Um outro resultado base sobre isometrias é que a composta entre duas quaisquer isometrias no plano é também uma isometria no plano.

Proposição 49. *Sejam $I_1, I_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ isometrias no plano.*
Então $I_1 \circ I_2$ é uma isometria no plano.

Dem. Sejam I_1 e I_2 duas isometrias no plano.

As funções I_1 e I_2 são bijectivas, logo a sua composta, $I_1 \circ I_2$, é também uma função bijectiva.

Sejam $A, B \in \mathcal{E}$.

Sedo I_2 uma isometria, então $\overline{AB} = \overline{I_2(A)I_2(B)}$. Mas $I_2(A), I_2(B) \in \mathcal{E}$ e I_1 é também uma isometria, logo $\overline{I_2(A)I_2(B)} = \overline{I_1(I_2(A))I_1(I_2(B))}$. Assim sendo,

$$\overline{AB} = \overline{I_2(A)I_2(B)} = \overline{I_1(I_2(A))I_1(I_2(B))} = \overline{(I_1 \circ I_2)(A)(I_1 \circ I_2)(B)},$$

donde se conclui que $I_1 \circ I_2$ é uma isometria no plano. □

Exercício 37. *Sejam A, B, C três ponto não colineares e $I : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma isometria no plano.*

Mostre que se A, B, C são pontos fixos por I (isto é $I(A) = A$, $I(B) = B$ e $I(C) = C$), então

$$I(X) = X, \quad \forall X \in \mathcal{E}.$$

No que se segue estudam-se os diferentes tipos de isometrias que existem no plano. Por facilidade de cálculos e de análise, o estudo será feito considerando a identificação de $\mathcal{E}$ com $\mathbb{R}^2$. Assim, no que se segue, sempre que se referir uma isometria, está-se a considerar uma função $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bijectiva que preserva as distâncias.

O primeiro tipo de isometria a estudar são as *translações*.

Definição 11.3. *Chama-se translação a uma função da forma*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & X & \mapsto & X + \vec{v} \end{array}$$

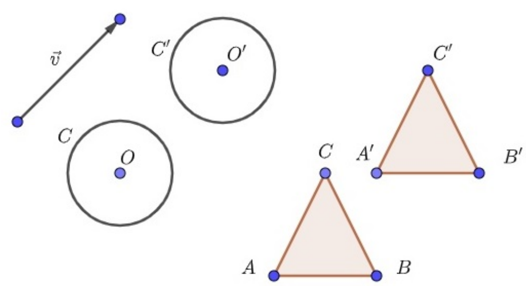
onde $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

O vector $\vec{v}$ chama-se vector da translação de T.

Facilmente se verifica que uma translação é uma isometria (verifique).

As translações deslocam os pontos do plano na direcção e sentidos do vector $\vec{v}$ para uma distância de $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ em relação aos pontos iniciais. A título ilustrativo, na figura 71 está representado o efeito de uma translação com vector de translação $\vec{v}$. Por exemplo, a circunferência C é transformada na circunferência C' e $\triangle ABC$ é transformado no $\triangle A'B'C'$.

Figura 71: Translação



Exercício 38. *Considere T uma translação cujo vector de translação é $\vec{v}$.*

1. *Mostre que se uma translação T tem um ponto fixo, então T é a função identidade.*

2. *Supondo que $\vec{v}$ é um vector não nulo, mostre que qualquer recta r que possui $\vec{v}$ como um seu vector director é um conjunto invariante por T.*

3. *Suponha que $\vec{v}$ é um vector não nulo. Apenas as rectas que têm $\vec{v}$ como vector director são conjunto conjuntos invariantes por T? Justifique.*

Uma das forma de trabalhar com isometrias no plana é através do uso de matrizes. Facilmente se verifica que uma qualquer translação T pode ser escrita na forma

$$(T(X) = I_2 X + \vec{v}) \Leftrightarrow T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

onde a matriz $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ representa o elemento $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, a matriz $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ representa a identidade em $\mathbb{R}^2$ e matriz $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ representa o vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Desta forma tem-se

$$T(X) = T(x, y) = (x + v_1, y + v_2).$$

Pela Proposição 49, tem-se que a composta de isometrias é uma isometria. Que função resulta da composta de duas translações?

Exercício 39. *Mostre que a composta de duas translações é uma translação.*

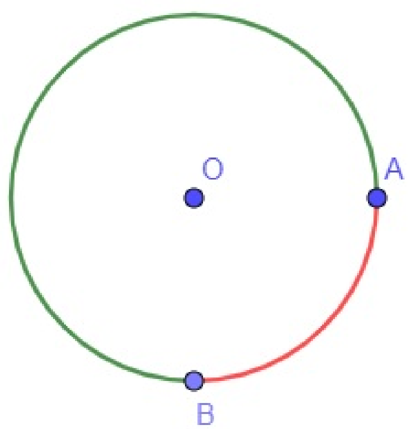
O segundo tipo de isometria no plano a estudar são as *rotações*. Para isso recorde as definições de arco de circunferência e de amplitude (Definição 6.5 e Definição 6.6). Previamente à definição de rotação é necessário introduzir a seguinte notação.

Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O e raio $r > 0$ e $A, B \in \mathcal{C}$. Denota-se por

$$\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

a amplitude do arco de circunferência, contido na circunferência $\mathcal{C}$, delimitado pelos pontos A, B, partindo de A e seguindo o sentido positivo (anti-horário) termina em B. Observando a figura 72, a amplitude do arco de circunferência a verde denota-se por $\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ e a amplitude do arco de circunferência a vermelho denota-se por $\angle(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.

Figura 72: Arcos de circunferência



Definição 11.4. *Sejam $Q \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in]0, 360]$.*

Uma função $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diz-se uma rotação de centro Q e amplitude α se

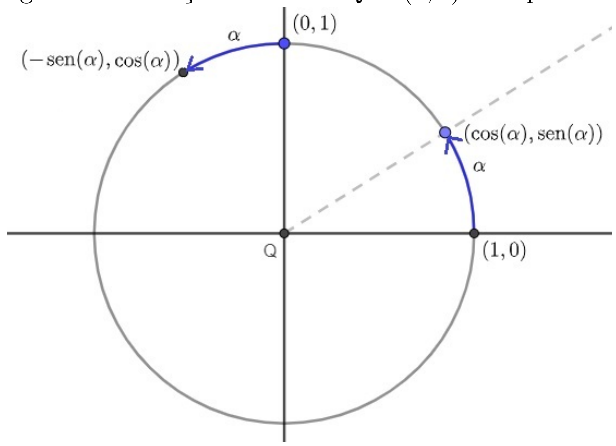
- *$R(Q) = Q$;*
- *Para qualquer $P \in \mathbb{R}^2$, tem-se $[R(P)Q] \cong [PQ]$ e $\angle(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR(P)}) = \alpha$*

Exercício 40. *Mostre que, para quaisquer $Q \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in]0, 360]$ a rotação de centro Q e amplitude α é uma isometria.*

Pretende-se agora obter uma função matricial que represente uma rotação. Por simplificação, assuma-se que o centro da rotação é a origem do sistema de eixos cartesianos $Q \equiv (0, 0)$. Dado $\alpha \in]0, 360]$, então denotando por R a rotação de centro Q e amplitude α, tem-se (ver figura 73)

$$R(1, 0) = (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha)) \quad \text{e} \quad R(0, 1) = (-\operatorname{sen}(\alpha), \cos(\alpha)).$$

Figura 73: Rotação de centro $Q \equiv (0,0)$ e amplitude α



Consequentemente, a representação matricial para a rotação R é

$$R\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Para obter a representação matricial de uma rotação, R^*, de centro em $V \equiv (v_1, v_2)$ e amplitude α, basta trazer o ponto V para a origem, através da translação, T^{-1}, com vector de translação $-\overrightarrow{QV}$, aplicar a rotação R e voltar a transferir a origem para V, através da translação, T, com vector de translação $\overrightarrow{QV}$. Concretizando,

$$R^*\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (T \circ R \circ T^{-1})\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x - v_1 \\ y - v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 41. *Mostre que a composição de duas rotações, R_1 e R_2 de amplitude α_1 e α_2 respectivamente, é;*

1. *Uma translação, caso $\alpha_1 + \alpha_2 = 360$;*

2. *Uma rotação, caso $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 360$.*

Exercício 42. *Mostre que composição de uma rotação com uma translação é uma rotação (independentemente da ordem).*

O terceiro tipo de isometria no plano a estudar são as *simetrias*. Para isso é necessário recordar a Definição 6.2, onde se define ponto simétrico relativo a uma recta.

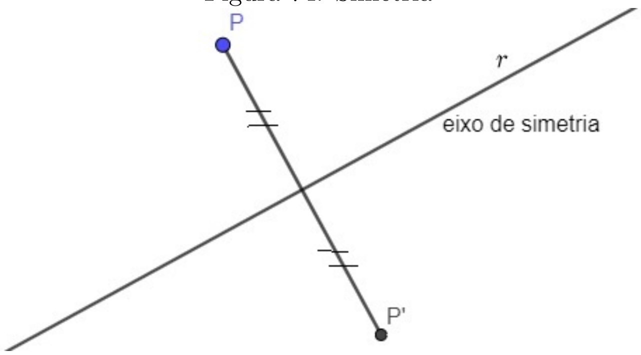
Definição 11.5. *Uma função $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diz-se uma simetria (ou reflexão) se existe uma recta r tal que, para qualquer $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ tem-se que $S(P)$ é o ponto simétrico de P relativamente à recta r.*

A recta r chama-se eixo de simetria de S.

De forma trivial demonstra-se que uma simetria admite um e um só eixo de simetria (verifique). Mais, imediatamente da definição se conclui que: Se S é uma simetria, então $S \circ S$ é a função identidade em $\mathbb{R}^2$. Consequentemente S é uma função bijectiva pois:

- Para qualquer $P \in \mathbb{R}^2$ tem-se que $P = S(S(P))$, logo S é sobrejectiva;

Figura 74: Simetria



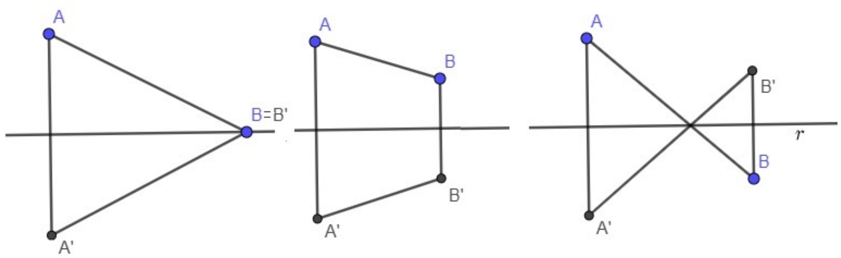
- Para quaisquer $P, Q \in \mathbb{R}^2$ tais que $S(P) = S(Q)$ tem-se, por S ser função, que $S(S(P)) = S(S(Q))$, donde se conclui que $P = Q$, ou seja S é injectiva.

Uma outra consequência imediata da definição é que o eixo de simetria, r, de uma simetria S é o conjunto dos pontos fixos de S.

Proposição 50. *Uma simetria é uma isometria no plano.*

Dem. Considere-se $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma simetria e denote-se por r o seu eixo de simetria.

Figura 75: Imagem de auxílio à prova da Proposição 50



Sendo S uma função bijectiva, é suficiente provar que

$$\overline{AB} = \overline{S(A)S(B)}, \qquad \forall A, B \in \mathbb{R}^2.$$

Sejam $A, B \in \mathbb{R}^2$.

Três situações há a considerar:

1. Um dos pontos A e B (ou os dois) pertence ao eixo de simetria r;
2. Os dois pontos A e B pertencem ao mesmo semiplano definido por r;
3. Os pontos A e B pertencem a semiplano diferentes definidos por r.

Considere-se $A' = S(A)$ e $B' = S(B)$. Cada um das situações está ilustrada no Figura 75. Fica ao cuidado do estudante provar que, nos três caso se tem $[AB] \cong [A'B']$, donde se conclui que

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

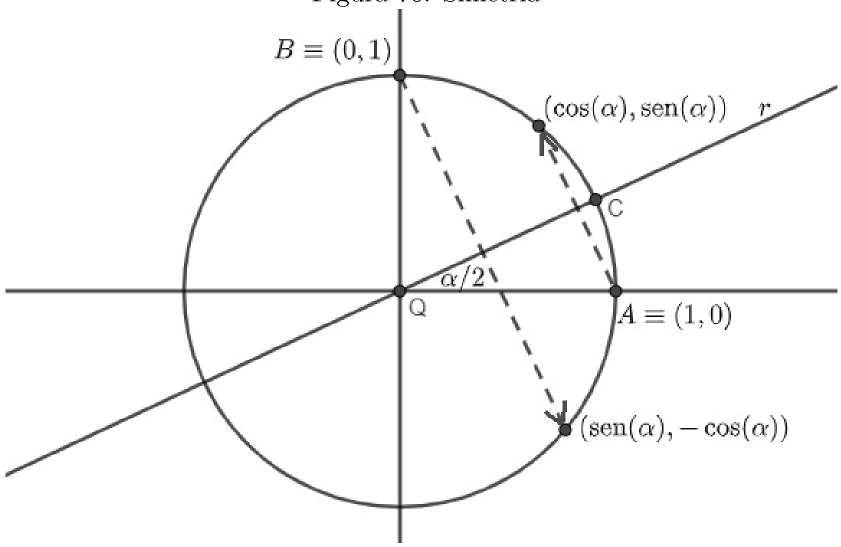
e o resultado fica demonstrado. $\square$

Pretende-se agora obter uma função matricial que represente uma simetria no plano.

Por simplificação, assuma-se que que S é uma simetria cujo eixo de simetria, r, contém a origem, $Q \equiv (0,0)$. Comece-se por supor que o eixo de simetria tem declive positivo, isto é, o declive de r é $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ com $\alpha \in [0,\pi[$ (situação ilustrada na Figura 76). Consequentemente $\angle(\overrightarrow{QA},\overrightarrow{QC}) = \frac{\alpha}{2}$ e

$$S(1,0) = (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha)) \quad \text{e} \quad S(0,1) = (\operatorname{sen}(\alpha), -\cos(\alpha)), \tag{21}$$

Figura 76: Simetria



donde se obtém a representação matricial para a simetria S

$$S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{22}$$

Exercício 43. *Com base na Figura 76, mostre as igualdades presentes em* (21).

Exercício 44. *Seja* $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *uma simetria em que o eixo de simetria contém a origem do referencial. Mostre que:*

1. *Se o eixo de simetria é a recta de equação* $x = 0$*, então a sua representação matricial é*

$$S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & sen(\pi) \\ sen(\pi) & -\cos(\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

2. *Se o eixo de simetria tem declive negativo, isto é, tg* $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$*, com* $\alpha \in]\pi, 2\pi[$*, é o declive de* r*, então a sua representação matricial é dada por* (22).

Para obter a representação matricial de uma simetria, S^*, cuja origem do referencial cartesiano não pertence ao eixo de simetria, r^*, basta transferir o eixo de simetria para a recta paralela a r^* que passa na origem, através da translação, T^{-1}, com vector de translação $-\overrightarrow{QV}$ (pensar como obter este vector,), aplicar a simetria S e, finalmente, aplicar a translação, T, com vector de translação $\overrightarrow{QV}$. Concretizando,

$$S^*\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (T \circ S \circ T^{-1})\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - v_1 \\ y - v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

onde $V \equiv (v_1, v_2)$.

Exercício 45. *Mostre que a composição de duas simetrias, S_1 e S_2, com eixos de simetria r_1 e r_2 respectivamente, é;*

1. *Uma translação, caso $r_1 \parallel r_2$;*

2. *Uma rotação, caso r_1 e r_2 sejam rectas concorrentes.*

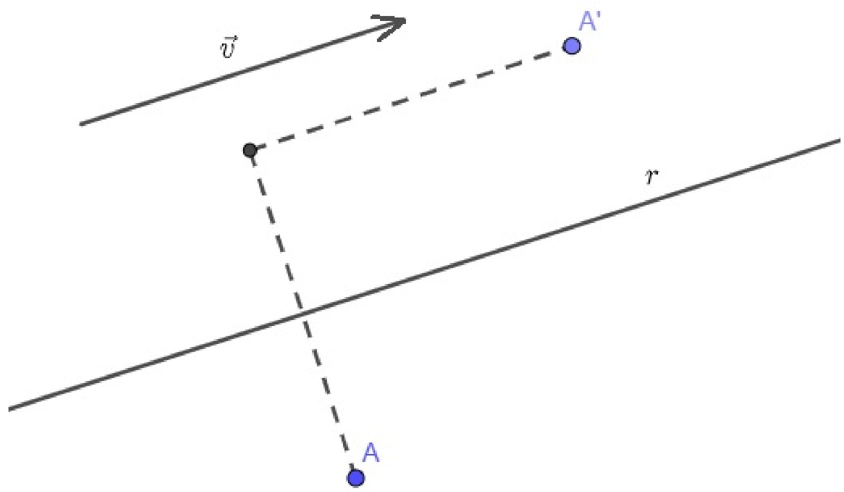
Exercício 46. *Mostre que a composição de uma simetria com uma rotação é uma simetria (não interessa a ordem).*

Exercício 47. *Mostre que a composição de uma simetria, de eixo de simetria r, com uma translação, de vector de translação $\vec{v}$ é uma simetria caso $\vec{v}$ não seja um vector director da recta r.*

Por último, o que resulta da composição de uma simetria, de eixo de simetria r, com uma translação, de vector de translação $\vec{v}$, em que $\vec{v}$ é um vector director da recta r?

É um outro tipo de isometria chamada *simetria deslizante* (ver Figura 77).

Figura 77: Simetria deslizante



Definição 11.6. *Sejam $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma simetria e r o seu eixo de simetria.*

Chama-se simetria deslizante à composta $T \circ S$, onde T é uma translação em que o vector de translação é vector director da recta r.

Ao eixo de simetria de S, r, chama-se eixo de simetria da simetria deslizante.

Exercício 48. *Seja $D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma simetria deslizante. Identifique:*

1. *O conjuntos dos pontos fixos de D;*

2. *Os conjuntos invariantes por D.*

Uma consequência imediata da definição, a representação matricial de uma simetria deslizante resulta das representações matriciais da simetria e da translação que a constitui.

Considere-se $D = T \circ S$ uma simetria deslizante onde, por simplicidade, se considera que o eixo de simetria r contém a origem do referencial cartesiano. Consequentemente, a representação matricial de S é

$$S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

com $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Sendo T uma translação em que o vector de translação, $\overrightarrow{v}$, é um vector director de r, então $\overrightarrow{v} = \left(a\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), a\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$, com $a \in \mathbb{R}^+$. Assim, a representação matricial de T é

$$T\left(\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} a\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ a\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{array}\right].$$

Consequentemente,

$$D\left(\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right]\right) = (T \circ S)\left(\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{cc} \cos(\alpha) & \mathrm{sen}(\alpha) \\ \mathrm{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} a\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ a\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{array}\right].$$

Referências

[1] Araújo, Paulo V., *Curso de Geometria*, Gradiva, 1999.

[2] Brannan, David A.; Esplen, Matthew F. & Gray, Jeremy J., *Geometry*, Cambridge University press, 1999.

[3] Dionísio, José J., *Fundamentos da Geometria*, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (2ª edição), 2004.

[4] Martin, George E., *Geometric Constructions*, Springer-Verlag New York, 1998.

[5] Roe, John, *Elementary Geometry*, Oxford Science Publicactions, 1997.