Cálculo I

Lic. em Matemática

2020/2021

Docente: José Joaquim Oliveira

Departamento de Matemática

Universidade do Minho

Conteúdo

Notas iniciais

Este documento surge como uma aglutinação de notas pessoais que se desenvolveram ao longo de vários anos de leccionação da unidade curricular *Cálculo I* da Licenciatura em Matemática da Universidade do Minho.

Devo referir que a sebenta sete das publicações do Departamento de Matemática da Universidade do Minho [6] tem sido, ao longo destes anos, a principal base bibliográfica de suporte às minhas aulas, pelo que muitos dos exercícios e raciocínios de prova foram extraídos da referida publicação.

O objectivo final para a construção deste texto foi fornecer aos alunos um texto de apoio tão próximo quanto possível da forma como eu leccionei as aulas no período em que as aulas decorreram obrigatoriamente em modo *on-line*.

Capítulo 1

Corpo ordenado e completo dos números reais: $\mathbb{R}$

1.1 Conjuntos

Entende-se por *conjunto* uma lista de objectos de qualquer natureza na qual é irrelevante a ordem e o número de vezes que cada objecto é listado. Em lugar de *lista*, pode ser colocada a palavra *colecção*, *aglomerado*, ou mesmo *class*. Neste sentido, as palavras *lista, colecção, aglomerado, classe* são aqui nestas notas entendidas como sinónimos. Os objectos que compõem os conjuntos designam-se por *elementos*. Usam-se letras maiúsculas para denotar conjuntos, A, B,..., e os seus elementos são denotados por letras minúsculas, a, b,....

Um elemento x diz-se que *pertence* a um conjunto X se x aparece na lista, representando-se por

$$x \in X,$$

caso contrário diz-se que x *não pertence* a X, representando-se por

$$x \notin X.$$

Os conjuntos podem ser representados por extensão

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são os elementos pertencentes ao conjunto X, ou por compreensão

$$X = \{a \in A : \mathcal{P}\},$$

em que antes de ":" descreve-se a natureza dos elementos do conjunto X e depois de ":" apresenta-se a propriedade $\mathcal{P}$ que identifica os elementos que pertencem ao conjunto. Por vezes, em lugar de ":" usa-se uma barra vertical, "|".

Axioma: *Existe um conjunto que não tem elementos.*
Este chama-se vazio e representa-se por $\emptyset$ ou por $\{\}$.

Definição 1.1. *Sejam A e B dois conjuntos.*

1. *Os conjuntos A, B dizem-se iguais, representando-se por $A = B$, se têm os mesmos elementos, isto é*

$$x \in A \text{ se e só se } x \in B.$$

2. *O conjunto A diz-se subconjunto de B, representando-se por $A \subseteq B$, se todo o elemento de A é também elemento de B, isto é*

$$\text{se } x \in A, \text{ então } x \in B.$$

   Escreve-se $A \nsubseteq B$ para indicar que A não é subconjunto de B.

3. *Se no conjunto A existe um número finito de elementos, então o conjunto A diz-se finito, representando-se por $\#A$ o número de elementos pertencentes a A. Caso $\#A = 1$, o conjunto A designa-se por conjunto singular. Um conjunto que não seja finito diz-se infinito.*

   Por convenção, considera-se que o conjunto vazio é finito e que $\#\emptyset = 0$.

4. *Define-se o conjunto das partes de A como sendo*

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

5. *Define-se a união de A com B, representa-se por $A \cup B$, como sendo o conjunto constituído pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B, isto é*

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

6. *Define-se a intersecção de A com B, representada por $A \cap B$, como sendo o conjunto constituído pelos elementos que pertencem simultaneamente aos dois conjuntos A e B, isto é*

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

7. *Define-se a diferença do conjunto* A *pelo conjunto* B *por*

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

8. *Define-se o produto cartesiano de* A *por* B *por*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Proposição 1.1. *Sejam* A, B *conjuntos.*
Se $A \subseteq B$ *e* $B \subseteq A$, *então* $A = B$.

Dem. Exercício a encargo do leitor. □

Exercício 1.1.

1. *Considere os conjuntos* $A = \{1, -3\}$ *e* $B = \mathbb{N}$. *Identifique cada um dos seguintes conjuntos:*

   $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $B \cap A$; $\mathcal{P}(A)$; $A \times B$; $B \times A$.

2. *Prove que, para quaisquer conjuntos* A, B, C, *se* $A \subseteq B$ *e* $B \subseteq C$, *então* $A \subseteq C$.

3. *Apresente um exemplo, ou justifique que não existe, de um par de conjuntos* A, B *tais que* $A \in B$ *e* $A \subseteq B$.

4. *Complete com* $\in$ *ou com* $\notin$:

   (a) $1 \ldots \{1, 71\}$;
   (b) $\emptyset \ldots \{3, -2, 5\}$;
   (c) $\{2\} \ldots \{-3, 2, 5\}$;
   (d) $\{3\} \ldots \{\{2\}, \{3, 5\}\}$;
   (e) $2 \ldots \{\{2\}, \{3, 5\}\}$;
   (f) $\mathbb{N} \ldots \mathcal{P}(\mathbb{N})$;
   (g) $\{\emptyset\} \ldots \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
   (h) $\emptyset \ldots \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \emptyset$;
   (i) $(2, 3) \ldots \{1, 2\} \times \{3, 5\}$;
   (j) $(3, 2) \ldots \{1, 2\} \times \{3, 5\}$;
   (k) $5 \ldots \{3, 6\} \setminus \{6, 5\}$;
   (l) $6 \ldots \{3, 6\} \setminus \{6, 5\}$;
   (m) $3 \ldots \{3, 6\} \setminus \{6, 5\}$;
   (n) $5 \ldots \{3, 6\} \cup \{6, 5\}$;
   (o) $5 \ldots \{3, 6\} \cap \{6, 5\}$;
   (p) $\mathcal{P}(\emptyset) \ldots \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$;
   (q) $\{\emptyset\} \cap \{\{\emptyset\}\} \ldots \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
   (r) $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} \ldots \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
   (s) ☺$\ldots \{\infty, \#\}$.

5. *Complete com $\subseteq$ ou com $\nsubseteq$:*

   (a) $\emptyset \ldots \{3,-2,5\}$;
   (b) $\{2\} \ldots \{-3,2,5\}$;
   (c) $\{3\} \ldots \{\{2\},\{3,5\}\}$;
   (d) $\mathbb{N} \ldots \mathcal{P}(\mathbb{N})$;
   (e) $\{\emptyset\} \ldots \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$;
   (f) $\emptyset \ldots \{\emptyset,\{\emptyset\}\} \setminus \emptyset$;
   (g) $\{\{(2,3)\}\} \ldots \{1,2\} \times \{3,5\}$;
   (h) $\{(2,3)\} \ldots \{1,2\} \times \{3,5\}$;
   (i) $\{6\} \ldots \{3,6\} \setminus \{6,5\}$;
   (j) $\{3\} \ldots \{3,6\} \setminus \{6,5\}$;
   (k) $\mathcal{P}(\emptyset) \ldots \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)$;
   (l) $\{\{2\},\{2\}\} \ldots \{\{2\}\}$;
   (m) $\{\emptyset\} \cap \{\{\emptyset\}\} \ldots \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$;
   (n) $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} \ldots \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$;

1.2 Funções (generalidades)

Nestas notas assume-se que o leitor entende os símbolos usados na elaboração do raciocínio lógico que se seguem:

$$= \quad \neq \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \forall \quad \exists \quad \exists^1 .$$

Definição 1.2. *Define-se <u>função</u> como sendo um terno ordenado $\big(X, Y, x \mapsto f(x)\big)$, onde X, Y são conjuntos não vazios e $x \mapsto f(x)$ é uma regra de correspondência que a cada elemento $x \in X$ associa um só elemento $f(x) \in Y$. Usualmente denota-se uma função f por*

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} .$$

Exercício 1.2.

1. *Para cada alínea, diga se é, ou justifique que não é, função:*

   (a) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$;

   (b) $\begin{array}{rccc} j: & \emptyset & \to & \mathbb{N} \\ & x & \mapsto & 3 \end{array}$;

   (c) $\begin{array}{rccc} l: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 3 \end{array}$;

   (d) $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & [0,+\infty[\\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$;

   (e) $\begin{array}{rccc} h: & [0,+\infty] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \text{solução da equação em } a\text{: } a^2 = x; \end{array}$

(f) $$\begin{array}{rcl} z: \left\{\begin{array}{l} \textit{alunos da} \\ \textit{Uminho} \end{array}\right\} & \to & \left\{\begin{array}{l} \textit{feminino,} \\ \textit{masculino} \end{array}\right\} \\ x & \mapsto & \textit{sexo de } x \end{array};$$

(g) $$\begin{array}{rrcl} k: & \mathbb{R} & \to & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}.$$

<u>Nota</u>: Se não entender alguns dos símbolos apresentados no exercício anterior, então não o resolva e continue a ler.

Para melhor lidar com funções, introduzem-se as designações que se seguem.

Definição 1.3. *Considere f uma função*

$$\begin{array}{rrcl} f: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

- *O conjunto X designa-se por <u>domínio</u> da função f;*
- *O conjunto Y designa-se por <u>conjunto de chegada</u> da função f;*
- *O conjunto $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ designa-se por <u>contradomínio</u> de f, ou por <u>imagem</u> de f;*
- *Os elementos de X designam-se por <u>objectos</u>;*
- *Os elementos do contradomínio de f designam-se por <u>imagens</u>;*
- *Designa-se por <u>gráfico</u> de f o conjunto*

$$Gr(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\};$$

- *Dado $A \subseteq X$, designa-se por <u>imagem</u> de A por f, o conjunto*

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\};$$

- *Dado $B \subseteq Y$, designa-se por <u>imagem recíproca</u> de B por f, o conjunto*

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Não havendo relevância em explicitar todas as componentes de uma função (domínio, conjunto de chegada e regra de correspondência), por vezes indica-se apenas por $f : X \to Y$, ou simplesmente por f, uma função

$$\begin{array}{rrcl} f: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

Para proceder à análise das funções, introduzem-se de seguida algumas das características elementares a serem observadas nas funções.

Definição 1.4. *Seja $f : X \to Y$ uma função. Diz-se que:*

- *a função f é injectiva se, para quaisquer elementos x_1, x_2 de X tais que as imagens $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são o mesmo elemento em Y, então x_1 e x_2 são o mesmo objecto, ou seja:*

$$\forall x_1, x_2 \in X : (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2) .$$

  Equivalentemente

$$\forall x_1, x_2 \in X : (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)) .$$

- *a função f é sobrejectiva se, para qualquer elemento $y \in Y$, existe pelo menos um objecto x tal que $y = f(x)$, ou seja:*

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x).$$

- *a função f é bijectiva se a função é injectiva e sobrejectiva, ou seja:*

$$\forall y \in Y, \exists^1 x \in X : y = f(x).$$

A operação composição de funções permite definir uma nova função partindo de duas funções dadas.

Definição 1.5. *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Z \to W$ duas funções tais que $f(X) \subseteq Z$.*

Define-se função composta de g com f, ou equivalentemente g após f, denotando-se por $g \circ f$, como sendo a função

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & X & \to & W \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array} .$$

Definição 1.6. *Seja X um conjunto não vazio.*

Define-se função identidade em X, como sendo a função

$$\begin{array}{rccc} id_X : & X & \to & X \\ & x & \mapsto & x \end{array} .$$

Definição 1.7. *Seja $f : X \to Y$ uma função.*

Uma função $g : Y \to X$ diz-se função inversa de f se

$$f \circ g = id_Y \quad e \quad g \circ f = id_X .$$

Proposição 1.2. *Uma função $f : X \to Y$ é invertível se e só se f é uma função bijectiva.*

Dem. É necessário demonstrar uma dupla implicação.
Primeiro demonstra-se a condição suficiente ($\Rightarrow$).

Assuma-se que $f : X \to Y$ é invertível, então existe $g : Y \to X$ (função inversa) tal que $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$.

Provar que f é bijectiva, é equivalente a provar que f é injectiva e sobrejectiva.

Sobrejectividade Seja $y \in Y$. Como $f \circ g = id_Y$, então

$$y = id_Y(y) = f \circ g(y) = f(g(y)) \quad \text{e} \quad g(y) \in X,$$

logo f é sobrejectiva.

Injectividade Sejam $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Como $g \circ f = id_X$, tem-se

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Leftrightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \\ &\Leftrightarrow id_X(x_1) = id_X(x_2) \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

logo f é injectiva.

Conclusão, f é uma função bijectiva e a condição suficiente está demonstrada.

Falta demonstrar a condição necessária ($\Leftarrow$).

Assuma-se que f é uma função bijectiva. Então

$$\forall y \in Y, \exists^1 x_y \in X : y = f(x_y).$$

Defina-se a função

$$\begin{array}{rccc} g: & Y & \to & X \\ & y & \mapsto & x_y \end{array}.$$

Mostre-se que g é inversa de f, ou seja, que $f \circ g = id_Y$ e que $g \circ f = id_X$. Assim

- Dado $y \in Y$, tem-se $f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y$, logo $f \circ g = id_Y$;
- Dado $x \in X$, tem-se $g \circ f(x) = g(f(x)) = x_{f(x)} = x$, logo $g \circ f = id_X$. (Obs: $x_{f(x)}$ é o único elemento em X cuja imagem por f é $f(x)$)

Consequentemente f é invertível. □

Proposição 1.3. *Seja $f : X \to Y$ uma função que admite inversa.*
Então existe uma única inversa de f.

Dem. Exercício a cargo do leitor. □

Como consequência da Proposição 1.3, uma função $f : X \to Y$ que admite inversa diz-se <u>invertível</u> e a sua inversa representa-se por f^{-1}.

Exercício 1.3. *Seja $f : X \to Y$ uma função invertível.*

Mostre que f^{-1} é também uma função invertível e que $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Para a resolução dos exercícios seguintes é necessário que o leitor conheça o conjunto dos números reais e suas propriedades básicas. Algo que será introduzido axiomaticamente na secção seguinte.

Exercício 1.4.

1. *Considere a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \frac{3}{4}, & x = \frac{1}{2} \\ x, & x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$.

   Determine:

   (a) $f([0,1])$;

   (b) $f^{-1}\left([\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]\right)$;

   (c) $\{x \in [0,1] : f^{-1}(\{x\}) = \emptyset\}$;

   (d) $\{x \in [0,1] : f^{-1}(\{x\})$ *é um conjunto singular*$\}$;

2. *Apresente um exemplo de:*

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f^{-1}(\{1\}) = [1, +\infty[$;

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f^{-1}(\{1\}) =]-\infty, 1[$;

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f^{-1}([0,1]) = \{1\}$.

3. *Para cada par de funções que se segue, obtenha a função composta $f \circ g$, ou justifique que esta não existe.*

   (a) $\begin{array}{rccc} f: & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$; $\quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$;

   (b) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$; $\quad \begin{array}{rccc} g: & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$;

   (c) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 7x \end{array}$; $\quad \begin{array}{rccc} g: & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$;

   (d) $\begin{array}{rccc} f: & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$; $\quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 7x \end{array}$.

1.3 Números reais

Nesta secção faz-se a apresentação axiomática (não construtiva) do conjunto dos números reais. Começa-se pelo seguinte axioma de existência:

Axioma: *Existe um corpo ordenado e completo,* $\mathbb{R}$.

Claro que é necessário esclarecer o que se entende por *corpo*, por *corpo ordenado* e por *corpo ordenado e completo.* Estas estruturas são apresentadas axiomaticamente.

Axiomas de corpo:

Considere-se o conjunto $\mathbb{R}$ *munido das funções*

$$\begin{array}{rccl} + : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & +((x,y)) \end{array} \qquad (\textit{adição})$$

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \cdot((x,y)) \end{array} \qquad (\textit{multiplicação}),$$

que por simplicidade se adopta a notação $x + y = +((x,y))$ *e* $x \cdot y = \cdot((x,y))$, *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$, *verificando as seguintes propriedades:*

(C1) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x + y = y + x;$ *(comutatividade da adição)*

(C2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x + (y + z) = (x + y) + z;$ *(associatividade da adição)*

(C3) $\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 + x = x;$ *(existência de elemento neutro da adição)*

(C4) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y = 0;$ *(existência de elemento simétrico)*

(C5) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = y \cdot x;$ *(comutatividade da multiplicação)*

(C6) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z;$ *(associatividade da multiplicação)*

(C7) $\exists 1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad 1 \cdot x = x;$ *(existência de elemento neutro da multiplicação)*

(C8) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \exists y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = 1;$ *(existência de elemento inverso)*

(C9) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z);$ *(distributividade da multiplicação relativamente à adição)*

O conjunto de axiomas (C1)-(C9) conferem a $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ a estrutura de corpo. Observe que o axioma (C3) garante que o conjunto $\mathbb{R}$ possui pelo menos um elemento, pelo que quer o domínio, quer o conjunto de chegada das funções que definem as operações $+$ e $\cdot$, são não vazios. Mais, os axiomas (C3) e (C7) garantem que $\mathbb{R}$ tem pelo menos dois elementos. Efectivamente, o conjunto de axiomas de corpo não garante a existência de mais algum elemento em $\mathbb{R}$. Para já, é possível demonstrar algumas propriedades bases da aritmética.

Proposição 1.4. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tem-se*

1. *Existe apenas um elemento neutro da adição;*
2. *O simétrico de um elemento é único;*
3. *Se $x + z = y + z$, então $x = y$; (lei do corte na adição)*
4. $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$; *(elemento absorvente da multiplicação)*
5. *Existe apenas um elemento neutro da multiplicação;*
6. *O inverso de x, caso $x \neq 0$, é único;*
7. *Se $x \cdot z = y \cdot z$ e $z \neq 0$, então $x = y$. (lei do corte na multiplicação)*

Dem.

1. Suponha-se que existem dois elementos neutros para a adição, isto é dois elementos em $\mathbb{R}$, θ e Θ, com a propriedade descrita pelo axioma (C3). Assim, por (C3), tem-se que

$$\theta + \Theta = \Theta,$$

porque θ é neutro para a adição. De igual forma, porque Θ é também neutro para a adição, por (C3) tem-se

$$\Theta + \theta = \theta.$$

Consequentemente, e usando (C1), tem-se

$$\Theta = \theta + \Theta = \Theta + \theta = \theta,$$

donde $\Theta = \theta$.

2. Seja $x \in \mathbb{R}$. Suponha-se que x tem dois simétricos: x_1 e x_2.

Pelo axioma (C2), tem-se

$$(x_1 + x) + x_2 = x_1 + (x + x_2).$$

Pelo axioma (C1), tem-se

$$(x + x_1) + x_2 = x_1 + (x + x_2).$$

Sendo x_1 e x_2 ambos simétricos de x, pelo axioma (C4) tem-se

$$0 + x_2 = x_1 + 0.$$

Novamente por (C1), obtém-se

$$0 + x_2 = 0 + x_1$$

e por (C3) conclui-se que

$$x_2 = x_1.$$

3. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$x + z = y + z.$$

Por (C4) existe $z_1 \in \mathbb{R}$ elemento simétrico de z (pelo ponto anterior, z_1 é único). Assim

$$\begin{array}{rcll} x + z = y + z & \Rightarrow & (x + z) + z_1 = (y + z) + z_1 & \text{(porque “ + ” é função)} \\ & \Rightarrow & x + (z + z_1) = y + (z + z_1) & \text{(por (C2))} \\ & \Rightarrow & x + 0 = y + 0 & \text{(por (C4))} \\ & \Rightarrow & x = y. & \text{(por (C3))} \end{array}$$

4. Seja $x \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$\begin{array}{rcll} 0 \cdot x & = & (0 + 0) \cdot x & \text{(por (C3))} \\ & = & x \cdot (0 + 0) & \text{(por (C5))} \\ & = & (x \cdot 0) + (x \cdot 0) & \text{(por (C9))} \\ & = & (0 \cdot x) + (0 \cdot x) & \text{(por (C5))} \end{array}$$

Consequentemente, por (C3), tem-se

$$0 + (0 \cdot x) = (0 \cdot x) + (0 \cdot x)$$

e, pelo ponto 3. (anteriormente provado), conclui-se que

$$0 = 0 \cdot x$$

Por (C5) obtém-se

$$0 = 0 \cdot x = x \cdot 0$$

Os pontos 5., 6. e 7. são deixados como exercício, pois usam-se argumentos análogos aos apresentados na prova dos pontos 1., 2. e 3.. $\square$

Notação:

- O elemento neutro da adição designa-se por zero e denota-se por 0;
- O elemento neutro da multiplicação designa-se por um e denota-se por 1;
- Dado $x \in \mathbb{R}$, denota-se por $-x$ o elemento simétrico de x;
- Dado $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, denota-se por x^{-1} o elemento inverso de x.

Exercício 1.5.

1. *Mostre que o zero não tem inverso.*
2. *Mostre que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, se tem $-x = (-1) \cdot x$.*

Proposição 1.5. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Tem-se*

1. $-(-x) = x$;
2. *Se $x \neq 0$, então $(x^{-1})^{-1} = x$;*
3. $-(x + y) = (-x) + (-y)$;
4. $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$;
5. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$;
6. $x \cdot y = 0$ *se e só se* ($x = 0$ *ou* $y = 0$) *(lei do anulamento do produto).*

Dem. Prova deixada como exercício ao leitor. □

Notação: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$.

- Designa-se por subtracção entre x e y, identificada por $x - y$, como sendo a soma $x + (-y)$;
- Se $y \neq 0$, então designa-se por divisão de x por y, identificada por $\dfrac{x}{y}$, como sendo o produto $x \cdot y^{-1}$.

Definição 1.8. *Chama-se conjunto dos números naturais, representando-se por $\mathbb{N}$, ao subconjunto de $\mathbb{R}$ construído recursivamente por:*

$$\begin{cases} 1 \in \mathbb{N} \\ \\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

Estando definido o conjunto dos números naturais, de forma natural definem-se o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números racionais.

Definição 1.9.

1. *Chama-se* <u>*conjunto dos números inteiros*</u>*, representando-se por* $\mathbb{Z}$*, ao subconjunto de* $\mathbb{R}$
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

2. *Chama-se* <u>*conjunto dos números racionais*</u>*, representando-se por* $\mathbb{Q}$*, ao subconjunto de* $\mathbb{R}$
$$\mathbb{Q} = \{m \cdot n^{-1} : m \in \mathbb{Z} \ e \ n \in \mathbb{N}\}.$$

É importante referir que, o simples facto de se definirem aqui os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, até ao momento nada garante que $\mathbb{Z} \neq \mathbb{N}$ nem que $\mathbb{Q} \neq \mathbb{N}$.

Notação:
Por (C7) tem-se que $1 \in \mathbb{R}$, logo $(1,1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e consequentemente $+((1,1)) = 1 + 1 \in \mathbb{R}$. Assim:

- representa-se por 2 a imagem $+((1,1)) = 1 + 1$;
- representa-se por 3 a imagem $+((2,1)) = 2 + 1$;
- representa-se por 4 a imagem $+((3,1)) = 3 + 1$;
- $\cdots$.

Com o conjunto de axiomas de corpo (C1)-(C9) não é possível demostrar que o conjunto $\mathbb{N}$ é infinito (por exemplo, não é possível demonstrar que $3 \neq 1$). Mas consegue-se demonstrar que $\mathbb{N}$ não é um conjunto singular.

Exercício 1.6. *Mostre que o conjunto* $\mathbb{N}$ *não é um conjunto singular, isto é, que* $\#\mathbb{N} > 1$.
[Sugestão: mostre que $2 \neq 1$*]*

Dado $x \in \mathbb{R}$:

- representa-se por x^2 a imagem $\cdot((x,x)) = x \cdot x$;
- representa-se por x^3 a imagem $\cdot((x^2,x)) = x^2 \cdot x$;
- $\cdots$,

ficando assim estabelecida a notação

$$x^n = (\cdots((x \cdot x) \cdot x) \cdot \ldots \cdot x) = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ vezes}}, \tag{1.1}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.6. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$.*

Tem-se

$$x^2 = y^2 \text{ se e só se } (x = y \text{ ou } x = -y).$$

Dem. Prova deixada como exercício ao leitor. □

Exercício 1.7. *(***Método de indução***)*
Sejam $P(n)$ uma condição que depende de $n \in \mathbb{N}$ e

$$\mathcal{C} = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ é verdadeira}\}.$$

Mostre que $\mathcal{C} = \mathbb{N}$ se e só se

$$\begin{cases} P(1) \text{ é verdadeira} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \Big(P(n) \text{ é verdadeira} \Rightarrow P(n+1) \text{ é verdadeira}\Big) \end{cases}.$$

Axiomas de ordem:

Existe $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$, designado por <u>*conjunto dos números positivos*</u>

(O1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad x + y \in \mathbb{R}^+$ *e* $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$;

(O2) *Dado $x \in \mathbb{R}$, acontece uma e uma só das seguintes situações*

$$x = 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad -x \in \mathbb{R}^+.$$

Exercício 1.8.

1. *Mostre que $\mathbb{R}^+ \neq \emptyset$ e que $\mathbb{R} \setminus \big(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}\big) \neq \emptyset$.*

2. *Mostre que $1 \in \mathbb{R}^+$.*

3. *Justifique que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^+$.*

Existindo elementos de $\mathbb{R}$ que não são o zero nem são números positivos, é relevante definir o conjunto desses elementos.

Definição 1.10. *Define-se* <u>*conjunto dos números negativos*</u> *como sendo o conjunto*

$$\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}.$$

Observe que o axioma (O2) garante que $\mathbb{R}^- = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$, ou seja

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-.$$

Mais, (O2) garante também que $0 \notin \big(\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-\big)$ e que $\big(\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-\big) = \emptyset$. Como o nome indica, os axiomas de ordem induzem uma ordem no conjunto $\mathbb{R}$. Ordem essa apresentada pela Definição 1.11 abaixo.

Definição 1.11. *Sejam* $x, y \in \mathbb{R}$.

1. *Diz-se que* <u>*x é menor que y*</u>, *e denota-se por* $x < y$, *se* $y - x \in \mathbb{R}^+$;
2. *Diz-se que* <u>*x é menor ou igual que y*</u>, *e denota-se por* $x \leq y$, *se* $y = x$ *ou* $x < y$;
3. *Diz-se que* <u>*x é maior que y*</u>, *e denota-se por* $x > y$, *se* $x - y \in \mathbb{R}^+$;
4. *Diz-se que* <u>*x é maior ou igual que y*</u>, *e denota-se por* $x \geq y$, *se* $y = x$ *ou* $x > y$.

Seguem-se algumas das propriedades bases da ordem definida.

Proposição 1.7. *Sejam* $x, y, z \in \mathbb{R}$. *Tem-se:*

1. $(x < y \text{ e } y < z) \Rightarrow x < z$; *(transitividade)*
2. $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$; *(monotonia da adição)*
3. $(x < y \text{ e } z > 0) \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$; *(monotonia da multiplicação)*
4. $(x < y \text{ e } z < 0) \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$; *(monotonia da multiplicação)*
5. $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$.

Dem.

1. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $x < y$ e $y < z$. Pela Definição 1.11, tem-se $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $z - y \in \mathbb{R}^+$. Pelo axioma (O1), obtém-se

$$(y - x) + (z - y) \in \mathbb{R}^+.$$

Pelos axiomas de corpo (identifique quais), conclui-se que

$$(y-x)+(z-y) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow (z-x)+(y-y) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow (z-x)+0 \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow z-x \in \mathbb{R}^+,$$

donde se conclui (pela Definição 1.11) que $x < z$.

A prova dos restantes pontos fica como exercício. □

Exercício 1.9.

1. *Prove que* $\mathbb{Z} \neq \mathbb{N}$.
2. *Prove que* $2 > 1$.
3. *Prove que se* $(x \in \mathbb{R}^+ \text{ e } y \in \mathbb{R}^-)$, *então* $(x \cdot y) \in \mathbb{R}^-$.

4. *Prove que se $x \in \mathbb{R}^+$, então $x^{-1} \in \mathbb{R}^+$;*

5. *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ tais que $a < b$ e $c < d$. Mostre que $ac < bd$.*

Com o objectivo de obter a completude do conjunto $\mathbb{R}$, mediante a introdução de um axioma de completude, é necessário introduzir algumas noções prévias.

Definição 1.12. *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$ tal que $X \neq \emptyset$.*

1. *Diz-se que a é majorante de X se*
$$\forall x \in X \qquad x \leq a;$$

2. *Diz-se que a é minorante de X se*
$$\forall x \in X \qquad a \leq x;$$

3. *Diz-se que a é máximo de X se a é majorante de X e $a \in X$;*

4. *Diz-se que a é mínimo de X se a é minorante de X e $a \in X$.*

Com naturalidade, também se introduzem as seguintes noções.

Definição 1.13. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ não vazio.*

1. *Diz-se que X é um conjunto majorado se X possui algum majorante.*

2. *Diz-se que X é um conjunto minorado se X possui algum minorante.*

Definição 1.14. *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$ tal que $X \neq \emptyset$.*

1. *Diz-se que a é supremo de X se*
$$\begin{cases} \forall x \in X, \quad x \leq a & (a \text{ é majorante de } X) \\ \\ \text{Se } b \in \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in X, x \leq b), \text{ então } a \leq b & (a \text{ é o menor dos majorantes de } X) \end{cases}.$$

2. *Diz-se que a é ínfimo de X se*
$$\begin{cases} \forall x \in X, \quad a \leq x & (a \text{ é minorante de } X) \\ \\ \text{Se } b \in \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in X, b \leq x), \text{ então } b \leq a & (a \text{ é o maior dos minorantes de } X) \end{cases}.$$

Resumidamente, o supremo de um conjunto é o menor dos majorantes e o ínfimo é o maior dos minorantes. Naturalmente, se um dado subconjunto de $\mathbb{R}$ não tiver majorantes, então também não tem supremo. Dualmente, se não tiver minorantes, também não tem ínfimo.

Proposição 1.8. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Então:*

1. *O supremo e o ínfimo de X, quando existem são únicos;*

2. *O máximo (respectivamente o mínimo) de X, se existir, então é igual ao supremo (respectivamente ínfimo) de X.*

Dem. Proposta de exercício ao leitor. $\square$

Axioma do supremo: (ou da completude)

(S1) Todo o subconjunto majorado de $\mathbb{R}$ tem supremo.

Proposição 1.9. *Todo o subconjunto minorado de $\mathbb{R}$ tem ínfimo.*

Dem. Proposta de exercício ao leitor. $\square$

Será que o corpo ordenado completo $\mathbb{R}$ é único?

A menos da natureza dos elementos, a resposta é sim. A prova desta resposta sai fora do programa desta unidade curricular. Contudo, informa-se do seguinte.

Se $(\mathbb{K}.+_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}}, \leq_{\mathbb{K}})$ e $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ são corpos ordenados e completos, então é possível provar que existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ bijectiva tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \begin{cases} f(x+y) = f(x) +_{\mathbb{K}} f(y) \\ \\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot_{\mathbb{K}} f(y) \end{cases}$$

e

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq_{\mathbb{K}} f(y).$$

Consequentemente, os corpos são indistinguíveis do ponto de vista das propriedades, ou seja são estruturalmente iguais.

Quando se fala no conjunto $\mathbb{R}$ como sendo um corpo ordenado e completo, fala-se na estrutura algébrica que o suporta em detrimento dos elementos que constituem o conjunto suporte.

Daqui em diante, chamar-se-ão números ao elementos do conjunto $\mathbb{R}$.

Teorema 1.10. *O conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, não é majorado.*

Dem. Suponha-se que $\mathbb{N}$ é majorado.

Como $1 \in \mathbb{N}$, logo $\mathbb{N} \neq \emptyset$. Pelo axioma (S1), existe $s \in \mathbb{R}$ tal que s é supremo de $\mathbb{N}$.

Pela definição de supremo, conclui-se que

$$\exists m \in \mathbb{N}: \quad s - 1 < m.$$

Mas $s-1 < m$ implica que $s < m+1$ com $m+1 \in \mathbb{N}$. Mas isto contradiz o facto de s ser supremo de $\mathbb{N}$. O absurdo surgiu pelo facto de se ter assumido que $\mathbb{N}$ é majorado, donde se conlui que $\mathbb{N}$ não é majorado. □

Definição 1.15. *Um subconjunto X de $\mathbb{R}$ diz-se* <u>*limitado*</u> *se for minorado e majorado.*

Tendo em conta a definição anterior e o Teorema 1.10, conclui-se que o conjunto $\mathbb{N}$ não é limitado. Um exemplo de o conjunto limitado é $X = \{-2, 5, 0\}$ porque é majorado (por exemplo, 5 é majorante de X) e é minorado (por exemplo, -2.5 é minorante de X).

Proposição 1.11. *São equivalentes as seguintes condições:*

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}: \quad y < n \cdot x$ *(propriedade arquimediana);*

2. *O conjunto $\mathbb{N}$ não é majorado;*

3. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N}: \quad 0 < \frac{1}{n} < x.$

Dem.

$(1 \Rightarrow 2)$ Seja $x = 1$ e $y \in \mathbb{R}$. Então, por hipótese, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y < n \cdot 1$, ou seja $y < n$, logo y não é majorante de $\mathbb{N}$.

Como $y \in \mathbb{R}$ é arbitrário, conclui-se que não existem majorantes de $\mathbb{N}$, donde $\mathbb{N}$ não é majorado.

$(2 \Rightarrow 3)$ Seja $x \in \mathbb{R}^+$. Pelo Exercício 1.9 tem-se que $x^{-1} \in \mathbb{R}^+$.

Como, por hipótese, $\mathbb{N}$ não é majorado, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{x} < n$. Assim, pelo Proposição 1.7, tem-se

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} < n \\ \frac{x}{n} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{n} < n \cdot \frac{x}{n}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{n} < x.$$

Como $n^{-1} > 0$, tem-se que $0 < \frac{1}{n} < x$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Sejam $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}$.

Se $y \leq 0$, imediatamente se tem que $y \leq 0 < 1 \cdot x$, donde $n \cdot x > y$, com $n = 1$.

Se $y > 0$, então $\frac{x}{y} \in \mathbb{R}^+$, e pela hipótese conclui-se que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \frac{x}{y}$. Como $n \cdot y > 0$, então $0 < \frac{1}{n} \cdot (n \cdot y) < \frac{x}{y} \cdot (n \cdot y)$ e consequentemente $0 < y < n \cdot x$.

□

Pela Teorema 1.10, o conjunto $\mathbb{N}$ não é majorado, ou seja, a condição 2. da Proposição 1.11 é verdadeira. Sendo as condições 1.,2. e 3. da Proposição 1.11 todas equivalentes, conclui-se que todas são verdadeiras no corpo ordenado e completo dos números reais.

Para simplificação da escrita, e sempre que não ocorra qualquer ambiguidade de interpretação, dados $x, y \in \mathbb{R}$ escreveremos simplesmente xy para representação a operação produto $x \cdot y$.

Exercício 1.10. *Mostre cada uma das seguintes afirmações:*

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists q \in \mathbb{Q} : \quad 0 < q < x$;
2. *o zero é ínfimo do conjunto* $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$;
3. $\mathbb{Q} \neq \mathbb{Z}$;
4. *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que* $a < b$. *Mostre que existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $a + \varepsilon < b$;

Do estudo efectuado até agora, sabe-se que

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R},$$

com $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \neq \mathbb{Q}$. Será que $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$?

A resposta é sim, mas será provada adiante.

Definição 1.16. *Define-se* <u>*intervalo*</u> *de números reais a qualquer conjunto* $X \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio tal que*

$$\forall x, y \in X, \forall z \in \mathbb{R} : x \leq z \leq y \Rightarrow z \in X.$$

Para representar intervalos de números reais, dados dois quaisquer números reais $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, denota-se:

1. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;
2. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$;
3. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$;
4. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$;
5. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$;
6. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$;
7. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$;
8. $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$.

Definição 1.17 (Módulo)**.** *Seja $x \in \mathbb{R}$.*

Define-se valor absoluto (ou módulo) de x como sendo

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Proposição 1.12. *Seja $x \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}^+$. Tem-se:*

1. $|x| \geq 0$;
2. $|x| = \max\{x, -x\}$;
3. $-|x| \leq 0 \leq |x|$;
4. $-|x| \leq x \leq |x|$;
5. $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$;
6. $|x| \geq r \Leftrightarrow (x \geq r$ *ou* $x \leq -r)$;

Dem. Os pontos 1., 2., 3. e 4. ficam como exercício.

5. $(-r \leq x \leq r) \Leftrightarrow (-r \leq x \text{ e } x \leq r) \Leftrightarrow (-x \leq r \text{ e } x \leq r) \Leftrightarrow \max\{-x, x\} \leq r \Leftrightarrow |x| \leq r$.

6. $(x \geq r \text{ ou } x \leq -r) \Leftrightarrow (x \geq r \text{ ou } -x \geq r) \Leftrightarrow \max\{-x, x\} \geq r \Leftrightarrow |x| \geq r$.

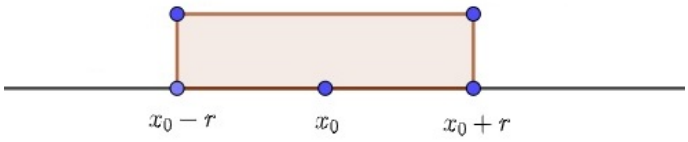
$\square$

Proposição 1.13. *Para quaisquer $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r \geq 0$, tem-se*

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq r\} = [x_0 - r, x_0 + r].$$

Dem. Proposta de exercício. $\square$

Figura 1.1: Proposição 1.13



Definição 1.18. *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, define-se distância entre x e y como sendo o número real não negativo $|x - y|$.*

Proposição 1.14. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tem-se que*

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
2. $|xy| = |x|.|y|$;
3. $||x| - |y|| \leq |x - y|$;
4. $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.

Dem.

1. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Pelo ponto 4. da Proposição 1.12 tem-se

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad \text{e} \quad -|y| \leq y \leq |y|.$$

Consequentemente

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y| \Leftrightarrow -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Pelo ponto 5. da Proposição 1.12 conclui-se que

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

2. Proposta de exercício.

3. Pelo ponto 1. anteriormente demonstrado e pelas propriedades de corpo, tem-se

$$\begin{array}{l} |x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y| \\ |y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| \Rightarrow -(|x| - |y|) \leq |x - y| \end{array},$$

donde $\max\{|x| - |y|, -(|x| - |y|)\} \leq |x - y|$ e consequentemente, pelo ponto 2. da Proposição 1.12, obtém-se

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

4. Proposta de exercício.

$\square$

Exercício 1.11.

1. *Seja $(R, +, \cdot, <)$ o corpo ordenado e completo dos números reais:*

   (a) *Mostre que, para qualquer sucessão de intervalos fechados*

   $$I_0 = [a_0, b_0],\ I_1 = [a_1, b_1],\ I_2 = [a_2, b_2], \ldots, I_n = [a_n, b_n], \ldots$$

   tais que

   $$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots .$$

   existe pelo menos um $x \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq x \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, isto é

   $$x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n.$$

2. *Seja $a \in [0, +\infty[$. Com o objectivo de demonstrar que existe um e um só $x \in \mathbb{R}^+$ tal que*

   $$x^2 = a,$$

   proceda da seguinte forma:

   (a) *Mostre a unicidade;*

   (b) *Justifique porque pode assumir que $a > 0$;*

   (c) *Construa uma sucessão de intervalos encaixados*

   $$[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots \tag{1.2}$$

   da seguinte forma:

   - *$a_0 = 0$, $b_0 = a + 1$ e defina-se $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{a+1}{2}$;*
   - *se $c_0^2 = a$, então $x = c_0$ e o problema está resolvido;*
   - *se $c_0^2 < a$, defina-se $a_1 = c_0$ e $b_1 = b_0$;*
   - *se $c_0^2 > a$, defina-se $a_1 = a_0$ e $b_1 = c_0$;*

   Trivialmente, tem-se $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$ e $a_1^2 < a < b_1^2$. Considerando $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, procede-se de forma análoga para definir o intervalo $[a_2, b_2]$. Recursivamente obtêm-se os intervalos encaixados (1.2), em que $b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n} = \frac{a+1}{2^n}$ e $a_n^2 < a < b_n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   Mostre que existe um elemento $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ e que $x^2 = a$.

3. *Sejam* $a \in [0, +\infty[$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

   Mostre que existe um e um só $x \in [0 + \infty[$ *tal que* $x^n = a$.

   Definição 1.19. *Sejam* $a > \in \mathbb{R}^+$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

   O número real $x > 0$ *tal que* $x^n = a$, *chama-se raiz índice n de a e representa-se usualmente por* $\sqrt[n]{a}$ *ou por* $a^{\frac{1}{n}}$.

4. *Mostre que,* $\sqrt{2}$ *não é um número racional. Consequentemente* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

   Definição 1.20. *Os números pertences ao conjunto* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *chamam-se números irracionais.*

5. *Sejam* $a \in \mathbb{R}$ *um número racional diferente de zero e* $x \in \mathbb{R}$ *um número irracional.*

   (a) *Mostre que* ax *e* $a + x$ *são números irracionais;*

   (b) *Dê exemplos de dois irracionais* α *e* β *tais que* $\alpha\beta$ *é um número racional;*

   (c) *Dê exemplos de dois irracionais* α *e* β *tais que* $\alpha + \beta$ *é um número racional.*

6. *Apresente um número racional* r *tal que*

$$\frac{1}{1000} > r > \frac{1}{1001}.$$

7. *Apresente um número irracional* i *tal que*

$$\frac{1}{1000} > i > \frac{1}{1001}.$$

8. *Sejam* $x, y \in \mathbb{R}$ *tais que* $x < y$. *Mostre que:*

   (a) $\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$;

   (b) $\exists i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x < i < y$.

9. *Em cada um dos conjuntos que se segue, identifique o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes. Indique ainda se tem máximo, mínimo, supremo, ínfimo e se é limitado.*

   (a) $]-2, \frac{1}{2}[$;

   (b) $]2, 5[\cup \{-2, 0\}$;

   (c) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| = |2x|\}$;

   (d) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x^2+2x+1} > \frac{1}{2x}\right\}$;

   (e) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x \leq 0, |x^2 - 1| < x + 5\}$;

(f) $\{x \in \mathbb{R} : |x-5| < |x+1|\}$;

(g) $]-\infty, \pi[$;

(h) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

(i) $\mathbb{N}$;

(j) $\mathbb{Z}$;

(k) $\mathbb{Q} \cap [1, \sqrt{2}]$;

(l) $]0,1] \setminus \mathbb{Q}$;

(m) $]0,1] \cap \mathbb{Q}$;

(n) $]\sqrt{2}, +\infty[\setminus \mathbb{Q}$.

10. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Determine:*

   (a) $\sup f([-1,1[)$;

   (b) $\inf f([-1,1])$;

   (c) *o conjunto dos majorantes de* $f([3,7[\cap \mathbb{Q})$;

   (d) *um conjunto* A *tal que* $f(A)$ *não seja majorado;*

   (e) *o conjunto dos minorantes de* $f(\mathbb{R})$.

Exercício 1.12. *Seja* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Mostre que

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definição 1.21. *Dado* $n \in \mathbb{N}$ *define-se* <u>*factorial*</u> *de* n, *representando-se por* $n!$, *como sendo o número natural*

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Mais, define-se $0! = 1$.

Dados $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *define-se* <u>*combinações de* n, k *a* k</u>, *como sendo o número real*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exercício 1.13. *Mostre que:*

1. $\forall n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$;

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

A igualdade presente no ponto 1. do Exercício 1.13 é conhecida por regra de Pascal (ou relação de Stifel), ao passo que a igualdade presente no ponto 2. do Exercício 1.13 é conhecida por binómio de Newton.

1.4 Noções topológicas em $\mathbb{R}$

Definição 1.22. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.*

1. *Diz-se que y é ponto interior de X se*

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\subseteq X;$$

2. *Diz-se que y é ponto aderente de X se*

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\cap X \neq \emptyset;$$

3. *Diz-se que y é ponto de acumulação de X se*

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \big(]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\setminus \{y\}\big) \cap X \neq \emptyset;$$

4. *Diz-se que y é ponto de acumulação à direita de X se*

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad]y, y+\varepsilon[\cap X \neq \emptyset;$$

5. *Diz-se que y é ponto de acumulação à esquerda de X se*

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad]y-\varepsilon, y[\cap X \neq \emptyset;$$

6. *Diz-se que y é ponto fronteiro de X se*

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\cap X \neq \emptyset \qquad e \qquad]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\cap (\mathbb{R} \setminus X) \neq \emptyset;$$

   (isto é, y é ponto aderente de X e de $\mathbb{R} \setminus X$)

7. *Diz-se que y é ponto isolado de X se*

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\cap X = \{y\}.$$

Definição 1.23. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Designa-se por:*

1. *interior de X, representando-se por $\mathring{X}$, o conjunto dos pontos interiores de X;*

2. *aderência de X, representando-se por $\overline{X}$, o conjunto dos pontos aderentes de X;*

3. *derivado de X, representando-se por X', o conjunto dos pontos de acumulação de X. O conjunto dos pontos de acumulação à direita de X representa-se por X'_+, enquanto que o conjunto dos pontos de acumulação à esquerda de X representa-se por X'_-;*

4. *fronteira de X, representando-se por $fr(X)$ (ou por ∂X), o conjunto dos pontos fronteiros de X;*

Observe que $X' = X'_+ \cup X'_-$, para qualquer $X \subseteq \mathbb{R}$.

Exercício 1.14. *Considere o subconjunto de $\mathbb{R}$ que se segue:*

$$X =]-\infty, -1[\cup \big([0,1] \cap \mathbb{Q}\big) \cup \big([2,3] \setminus \mathbb{Q}\big) \cup \{4\}.$$

Intentifique o interior, a aderência, o derivado, a fronteira e o conjunto dos pontos isolados de X.

Definição 1.24. *Seja $X \subset \mathbb{R}$:*

1. *O conjunto X diz-se aberto se $\overset{\circ}{X} = X$;*

2. *O conjunto X diz-se fechado se $\overline{X} = X$.*

Atenção: As definições de *aberto* e *fechado* acima introduzidas não são contrárias. É um facto que existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ que não são abertos nem fechados e outros há que são abertos e fechado.

Exercício 1.15.

1. *Apresente um exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}$ que não é aberto nem fechado.*

2. *Apresente um exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}$ que é aberto e é fechado.*

Proposição 1.15. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Tem-se*

1. $\overset{\circ}{X} \subseteq X \subseteq \overline{X}$*;*

2. $\mathbb{R} \setminus \overline{X} = \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus X}}$ *;*

3. *X é fechado se e só se $\mathbb{R} \setminus X$ é aberto.*

Dem.

1. Este ponto é deixado como exercício.

2. Pelas definições tem-se sucessivamente

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} \setminus \overline{X} \quad &\Leftrightarrow \quad x \notin \overline{X} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 :]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap X = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 :]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq (\mathbb{R} \setminus X) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus X}} . \end{aligned}$$

3. Neste ponto é necessário demonstrar uma dupla implicação.

   ($\Rightarrow$) Por hipótese X é fechado, ou seja $X = \overline{X}$. Assim

$$\overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus X}} = \mathbb{R} \setminus \overline{X} = \mathbb{R} \setminus X,$$

   donde $\mathbb{R} \setminus X$ é um conjunto aberto.

   ($\Leftarrow$) Por hipótese $\mathbb{R} \setminus X$ é aberto, ou seja $\overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus X}} = \mathbb{R} \setminus X$. Assim, fazendo uso do ponto 2. e das definições, tem-se

$$x \in \overline{X} \Rightarrow x \notin \mathbb{R} \setminus \overline{X} \Rightarrow x \notin \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus X}} \Rightarrow x \notin \mathbb{R} \setminus X \Rightarrow x \in X.$$

   donde $\overline{X} \subseteq X$. Tendo em atenção que por 1. se tem sempre $X \subseteq \overline{X}$, obtém-se que $X = \overline{X}$, ou seja, X é um conjunto fechado.

□

Definição 1.25. *Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ tais que $X \subseteq Y$.*
Diz-se que X é denso em Y caso $Y \subseteq \overline{X}$.

Quer o conjunto $\mathbb{Q}$, quer o conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$. Trivialmente, o conjunto $\mathbb{R}$ é também denso em $\mathbb{R}$.

Exercício 1.16.

1. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Mostre que:*

   (a) *o conjunto $\overline{X}$ é fechado;*

   (b) *o conjunto $\overset{\circ}{X}$ é aberto;*

   (c) *se tem $fr(X) = \overline{X} \setminus \overset{\circ}{X}$.*

2. *Para cada um dos conjuntos apresentados no ponto 9. do Exercício 1.11, obtenha o interior, a aderência, a fronteira e o derivado.*

3. *Apresente um exemplo, ou justifique que não existe,*

   (a) *de um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tal que $X \subseteq fr(X)$ e $fr(X) \neq X$;*

   (b) *de um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$ tais que X é aberto e $X \setminus \{a\}$ não é aberto;*

   (c) *de um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ aberto tal que $\#\overset{\circ}{X} = 1$;*

   (d) *de um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ infinito tal que $\overset{\circ}{X} = \emptyset$;*

(e) *de um conjunto* $X \subseteq \mathbb{R}$ *tal que* $\#(X') = 1$;

(f) *de um conjunto* $X \subseteq \mathbb{R}$ *tal que* $fr(X) =]0,1[$;

(g) *de um conjunto* $X \subseteq \mathbb{R}$ *tal que* $fr(X) = [0,1]$;

(h) *de um conjunto* $X \subseteq \mathbb{R}$ *tal que* $fr(X) = [0,3]$ *e* $\overline{X} = [1,2]$;

4. *Para cada um dos subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *que se segue, identifique o interior, a aderência, a fronteira e o derivado:*

$$A = \left\{ \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup]2\sqrt{2}, 4], \qquad B = [0,\pi] \cap \mathbb{Q}.$$

Capítulo 2

Sucessões e séries numéricas

Neste capítulo estudam-se as sucessões e séries de números reais, sendo estas as primeiras funções a serem estudadas nesta unidade curricular.

2.1 Sucessões de números reais

Nesta secção estudam-se as sucessões de números reais, uma noção que permite descrever fenómenos discretos. Comece-se então por definir o objecto de estudo nesta secção.

Definição 2.1. *Chama-se* <u>*sucessão real*</u> *a uma função de* $\mathbb{N}$ *em* $\mathbb{R}$*, isto é*

$$\begin{array}{rccl} a: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & a(n) = a_n \end{array}. \tag{2.1}$$

Tendo todas as sucessões o mesmo domínio, $\mathbb{N}$, e o mesmo conjunto de chegada, $\mathbb{R}$, estas ficam identificadas pela sua regra de correspondência. Consequentemente usa-se a notação $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente $(a_n)_n$ para se fazer referência à sucessão definida em (2.1).

A terminologia usualmente adoptada às sucessões é a seguinte:

- Designa-se por <u>termo geral</u> a regra de correspondência, a_n, de uma sucessão $(a_n)_n$;
- Designam-se por <u>termos</u> as imagens de uma sucessão $(a_n)_n$;
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, designa-se por <u>termo de ordem</u> n a imagem de n por uma sucessão $(a_n)_n$.

Exemplo: Ao escrever $(a_n)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n$, está-se a considerar a sucessão

$$\begin{array}{rccl} a: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & \frac{1}{n} \end{array}.$$

Um sucessão pode também estar definida por recorrência, isto é, o cálculo de alguns termos depende do cálculo prévio de um ou mais termos precedentes. Por exemplo, a sucessão $(b_n)_n$ está definida recursivamente ao considerar-se o termo geral

$$b_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ \\ \sqrt{1 + b_{n-1}}, & n > 1 \end{cases}.$$

Neste exemplo tem-se

$$b_1 = 1; \quad b_2 = \sqrt{2}; \quad b_3 = \sqrt{1 + \sqrt{2}}; \quad b_4 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}; \ldots$$

Definição 2.2. *Seja $(a_n)_n$ uma sucessão. A sucessão:*

1. *diz-se estritamente crescente se*

$$a_n < a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

2. *diz-se crescente se*

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

3. *diz-se estritamente decrescente se*

$$a_n > a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

4. *diz-se decrescente se*

$$a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

5. *diz-se monótona se um dos quatro pontos anteriores estiver satisfeito.*

Definição 2.3. *Uma sucessão diz-se limitada se o conjunto dos seus termos for um conjunto limitado.*

Exemplo: Considere a sucessão $(a_n)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n$.

- Dado $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, tem-se

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0,$$

  donde se conclui que $(a_n)_n$ é estritamente decrescente.

- O conjunto dos termos da sucessão $(a_n)_n$ é

$$\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

  que é limitado (identifique os seus majorantes e os seus minorantes), donde a sucessão $(a_n)_n$ é limitada.

Define-se agora a operação soma, a operação produto e a multiplicação escalar no conjunto das sucessões reais.

Definição 2.4. *Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sucessões reais e $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se:*

1. *a soma de sucessões por, $(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n$;*

2. *o produto escalar por, $\alpha(a_n)_n = (\alpha a_n)_n$;*

3. *o produto se sucessões por, $(a_n)_n \cdot (b_n)_n = (a_n \cdot b_n)_n$.*

O enquadramento de funções é uma técnica muito usada na análise de sucessões.

Definição 2.5. *Uma sucessão $(x_n)_n$ diz-se enquadrada pelas sucessões $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ se*

$$a_n \leq x_n \leq b_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo: A sucessão $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ encontra-se enquadrada por $(0)_n$ e $\left(\frac{2}{n}\right)_n$ porque

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Também se encontra enquadrada por $(-\frac{1}{n})_n$ e $\left(\frac{2}{n}\right)_n$ porque

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.1.1 Limites

Uma sucessão pode representar certo fenómeno de tempo discreto. Uma das formas de entender o comportamento futuro desse mesmo fenómeno, é estudar aquilo que em Análise Matemática se apelida de *convergência*.

Definição 2.6. *Sejam $(a_n)_n$ uma sucessão e $a \in \mathbb{R}$.*

Diz-se que $(a_n)_n$ é convergente para a se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N} : \qquad n \geq p \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

A convergência de $(a_n)_n$ para a representa-se por

$$a_n \underset{n}{\longrightarrow} a, \qquad \textit{ou por} \qquad \lim_n a_n = a,$$

e o valor a diz-se limite da sucessão $(a_n)_n$.

Uma sucessão que não seja convergente, diz-se divergente.

Notando que na condição de convergência (2.2), a inequação $|a_n - a| < \varepsilon$ é equivalente a $a_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, a convergência de uma sucessão $(a_n)_n$ para um número real a, pode ser descrita da seguinte forma. Dada uma vizinhança de a (diga-se um intervalo aberto que contém a) é sempre possível obter uma ordem suficientemente grande, $p \in \mathbb{N}$, por forma a que todos os termos de ordem superiores a p pertencem à vizinhança inicialmente considerada.

Uma das dificuldades de aplicação da definição de convergência, condição (2.2), reside no facto de ser necessário identificar previamente um valor para limite a. Esta dificuldade é ultrapassada com a introdução da definição de sucessão de Cauchy mais adiante.

A negação da condição (2.2) é expressa da seguinte forma. Uma dada sucessão $(a_n)_n$ não converge para $a \in \mathbb{R}$, isto é $\lim_n a_n \neq a$, se

$$\exists \varepsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p : \quad |a_n - a| \geq \varepsilon. \tag{2.3}$$

Definição 2.7. *Seja $x \in \mathbb{R}$.*

Define-se característica de x, representando-se por $[x]$, como sendo o máximo do conjunto

$$]-\infty, x] \cap \mathbb{Z}.$$

Por outras palavras, a característica de um número real, $x_0 \in \mathbb{R}$, é o maior inteiro menor ou igual a x_0. Por exemplo $[\sqrt{2}] = 1$, $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$, $[-1.3] = -2$.

A noção de característica de um número é útil quando se pretende identificar números inteiros em subconjuntos de $\mathbb{R}$, tal como acontece na análise, por definição, de limites de sucessões.

Exemplo: Demonstrar, por definição, que $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.

Para isso é necessário mostrar que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N} : \quad n \geq p \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Seja $\varepsilon > 0$.

Escolha-se $p = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (naturalmente esta escolha depende do valor de ε e foi feita depois de efectuar as contas abaixo). Desta forma, tem-se

$$p = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{donde} \quad \frac{1}{p} < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Seja $n \geq p$. Consequentemente $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{p}$ e por (2.4) tem-se

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{p} < \varepsilon,$$

o que demonstra que $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.

A condição de negação (2.3), pode ser usada para demonstrar que certa sucessão não converge para determinado valor. Mas atenção, isto não significa que a sucessão não convirja para um outro número real.

Exemplo: Demonstrar, por definição, que $\lim_n \frac{n}{n+1} \neq 2$.

Para isso é necessário mostrar que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p: \quad \left| \frac{n}{n+1} - 2 \right| \geq \varepsilon.$$

Escolha-se $\varepsilon = 1$ (claro que a escolha deste valor foi feita depois de se efectuarem as contas que se apresentam de seguida).

Seja $p \in \mathbb{N}$ e escolha-se $n = p$. Tem-se

$$\left| \frac{n}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{p}{p+1} - 2 \right| = \left| \frac{-p-2}{p+1} \right| = \frac{p+2}{p+1} = 1 + \frac{1}{p+1} \geq 1.$$

Note que não se provou que a sucessão $\left(\frac{n}{n+1}\right)_n$ não converge. Apenas se demonstrou que $\left(\frac{n}{n+1}\right)_n$ não converge para 2.

Exercício 2.1. *Prove, por definição, que*

$$\lim_n \frac{n}{n+1} = 1.$$

Exercício 2.2. *Estude a monotonia das sucessões de termo geral:*

1. $a_n = n^2 - n$ *2.* $b_n = \frac{n}{n+2}$ *3.* $c_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ *4.* $d_n = \frac{n!}{2^n}$

Exercício 2.3. *Prove, por definição, que*

$$\lim_n \frac{1}{n^2+1} = 0.$$

Exercício 2.4. *Prove, por definição, que*

$$\lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0.$$

Exercício 2.5. *Mostre que*

$$\lim_n \frac{n^2-1}{n^2+2} \neq 0.$$

Exercício 2.6. *Prove, por definição, que*

$$\lim_n \frac{1}{n+1} \neq 1.$$

Teorema 2.1. *O limite de uma sucessão, quando existe, é único.*

Dem. Seja $(a_n)_n$ uma sucessão real.

Suponha-se que $(a_n)_n$ tem dois limites, $a, b \in \mathbb{R}$. Sem perda de generalidade assuma-se que $a < b$. Assim

$$\lim_n a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon) \tag{2.5}$$

e

$$\lim_n a_n = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon) \tag{2.6}$$

Considere-se $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$.

Por (2.5), existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, $\forall n \geq p_1$.

Por (2.6), existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - b| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$, $\forall n \geq p_2$.

Escolha-se $n_0 = \max\{p_1, p_2\}$. Então

$$\left.\begin{array}{l} a_{n_0} \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\\ a_{n_0} \in]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\end{array}\right\} \Rightarrow \Big(a_{n_0} \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\Big)$$
$$\Rightarrow \Big(]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\neq \emptyset\Big).$$

Mas

$$a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} = b - \frac{b-a}{2} = b - \varepsilon,$$

donde

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[= \emptyset,$$

o que é absurdo. Consequentemente $(a_n)_n$ não pode ter dois limites. $\square$

Teorema 2.2. *Seja $(a_n)_n$ uma sucessão.*
Se $(a_n)_n$ é convergente, então $(a_n)_n$ é limitada.

Dem. Sendo $(a_n)_n$ uma sucessão convergente, então possui limite. Seja $a \in \mathbb{R}$ o limite da sucessão $(a_n)_n$. Pela Definição 2.6, tem-se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow a_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[.$$

Em particular, escolhendo $\varepsilon = 1$, tem-se que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \Rightarrow a_n \in]a - 1, a + 1[,$$

donde se obtém que

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}\} \cup]a-1, a+1[. \qquad (2.7)$$

Considerando $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_{p-1}, a-1, a+1\}$, tem-se que $\mathcal{A}$ é finito, logo tem máximo e tem mínimo. Definindo $m = \min \mathcal{A}$ e $M = \max \mathcal{A}$, por (2.7), conclui-se que

$$m \leq a_n \leq M, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja $(a_n)_n$ é limitada. $\square$

Devido à complexidade de muitas sucessões, o uso da definição nem sempre é a forma adequada de estudar a convergência das mesma. Com o objectivo de ultrapassar a dificuldade do uso da definição no estudo da convergência de sucessões, seguem-se alguns critérios gerais de convergência.

Teorema 2.3. *Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ duas sucessões tais que*

$$\lim_n a_n = 0 \quad \text{e} \quad (b_n)_n \text{ é limitada.}$$

Então $\lim\limits_n a_n b_n = 0$.

Dem. Sendo $(b_n)_n$ uma sucessão limitada, então existe $M > 0$ tal que

$$|b_n| < M, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja $\varepsilon > 0$.

Como $\frac{\varepsilon}{M} > 0$, pela definição de $\lim\limits_n a_n = 0$, conclui-se que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \Rightarrow |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Assim, para $n \geq p$, tem-se

$$|a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| \leq |a_n| M < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Fica então provado que $\lim\limits_n a_n b_n = 0$. $\square$

Exemplo: Pretende-se estudar a convergência da sucessão $\left(\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right)_n$. A função seno verifica

$$-1 \leq \operatorname{sen} n \leq 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

logo a sucessão $(\operatorname{sen} n)_n$ é limitada. Como a sucessão $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ converge para zero conclui-se, pelo Teorema 2.3, que

$$\lim_n \frac{\operatorname{sen} n}{n} = \lim_n \frac{1}{n} \operatorname{sen} n = 0.$$

Nota: ainda não se definiram as funções trigonométricas (algo a estudar adiante nesta UC). Contudo assume-se que os estudantes já as estudaram em estudos anteriores.

Teorema 2.4 (Aritmética de limites).

Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ duas sucessões tais que

$$\lim_n a_n = a \quad e \quad \lim_n b_n = b \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Então

1. $\lim_n (a_n + b_n) = a + b$;
2. $\lim_n a_n b_n = ab$;
3. *Se $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$, então* $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Dem.

1. Seja $\varepsilon > 0$.

   - $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ e $\lim_n a_n = a$, logo existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que
   $$n \geq p_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.8}$$
   - $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ e $\lim_n b_n = b$, logo existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que
   $$n \geq p_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.9}$$

   Escolha-se $p = \max\{p_1, p_2\}$. Para $n \geq p$, tem-se $n \geq p_1$ e $n \geq p_2$ e por (2.8) e (2.9) conclui-se que
   $$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$
   E assim tem-se $\lim_n (a_n + b_n) = a + b$.

2. Pelo ponto 1. tem-se que
   $$\lim_n (a_n b_n) = ab \quad \text{se e só se} \quad \lim_n (a_n b_n - ab) = 0.$$
   Tem-se
   $$a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n (b_n - b) + (a_n - a) b \tag{2.10}$$
   Pelos Teoremas 2.2 e 2.3 tem-se
   $$\left.\begin{array}{rcl} (a_n)_n \text{ convergente} & \Rightarrow & (a_n)_n \text{ limitada} \\ \lim_n b_n = b & \Rightarrow & \lim_n (b_n - b) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_n (a_n (b_n - b)) = 0 \tag{2.11}$$

Ainda pelo ponto 1. e pelo Teorema 2.3, tem-se

$$\lim_n a_n = a \Rightarrow \lim_n (a_n - a) = 0 \Rightarrow \lim_n (a_n - a)b = 0. \tag{2.12}$$

Novamente pelo ponto 1. e por (2.10), (2.11) e (2.12), tem-se

$$\begin{aligned} \lim_n (a_n b_n - ab) &= \lim_n (a_n(b_n - b) + (a_n - a)b) \\ &= \lim_n (a_n(b_n - b)) + \lim_n ((a_n - a)b) = 0. \end{aligned}$$

3. Pelos pontos 1. e 2. anteriormente demonstrados, tem-se

$$\lim_n (ba_n - ab_n) = 0.$$

Pelo ponto 2. anterior tem-se que $\lim_n b_n b = b^2$. Como $b \neq 0$, tem-se $\frac{b^2}{2} > 0$, donde existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \Rightarrow b_n b \in \left] b^2 - \frac{b^2}{2}, b^2 + \frac{b^2}{2} \right[= \left] \frac{b^2}{2}, 3\frac{b^2}{2} \right[,$$

e consequentemente

$$n \geq p \Rightarrow \frac{1}{b_n b} \in \left] \frac{2}{3b^2}, \frac{2}{b^2} \right[,$$

ou seja, a sucessão $\left(\frac{1}{b_n b}\right)_n$ é limitada.

Como

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{ba_n - ab_n}{bb_n} = (ba_n - ab_n)\frac{1}{bb_n},$$

finalmente, pelo Teorema 2.3, conclui-se que

$$\lim_n \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right) = 0 \quad \text{ou seja} \quad \lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

□

Proposição 2.5. *Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sucessões convergentes.*

Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n,$$

então $\left(\lim_n a_n\right) \leq \left(\lim_n b_n\right)$.

Dem. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_n a_n = a \quad \text{e} \quad \lim_n b_n = b.$$

O objectivo é mostrar que $b \geq a$.

Pelo Teorema 2.4 tem-se $\lim(b_n - a_n) = b - a$, ou seja

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow (b_n - a_n) \in]b - a - \varepsilon, b - a + \varepsilon[.$$

Suponha-se que não se tem $b \geq a$, ou seja $b < a$. Consequentemente $\frac{a-b}{2} > 0$, donde existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \Rightarrow (b_n - a_n) \in \left]b - a - \frac{a-b}{2}, b - a + \frac{a-b}{2}\right[= \left]\frac{3}{2}(b-a), \frac{b-a}{2}\right[\subseteq]-\infty, 0[.$$

Em particular, para todo $n \geq \max\{p, n_0\}$ tem-se $b_n - a_n < 0$, o que contradiz a hipótese. $\square$

Teorema 2.6 (Sucessões enquadradas)**.**

Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ duas sucessões convergentes para $c \in \mathbb{R}$.

Se $(c_n)_n$ é uma sucessão enquadrada por $(a_n)_n$ e por $(b_n)_n$, então $(c_n)_n$ é uma sucessão convergente, tendo-se

$$\lim_n c_n = c.$$

Dem. Por hipótese, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $a_n \leq c_n \leq b_n$, donde $a_n - c \leq c_n - c \leq b_n - c$ e consequentemente

$$|c_n - c| \leq \max\{|a_n - c|, |b_n - c|\}. \tag{2.13}$$

Seja $\varepsilon > 0$.

$$\lim_n a_n = c, \text{ então existe } p_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq p_1 \Rightarrow |a_n - c| < \varepsilon \tag{2.14}$$

$$\lim_n b_n = c, \text{ então existe } p_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq p_2 \Rightarrow |b_n - c| < \varepsilon \tag{2.15}$$

Escolha-se $p = \max\{p_1, p_2\}$. Para $n \geq p$, por (2.13), (2.14) e (2.15) tem-se

$$|c_n - c| \leq \max\{|a_n - c|, |b_n - c|\} < \varepsilon,$$

o que conclui a prova. $\square$

Exemplo: Mostrar que $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$.

Faz-se uso do binómio de Newton

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Por definição de raiz índice n tem-se $\sqrt[n]{n} \geq 1$. Definindo a sucessão $(a_n)_n$ por

$$a_n = \sqrt[n]{n} - 1,$$

Tem-se $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, tem-se $a_n = \sqrt[n]{n} - 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + a_n \Leftrightarrow n = (1 + a_n)^n$. Consequentemente

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a_n^k \geq 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2,$$

o que implica que

$$\begin{aligned} (n-1) - \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \geq 0 \quad & \Leftrightarrow \quad (n-1)\left(1 - \frac{n}{2} a_n^2\right) \geq 0 \\ & \Rightarrow \quad 1 - \frac{n}{2} a_n^2 \geq 0 \\ & \Rightarrow \quad a_n^2 \leq \tfrac{2}{n} \Rightarrow a_n \leq \sqrt{\tfrac{2}{n}}. \end{aligned}$$

Conclusão

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim\limits_n \sqrt{\dfrac{2}{n}} = 0$, pelo Teorema das sucessões enquadradas, conclui-se que $\lim\limits_n a_n = 0$, e consequentemente $\lim\limits_n \sqrt[n]{n} = \lim\limits_n (a_n + 1) = 1$.

Teorema 2.7. *Toda a sucessão monótona (crescente ou decrescente) e limitada é convergente. Mais*

1. *Se $(a_n)_n$ é crescente e limitada, então $\lim\limits_n a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$;*

2. *Se $(a_n)_n$ é decrescente e limitada, então $\lim\limits_n a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Dem. Seja $(a_n)_n$ uma sucessão crescente (a situação é análoga se for decrescente). Considere-se o conjunto dos termos de $(a_n)_n$, isto é

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Sendo $(a_n)_n$, limitada, então A é um conjunto limitado, logo possui supremo. Denote-se $a = \sup A$.

Seja $\varepsilon > 0$.

Por definição de supremo, tem-se que $a - \varepsilon$ não é majorante de A. Logo existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a_p > a - \varepsilon$, ou seja $a - a_p < \varepsilon$.

Para todo $n \geq p$ tem-se que $a_n \geq a_p$, porque $(a_n)_n$ é uma sucessão crescente, e

$$|a_n - a| = a - a_n \leq a - a_p < \varepsilon,$$

o que prova que $\lim\limits_n a_n = a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. □

Exemplo: A sucessão $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ é decrescente e

$$\inf\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0.$$

Consequentemente, pelo Teorema 2.7, conclui-se que $\lim\limits_n \dfrac{1}{n} = 0.$

Exemplo: A sucessão $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_n$ é limitada e crescente.

Pelo binómio de Newton, e pelo facto de $k! \geq 2^{k-1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, tem-se, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!n^k}\\
&= 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\\
&\leq 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \leq 1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\\
&= 1+2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 3
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$1 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja, a sucessão é limitada.

Verifique-se agora que a sucessão é monótona crescente.

Por um lado, para $n \geq 2$, tem-se

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\\
&= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\\
&\quad +\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Por outro lado, para $n \geq 2$, tem-se ainda

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots\\
&\quad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\\
&\quad +\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right),
\end{aligned}$$

donde se conclui que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sendo $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_n$ uma sucessão crescente e limitada, pelo Teorema 2.7, conclui-se que $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_n$ é convergente.

Definição 2.8. *O limite da sucessão* $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_n$ *chama-se* <u>*número de Neper*</u> *e representa-se por* e.

Exercício 2.7 (consultar bibliografia se necessário)**.**
Mostre que

$$\lim_n \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$$

2.1.2 Limites infinitos

Definição 2.9. *Uma sucessão* $(a_n)_n$ *diz-se que* <u>*tende para* $+\infty$</u> *se*

$$\forall M > 0, \exists p \in \mathbb{N} : \ n \geq p \Rightarrow a_n > M$$

e escreve-se

$$a_n \xrightarrow[n]{} +\infty \qquad \textit{ou} \qquad \lim_n a_n = +\infty.$$

Definição 2.10. *Uma sucessão* $(a_n)_n$ *diz-se que* <u>*tende para* $-\infty$</u> *se*

$$\forall M < 0, \exists p \in \mathbb{N} : \ n \geq p \Rightarrow a_n < M$$

e escreve-se

$$a_n \xrightarrow[n]{} -\infty \qquad \textit{ou} \qquad \lim_n a_n = -\infty.$$

Note que, se uma dada sucessão $(a_n)_n$ tende para $+\infty$, ou tende para $-\infty$, esta sucessão $(a_n)_n$ é divergente porque $\{-\infty, +\infty\} \cap \mathbb{R} = \emptyset$.

Teorema 2.8. *Seja* $(a_n)_n$ *uma sucessão tal que* $a_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
Então:

$$\lim_n a_n = 0 \ \textit{se e só se} \ \lim_n \frac{1}{|a_n|} = +\infty.$$

Dem.

(⇒) Por hipótese tem-se $\lim_n a_n = 0$.

Seja $M > 0$. Tem-se $\frac{1}{M} > 0$ e, pela hipótese, conclui-se que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \Rightarrow |a_n| < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{|a_n|} > M,$$

ou seja $\lim_n \dfrac{1}{|a_n|} = +\infty$.

($\Leftarrow$) Por hipótese tem-se $\lim\limits_n \dfrac{1}{|a_n|} = +\infty$.

Seja $\varepsilon > 0$. Tem-se $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ e, pela hipótese, conclui-se que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \Rightarrow \frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon,$$

ou seja $\lim\limits_n a_n = 0$.

□

Teorema 2.9. *Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ sucessões e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*

Se $\lim\limits_n a_n = +\infty$ e $\lim\limits_n b_n = b$, então $\lim\limits_n (a_n + b_n) = +\infty$.

Dem. Proposta de exercício. □

Atenção, a aritmética de limites não é válida nos limites infinitos.

Exemplo:

1. $\begin{cases} a_n = (n+1) \xrightarrow[n]{} +\infty \\ b_n = (-n+1) \xrightarrow[n]{} -\infty \end{cases}$ e $a_n + b_n = 2 \xrightarrow[n]{} 2$

2. $\begin{cases} a_n = (n+1) \xrightarrow[n]{} +\infty \\ b_n = -2n \xrightarrow[n]{} -\infty \end{cases}$ e $a_n + b_n = -n + 1 \xrightarrow[n]{} -\infty$

3. $\begin{cases} a_n = (n+1) \xrightarrow[n]{} +\infty \\ b_n = -\dfrac{n}{2} \xrightarrow[n]{} -\infty \end{cases}$ e $a_n + b_n = \dfrac{n}{2} + 1 \xrightarrow[n]{} +\infty$

4. $\begin{cases} a_n = n + (-1)^n \xrightarrow[n]{} +\infty \\ b_n = -n \xrightarrow[n]{} -\infty \end{cases}$ e $a_n + b_n = (-1)^n$ não é convergente.

Os quatro pontos anteriores são a razão pela qual se chama $(+\infty) + (-\infty)$ de uma indeterminação. Outros tipos de indeterminações são apresentados abaixo.

$$(-\infty) + (+\infty),\ 0 \cdot (\pm\infty),\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ (\pm\infty)^0,\ 1^{(\pm\infty)},\ 0^0.$$

2.2 Subsucessões

Definição 2.11. *Seja $(a_n)_n$ uma sucessão.*

Diz-se que $(b_n)_n$ é uma subsucessão de $(a_n)_n$ se existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que

$$b_n = a_{\varphi(n)}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo:
Considere a sucessão $(a_n)_n$ cujos termos são

$$(a_n)_n = \left(1; \frac{1}{2}; -1; \frac{1}{3}; 1; \frac{1}{4}; -1; \frac{1}{5}; 1; \frac{1}{6}; -1; \frac{1}{7}; \cdots\right).$$

São exemplos de subsucessões de $(a_n)_n$

- A subsucessão dos termos pares, $(a_{\varphi(n)})_n$, em que $\varphi(n) = 2n$, ou seja, $(a_{2n})_n$:
$$(a_{2_n})_n = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \cdots\right).$$
- A subsucessão dos termos ímpares, $(a_{\varphi(n)})_n$, em que $\varphi(n) = 2n-1$, ou seja, $(a_{2n-1})_n$:
$$(a_{2_n-1})_n = \left(1; -1; 1; -1; 1; -1; \cdots\right).$$
- A subsucessão $(a_{\varphi(n)})_n$, em que $\varphi(n) = 4n-1$, ou seja, $(a_{4n-1})_n$:
$$(a_{4_n-1})_n = \left(-1; -1; -1; -1; -1; -1; \cdots\right).$$

Não é subsucessão de $(a_n)_n$, por exemplo

$$\left(1; -1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \cdots\right).$$

Proposição 2.10. *Se $(a_n)_n$ é uma sucessão convergente para $a \in \mathbb{R}$, então qualquer sua subsucessão, $(a_{\varphi(n)})_n$, converge para a.*

Dem. Proposta de exercício. □

Corolário 2.11. *Seja $(a_n)_n$ uma sucessão.*
Se existem $(a_{\varphi(n)})_n$ e $(a_{\psi(n)})_n$ subsucessões de $(a_n)_n$ tais que

$$\lim_n a_{\varphi(n)} = b \neq c = \lim_n a_{\psi(n)},$$

então $(a_n)_n$ é divergente.

Dem. Consequência imediata da Proposição 2.10 e da unicidade de limite, Teorema 2.1. □

Proposição 2.12. *Seja $(x_n)_n$ uma sucessão positiva.*
Se $\lim_n \dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, então $\lim_n x_n = 0$.

Dem. Seja $\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$, com $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Por hipótese $a < 1$. Considerando $c \in]a, 1[$, então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} < c.$$

Para $n \geq p$ tem-se

$$0 < x_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_n} x_n < cx_n < x_n,$$

donde se conclui que $(x_n)_n$ decresce (a partir de certa ordem) e consequentemente $(x_n)_n$ é limitada. Sendo limitada e decrescente (a partir de certa ordem), conclui-se que $(x_n)_n$ é convergente. Seja $\lim_n x_n = b$ (claro que $b \geq 0$). Como $(x_{n+1})_n$ é subsucessão de $(x_n)_n$, então $\lim_n x_{n+1} = b$.

Tendo-se $x_{n+1} < cx_n$, então $\lim_n x_{n+1} \leq \lim_n cx_n$, donde $b \leq cb$ e consequentemente $b = 0$. □

Proposição 2.13. *Sejam $(a_n)_n$ uma sucessão e $(a_{\varphi_1(n)})_n$, $(a_{\varphi_2(n)})_n$,...,$(a_{\varphi_k(n)})_n$, um número finito de subsucessões de $(a_n)_n$, $k \in \mathbb{N}$.*

Se

1. $\mathbb{N} = \varphi_1(\mathbb{N}) \cup \varphi_2(\mathbb{N}) \cup \cdots \cup \varphi_k(\mathbb{N})$
2. $\lim_n a_{\varphi_1(n)} = \lim_n a_{\varphi_2(n)} = \cdots = \lim_n a_{\varphi_k(n)} = a$

então $(a_n)_n$ é uma sucessão convergente e tem-se $\lim_n a_n = a$.

Dem. Seja $\varepsilon > 0$ Pela hipótese 2. tem-se

- $\lim_n a_{\varphi_1(n)} = a$, logo $\exists p_1 \in \mathbb{N} : n \geq p_1 \Rightarrow |a_{\varphi_1(n)} - a| < \varepsilon$
- $\lim_n a_{\varphi_2(n)} = a$, logo $\exists p_2 \in \mathbb{N} : n \geq p_2 \Rightarrow |a_{\varphi_2(n)} - a| < \varepsilon$
- $\cdots$
- $\lim_n a_{\varphi_k(n)} = a$, logo $\exists p_k \in \mathbb{N} : n \geq p_k \Rightarrow |a_{\varphi_k(n)} - a| < \varepsilon$

Escolha-se $p = \max\{\varphi_1(p_1), \ldots, \varphi_k(p_k)\}$.

Para $n \geq p$, tem-se, pela hipótese 1., que $n \in \varphi_i(\mathbb{N})$, para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$, donde existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = \varphi_i(m)$. Sendo φ_i estritamente crescente, tem-se

$$\varphi_i(m) = n \geq p \geq \varphi_i(p_i) \geq p_i,$$

donde

$$|a_n - a| = |a_{\varphi_i(m)} - a| < \varepsilon,$$

e a prova fica concluída. □

Exercício 2.8. *Verifique que a Proposição 2.13 é válida se em lugar da hipótese 1. se impor a condição menos exigente de que*

$$\mathbb{N} \setminus (\varphi_1(\mathbb{N}) \cup \varphi_2(\mathbb{N}) \cup \cdots \cup \varphi_k(\mathbb{N}))$$

seja um conjunto finito.

Teorema 2.14 (Bolzano-Weierstrass)**.**
Toda a sucessão limitada admite uma subsucessão convergente.

Dem. Seja $(a_n)_n$ uma sucessão limitada.

Pelo Teorema 2.7, tem-se que toda a sucessão monótona e limitada, é convergente. Consequentemente, basta verificar que $(a_n)_n$ possui uma subsucessão monótona.

Considere a seguinte definição:
Um termo a_{n_0}, com $n_0 \in \mathbb{N}$, diz-se um pico da sucessão se

$$a_{n_0} \geq a_n, \qquad \forall n \geq n_0.$$

Considere-se $\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N} : a_n \text{ é pico}\} \subseteq \mathbb{N}$.

$\rightarrow$ Se $\mathcal{P}$ é infinito, então denotando por

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_i < \cdots$$

as ordens dos picos, tem-se que $(a_{n_i})_i$ é uma subsucessão de $(a_n)_n$ decrescente.

$\rightarrow$ Se $\mathcal{P}$ é finito (que pode ser $\mathcal{P} = \emptyset$), considera-se $n_1 = n_0+1$, onde $n_0 = \max \mathcal{P}$, caso $\mathcal{P} \neq \emptyset$ (ou $n_1 = 1$ caso $\mathcal{P} = \emptyset$). Desta forma

- a_{n_1} não é pico, logo existe $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_1} < a_{n_2}$
- a_{n_2} não é pico, logo existe $n_3 > n_2$ tal que $a_{n_2} < a_{n_3}$
- a_{n_3} não é pico, logo existe $n_4 > n_3$ tal que $a_{n_3} < a_{n_4}$

e iterando o processo, constrói-se uma subsucessão, $(a_{n_i})_i$ de $(a_n)_n$ crescente.

□

2.3 Sucessões de Cauchy

O objectivo nesta secção é a apresentação das sucessões de Cauchy e a prova de que uma sucessão ser de Cauchy é equivalente a ser convergente.

Definição 2.12. *Uma sucessão* $(a_n)_n$ *diz-se de* <u>*Cauchy*</u> *se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} : \ n, m \geq p \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{2.16}$$

A condição de Cauchy, (2.16), afirma que, para ordens suficientemente grandes, os termos da sucessão estão próximos uns dos outros. Comparativamente com a condição de convergência de uma sucessão, (2.2), a condição de Cauchy não exige o conhecimento prévio do limite da sucessão.

A condição de Cauchy, (2.16), pode ser escrita equivalentemente da seguinte forma:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n, l \in \mathbb{N} : \ n \geq p \Rightarrow |a_n - a_{n+l}| < \varepsilon. \tag{2.17}$$

Exemplo: Prove-se, por definição, que a sucessão $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_n$ é de Cauchy.

Seja $\varepsilon > 0$.

Escolha-se $p = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. (escolha feita após as contas abaixo)

Sejam $n, l \in \mathbb{N}$ tais que $n \geq p$. Tem-se $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{p}$ e

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+l+1}\right| &= \left|\frac{l}{(n+1)(n+l+1)}\right| \\ &= \frac{l}{n+l+1}\frac{1}{n+1} \leq 1 \cdot \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{p} < \varepsilon, \end{aligned}$$

o que conclui a prova.

A análise que se segue tem como objectivo demonstrar que uma dada sucessão $(a_n)_n$ é de Cauchy se e só se $(a_n)_n$ é convergente. A condição necessária é provada no resultado seguinte.

Teorema 2.15. *Toda a sucessão convergente é de Cauchy.*

Dem. Seja $(a_n)_n$ uma sucessão convergente, ou seja, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_n a_n = a. \tag{2.18}$$

Seja $\varepsilon > 0$.

Tendo-se $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, por (2.18) tem-se que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, para $n, m \geq p$, tem-se

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que conclui a prova. $\square$

Para se demonstrar a condição suficiente, são necessários dois resultados prévios.

Teorema 2.16. *Toda a sucessão de Cauchy é limitada.*

Dem. Seja $(a_n)_n$ sucessão de Cauchy.

Considerando $\varepsilon = 1$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq p \Rightarrow |a_n - a_m| < 1.$$

Em particular, para $m \geq p$ tem-se

$$|a_p - a_m| < 1 \Leftrightarrow -1 < a_p - a_m < 1 \Leftrightarrow -1 < a_m - a_p < 1 \Leftrightarrow a_p - 1 < a_m < a_p + 1.$$

Assim, tomando

$$m = \min\{a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p - 1\} \qquad \text{e} \qquad M = \max\{a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p + 1\},$$

tem-se que

$$a_n \in [m, M], \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde se conclui que $(a_n)_n$ é limitada. $\square$

Teorema 2.17. *Toda a sucessão de Cauchy que admite uma subsucessão convergente é convergente.*

Dem. Sejam $(a_n)_n$ uma sucessão de Cauchy e $(a_{\varphi(n)})_n$ uma sua subsucessão convergente.

Consequentemente, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função estritamente crescente e existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_n a_{\varphi(n)} = a.$$

Seja $\varepsilon > 0$.

Como $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ e $(a_n)_n$ é de Cauchy, então existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq p_1 \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.19}$$

Como $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ e $\lim_n a_{\varphi(n)} = a$, então existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p_2 \Rightarrow |a_{\varphi(n)} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.20}$$

Escolha-se $p = \max\{p_1, p_2\}$. Para $n \geq p$, tem-se $\varphi(n) \geq n \geq p$, porque φ é estritamente crescente, e por (2.19) e (2.20) conclui-se que

$$|a_n - a| = |a_n - a_{\varphi(n)} + a_{\varphi(n)} - a| \leq |a_n - a_{\varphi(n)}| + |a_{\varphi(n)} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

e consequentemente $\lim_n a_n = a$. $\square$

Finalmente, está-se em condições de enunciar o resultado de equivalência entre as sucessões de Cauchy e as sucessões convergentes.

Teorema 2.18.

No corpo ordenado e completo dos números reais, uma sucessão $(a_n)_n$ é de Cauchy se e só se $(a_n)_n$ é convergente.

Dem. Pelo Teorema 2.15, toda a sucessão convergente é de Cauchy.

Assumindo que $(a_n)_n$ é uma sucessão de Cauchy, pelo Teorema 2.16 tem-se que $(a_n)_n$ é limitada.

Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, Teorema 2.14, a sucessão $(a_n)_n$ possui uma subsucessão convergente.

Sendo $(a_n)_n$ uma sucessão de Cauchy que possui uma subsucessão convergente, pelo Teorema 2.17, conclui-se que $(a_n)_n$ é uma sucessão convergente. □

Seguem-se dois exemplos de aplicação do resultado anterior.

Exemplo: Prove-se que a sucessão $(a_n)_n$ de termo geral

$$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n}$$

é convergente.

Seja $\varepsilon > 0$.

Escolha-se $p = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Sejam $n, l \in \mathbb{N}$ tais que $n \geq p$. Tem-se

$$\begin{aligned}
|a_n - a_{n+l}| &= \left| -\frac{1}{(n+1)^{n+1}} - \ldots - \frac{1}{(n+l)^{n+l}} \right| = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{(n+l)^{n+l}} \\
&= \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{l-1}} \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{(n+1)^l}}{1 - \frac{1}{n+1}} \\
&\leq \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \frac{n+1}{n} \\
&\leq \frac{1}{(n+1)^n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{p} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Consequentemente, a sucessão $(a_n)_n$ é de Cauchy e, pelo Teorema 2.18 conclui-se que é convergente.

Exemplo: Prove-se que a sucessão $(a_n)_n$ definida por recorrência por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \end{cases}$$

é convergente. De seguida calcula-se o valor do limite.

Comece-se por observar que, para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se $a_n \geq 1$, donde $a_{n+1}a_n = (1 + \frac{1}{a_n})a_n = a_n + 1 \geq 2$ e consequentemente $\frac{1}{a_{n+1}a_n} \leq \frac{1}{2}$.

Para $n \in \mathbb{N}$ tem-se também que

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = \left|1 + \frac{1}{a_{n+1}} - \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)\right| = \left|\frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}a_n}\right| \leq \frac{1}{2}|a_{n+1} - a_n|.$$

Iterando o processo conclui-se que

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_2 - a_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.21}$$

Seja $\varepsilon > 0$.

Tome-se $p = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 3$.

Para $n, l \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq p$, tem-se, usando (2.21),

$$\begin{aligned}
|a_{n+l} - a_n| &\leq |a_{n+l} - a_{n+l-1}| + |a_{n+l-1} - a_{n+l-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n| \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+l-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+l-3} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{l-2} + \ldots + 1\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1 - \frac{1}{2^l}}{1 - \frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 2 = \frac{1}{2^{n-2}} \leq \frac{1}{n-2} \leq \frac{1}{p-2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Consequentemente, a sucessão $(a_n)_n$ é de Cauchy e, pelo Teorema 2.18 conclui-se que é convergente.

Seja $a \in \mathbb{R}$ o limite da sucessão $(a_n)_n$. Sendo $(a_{n+1})_n$ uma subsucessão de $(a_n)_n$, então também converge para a e, passando ao limite na fórmula de recorrência de $(a_n)_n$, obtém-se

$$a = 1 + \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Sendo $(a_n)_n$ uma sucessão positiva, conclui-se que

$$\lim_n a_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Exercício 2.9. .

1. *Diga, justificando, quais das seguintes sucessões são limitadas:*

   (a) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$;

   (b) $b_n = \dfrac{n+2}{n^2+3}$;

   (c) $c_n = \dfrac{n^2+3}{n+2}$;

   (d) $d_n = \dfrac{(-1)^n n+1}{2n+2}$;

   (e) $e_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$;

   (f) $f_n = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$.

2. *Sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ duas sucessões reais. Mostre que:*

   (a) *Se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são monótonas crescentes, então $(u_n+v_n)_n$ é monótona crescente;*

   (b) *Se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são monótonas decrescentes, então $(u_n+v_n)_n$ é monótona decrescente;*

3. *Mostre, por definição, que*

$$\lim_n \frac{n}{n+1} = 1.$$

4. *Mostre, por definição, que*

$$\lim_n \frac{1}{n+1} \neq 1.$$

5. *Seja $(x_n)_n$ uma sucessão. Mostre que:*

   Se $\lim_n |x_n| = 0$, então $\lim_n x_n = 0$.

6. *Seja $(a_n)_n$ uma sucessão convergente de termos não negativos. Mostre que:*

   Se $\lim_n a_n^2 = 0$, então $\lim_n a_n = 0$.

7. *Seja $(x_n)_n$ uma sucessão de termos não negativos tal que $\lim_n x_n = a$.*

   Mostre que:

   (a) *a sucessão $\left(\sqrt{x_n}\right)_n$ é limitada;*

   (b) $\lim_n \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

8. *Apresente exemplos de sucessões* $(x_n)_n$ *e* $(y_n)_n$ *tais que* $\lim_n x_n = \lim_n y_n$ *e*

   (a) $\lim_n \dfrac{x_n}{y_n} = 0$;

   (b) $\lim_n \dfrac{x_n}{y_n} = 1$;

   (c) $\lim_n \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$;

   (d) $\lim_n \dfrac{x_n}{y_n}$ *não existe.*

9. *Sejam* $a \in \mathbb{R}$ *e* $k \in \mathbb{N}$. *Calcule, caso exista, o limite de cada uma das seguintes sucessões:*

   (a) $a_n = \dfrac{n^k}{n!}$;

   (b) $b_n = \dfrac{a^n}{n!}$;

   (c) $c_n = \dfrac{n^k}{a^n}$;

   (d) $d_n = \dfrac{n!}{n^n}$;

   (e) $e_n = \sqrt[n]{n!}$;

   (f) $f_n = \left(\dfrac{a}{n}\right)^n$;

   (g) $g_n = \sqrt[n]{a}$ *(assuma que* $a > 0$*)*;

   (h) $h_n = \dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2}$;

   (i) $i_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}$;

   (j) $j_n = \dfrac{3^n}{\sqrt[n]{n+(3n)^n}}$.

10. *Calcule, ou justifique que não existe, cada um dos seguintes limites:*

    (a) $\lim_n \dfrac{n^3+3n-2}{3n^3+n^2-1}$;

    (b) $\lim_n \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$;

    (c) $\lim_n \dfrac{\sqrt{n^4+3n-2}}{\sqrt[3]{3n^3+n^2-1}}$;

    (d) $\lim_n \mathit{sen}\,(n\pi)$;

    (e) $\lim_n \mathit{sen}\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right)$;

    (f) $\lim_n \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(2n)!}$;

    (g) $\lim_n \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)$;

    (h) $\lim_n \left(\mathit{sen}\dfrac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-\cos n}$;

    (i) $\lim_n \dfrac{(-1)^n n - 1}{2n+1}$;

    (j) $\lim_n \dfrac{\cos(n)n+2}{n^2-\sqrt{n}}$;

    (k) $\lim_n \sqrt[n]{3^n + 2\sqrt[n]{n}}$;

    (l) $\lim_n \dfrac{(n!)^2}{2^n(n+1)!-5}$;

    (m) $\lim_n \dfrac{3^n n\cos(3^n)}{(2^n-5^n)(n+1)}$;

    (n) $\lim_n \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$;

    (o) $\lim_n \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^3}$;

    (p) $\lim_n \left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^2}$;

    (q) $\lim_n \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$.

11. *Dado um conjunto finito de números reais positivos*

$$X = \{x_1, \dots, x_m\}, \qquad \text{com } m \in \mathbb{N},$$

define-se <u>*média geométrica*</u> *de* X *por*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_m}.$$

Seja $(a_n)_n$ *uma sucessão positiva tal que* $\lim_n a_n = a$.

Mostre que a média geométrica dos seus n *primeiros termos converge para* a*, ou seja mostre que*

$$\lim_n \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = a.$$

12. *Seja* $(a_n)_n$ *uma sucessão de termos positivos.*

Mostre que se $\lim\limits_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$*, então* $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = a$

(Sugestão: aplique o resultado apresentado no exercício anterior.)

13. *Seja* $(x_n)_n$ *uma sucessão real tal que* $\lim\limits_n x_n = a$*, para algum* $a \in \mathbb{R}$*. Mostre que*

$$\lim_n \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a.$$

14. *Seja* $p \in \mathbb{N}$*. Use o exercício anterior para determinar o valor do limite que se segue:*

$$\lim_n \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}.$$

15. *Mostre que, para qualquer* $a \in \mathbb{N}$*, a sucessão* $(a_n)_n$ *de termo geral*

$$a_n = \begin{cases} i + \dfrac{1}{n}, & \text{se existe } i \in \mathbb{N} \text{ tal que } n = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} k \\ \\ m + \dfrac{1}{n}, & \text{se existe } (m,i) \in \mathbb{N}^2 \text{ tal que } m \leq i \text{ e } n = m + \displaystyle\sum_{k=1}^{i} k \end{cases}$$

possui uma subsucessão convergente para a.

16. *Considere a sucessão* $(a_n)_n$ *definida por recorrência por*

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{(-1)^n}{n+1} \end{cases}.$$

Mostre que a sucessão $(a_n)_n$ *é convergente.*

[Sugestão: mostre que $(a_n)_n$ *é de Cauchy]*

17. *Apresente um exemplo, ou mostre que não existe, de:*

   (a) *uma sucessão* $(a_n)_n$ *monótona, mas não convergente;*

   (b) *uma sucessão* $(a_n)_n$ *convergente, mas não monótona;*

   (c) *uma sucessão* $(a_n)_n$ *limitada, mas não convergente;*

   (d) *uma sucessão* $(a_n)_n$ *não monótona e que não admite subsucessões convergentes;*

   (e) *duas sucessões* $(a_n)_n$ *e* $(b_n)_n$ *tais que* $\lim_n a_n b_n = 0$*, mas* $\lim_n a_n \neq 0$ *e* $\lim_n b_n \neq 0$*;*

   (f) *uma sucessão* $(a_n)_n$ *divergente tais que* $(a_{2n})_n$*,* $(a_{2n-1})_n$ *e* $(a_{3n})_n$ *sejam convergentes;*

   (g) *uma sucessão* $(a_n)_n$ *monótona tal que as suas subsucessões* $(a_{2n})_n$ *e* $(a_{2n-1})_n$ *não sejam monótonas;*

   (h) *uma sucessão não monótona* $(a_n)_n$ *tal que as suas subsucessões* $(a_{2n})_n$*,* $(a_{2n-1})_n$ *sejam monótonas;*

   (i) *uma sucessão* $(a_n)_n$ *monótona, divergente tal que a sua subsucessão* $(a_{2n})_n$ *seja de Cauchy;*

   (j) *uma sucessão* $(a_n)_n$ *não limitada que admite uma subsucessão convergente;*

   (k) *uma sucessão* $(a_n)_n$ *limitada tal que as subsucessões* $(a_{2n})_n$ *e* $(a_{2n-1})_n$ *não sejam convergentes.*

2.4 Séries Numéricas

Tal como foi introduzida na secção 1.3, a operação soma está definida entre dois números reais $a+b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Devido ao axioma da associatividade da adição, é possível somar uma lista finita de números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ da forma

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = ((\cdots((a_1 + a_2) + a_3) + \cdots + a_{n-1}) + a_n). \quad (2.22)$$

Com a noção de série numérica, a introduzir de seguida, estende-se a noção de soma finita, (2.22), a uma soma com um número infinito de parcelas. A saber

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots . \quad (2.23)$$

Definição 2.13. *Seja $(a_n)_n$ uma sucessão.*

Chama-se série numérica (ou real) ao par $\big((a_n)_n, (s_n)_n\big)$ tal que

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- *A sucessão $(a_n)_n$ diz-se sucessão geradora da série;*
- *A sucessão $(s_n)_n$ diz-se sucessão das somas parciais.*

Para definir o que se entende por soma infinita, atenda-se à definição seguinte.

Definição 2.14. *Seja $(a_n)_n$ uma sucessão.*

A série gerada por $(a_n)_n$ diz-se convergente se a sucessão das somas parciais $(s_n)_n$, de termo geral

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

for convergente. Ao valor do limite isto é, ao numero $S \in \mathbb{R}$ tal que

$$S = \lim_n \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right),$$

chama-se soma da série.

A série gerada por $(a_n)_n$ diz-se divergente, se não for convergente.

Pelas definições 2.13 e 2.14, uma soma com um número infinito de parcelas (2.23) é entendida como o limite de uma sucessão, concretamente como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \lim_n \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right).$$

Por simplicidade de escrita, a série gerada por uma sucessão $(a_n)_n$ denota-se por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ou simplesmente por} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Por vezes, também se denota por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{ou por} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n,$$

caso seja conveniente começar em $n = 0$ e a_0 estiver definido.

Exemplo: A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n, \qquad \text{com } a \in \mathbb{R}, \tag{2.24}$$

é conhecida como <u>série geométrica</u>. No final da secção 1.3, viu-se que cada termo da sucessão das somas parciais, $(s_n)_n$, pode ser escrito na forma

$$s_n = a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ com } a \neq 1.$$

Consequentemente,

$$\lim_n s_n = \lim_n \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a}, & |a| < 1 \\ +\infty, & a > 1 \\ \text{não existe}, & a \leq -1 \end{cases},$$

donde se conclui que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \ \rightarrow \begin{cases} \text{converge}, & \text{caso } |a| < 1 \\ \text{diverge}, & \text{caso } |a| \geq 1 \end{cases}.$$

Note que, de forma trivial, se verifica que a série (2.24) diverge quando $a = 1$.

Exemplo: A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

é convergente. Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

donde

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Consequentemente,

$$\lim_n s_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

concluindo-se que a série é convergente. Mais, a soma da série é igual a 1.

Exemplo: A conhecida série harmónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente. A prova deste facto é feita verificando que a sucessão das somas parciais, $(s_n)_n$, não é de Cauchy e, pelo Teorema 2.18 conclui-se que $(s_n)_n$ é divergente, ou seja, a série harmónica é divergente.

Negando a condição de Cauchy, (2.16), conclui-se que $(s_n)_n$ não é de Cauchy caso

$$\exists \varepsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \exists n, m \geq p : |s_n - s_m| \geq \varepsilon.$$

Escolha-se $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$.

Seja $p \in \mathbb{N}$ e considere-se $n = 2p$ e $m = p$. Claramente $n, m \geq p$ e

$$\begin{aligned}
|s_{2p} - s_p| &= \left|1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{2p} - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p}\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{2p}\right| = \underbrace{\frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{2p}}_{p \text{ parcelas}} \\
&\geq p\frac{1}{2p} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $(s_n)_n$ não é uma sucessão de Cauchy, ou seja não é convergente, donde se conclui que a série harmónica é divergente.

Definição 2.15. *Duas série numéricas dizem-se da mesma natureza se forem ambas convergentes ou ambas divergentes.*

Imediatamente das propriedades da aritmética de limites de sucessões, apresentadas na secção anterior, obtém-se o seguinte resultado.

Proposição 2.19. *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries convergentes cujas somas são* S_a *e* S_b *respectivamente. Então*

1. *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *é convergente e a sua soma é* $S_a + S_b$*;*

2. *para qualquer* $\alpha \in \mathbb{R}$*, a série* $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n)$ *é convergente e a sua soma é* αS_a*.*

Dem. Proposta de exercício. $\square$

Apresentadas que estão as séries numéricas, é agora objectivo nesta secção estabelecer critérios gerais que permitam decidir, em alguns casos, se uma série é ou não é convergente.

Teorema 2.20 (Critério Anastácio da Cunha)**.**
Seja $(a_n)_n$ *uma sucessão.*
A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente se e só se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall l \in \mathbb{N}: \ n \geq p \Rightarrow |a_{n+1} + \cdots + a_{n+l}| < \varepsilon. \tag{2.25}$$

Dem. Por definição, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se e só se a sua sucessão das somas parciais, $(s_n)_n = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_n$, for convergente. Pelo Teorema 2.18 tem-se

$$(s_n)_n \text{ é convergente } \Leftrightarrow (s_n)_n \text{ é de Cauchy.}$$

A sucessão das somas parciais é de Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall l \in \mathbb{N}: \ n \geq p \Rightarrow |s_n - s_{n+l}| < \varepsilon.$$

Mas

$$|s_n - s_{n+l}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n+l} a_k\right| = \left|-\sum_{k=n+1}^{n+l} a_k\right| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+l}|\,,$$

o que prova o resultado. □

Um reparo: Este critério é conhecido como o critério de Cauchy. Acontece que esta foi a definição de série convergente usada por Anastácio da cunha no seu livro "Princípios Mathematicos" publicado em Lisboa em 1790. Trabalho naturalmente precedente aos trabalhos de Cauchy (Augustin-Louis Cauchy nasceu a 1789).

Corolário 2.21. *Seja* $(a_n)_n$ *uma sucessão.*
Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente, então* $\lim_n a_n = 0$.

Dem. Sendo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente, então, considerando em (2.25) $l = 1$, obtém-se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}: \ n \geq p \Rightarrow |a_{n+1} - 0| < \varepsilon,$$

que é a definição de $\lim_n a_{n+1} = 0$. Consequentemente $\lim_n a_n = 0$. □

Exemplo: A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+3}$$

é divergente porque $\lim_n \frac{n+2}{n+3} = 1 \neq 0$.

É importante chamar à atenção que o recíproco do Corolário 2.21 é falso. Por exemplo, $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ e a série harmónica, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, é divergente.

Teorema 2.22 (Critério Abel-Dirichlet)**.**

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *uma série tal que a sucessão das somas parciais é limitada (a série pode ser divergente).*

Seja $(v_n)_n$ *uma sucessão decrescente tal que* $\lim_n v_n = 0$*.*

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \cdot v_n)$ *é convergente.*

Dem. Sendo $(s_n)_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \right)_n$ uma sucessão limitada, então existe $M > 0$ tal que $|s_n| < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular,

$$|s_{n+l} - s_n| \leq |s_{n+l}| + |s_n| \leq 2M, \qquad \forall n, l \in \mathbb{N}. \tag{2.26}$$

Denote-se por $(w_n)_n$ a sucessão das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \cdot v_n)$, ou seja

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k \cdot v_k), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A prova deste resultado é feita usando o critério de Anastácio da Cunha, Teorema 2.20.

Seja $\varepsilon > 0$.

Como $\frac{\varepsilon}{2M} > 0$ e $\lim_n v_n = 0$, então

$$\exists p \in \mathbb{N}: \qquad n \geq p \Rightarrow |v_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{2.27}$$

Para $n \geq p$ e $l \in \mathbb{N}$, por (2.26), por (2.27) e como $(v_n)_n$ é decrescente não negativa, obtém-se

$$\begin{aligned}
|w_{n+l} - w_n| &= |u_{n+1}v_{n+1} + \cdots + u_{n+l}v_{n+l}| \\
&= |u_{n+1}(v_{n+1} - v_{n+2}) + (u_{n+1} + u_{n+2})(v_{n+2} - v_{n+3}) \\
&\quad +(u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3})(v_{n+3} - v_{n+4}) \\
&\quad +(u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4})(v_{n+4} - v_{n+5}) \\
&\quad + \cdots + (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+l})v_{n+l}| \\
&\leq 2M|v_{n+1} - v_{n+2}| + 2M|v_{n+2} - v_{n+3}| + 2M|v_{n+3} - v_{n+4}| \\
&\quad +2M|v_{n+4} - v_{n+5}| + \cdots + 2M|v_{n+l}| \\
&= 2M\sum_{k=1}^{l-1}(v_{n+k} - v_{n+k+1}) + 2Mv_{n+l} = 2Mv_{n+1} < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

o que prova o resultado. □

Definição 2.16. *Chama-se <u>série alternada</u> a uma série que pode ser escrita na forma*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}a_n,$$

em que $(a_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos.

Uma aplicação directa do critério de Abel-Dirichlet, permite obter um critério de convergência para as séries alternadas.

Corolário 2.23 (Critério de Leibniz)**.**
Seja $(v_n)_n$ uma sucessão decrescente com $\lim_n v_n = 0$.
Então a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n v_n$$

é convergente.

Dem. A sucessão das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ é limitada, porque

$$s_n = \begin{cases} -1, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por hipótese $(v_n)_n$ é decrescente e converge para zero. Pelo critério de Abel-Dirichlet conclui-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n v_n$$

é uma série convergente. $\square$

Exemplo: A série harmónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \tag{2.28}$$

é convergente porque trata-se de uma série alternada e a sucessão de termos positivos $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ é decrescente e converge para zero. Consequentemente, o critério de Leibniz garante a convergência da série.

Definição 2.17. *Uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diz-se* <u>*absolutamente convergente*</u> *se a série gerada pela sucessão dos módulos,* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, *for convergente.*

Teorema 2.24. *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é uma série absolutamente convergente, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

Mais,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

Dem. A prova é feita usando o critério de Anastácio da Silva, Teorema 2.20.

Seja $\varepsilon > 0$.

Sendo $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ convergente, então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \Rightarrow ||a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+l}|| < \varepsilon.$$

Dado $n \geq p$ e $l \in \mathbb{N}$ tem-se

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+l}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+1}| = ||a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+l}|| < \varepsilon.$$

Logo, pelo Teorema 2.20, conclui-se que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Mais, pelas propriedades dos módulos, tem-se

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n}|a_k|, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, pela Proposição 2.5, obtém-se

$$\lim_n \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \leq \lim_n \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| \right),$$

ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

□

Exemplo: Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{b_n}}{n(n+1)}, \qquad \text{com} \qquad b_n = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ par} \\ \\ n, & n \text{ ímpar} \end{cases}. \tag{2.29}$$

Observe que a série apresentada não verifica as hipóteses do critério de Abel-Dirichlet.

Considerando a série dos módulos, obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{b_n}}{n(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

que é uma série convergente, tal como verificado num exemplo apresentado a quando da introdução da definição de série numérica. Consequentemente, a série (2.29) é convergente.

Observe que o recíproco do teorema anterior não se verifica. Por exemplo, a série harmónica alternada, apresentada em (2.28), é convergente, mas não absolutamente convergente.

Com este resultado termina a apresentação de critérios de convergência aplicáveis a séries geradas por sucessões de termos reais (positivos ou negativos). No que se segue serão apenas apresentados critérios de convergência para séries de termos não negativos, ou seja séries geradas por sucessões de termos não negativos.

As séries de termos não negativos têm sucessões de somas parciais crescentes, pelo que a análise da convergência destas séries resume-se a verificar se a respectiva sucessão das somas parciais é limitada. Recorde o Teorema 2.7.

Proposição 2.25. *Seja $(a_n)_n$ uma sucessão de termos não negativos.*

Se a sucessão das somas parciais $(s_n)_n$, de termo geral

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

é limitada, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Dem. Por definição, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se a sucessão das somas parciais, $(s_n)_n$, for convergente.

Por um lado, a hipótese assegura que $(s_n)_n$ é uma sucessão limitada.

Por outro lado, como $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = s_{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja, $(s_n)_n$ é crescente.

Sendo $(s_n)_n$ uma sucessão limitada e crescente, pelo Teorema 2.7 conclui-se que $(s_n)_n$ é convergente, ou seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. □

Teorema 2.26 (1º critério da comparação)**.**

Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sucessões de termos não negativos tais que

$$\exists p \in \mathbb{N}: \; n \geq p \Rightarrow a_n \leq b_n. \tag{2.30}$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Dem. Sejam $(s_n)_n = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_n$ e $(t_n)_n = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)_n$ as sucessões das somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente.

Por definição de sucessão de somas parciais e por (2.30), para todo $n \geq p$, tem-se

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1} + a_p + \cdots + a_n = s_{p-1} + a_p + \cdots + a_n \\ &\leq s_{p-1} + b_p + \cdots + b_n = s_{p-1} - t_{p-1} + t_{p-1} + b_p + \cdots + b_n \\ &= s_{p-1} - t_{p-1} + b_1 + b_2 + \cdots + b_{p-1} + b_p + \cdots + b_n \\ &= s_{p-1} - t_{p-1} + t_n, \end{aligned}$$

ou seja

$$s_n \leq t_n + \underbrace{(s_{p-1} - t_{p-1})}_{\text{não depende de } n}, \qquad \forall n \geq p. \tag{2.31}$$

Por hipótese $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, donde a sucessão $(t_n)_n$ é convergente e consequentemente limitada.

Como $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de (2.31) obtém-se que $(s_n)_n$ é limitada e, pela Proposição 2.25, conclui-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. □

Exemplo: Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \log(n+1)},$$

onde "log"representa a função logarítmica de base e. A função logarítmica será estudada mais adiante, mas aqui assume-se que os estudantes já conhecem as suas propriedades base em resultado de estudos pré-universitários.

Tem-se $\log(n+1) > 1$ para todo $n \geq 2$, donde

$$\frac{1}{2^n \log(n+1)} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\log(n+1)} \leq \frac{1}{2^n}, \qquad \forall n \geq 2,$$

ou seja, a condição (2.30) verifica-se. Como já se verificou que a série geométrica de razão $\frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, é convergente, o primeiro critério da comparação permite concluir que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \log(n+1)}.$$

é convergente.

Do Teorema 2.26, imediatamente se obtém um critério de não convergência de uma série numérica.

Corolário 2.27. *Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sucessões de termos não negativos tais que*

$$\exists p \in \mathbb{N} : \; n \geq p \Rightarrow a_n \leq b_n.$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente, então* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é divergente.*

Dem. Consequência imediata do Teorema 2.26. □

Exemplo: Considere a série

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2}.$$

Como

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-2}, \qquad \forall n \geq 3,$$

e a série harmónica, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$, é divergente, o Corolário 2.27 permite concluir que a série

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2}.$$

é divergente.

Na aplicação do primeiro critério de comparação, e também do segundo que abaixo se apresenta, a decisão da convergência ou divergência de uma série numérica passa por a comparar com uma outra série que previamente se sabe que é, ou não é, convergente. Neste sentido é importante ter conhecimento prévio de um conjunto de séries numéricas sobre as quais é conhecida a sua convergência ou divergência. Exemplo dessas séries são as séries geométricas e a série harmónica tratadas acima. A série harmónica pertencem a uma conjunto de séries, conhecidas como séries de *Riemann*, ou de *Dirichlet*, cuja convergência é analisada em seguida.

Definição 2.18. *Chama-se série de Riemann (ou de Dirichlet) a uma série do tipo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \qquad \textit{com } \alpha \in \mathbb{R}^{+}.$$

Proposição 2.28. *A série de Riemann*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

diverge caso $\alpha \in]0,1]$ *e converge caso* $\alpha \in]1,+\infty[$

Dem.

1. Caso $0 < \alpha \leq 1$.

   Nesta situação, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

   $$0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow n^\alpha \leq n \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}.$$

   Como a série harmónica, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, é divergente, o primeiro critério da comparação (Corolário 2.27) permite conclui que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, com $0 < \alpha \leq 1$, diverge.

2. Caso $\alpha > 1$.

   Pela Proposição 2.25, é suficiente mostrar que a sucessão das somas parciais

   $$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

   é limitada para concluir a sua convergência.

   Fixe-se $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ arbitrariamente. Consequentemente existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $2^p \leq n < 2^{p+1}$. Assim,

   $$\begin{aligned}
   s_n &= 1 + \left(\tfrac{1}{2^\alpha} + \tfrac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\tfrac{1}{4^\alpha} + \tfrac{1}{5^\alpha} + \tfrac{1}{6^\alpha} + \tfrac{1}{7^\alpha}\right) + \tfrac{1}{8^\alpha} + \cdots \tfrac{1}{n^\alpha} \\
   &\leq 1 + \left(\tfrac{1}{2^\alpha} + \tfrac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\tfrac{1}{4^\alpha} + \cdots + \tfrac{1}{7^\alpha}\right) + \left(\tfrac{1}{8^\alpha} + \cdots \tfrac{1}{15^\alpha}\right) + \left(\tfrac{1}{16^\alpha} + \cdots + \tfrac{1}{31^\alpha}\right) \\
   &\quad + \cdots + \left(\tfrac{1}{(2^p)^\alpha} + \cdots + \tfrac{1}{n^\alpha} + \cdots + \tfrac{1}{(2^{p+1}-1)^\alpha}\right) \\
   &\leq 1 + \tfrac{2}{2^\alpha} + \tfrac{4}{4^\alpha} + \tfrac{8}{8^\alpha} + \cdots + \tfrac{2^p}{(2^p)^\alpha} \\
   &= 1 + \tfrac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\tfrac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^3 + \cdots + \left(\tfrac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^p \\
   &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{p+1}}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}},
   \end{aligned}$$

   donde $(s_n)_n$ é uma sucessão limitada, o que conclui a prova.

□

Segue a apresentação do segundo critério da comparação.

Teorema 2.29 (2º critério da comparação)**.**

Seja $(a_n)_n$ *uma sucessão de termos não negativos e* $(b_n)_n$ *uma sucessão de termos positivos tais que*

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \alpha, \qquad \textit{com } \alpha \in [0, \infty[\cup \{+\infty\}.$$

1. *Se* $\alpha \in \mathbb{R}^+$*, então as séries* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *são da mesma natureza;*

2. *Se* $\alpha = 0$*, então*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ convergente}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ convergente}\right);$$

3. *Se* $\alpha = +\infty$*, então*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ convergente}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ convergente}\right).$$

Dem.

1. Suponha-se que $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Como $\lim_n \dfrac{a_n}{b_n} = \alpha$, então

$$\exists p \in \mathbb{N}: \; n \geq p \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 3\frac{\alpha}{2}. \tag{2.32}$$

Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente, então, pela Proposição 2.19, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\alpha} a_n\right)$ é convergente e de (2.32) tem-se

$$b_n \leq \frac{2}{\alpha} a_n, \qquad \forall n \geq p.$$

Assim, pelo primeiro critério da comparação conclui-se que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente.

Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série convergente, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3\alpha}{2} b_n\right)$ é convergente e de (2.32) tem-se

$$a_n \leq \frac{3\alpha}{2} b_n, \qquad \forall n \geq p.$$

Novamente pelo primeiro critério da comparação conclui-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

2. Suponha-se que $\alpha = 0$. Como $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \alpha = 0 < 1$, então

$$\exists p \in \mathbb{N}: \; n \geq p \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1, \tag{2.33}$$

donde

$$a_n \leq b_n, \qquad \forall n \geq p.$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série convergente, então, pelo primeiro critério da comparação conclui-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

3. A prova deste ponto é muito semelhante à prova do ponto anterior, pelo que é deixada como exercício.

□

Exemplo: Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n - 2^n}.$$

A série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ é convergente. Calculando o limite do quociente das duas sucessões geradoras, tem-se

$$\lim_n \frac{\frac{3^n}{5^n - 2^n}}{\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \lim_n \frac{5^n}{5^n - 2^n} = 1,$$

donde, pelo segundo critério da comparação, conclui-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n - 2^n}$ é convergente.

Teorema 2.30 (Critério da raiz).
Seja $(a_n)_n$ *uma sucessão de termos não negativos tal que*

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \alpha \in [0, +\infty[\cup\{+\infty\}.$$

1. *Se* $\alpha < 1$*, então a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

2. *Se* $\alpha > 1$*, então a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

Dem.

1. Suponha-se que $\alpha < 1$. Então existe $r \in]\alpha, 1[$ e, como $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \alpha$, tem-se

$$\exists p \in \mathbb{N}: \; n \geq p \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq r.$$

Consequentemente
$$a_n \leq r^n, \qquad \forall n \geq p.$$

Como a série geométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ é convergente ($r < 1$), o primeiro critério da comparação permite concluir que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é também convergente.

2. Suponha-se que $r > 1$. Então existe $r \in]1, \alpha[$ e, como $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \alpha$, tem-se

$$\exists p \in \mathbb{N}: \; n \geq p \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \geq r,$$

donde

$$a_n \geq r^n, \qquad \forall n \geq p. \tag{2.34}$$

Como $r > 1$, então $\lim_n r^n = +\infty$. Da condição (2.34) obtém-se que

$$\lim_n a_n = +\infty,$$

donde se conclui, pelo Corolário 2.21, que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

□

Exemplo: Considere a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n.$$

Trate-se de uma série de termos não negativos e, aplicando o critério da raiz tem-se

$$\lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n} = \lim_n \frac{2n^2+1}{3n^2-1} = \frac{2}{3} < 1.$$

Consequentemente, pelo ponto 1. do Teorema 2.30, a série apresentada é convergente.

Teorema 2.31 (critério de d'Alembert)**.**
Seja $(a_n)_n$ uma sucessão de termos positivos.

1. *Se existem $r < 1$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que*

$$n \geq p \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r,$$

então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

2. *Se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq p \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$$

então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Dem.

1. Sejam $r \in]0,1[$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$, para todo o natural $n \geq p$. Então,

$$\frac{a_n}{a_p} = \underbrace{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdots \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} \frac{a_{p+1}}{a_p}}_{n-p \text{ factores}} \leq r^{n-p},$$

donde

$$\frac{a_n}{a_p} \leq \frac{r^n}{r^p} \Leftrightarrow a_n \leq \left(\frac{a_p}{r^p}\right) r^n, \qquad \forall n \geq p.$$

Como $\dfrac{a_p}{r^p}$ não depende de n e a série geométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, com $r \in]0,1[$, é convergente, o primeiro critério da comparação permite concluir que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

2. Sendo $(a_n)_n$ uma sucessão de termos positivos e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, para $n \geq p$, então $(a_n)_n$ é crescente e positiva a partir da ordem p. Consequentemente $\lim_n a_n \neq 0$ e, pelo Corolário 2.21, conclui-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

□

Uma consequência imediata do critério de d'Alembert é o conhecido critério da razão, cuja prova é deixada como exercício.

Corolário 2.32 (critério da razão)**.**

Seja $(a_n)_n$ uma sucessão de termos positivos tal que

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha.$$

1. *Se $\alpha < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.*

2. *Se $\alpha > 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.*

Dem. Proposta de exercício. □

Exemplo: Considere a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Tem-se

$$\lim_n \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_n \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \lim_n \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

logo, pelo critério da razão, conclui-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ é convergente.

Duas observações importantes devem ser tomadas em atenção quando se aplicam quer o critério da raiz, quer o critério da razão. Suponha-se que $(a_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos.

Primeiro, se na tentativa de aplicar o critério da razão se obtiver

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

então nada se pode concluir, sendo necessário outra estratégia de análise.

Note que, para a série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, tem-se

$$\lim_n \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1$$

e sabe-se que a série é divergente. Mas para a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ tem-se

$$\lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_n \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2} = 1$$

e já anteriormente se verificou que esta série é convergente.

Segundo, se na tentativa de aplicar o critério da raiz se obtiver

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 1,$$

então nada se pode concluir, sendo necessário outra estratégia de análise.

Note que, para a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, tem-se

$$\lim_n \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_n 1 + \frac{1}{n} = 1$$

e sabe-se que a série é divergente porque $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$. Mas para a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ tem-se

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}} = 1$$

e esta série é convergente, pois é uma série de Riemann com expoente $2 > 1$.

Exercício 2.10.

1. *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas série numéricas convergentes cujas somas são* A *e* B*, respectivamente. Mostre que:*

   (a) *a série* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *é convergente com soma* $A + B$*;*

   (b) *para qualquer* $\lambda \in \mathbb{R}$*, a série* $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n)$ *é convergente com soma* λA*.*

2. *Apresente um exemplo de duas séries numéricas,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, convergentes tais que a série* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)$ *não é convergente.*

3. *Mostre que se* $(a_n)_n$ *é uma sucessão de termos positivos tal que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente e* $(b_n)_n$ *é uma sucessão limitada, então série* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)$ *é convergente.*

4. *Mostre que se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *é convergente.*

5. *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *séries absolutamente convergentes. Mostre que*

   (a) *a série* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2$ *é convergente;*

   (b) *a série* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2$ *pode ser divergente, caso* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *seja convergente mas não absolutamente convergente.*

6. *Seja* $(a_n)_n$ *é uma sucessão positiva tal que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente. Mostre que a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1 + \frac{1}{1 - a_n}\right)$$

   é convergente.

7. *Considere as séries* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

   (a) *Mostre que cada uma das séries apresentadas é convergente.*

   (b) *Calcule a soma da série* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

   (c) *Fazendo uso do resultado da alínea anterior, calcule a soma da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

8. *Estude a natureza de cada uma das seguintes séries numéricas:*

   (a) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n n}{n+2^n}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^3-\sqrt{n}}$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n n!}{2^n}$;

   (d) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3^n}{n^{n+1}}$;

   (e) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{\mathrm{e}^{-n}}$;

   (f) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos\left(\left[\frac{n}{2}\right]\pi\right)}{n}$;

   (g) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, *com* $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$.

9. *Considere a série*
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\left(\log n\right)^{\alpha}},$$
   com $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

   Mostre que a série diverge caso $\alpha \leq 1$ *e converge caso* $\alpha > 1$.

   [Sugestão: utilize argumentos análogos aos apresentados na prova da Proposição 2.28.]

10. *Apresente um exemplo de uma sucessão* $(a_n)_n$, *ou mostre que não existe, tal que:*

    (a) *a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge e a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *diverge;*

    (b) *a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente é a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|}$ *diverge;*

    (c) *estritamente crescente tal que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente;*

    (d) *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ *e* $a_{2n} > a_{2n+1} < a_{2(n+1)}$ *e a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *converge;*

    (e) $\displaystyle\lim_n (na_n) = 0$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente;*

    (f) $\displaystyle\lim_n (n^2 a_n) = 2$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente;*

    (g) $a_n > 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente e*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n : \, a_p > \frac{1}{p}.$$

11. *Verifique se as seguintes série numéricas são convergentes ou divergentes:*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n-1}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n^2}$, $\theta \in \mathbb{R}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$;

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$;

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}}$;

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - n \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)$;

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n^{\alpha}}$, *com* $\alpha \in \mathbb{R}^+$;

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n+3)}$;

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n}$;

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen} n}{n!}$;

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$;

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \left(-\frac{1}{2}\right)^n$;

(r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \frac{1}{2}}{n}$;

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

(t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$;

(u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen}\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)$;

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n+1}}$;

(w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\frac{1}{n}$;

(x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos(n\pi)}{\sqrt[3]{1+n^2}}$;

(y) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$;

(z) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen} n}{\mathrm{e}^n}$;

Capítulo 3

Funções reais de variável real

3.1 Noções base de funções reais de variável real

Definição 3.1. *Chama-se função real de variável real a uma função*

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \rightarrow & Y \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

onde $X, Y \subseteq \mathbb{R}$*, com* $X \neq \emptyset$ *e* $Y \neq \emptyset$*.*

Apresentam-se de seguida características gerais sobre funções. Características essas que, sendo estudadas, contribuem decididamente para se entender o seu comportamento.

Definição 3.2. *Um conjunto* $X \subseteq \mathbb{R}$ *diz-se simétrico relativamente a zero se* $X = -X$*, onde*

$$-X = \{-x : x \in X\}.$$

Por outras palavras, um conjunto de números reais simétrico relativamente a zero é um conjunto que verifica a seguinte propriedade:

$$x \in X \Rightarrow -x \in X.$$

Definição 3.3. *Seja* $f : X \rightarrow Y$ *uma função real de variável real em que o domínio,* X*, é um conjunto simétrico relativamente a zero. Diz-se que:*

- *a função* f *é par se*
$$\forall x \in X : f(x) = f(-x);$$
- *a função* f *é ímpar se*
$$\forall x \in X : f(x) = -f(-x).$$

As noções de função par e de função ímpar não são contrárias nem complementares, isto é existem funções pares que não são ímpares, existem funções ímpares que não são pares, existem funções que não são pares nem ímpares e existem funções que são pares e são ímpares. Atenda ao exemplo que se segue.

Exemplo:

1. A função $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & |x| \end{array}$ é par, mas não é ímpar;

2. A função $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{sen} x \end{array}$ é ímpar, mas não é par;

3. A função $\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x+1 \end{array}$ não é par e não é ímpar;

4. A função $\begin{array}{rccc} l: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 0 \end{array}$ é par e é ímpar.

Definição 3.4. *Seja $f : X \to Y$ uma função real de variável real.*
Diz-se que $x_0 \in X$ é um <u>zero</u>, ou <u>raíz</u>, de f se $f(x_0) = 0$.

Definição 3.5. *Seja $f : X \to Y$ uma função real de variável real. Diz-se que*

- *a função f é <u>crescente</u> se*

$$\forall x, y \in X, \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y);$$

- *a função f é <u>estritamente crescente</u> se*

$$\forall x, y \in X, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y);$$

- *a função f é <u>decrescente</u> se*

$$\forall x, y \in X, \quad x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y);$$

- *a função f é <u>estritamente decrescente</u> se*

$$\forall x, y \in X, \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y);$$

- *a função f é <u>monótona</u> se f é crescente ou decrescente.*

Exemplo:

1. A função $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x+1 \end{array}$ é estritamente crescente;

2. A função $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -x+1 \end{array}$ é estritamente decrescente;

3. A função $\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 4 \end{array}$ é crescente e decrescente;

4. A função $\begin{array}{rccc} l: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$ não é crescente nem decrescente.

Um primeiro resultado afirma que a inversa de uma função monótona, caso exista, é também uma função monótona.

Proposição 3.1. *Seja $f : X \to Y$ uma função real de variável real bijectiva.*

Se f é uma função estritamente crescente (respectivamente decrescente), então a função inversa $f^{-1} : Y \to X$ é estritamente crescente (respectivamente decrescente).

Dem. Suponha-se que $f : X \to Y$ é uma função real de variável real bijectiva e estritamente crescente.

Sendo f bijectiva, a Proposição 1.2, garante que existe a função inversa, f^{-1}. Pretende-se provar que f^{-1} é estritamente crescente.

Sejam $y_1, y_2 \in Y$ tais que $y_1 < y_2$.

Suponha-se que $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$. Sendo f estritamente crescente e $id_Y = f \circ f^{-1}$, tem-se

$$f(f^{-1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2)) \Leftrightarrow f \circ f^{-1}(y_1) > f \circ f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow y_2 > y_1,$$

o que é absurdo. Consequentemente, $f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y_2)$ e como $y_1 \neq y_2$ e f^{-1} é bijectiva, obtém-se que $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ e consequentemente f^{-1} é uma função estritamente crescente.

De forma dual se prova que se f é estritamente decrescente, então f^{-1} é estritamente decrescente. □

Definição 3.6. *Seja $f : X \to Y$ uma função real de variável real. Um número $x_0 \in X$ diz-se*

- *ponto de máximo local de f se*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap X : \quad f(x) \leq f(x_0),$$

e à imagem $f(x_0)$ chama-se máximo local de f;

- *ponto de mínimo local de f se*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap X : \quad f(x) \geq f(x_0),$$

e à imagem $f(x_0)$ chama-se mínimo local de f;

- *ponto de máximo absoluto de f se*
$$\forall x \in X : \quad f(x) \leq f(x_0),$$
e à imagem $f(x_0)$ chama-se máximo absoluto de f;

- *ponto de mínimo absoluto de f se*
$$\forall x \in X : \quad f(x) \geq f(x_0),$$
e à imagem $f(x_0)$ chama-se mínimo absoluto de f;

- *ponto de extremo (local ou absoluto) se x_0 for ponto de máximo ou ponto de mínimo (local ou absoluto) de f.*

Definição 3.7. *Seja $f : X \to Y$ uma função real de variável real. Diz-se que*

- *a função f é minorada se o contradomínio, $f(X)$, for um conjunto minorado, ou seja*
$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in X : \quad m \leq f(x);$$

- *a função f é majorada se o contradomínio, $f(X)$, for um conjunto majorado, ou seja*
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X : \quad f(x) \leq M;$$

- *a função f é limitada se o contradomínio, $f(X)$, for um conjunto limitado, ou seja*
$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in X : \quad m \leq f(x) \leq M.$$

Proposição 3.2. *Seja $f : X \to Y$ uma função real de variável real.*

1. *Se f possui um máximo absoluto, então f é majorada;*

2. *Se f possui um mínimo absoluto, então f é minorada.*

Dem. Este resultado é consequência imediata das definições 3.6 e 3.7. $\square$

O recíproco dos pontos 1. e 2. da proposição anterior não é válido.

Exemplo:

1. A função $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ é minorada, mas não tem mínimo;

2. A função $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ é majorada, mas não tem máximo;

3. A função

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} -x+1, & x \geq 0 \\ x^2-1, & x < 0 \end{cases} \end{array}$$

tem um ponto de máximo local em $x = 0$ ($h(0) = 1$ é máximo local de h), mas h não tem máximo absoluto. A função h não tem mínimo local nem absoluto.

As noções apresentadas até aqui são relativas a características de funções. As definições que se seguem apresentam diversas formas de definir outras funções com base em funções previamente conhecidas.

Definição 3.8. *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Z \to Y$ duas funções reais de variável real tais que $Z \subseteq X$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in Z$. Então*

1. *a função g diz-se uma restrição de f, denotando-se por $f_{|_Z}$;*
2. *a função f diz-se um prolongamento de g.*

Exemplo: Considere a função

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

Considerando $X \subseteq \mathbb{R}^+$ tal que $X \neq \emptyset$, a restrição $f_{|_X}$ é única. Por exemplo, tomado $X = [1, +\infty[$, tem-se

$$\begin{array}{rccc} f_{|_{[1,+\infty[}}: & [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

O prolongamento de funções não é único, pois

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccl} l: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x^2, & x > -1 \\ x+1, & x \leq -1 \end{cases} \end{array}$$

são exemplos de prolongamentos da função f.

Definição 3.9 (Aritmética de funções)**.**

Sejam $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ funções reais de variável real. Define-se:

1. *soma de f com g como sendo a função*

$$\begin{array}{rccc} f+g: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array};$$

2. *produto de f com g como sendo a função*

$$\begin{array}{rcl} f\cdot g: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & f(x)\cdot g(x) \end{array};$$

3. *quociente de f com g como sendo a função*

$$\begin{array}{rcl} \frac{f}{g}: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array},$$

caso $g(x) \neq 0$, $\forall x \in X$.

Exercício 3.1.

1. *Para cada uma das funções que se segue, identifique a sua paridade:*
   (a) *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com $f(x)=3x$;*
   (b) *$f:[-1,2]\to\mathbb{R}$, com $f(x)=3x$;*
   (c) *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com $f(x)=\cos(x)$;*
   (d) *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com $f(x)=3x+2$;*
   (e) *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com $f(x)=3$.*
2. *Sejam $f,g:X\to\mathbb{R}$ duas funções reais de variável real tais que $g(X)\subseteq X$.*

   Estude, em função das paridades (par ou ímpar) das funções f e g, a paridade da função $f\circ g$.
3. *Para cada uma das funções que se segue, identifique os seus estremos (caso existam) e estude a monotonia.*
   (a) *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com $f(x)=3x$;*
   (b) *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com $f(x)=|x^2+x-2|$;*
   (c) *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com $f(x)=\frac{|x|}{x}$;*
   (d) *$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, com $f(x)=\frac{1}{x}$;*
   (e) *$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, com $f(x)=\frac{1}{x}$.*

3.2 Limites

Definição 3.10 (Limite segundo Cauchy)**.** *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real, $a \in X'$ e $L \in \mathbb{R}$.*

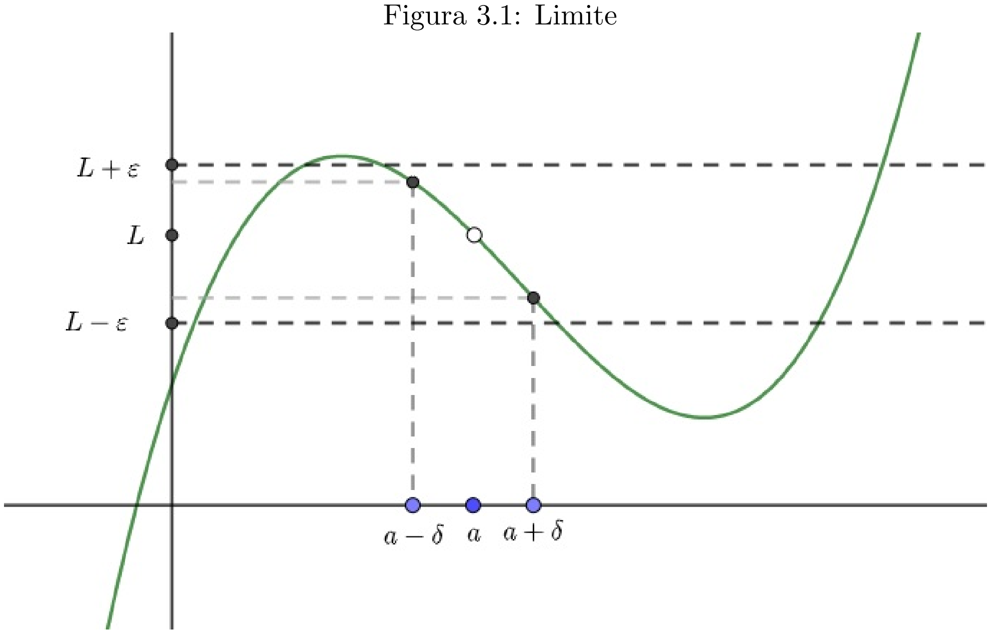
Diz-se que L é limite de f quando x tende para a se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X: \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon, \tag{3.1}$$

denotando-se por

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Figura 3.1: Limite



De observar que, na definição de limite de uma função num ponto a, não se exige que esse ponto pertença ao domínio da função, mas sim que seja ponto de acumulação do domínio da função. Sendo a ponto de acumulação do domínio, então existem objectos arbitrariamente próximos de a.

Interpretando a condição de limite de uma função num ponto, (3.1), (observe Figura 3.1), um número real L é limite de uma função f num ponto a (pertencente ao derivado do domínio) se objectos arbitrariamente próximos do ponto a têm imagens arbitrariamente próximas de L.

A condição (3.1) é equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X: \ \Big(x \in]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}\Big) \Rightarrow \Big(f(x) \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[\Big) \tag{3.2}$$

Imediatamente da definição se conclui que

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) \neq L\right) \Leftrightarrow \left(\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in X:\ 0 < |x-a| < \delta \text{ e } |f(x)-L| \geq \varepsilon\right).$$

Exemplo: Considere a função

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \end{array}.$$

Pretende-se mostrar, por definição, que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Seja $\varepsilon > 0$.

Escolha-se $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$. (escolha feita após os cálculos abaixo apresentados)

Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x-0| < \delta$. Consequentemente,

$$0 < |x-0| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |x| < \delta \Rightarrow \left(x^2 < \delta^2 \text{ e } x \neq 0\right).$$

Assim,

$$|f(x) - 0| = |x^2 - 0| = x^2 < \delta^2 = (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon,$$

donde se conclui que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Exercício 3.2. *Mostre, por definição, que*

1. $\lim_{x\to a} x = a$, *para qualquer* $a \in \mathbb{R}$*;*
2. $\lim_{x\to a} c = c$, *para quaisquer* $a, c \in \mathbb{R}$*.*

Proposição 3.3 (Unicidade de limite)**.**

Sejam $f: X \to \mathbb{R}$ *uma função real de variável real e* $a \in X'$*.*

Se existe limite de f *quando* x *tende para* a*, então este é único.*

Dem. Suponha-se que existem $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ tais que $L_1 \neq L_2$ e quer L_1, quer L_2, são limites de f quando x tende para a.

Sem perda de generalidade, assume-se que $L_1 > L_2$, ou seja $L_1 - L_2 > 0$, donde $\frac{L_1-L_2}{2} > 0$.

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$, então existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} x \in]a-\delta_1, a+\delta_1[\cap X \quad &\Rightarrow \quad f(x) \in \left]L_1 - \frac{L_1-L_2}{2}, L_1 + \frac{L_1-L_2}{2}\right[\\ &\Leftrightarrow \quad f(x) \in \left]\frac{L_2+L_1}{2}, \frac{3L_1-L_2}{2}\right[\end{aligned} \tag{3.3}$$

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, então existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} x \in]a-\delta_2, a+\delta_2[\cap X \quad &\Rightarrow \quad f(x) \in \left] L_2 - \frac{L_1 - L_2}{2}, L_2 + \frac{L_1 - L_2}{2} \right[\\ &\Leftrightarrow \quad f(x) \in \left] \frac{3L_2 - L_1}{2}, \frac{L_2 + L_1}{2} \right[. \end{aligned} \tag{3.4}$$

De (3.3) e (3.4) conclui-se que

$$\begin{aligned} &x \in]a - \min\{\delta_1, \delta_2\}, a + \min\{\delta_1, \delta_2\}[\cap X \\ &\qquad \Rightarrow f(x) \in \left] \frac{3L_2 - L_1}{2}, \frac{L_2 + L_2}{2} \right[\cap \left] \frac{L_2 + L_1}{2}, \frac{3L_1 - L_2}{2} \right[, \end{aligned}$$

o que é absurdo porque

$$\left] \frac{3L_2 - L_1}{2}, \frac{L_2 + L_2}{2} \right[\cap \left] \frac{L_2 + L_1}{2}, \frac{3L_1 - L_2}{2} \right[= \emptyset.$$

O absurdo surgiu porque se assumiu que $L_1 \neq L_2$, e daí a unicidade de limite.

□

Uma definição equivalente à definição de limite apresentada é, como se verá, a definição de limite segundo Heine.

Definição 3.11 (Limite segundo Heine)**.**
Sejam $f : X \to Y$ uma função real de variável real, $a \in X'$ e $L \in \mathbb{R}$.
Diz-se que L é limite segundo Heine de f quando x tende para a se

$$\forall (a_n)_n \text{ sucessão em } X \setminus \{a\} \text{ tal que } \lim_n a_n = a, \text{ então } \lim_n f(a_n) = L. \tag{3.5}$$

Teorema 3.4. *Sejam $f : X \to Y$ uma função real de variável real, $a \in X'$ e $L \in \mathbb{R}$.*
Então

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = L \right) \Leftrightarrow \left(L \text{ é limite segundo Heine de } f \text{ quando } x \to a \right)$$

Dem.

(⇒) Seja $(a_n)_n$ uma sucessão em $X \setminus \{a\}$ tal que $\lim_n a_n = a$.

Seja $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{3.6}$$

Como $\delta > 0$ e $\lim_n a_n = a$, então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \Rightarrow |a_n - a| < \delta. \tag{3.7}$$

Mais, $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo, para $n \geq p$ tem-se $0 < |a_n - a| < \delta$ e por (3.6) obtém-se

$$|f(a_n) - L| < \varepsilon,$$

donde se conclui que $\lim\limits_n f(a_n) = L$.

(⇐) Esta implicação prova-se por contra-recíproco.

Suponha-se que $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq L$. Então

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in X : \; 0 < |x - a| < \delta \text{ e } |f(x) - L| \geq \varepsilon. \tag{3.8}$$

Escolha-se $\varepsilon > 0$ nas condições de (3.8).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere-se $\delta = \frac{1}{n}$ e o conjunto

$$A_n = \left\{ x \in X : 0 < |x - a| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x) - L| \geq \varepsilon \right\}.$$

Por (3.8), tem-se $A_n \neq \emptyset$. Consequentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$, é possível escolher $a_n \in A_n$. Desta forma obtém-se uma sucessão $(a_n)_n$ que verifica

$$0 < |a_n - a| < \frac{1}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde se conclui que $\lim\limits_n a_n = a$. Mais, para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f(a_n) - L| \geq \varepsilon$, logo

$$\lim_n f(a_n) \neq L,$$

ou seja L não é o limite segundo Heine de f quando $x \to a$.

□

Apresentada que está a definição de limite de uma função num ponto e a sua caracterização através de sucessões (limite segundo Heine), é necessário proceder ao seu cálculo. Para isso apresenta-se de seguida um conjunto de técnicas gerais que ajudam no cálculo de limites sem recorrer directamente à definição.

Fazendo uso da definição de limite segundo Heine de uma função num ponto e das propriedades da aritmética de limites de sucessões é possível demonstrar o resultado que se segue.

Teorema 3.5 (Aritmética de limites)**.** *Sejam $f, g : X \to Y$ funções reais de variável real e $a \in X'$.*

Se existem

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x),$$

então

1. $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$*;*

2. $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$*;*

3. *Se* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$*, então* $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$.

Dem. Proposta de exercício.

Sugestão: usar o Teorema 2.4 em conjunto com o Teorema 3.4. □

Exemplo: Para calcular o limite de

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x+3},$$

usam-se as propriedades da aritmética de limites, obtendo-se

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x+3} = \frac{2^3-1}{2+3} = \frac{7}{5}.$$

Teorema 3.6 (Enquadramento)**.**

Sejam $f, g, h : X \to Y$ funções reais de variável real, $a \in X'$ e $L \in \mathbb{R}$ tais que

1. $\exists \alpha > 0 : \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x), \qquad \forall x \in (X\cap]a-\alpha, a+\alpha[) \setminus \{a\}$*;*

2. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L.$

Então existe $\lim_{x\to a} g(x)$, tendo-se

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

Dem. A prova é feita recorrendo ao Teorema 3.4.

Seja $(a_n)_n$ uma sucessão em $X \setminus \{a\}$ tal que $\lim_n a_n = a$.

Por um lado, como $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, então, pelo Teorema 3.4, tem-se que L é o limite de f, e de h, segundo Heine quando x tende para a. Da Definição 3.11, conclui-se então que

$$\lim_n f(a_n) = L = \lim_n h(a_n). \tag{3.9}$$

Por outro lado, como $a_n \in X \setminus \{a\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ e $\lim_n a_n = a$, então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq p$,

$$a_n \in (X \cap]a-\alpha, a+\alpha[) \setminus \{a\},$$

e da hipótese conclui-se que

$$f(a_n) \leq g(a_n) \leq h(a_n), \qquad \forall n \geq p. \tag{3.10}$$

Por (3.9), por (3.10) e pelo Teorema das sucessões enquadradas, Teorema 2.6, conclui-se que

$$\lim_n g(a_n) = L,$$

donde o limite de g segundo Heine quando x tende para a é L. Finalmente, pelo Teorema 3.4, se conclui que

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

□

Exemplo: Pretende-se calcular

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x^2}.$$

Para todo $x \in [-1, 1]$ tem-se

$$x^2 \leq x^{\frac{3}{2}} \leq x,$$

e já se verificou anteriormente que $\lim_{x \to 0} x^2 = 0 = \lim_{x \to 0} x$. Pelo Teorema 3.6, conclui-se que

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x^2} = 0.$$

Proposição 3.7. *Sejam $f, g : X \to Y$ funções reais de variável real e $a \in X'$.*
Se

1. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$;

2. *existe $\alpha > 0$ tal que $g_{|[a-\alpha, a+\alpha] \cap X}$ é limitada,*

então

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0.$$

Dem. A prova é feita recorrendo à definição.

Seja $\varepsilon > 0$.

Pela hipótese 2., tem-se que existe $M > 0$ tal que $|g(x)| < M$ para todo $x \in [a-\alpha, a+\alpha] \cap X$.

Como $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ (hipótese 1.), então existe $\delta_1 > 0$ tal que, para $x \in X$,

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{3.11}$$

Escolha-se $\delta = \min\{\alpha, \delta_1\}$. Para $x \in X$ tal que $0 < |x-a| < \delta$ tem-se

$$|f(x)\cdot g(x) - 0| = |f(x)|\cdot|g(x)| < |f(x)|M < \frac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon.$$

Provou-se assim que $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$. □

Exemplo: Pretende-se calcular

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x^2}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nota: A função cosseno não foi ainda aqui abordada. Contudo, os conhecimentos adquiridos nos estudos pré-universitários são suficientes para o aluno entender os raciocínios desenvolvidos neste exemplo.

Como $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, e $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x^2} = 0$ (ver exemplo anterior), a Proposição 3.7 permite concluir que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x^2}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Definição 3.12 (Limites laterais)**.**

Sejam $f : X \to Y$ uma função real de variável real, $a \in X'$ e $L \in \mathbb{R}$.

Diz-se que

- *o número L é o limite de f à direita de a se*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in X:\ x \in]a, a+\delta[\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

denotando-se por

$$L = \lim_{x\to a^+} f(x);$$

- *o número L é o limite de f à esquerda de a se*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in X:\ x \in]a-\delta, a[\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

denotando-se por

$$L = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

Proposição 3.8. *Sejam $f : X \to Y$ uma função real de variável real, $a \in X'$ e $L \in \mathbb{R}$.*

Então

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Dem. Consequência imediata das definições. □

Exemplo: Estudar o seguinte limite

$$\lim_{x\to 2}[\mathrm{sen}\,(\pi x)], \tag{3.12}$$

onde $[\cdot]$ representa a função característica (ver Definição 2.7).

Nota: A função seno não foi ainda aqui abordada. Contudo, os conhecimentos adquiridos nos estudos pré-universitários são suficientes para o aluno entender os raciocínios desenvolvidos neste exemplo.

A análise do limite (3.12) passa por estudar os limites laterais e fazer uso da Proposição 3.8. Observe que

$$\lim_{x\to 2+}[\mathrm{sen}\,(\pi x)] = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2-}[\mathrm{sen}\,(\pi x)] = -1,$$

ou seja, os limites laterais são diferentes. Consequentemente a Proposição 3.8 garante que o limite (3.12) não existe.

Exemplo: Estudar o seguinte limite

$$\lim_{x\to -1}|x+1|. \tag{3.13}$$

Estudando os limites laterais de (3.13), obtém-se (pela definição da função módulo e pela aritmética de limites)

$$\lim_{x\to -1^+}|x+1| = \lim_{x\to -1^+}(x+1) = -1+1 = 0$$

e

$$\lim_{x\to -1^-}|x+1| = \lim_{x\to -1^-}(-x-1) = -(-1)-1 = 0,$$

e pela Proposição 3.8 conclui-se que

$$\lim_{x\to -1}|x+1| = 0.$$

Com o resultado anterior termina-se esta listagem de resultados gerais que auxiliam o cálculo de limites de funções num ponto sem recorrer directamente à definição. Segue-se um último resultado importante para a localização pontual das imagens de uma função, conhecido um seu limite pontual.

Proposição 3.9. *Sejam $f : X \to Y$ uma função real de variável real, $a \in X'$ e $c \in \mathbb{R}$.*

1. *Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) > c$, então*

$$\exists \delta > 0, \forall x \in (]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}) \cap X : \quad f(x) > c.$$

2. *Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) < c$, então*

$$\exists \delta > 0, \forall x \in (]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}) \cap X : \quad f(x) < c.$$

Dem. Aqui só se apresenta a prova do ponto 1.. A prova do ponto 2. é inteiramente análoga, pelo que fica como exercício a sua formalização.

Seja $\alpha = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Tem-se $\alpha > c$.

Considerando $\varepsilon = \alpha - c > 0$ e como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$, então existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in \big(]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}\big) \cap X$, tem-se

$$f(x) \in]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[\Leftrightarrow f(x) \in]\alpha-(\alpha-c), \alpha+(\alpha-c)[\Leftrightarrow f(x) \in]c, 2\alpha-c[\Rightarrow f(x) > c.$$

$\square$

Observe que o recíproco, quer do ponto 1., quer do ponto 2., da Proposição 3.9 é falso. Por exemplo, considere a função

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \end{array}.$$

Para $\delta = 1$ tem-se

$$f(x) > 0, \qquad \forall x \in]0-1, 0+1[\setminus\{0\},$$

mas $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \not> 0$. Isto mostra que o recíproco do ponto 1. não se verifica.

Apresente um exemplo que demonstre que o recíproco do ponto 2. também não se verifica.

Contudo consegue-se obter o seguinte resultado:

Proposição 3.10. *Sejam $f : X \to Y$ uma função real de variável real, $a \in X'$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.*

1. *Se existe $\delta > 0$ tal que*

$$f(x) > c, \qquad \forall x \in (]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}) \cap X,$$

então $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq c$.

2. *Se existe $\delta > 0$ tal que*

$$f(x) < c, \qquad \forall x \in (]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}) \cap X,$$

então $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq c$.

Dem. É consequência imediata da definição de limite de uma função num ponto, (3.1). Fica ao cuidado do estudante o trabalho de formalizar os argumentos. □

3.3 Limites infinitos

Definição 3.13. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real e $a \in X'$. Define-se:*

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *por*

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M;$$

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ *por*

$$\forall M < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < M.$$

Definição 3.14. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real e $L \in \mathbb{R}$.*

1. *Quando X não é majorado, define-se*

   - $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$ *por*

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall x \in X : \ x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon;$$

   - $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ *por*

   $$\forall M > 0, \exists N > 0, \forall x \in X : \ x > N \Rightarrow f(x) > M;$$

   - $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ *por*

   $$\forall M < 0, \exists N > 0, \forall x \in X : \ x > N \Rightarrow f(x) < M.$$

2. *Quando X não é minorado, define-se:*

   - $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$ *por*

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N < 0, \forall x \in X : \ x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon;$$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *por*

$$\forall M > 0, \exists N < 0, \forall x \in X:\ x < N \Rightarrow f(x) > M;$$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *por*

$$\forall M < 0, \exists N < 0, \forall x \in X:\ x < N \Rightarrow f(x) < M.$$

É importante ter em atenção que, analogamente à situação com limites de sucessões, no geral as propriedades da aritmética de limites não são válidas quando se trabalha com limites infinitos. Por exemplo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} |x| = 0,$$

tendo-se

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{|x|} \cdot |x| \right) = 1.$$

Mas,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} x = 0,$$

não existindo o limite (verifique)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{|x|} \cdot x \right).$$

No entanto, existem alguns resultados que permitem lidar com limites infinitos sem recorrer directamente às definições. O resultado que se segue é um exemplo.

Proposição 3.11. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real e $a \in X'$. Se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \neq 0$, $\forall x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}$, então*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \ \textit{ se e só se } \ \lim_{x\to a} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty.$$

Dem. Proposta de exercício. □

A finalizar, refira-se que a técnica do enquadramento, apresentada no Teorema 3.6, é também válida quando $L \in \{\pm\infty\}$ ou, não sendo o domínio X um conjunto limitado, quando $a \in \{\pm\infty\}$. A verificação deste facto fica, uma vez mais, ao cuidado do estudante.

Exercício 3.3.

1. *Prove, por definição, que:*

   (a) $\lim_{x\to 2}(x^2+1) = 5$;

   (b) $\lim_{x\to 1}(x^2+1) = 2$;

   (c) dado $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a}(x^2+1) = a^2+1$;

   (d) $\lim_{x\to 2}\frac{3}{x-1} = 3$;

   (e) $\lim_{x\to 1^+}\frac{3}{x-1} = +\infty$;

   (f) $\lim_{x\to 1^-}\frac{3}{x-1} = -\infty$;

2. *Determine, caso existam, o valor dos seguintes limites:*

   (a) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$;

   (b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$;

   (c) $\lim_{x\to 0}|x|$;

   (d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}}{x}$;

   (e) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$;

   (f) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}$;

   (g) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x^2}}$;

   (h) $\lim_{x\to 0}\frac{(t+x)^2-t^2}{x}$, onde $t \in \mathbb{R}$;

   (i) $\lim_{x\to +\infty}\frac{5x^2-3x+1}{2x^2+4x-7}$;

   (j) $\lim_{x\to -\infty}\sqrt[3]{\frac{8+x^2}{x(x+1)}}$;

   (k) $\lim_{x\to 0}x^2\text{sen}\frac{1}{x}$;

   (l) $\lim_{x\to +\infty}\frac{3x-\text{sen}x}{2x+\text{sen}x}$;

   (m) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$;

   (n) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+1}{x^2+2x}$;

   (o) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\text{tg}(x)$;

   (p) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

3. *Sejam $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ um função monótona e $a \in \mathbb{R}$.*

   Mostre que existem

   $$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x\to a^-} f(x).$$

4. *Apresente um exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:*

   (a) $f(1) = 4$ e $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$;

   (b) $f(1) = 3$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$;

   (c) $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ e não existe $\lim_{x\to a} f(x)$ para todo $a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5. *Sejam* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in \mathbb{R}$.
   Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   (a) $\lim\limits_{x \to 2x_0} f(x) = 2 \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

   (b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(2x) = 2 \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

   (c) $\lim\limits_{x \to 2x_0} f(x) = 2 \lim\limits_{x \to x_0} f(2x)$.

6. *Calcule, ou justifique que não existe, cada um dos seguintes limites:*

   (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+7}{3x^3+x^2}$;

   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3+7}{3x^3+x^2}$;

   (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^3+7}}{3x+x^2}$;

   (d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{e^{-x}+1}$;

   (e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$;

   (f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$.

7. *Apresente exemplo, ou justifique que não existe(m):*

   (a) *duas funções* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \ \text{e} \ \lim_{x \to +\infty} (f+g)(x) = 0;$$

   (b) *duas funções* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \ \text{e} \ \lim_{x \to +\infty} (f+g)(x) = 3;$$

   (c) *duas funções* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \ \text{e} \ \lim_{x \to +\infty} (f.g)(x) = 1;$$

   (d) *duas funções* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0, \ \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \ \text{e} \ \lim_{x \to +\infty} (f.g)(x) = 1;$$

   (e) *duas funções* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1, \ \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \ \text{e} \ \lim_{x \to +\infty} f(x)^{g(x)} = 1;$$

   (f) *duas funções* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1, \ \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \ \text{e} \ \lim_{x \to +\infty} f(x)^{g(x)} \neq 1;$$

   (g) *uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3 \ \text{e não existe} \ \lim_{n} f(n);$$

   (h) *uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*
   $$\lim_{n} f(n) = 3 \ \text{e não existe} \ \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

3.4 Continuidade

Nesta secção estuda-se a continuidade de funções reais de variável real. Para além da continuidade pontual, assunto abordado em estudos pré-universitários, estuda-se também a continuidade uniforme.

3.4.1 Continuidade pontual

Começa-se pela continuidade pontual.

Definição 3.15. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real e $a \in X$.*

Diz-se que f é contínua em a se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{3.14}$$

Diz-se simplesmente que a função f é contínua se f é contínua em todos os seus objectos.

A negação da condição de continuidade (3.14) é escrita na forma

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in X : \ |x - a| < \delta \text{ e } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon, \tag{3.15}$$

e nesta situação diz-se que a função f não é contínua em $a \in X$. Observe que, em ambas as condições, (3.14) e (3.15), aparece $f(a)$, pelo que só faz sentido dizer que f é, ou não é, contínua em elementos do seu domínio.

Exemplo: Mostrar, por definição, que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, é contínua em $a = 2$.

Seja $\varepsilon > 0$.

Escolha-se $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$. (escolha tendo em atenção as contas seguintes)

Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - 2| < \delta$. Tem-se $|x - 2| < 1$, donde $1 < x < 3$, e $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$. Assim

$$|f(x) - f(2)| = |x^2 - 2^2| = |(x - 2)(x + 2)| = |x - 2|.|x + 2| \leq |x - 2|.5 < \frac{\varepsilon}{5}5 = \varepsilon.$$

Exercício 3.4. *Mostre, por definição, que:*

1. *a função identidade,* $\begin{array}{rccc} id: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \end{array}$, *é contínua;*

2. *a função constante* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & c \end{array}$, *com $c \in \mathbb{R}$, é contínua.*

A comparação da condição de continuidade (3.14) com a definição de limite (3.1) é inevitável. Estudando com atenção as duas definições, verifica-se que essa comparação só poderá ser feita para elementos $a \in X' \cap X$, sendo X o domínio da função f, obtendo-se o resultado que se segue.

Proposição 3.12. *Seja $f : X \to Y$ uma função real de variável real e $a \in X$.*

1. *Se $a \in X' \cap X$, então*
$$(f \text{ é contínua em } a) \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\right);$$

2. *Se $a \in X \setminus X'$, então f é contínua em a.*

Dem.

1. Caso $a \in X' \cap X$.

($\Rightarrow$) Se f é contínua em a, então, por definição, tem-se
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$
e em particular
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$
donde se conclui, por definição, que
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

($\Leftarrow$) Se
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$
então, por definição, tem-se
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (3.16)$$
Como $a \in X$ e a tese da implicação em (3.16) é verdadeira caso $x = a$, tem-se
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$
donde se conclui que f é contínua em a.

2. Caso $a \in X \setminus X'$.

   Prove-se, por definição que f é contínua em a.

   Seja $\varepsilon > 0$.

   Como $a \in X$, mas $a \notin X'$, então existe $\delta > 0$ tal que

   $$]a-\delta, a+\delta[\cap X = \{a\}.$$

   Consequentemente, para $x \in X$ tal que $|x-a| < \delta$, tem-se $x = a$, logo

   $$|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon,$$

   donde se conclui que f é contínua em a.

□

Exemplo: Mostrar que a função

$$\begin{array}{rccl} f: &]-\infty,1[\cup\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x, & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

é contínua.

1. Como $\big(]-\infty,1[\cup\{2\}\big)' =]-\infty,1]$ e $2 \in \big(]-\infty,1[\cup\{2\}\big)\setminus]-\infty,1]$, então pela Proposição 3.12 conclui-se que f é contínua em 2;

2. Para $a \in]0,1[$ tem-se

   $$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a = f(a),$$

   donde, pela Proposição 3.12, conclui-se que f é contínua em a;

3. Para $a \in]-\infty,0[$ tem-se

   $$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x^2 = a^2 = f(a),$$

   donde, pela Proposição 3.12, conclui-se que f é contínua em a;

4. Para $a = 0$ tem-se

   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0,$$

   donde se conclui que

   $$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

   Como $f(0) = 0$, pela Proposição 3.12, obtém-se que f é contínua em 0.

Finalmente, pelos pontos 1., 2., 3. e 4. acimas descritos, conclui-se que a função f é contínua em todos os seus objectos ou seja, f é uma função contínua.

Exercício 3.5. *Mostre que a função*

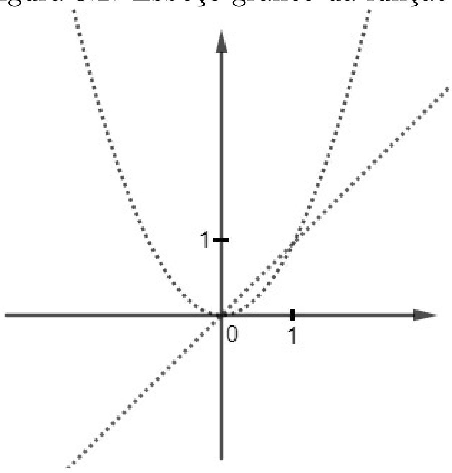
$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

é contínua.

Exemplo: Estudar a continuidade da função (a Figura 3.2 apresenta um esboço do gráfico de g)

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}.$$

Figura 3.2: Esboço gráfico da função g



Observe-se que o domínio de g não tem pontos isolados, pelo que não existem objectos na situação descrita no ponto 2. da Proposição 3.12.

Seja $a \in \mathbb{R}$.

Tem-se

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q}}} g(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q}}} x = a \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \notin \mathbb{Q}}} g(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \notin \mathbb{Q}}} x^2 = a^2,$$

donde o $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe se e só se $a = a^2$. Assim, para $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, o ponto 1. da Proposição 3.12 permite concluir que g é descontínua em a.

Caso $a \in \{0,1\}$, tem-se

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a),$$

logo, pelo ponto 1. da Proposição 3.12, a função g é contínua em a.

À semelhança do que acontece com a noção de limite de uma função num ponto, é igualmente possível decidir a continuidade de uma função num objecto através do estudo das imagens dos termos de sucessões convergentes para o objecto.

Definição 3.16 (Continuidade segundo Heine)**.** *Sejam $f : X \to Y$ uma função real de variável real e $a \in X$.*

Diz-se que f é <u>contínua segundo Heine em a</u> se:

$$\forall (a_n)_n \text{ sucessão em } X : \left(\lim_n a_n = a\right) \Rightarrow \left(\lim_n f(a_n) = f(a)\right). \tag{3.17}$$

Como consequência da Definição 3.16 (continuidade segundo Heine), da Proposição 3.12 e do Teorema 3.4, obtém-se o resultado seguinte.

Teorema 3.13. *Sejam $f : X \to Y$ uma função real de variável real e $a \in X$.*

A função f é contínua em a se e só se f é contínua segundo Heine em a.

Dem. Consequência da Definição 3.16 (continuidade segundo Heine), da Proposição 3.12 e do Teorema 3.4. A formalização fica ao cuidado do estudante. □

O Teorema 3.13 permite concluir que uma função contínua transforma as sucessões convergentes no seu domínio em sucessões convergentes no seu contradomínio. Note que se diz, *sucessões convergentes no seu domínio* e não sucessões de Cauchy do seu domínio.

Exercício 3.6. *Apresente um exemplo de uma função real de variável real $f : X \to Y$ contínua e de uma sucessão, $(a_n)_n$, em X que seja de Cauchy, mas que a sucessão das imagens, $(f(a_n))_n$, não é de Cauchy.*

Os resultados que se seguem apresentam critérios gerais que permitem concluir a continuidade de funções sem recorrer directamente à definição nem à Proposição 3.12.

Proposição 3.14. *Sejam $f, g : X \to Y$ funções reais de variável real contínuas em $a \in X$.*

Então:

1. *A função $f + g$ é contínua em a;*

2. *A função $f \cdot g$ é contínua em a;*

3. Se estiver definida, a função $\frac{f}{g}$ é contínua em a.

Dem. Consequência imediata da Proposição 3.12 e das propriedades da aritmética de limites, Teorema 3.5. □

Exemplo: Estudar a continuidade da função polinomial

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \end{array},$$

onde, $n \in \mathbb{N}$ e $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, com $a_n \neq 0$.

No Exercício 3.4 verificou-se, por definição, que a função identidade e as funções constantes são funções contínuas. Como a função p é o resultado de produtos e somas entre a função identidade e funções constantes, os pontos 1. e 2. da Proposição 3.14 permitem concluir que p é uma função contínua.

Teorema 3.15. *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Z \to W$ funções reais de variável real tais que $f(X) \subseteq Z$.*

Se f é contínua em $a \in X$ e g é contínua em $f(a) \in Z$, então a função composta, $g \circ f$, é contínua em a.

Dem. Recorre-se à definição para provar este resultado.

Seja $\varepsilon > 0$.

Como g é contínua em $f(a)$, então existe $\eta > 0$ tal que

$$\forall y \in Z: \ |y - f(a)| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon. \tag{3.18}$$

Sendo $\eta > 0$ e f contínua em a, então existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in X$ tal que $|x - a| < \delta$ tem-se $|f(x) - f(a)| < \eta$, com $f(x) \in Z$ (note que $f(X) \subseteq Z$). Consequentemente, por (3.18), obtém-se que

$$|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon,$$

donde se conclui que $g \circ f$ é contínua em a. □

Como consequência do Teorema 3.15 tem-se os seguintes resultados.

Corolário 3.16. *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Z \to W$ funções reais de variável real tais que $f(X) \subseteq Z$.*

Se f e g são funções contínuas, então $g \circ f$ é uma função contínua.

Dem. Imediato da definição de função contínua e do Teorema 3.15. □

Corolário 3.17. *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Z \to W$ funções reais de variável real tais que $f(X) \subseteq Z$ e $a \in X'$.*

Se g é contínua e existe $l = \lim_{x\to a} f(x)$, com $l \in Z$, então

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).$$

Dem. Proposta de exercício. □

Exemplo: Estudar a continuidade da função

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{sen}^2(x) = (\operatorname{sen}(x))^2 \end{array}.$$

A função seno será estuda mais adiante, onde se demonstrará que é uma função contínua. Neste sentido, assume-se que

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{sen}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{sen}(x) \end{array}$$

é uma função contínua.

A função

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & y^2 \end{array}$$

é também uma função contínua porque é uma função polinomial.

Como $f = (g \circ \operatorname{sen})$ e quer g, quer sen, são funções contínuas, então pelo Corolário 3.16 conclui-se que f é uma função contínua.

Exemplo: Calcular o limite que se segue:

$$\lim_{x \to -2} \left(\operatorname{sen}\left(x^2 - 4\right)\right).$$

Sendo a função seno uma função contínua e $\lim_{x \to -2} (x^2 - 4) = 0$, pelo Corolário 3.17 tem-se

$$\lim_{x \to -2} \left(\operatorname{sen}\left(x^2 - 4\right)\right) = \operatorname{sen}\left(\lim_{x \to -2} (x^2 - 4)\right) = \operatorname{sen}(0) = 0.$$

3.4.2 Continuidade uniforme

Antes de se apresentar a definição de continuidade uniforme, atenda-se aos dois exemplos que se seguem. Em cada um deles prova-se a continuidade de uma função usando a Definição 3.15.

Exemplo: Provar, por definição, que a função

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} \tag{3.19}$$

é contínua.

Uma função diz-se contínua se for contínua em todos os seus objectos. Para realizar a prova de que f é contínua em qualquer dos seus objectos, fixa-se arbitrariamente um objecto e prove-se que f é contínua nesse objecto através da definição.

Seja $x_0 \in \mathbb{R}$. É necessário provar que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}: \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Seja $\varepsilon > 0$.

Escolha-se

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}\right\}. \tag{3.20}$$

Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| < \delta$. Como $\delta \leq 1$, então tem-se

$$|x - x_0| < 1 \Leftrightarrow |x + x_0 - 2x_0| < 1 \Rightarrow |x + x_0| - 2|x_0| < 1 \Rightarrow |x + x_0| \leq 2|x_0| + 1.$$

Assim tem-se

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \\ &\leq |x - x_0| \cdot (2|x_0| + 1) < \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}(2|x_0| + 1) = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que prova que f é contínua em x_0. Sendo x_0 arbitrário em no domínio de f, $\mathbb{R}$, conclui-se que f é um função contínua.

Observe que, no exemplo acabado de apresentar a escolha que é feita para o valor de δ (ver (3.20)) depende, para além de ε, do objecto x_0 ou seja, o δ escolhido poderá assumir valores diferentes para diferentes objectos $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exemplo: Provar, por definição, que a função

$$\begin{array}{rccc} g: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} \tag{3.21}$$

é contínua.

Para realizar a prova de que g é contínua, fixa-se arbitrariamente um objecto e prova-se que g é contínua nesse objecto através da definição.

Seja $x_0 \in [0,1]$. É necessário provar que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in [0,1]: \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

Seja $\varepsilon > 0$.

Escolha-se

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.22}$$

Seja $x \in [0,1]$ tal que $|x - x_0| < \delta$. Como $x \in [0,1]$, então tem-se

$$|x + x_0| \leq 2.$$

Tem-se

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |(x+x_0)(x-x_0)| = |x+x_0|\cdot|x-x_0| \leq 2|x-x_0| < 2\delta = \varepsilon,$$

o que prova que g é contínua em x_0. Sendo x_0 arbitrário no domínio de g, $[0,1]$, conclui-se que g é um função contínua.

Observe agora que, neste último exemplo foi possível escolher um valor para δ (ver (3.22)) independente do objecto x_0. Ou seja, na função g é possível escolher um mesmo δ para todos os objectos do domínio de g.

Na prova da continuidade de uma função, a possibilidade de escolher um valor de δ comum para todos os objectos é que caracteriza as funções *uniformemente contínuas*.

Definição 3.17. *Seja $f : X \to Y$ uma função real de variável real.*

Diz-se que f é <u>uniformemente contínua</u> se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in X : \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{3.23}$$

Das definições 3.15 e 3.17 imediatamente se conclui que toda a função uniformemente contínua é contínua. O recíproco é falso, ou seja nem toda a função contínua é uniformemente contínua. Por exemplo, a função apresentada em (3.19) não é uniformemente contínua.

Exemplo: Prove-se que a função

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

não é uniformemente contínua.

Negando a condição (3.23), é necessário mostrar que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in \mathbb{R} : \ |x - y| < \delta \text{ e } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Escolha-se $\varepsilon = 1$.

Seja $\delta > 0$.

Escolhendo $x = \frac{1}{\delta}$ e $y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$, tem-se $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$ e

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| = \left|\left(\tfrac{1}{\delta}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{\delta} + \tfrac{\delta}{2}\right)^2\right| = \left|\tfrac{1}{\delta^2} - \tfrac{1}{\delta^2} - 2\tfrac{1}{\delta}\tfrac{\delta}{2} - \tfrac{\delta^2}{4}\right| \\ &= \left|-1 - \tfrac{\delta^2}{4}\right| = 1 + \tfrac{\delta^2}{4} > 1, \end{aligned}$$

donde se conclui que f não é uniformemente contínua.

Observe que as funções uniformemente contínuas transformam sucessões de Cauchy no seu domínio em sucessões de Cauchy no seu contradomínio. Atenda ao exercício que se segue.

Exercício 3.7.

1. *Seja $f : X \to Y$ uma função real de variável real uniformemente contínua.*

   Mostre que se $(a_n)_n$ é uma sucessão de Cauchy em X, então $(f(a_n))_n$ é uma sucessão de Cauchy.

2. *Considere a função $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{x}$.*

   (a) *Apresente um exemplo de uma sucessão $(a_n)_n$ em $]0, +\infty[$ de Cauchy tal que a sucessão das imagens, $(g(a_n))_n$, não é de Cauchy.*

   (b) *Conclua que g não é uma função uniformemente contínua.*

Com o objectivo de apresentar e demonstrar um critério de continuidade uniforme, *Teorema de Cantor*, é necessário previamente introduzir a noção de *família* e provar um conhecido resultado da Topologia, *Teorema de Heine-Borel.*

Definição 3.18 (Família)**.** *Sejam Λ um conjunto não vazio, designado por conjunto de índices, e X um conjunto não vazio.*

Chama-se família em X a uma função

$$\begin{array}{rccl} F: & \Lambda & \to & X \\ & \lambda & \mapsto & F(\lambda) = F_\lambda \end{array},$$

denotando-se por

$$(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}.$$

Observe que uma sucessão, $(a_n)_n$, é um exemplo de uma família em $\mathbb{R}$, sendo $\mathbb{N}$ o conjunto de índices.

Teorema 3.18 (Heine-Borel)**.** *Sejam $[a,b]$ um intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$ e $\mathcal{I}$ o conjunto de todos os intervalos abertos em $\mathbb{R}$.*

Se $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família em $\mathcal{I}$ tal que

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \tag{3.24}$$

(neste caso diz-se que $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma cobertura aberta de $[a,b]$), então existem $n\in\mathbb{N}$ e $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\Lambda$ tais que

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_{\lambda_i} \tag{3.25}$$

(neste caso diz-se que $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ admite uma subcobertura de $[a,b]$ finita).

Informalmente: O teorema de Heine-Borel afirma que qualquer cobertura aberta de um intervalo fechado e limitado, admite uma subcobertura finita.

Dem. A prova do Teorema de Heine-Borel faz-se por redução ao absurdo, seguindo as seguintes etapas:

1. Assume-se que $[a,b]$ não é coberto por um número finito de conjuntos I_λ;

2. Contrói-se uma sequência de conjuntos

   $$[a,b] \supseteq [a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq \cdots [a_n,b_n] \supseteq \cdots,$$

   em que cada intervalo $[a_i,b_i]$ não é coberto por um número finito de conjuntos I_λ;

3. Prova-se que

   $$\lim_n a_n = \lim_n b_n = l,$$

   para algum $l\in[a,b]$;

4. Como $l\in[a,b]$, então $l\in I_{\lambda^*}$ para algum $\lambda^*\in\Lambda$;

5. Pelo facto de I_{λ^*} ser um conjunto aberto, e usando o ponto 3., consegue-se demonstrar que existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

   $$[a_{n_0},b_{n_0}] \subseteq I_{\lambda^*}, \tag{3.26}$$

   e surge o absurdo, pois (3.26) entra em contradição com as propriedades descritas no ponto 2..

Suponha-se, por absurdo, que não existe um número finito de intervalos I_λ cuja união contém $[a, b]$, ou seja, supõe-se que $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ não admite uma subcobertura de $[a, b]$ finita. Consequentemente, $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ também não admite uma subcobertura finita de pelo menos um dos seguintes intervalos: $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ou $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Escolha-se o intervalo para o qual $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ não admite uma subcobertura finita e denote-se por $[a_1, b_1]$. Claro que $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ e $a \leq a_1 \leq b_1 \leq b$.

Como $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ não admite uma subcobertura de $[a_1, b_1]$ finita, pelo mesmo raciocínio obtém-se um intervalo $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$ para o qual $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ não admite uma subcobertura finita, $b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$ e $a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1$.

Iterando o processo, obtém uma sequência infinita de intervalos

$$[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots [a_n, b_n] \supseteq \cdots,$$

em que cada intervalo $[a_i, b_i]$ não é coberto por um número finito de intervalos abertos I_λ. Mais, pelo processo iterativo descrito, conclui-se ainda que:

- $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$
- $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N};$
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, o intervalo $[a_n, b_n]$ não está contido numa união finita de intervalos da família $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

A sucessão $(a_n)_n$ é crescente e limitada, logo convergente, donde existe $\overline{a} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_n a_n = \overline{a}.$$

A sucessão $(b_n)_n$ é decrescente e limitada, logo convergente, donde existe $\overline{b} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_n b_n = \overline{b}.$$

Mais, tem-se

$$a_n \leq \overline{a} \leq \overline{b} \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.27}$$

donde

$$0 \leq \overline{b} - \overline{a} \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, como $\lim\limits_n \dfrac{b-a}{2^n} = 0$, conclui-se que $\overline{a} = \overline{b}$. Denote-se $l = \overline{a} = \overline{b}$.

Tem-se $l \in [a, b]$, donde pela hipótese (3.24), existe $\lambda^* \in \Lambda$ tal que $l \in I_{\lambda^*}$. Sendo I_{λ^*} um intervalo aberto, então existe $\delta > 0$ tal que

$$]l - \delta, l + \delta[\subseteq I_{\lambda^*}.$$

O limite $\lim\limits_{n} \dfrac{b-a}{2^n} = 0$, garante a existência de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$b_{n_0} - a_{n_0} = \frac{b-a}{2^{n_0}} < \delta,$$

e as desigualdades em (3.27) garantem que $l \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$. Assim,

$$l - a_{n_0} \leq \frac{b-a}{2^{n_0}} < \delta \quad \text{e} \quad b_{n_0} - l \leq \frac{b-a}{2^{n_0}} < \delta,$$

donde

$$l - \delta \leq a_{n_0} \quad \text{e} \quad b_{n_0} \leq l + \delta.$$

Consequentemente $[a_{n_0}, b_{n_0}] \subseteq]l-\delta, l+\delta[\subseteq I_{\lambda^*}$, o que é absurdo porque $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ não está contido numa união finita de intervalos da família $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

O absurdo surgiu porque se assumiu que $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ não admitia uma subcobertura de $[a, b]$ finita, pelo que se conclui que (3.25) verifica-se. □

Está-se agora em condições de demonstrar o Teorema de Cantor.

Teorema 3.19 (Cantor)**.**

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

Então f é uma função uniformemente contínua.

Dem. A demonstração faz-se por definição.

Seja $\varepsilon > 0$.

Sendo f uma função contínua e $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, então,

$$\forall x \in [a, b], \exists \delta_x > 0, \forall y \in [a, b] : \; |x - y| < \delta_x \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.28}$$

Considere-se a família

$$(I_x)_{x \in [a,b]} = \left(\left] x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2} \right[\right)_{x \in [a,b]}.$$

A família $(I_x)_{x \in [a,b]}$ é uma cobertura aberta de $[a, b]$, donde se conclui, pelo Teorema de Heine-Borel (Teorema 3.18), que existem $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ tais que

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left] x_i - \frac{\delta_{x_i}}{2}, x_i + \frac{\delta_{x_i}}{2} \right[. \tag{3.29}$$

Escolha-se $\delta = \min \left\{ \frac{\delta_{x_1}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{x_n}}{2} \right\} > 0$.

Sejam $x, y \in [a, b]$ tais que $|x - y| < \delta$.

Tem-se $x \in [a, b]$, então, por (3.29), existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in \left] x_j - \dfrac{\delta_{x_j}}{2}, x_j + \dfrac{\delta_{x_j}}{2} \right[$ donde $|x - x_j| < \frac{\delta_{x_j}}{2}$ e por (3.28), obtém-se

$$|f(x) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.30}$$

Mais, como $|x - x_j| < \frac{\delta_{x_j}}{2}$, tem-se ainda que

$$|y - x_j| = |y - x + x - x_j| \leq |y - x| + |x - x_j| < \delta + \frac{\delta_{x_j}}{2} \leq \frac{\delta_{x_j}}{2} + \frac{\delta_{x_j}}{2} = \delta_{x_j}$$

donde, novamente por (3.28), se obtém

$$|f(y) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.31}$$

Finalmente, por (3.30) e por (3.31), tem-se

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(x_j) + f(x_j) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(y)| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

donde se conclui a continuidade uniforme da função f.

$\square$

Exemplo: Considere a função

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,3] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}.$$

Pretende-se estudar a continuidade uniforme da função f.

Sendo f uma função contínua, pois é uma função polinomial, e $[0,3]$ um intervalo fechado e limitado, o Teorema de Cantor permite concluir que f é uma função uniformemente contínua.

Exemplo: Considere-se a função

$$\begin{array}{rccc} g: & [0,2] \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \end{array}.$$

Pretende-se estudar a continuidade uniforme da função g.

A função g é contínua (justifique porquê), mas não verifica as hipóteses do Teorema de Cantor porque o domínio, $[0,2] \setminus \{1\}$, não é um intervalo.

Mas

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} (\sqrt{x}+1) = 2,$$

donde o prolongamento da função g que se segue,

$$\begin{array}{rccc} \overline{g}: & [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \end{array}$$

é uma função contínua.

Sendo $\overline{g}$ uma função contínua com domínio, $[0,2]$, um intervalo fechado e limitado, o Teorema de Cantor permite concluir que $\overline{g}$ é uma função uniformemente contínua. Como g é uma restrição de uma função uniformemente contínua, $\overline{g}$, então g é também ela uma função uniformemente contínua. (Verifique que uma restrição de uma função uniformemente contínua é uniformemente contínua.)

3.5 Funções contínuas em intervalos

Neste secção estudam-se propriedades de funções contínuas que tenham como domínio um intervalo de números reais.

O primeiro resultado a estudar é o *Teorema de Weierstrass* que estabelece que qualquer função contínua cujo domínio é um intervalo fechado e limitado, tem máximo e tem mínimo absolutos.

Teorema 3.20 (Weierstrass)**.**

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

Então existe $c, d \in [a,b]$ tais que

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d), \qquad \forall x \in [a,b].$$

Dem. Aqui é apresentada apenas a prova para a existência de máximo absoluto, isto porque a prova da existência de mínimo faz-se usando argumentos análogos. A prova para a existência de máximo faz-se em duas etapas: primeiro prova-se que o conjunto imagem da função é majorado, donde o Axioma do Supremo garante que possui supremo; segundo prova-se que o supremo é também uma imagem da função pelo que se conclui que é máximo.

1. Prova de que $f([a,b]) = \{f(x) : x \in [a,b]\}$ é majorado.

   Pelo Teorema de Cantor, Teorema 3.19, a função f é uniformemente contínua, ou seja

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [a,b] : \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

   Considerando $\varepsilon = 1$, então existe $\delta_1 > 0$ tal que

   $$\forall x, y \in [a,b] : \ |x - y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1 \Rightarrow f(y) < f(x) + 1. \tag{3.32}$$

   Como

   $$[a,b] \subseteq \bigcup_{x \in [a,b]}]x - \delta_1, x + \delta_1[,$$

o Teorema de Heine-Borel permite concluir que existem $x_1, x_2, \ldots, x_n$, com $n \in \mathbb{N}$, tais que

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}]x_i - \delta_1, x_i + \delta_1[. \tag{3.33}$$

Definindo $M = \max\{f(x_1)+1, \ldots, f(x_n)+1\}$, este é um majorante de $f([a,b])$. De facto:

Se $y \in [a,b]$, então, por (3.33), existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $y \in]x_j - \delta_1, x_j + \delta_1[$ e, dado que $|y - x_j| < \delta_1$, por (3.32) tem-se $f(y) < f(x_j) + 1 \leq M$.

Como y é arbitrário em $[a,b]$, conclui-se que

$$f(y) \leq M, \qquad \forall y \in [a,b],$$

ou seja, M é majorante de $f([a,b])$.

Como $f([a,b])$ é um conjunto majorado e não vazio, pelo Axioma do Supremo, tem supremo.

Seja $S = \sup f([a,b])$.

2. Prova de que S é máximo de $f([a,b])$.

   Para provar que S é máximo de $f([a,b])$, é necessário e suficiente provar que $S \in f([a,b])$, ou seja que existe $d \in [a,b]$ tal que $f(d) = S$.

   Por definição de supremo, tem-se

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in f([a,b]): \;\; S - \frac{1}{n} \leq y_n. \tag{3.34}$$

   Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere-se $x_n \in [a,b]$ tal que $y_n = f(x_n)$.

   Claro que $(x_n)_n$ é uma sucessão limitada, donde possui uma subsucessão convergente, ou seja, existem $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente e $d \in [a,b]$ tais que

$$\lim_n x_{\varphi(n)} = d.$$

   Como f é uma função contínua, pela continuidade segundo Heine tem-se que

$$\lim_n f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(d).$$

   Como, por (3.34), tem-se

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; S - \frac{1}{\varphi(n)} \leq f\left(x_{\varphi(n)}\right),$$

   obtém-se

$$S = \lim_n \left(S - \frac{1}{\varphi(n)}\right) \leq \lim_n f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(d).$$

Sendo $S = \sup f([a,b])$, conclui-se que $f(d) = S$, ou seja $f(d)$ é máximo de f.

$\square$

Atenda aos três exemplos que se seguem.

Exemplo: Considere a função

$$\begin{array}{rccc} f: & [1,2] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}.$$

A função f é contínua e o seu domínio é um intervalo fechado e limitado. Assim sendo todas as hipótese do Teorema de Weierstrass estão satisfeitas, pelo que se conclui que f possui máximo e mínimo absolutos. Efectivamente tem-se

$$f([1,2]) = \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

pelo que 1 é o máximo absoluto de f e $\frac{1}{2}$ é o mínimo absoluto de f.

Exemplo: Considere a função

$$\begin{array}{rccc} g: &]0,2] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}.$$

Tem-se $g(]0,2]) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, pelo que a função g não tem máximo.

A função g não verifica todas as hipóteses do Teorema de Weierstrass porque o domínio de g não é fechado.

Exemplo: Considere a função

$$\begin{array}{rccc} h: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \end{array}.$$

Tem-se $h([-1,1]) =]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$, pelo que a função h não tem máximo nem mínimo.

A função h não verifica todas as hipóteses do Teorema de Weierstrass porque a função h não é contínua.

Teorema 3.21 (Bolzano-Cauchy). *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.*

Então $f([a,b])$ contém o intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$.

Dem. Se $f(a) = f(b)$, então não há nada a provar.
Suponha-se, sem perda de generalidade, que $f(a) < f(b)$.

Considere-se $d \in]f(a), f(b)[$. O objectivo é provar que d é uma imagem de f. Definam-se os conjuntos

$$A = \{x \in [a,b] : f(x) < d\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in [a,b] : f(x) > d\}$$

O número b é majorante de A e $A \neq \emptyset$ (porque $a \in A$), logo A possui supremo. Considere-se $\alpha = \sup(A)$. Tem-se $\alpha \in [a,b]$ (justifique).

Como $\alpha = \sup(A)$, então (verifique) existe uma sucessão $(a_n)_n$ em A tal que

$$\lim_n a_n = \alpha$$

e, pelo Teorema 3.13 e pela continuidade de f segundo Heine em α, tem-se

$$\lim_n f(a_n) = f(\alpha).$$

Mais, como $a_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se (definição do conjunto A) $f(a_n) < d$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde, pela Proposição 2.5 se conclui que

$$f(\alpha) \leq d.$$

Para se concluir a prova falta verificar que

$$f(\alpha) = d.$$

Suponha-se que não, ou seja, suponha-se que $f(\alpha) < d$.

Como f é contínua em α e considerando $\varepsilon = \frac{d - f(\alpha)}{2} > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[\Rightarrow f(x) \in]f(\alpha) - \varepsilon, f(\alpha) + \varepsilon[.$$

Em particular, para $x \in]\alpha, \alpha + \delta[$ tem-se

$$f(x) < f(\alpha) + \varepsilon = f(\alpha) + \frac{d - f(\alpha)}{2} = \frac{d + f(\alpha)}{2} < \frac{d + d}{2} = d,$$

donde se conclui que

$$x \in A, \quad \forall x \in]\alpha, \alpha + \delta[.$$

Mas isto é absurdo porque $\alpha = \sup(A)$. Consequentemente $f(\alpha) = d$ e a prova está concluída. □

Uma consequência do Teorema de Bolzano-Cauchy é a de que o contradomínio de uma função contínua com domínio um intervalo é um intervalo.

Corolário 3.22. *Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua.*
Então $f(I)$ é um intervalo.

Dem. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo.
Mostrar que o contradomínio de f é um intervalo é equivalente a mostrar que

$$[c, d] \subseteq f(I), \qquad \forall c, d \in f(I), \text{ com } c < d.$$

Sejam $c, d \in f(I)$ tais que $c < d$. Por definição, existem $a, b \in I$ tais que

$$c = f(a) \quad \text{e} \quad d = f(b).$$

Sem perda de generalidade, assuma-se que $a < b$. Aplicando o Teorema de Bolzano-Cauchy à função $f_{|_{[a,b]}}$ obtém-se que

$$[c, d] \subseteq f([a, b]),$$

donde

$$[c, d] \subseteq f([a, b]) \subseteq f(I),$$

o que finaliza a prova.

□

Uma segunda consequência do Teorema de Bolzano-Cauchy é o Corolário que se segue, o qual apresenta condições suficientes para a existência de zeros de funções contínuas.

Corolário 3.23. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$.*
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Dem. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Consequentemente uma das seguintes situações acontece:

1. $f(a) < 0 < f(b)$;

2. $f(b) < 0 < f(a)$.

Sem perda de generalidade, assuma-se que se verifica a situação 1.. Pelo Teorema Bolzano-Cauchy tem-se

$$0 \in]f(a), f(b)[\subseteq [f(a), f(b)] \subseteq f([a,b]),$$

donde se conclui que existe $c \in]a.b[$ tal que $f(c) = 0$.

$\square$

Exemplo: Considere a função

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 + \pi x + \sqrt{2} \end{array}.$$

Note-se que $p(0) = \sqrt{2} > 0$ e que $p(-1) = -1 - \pi + \sqrt{2} < 0$. Como a função p é contínua, pois é um polinómio, então a função $p_{|_{[-1,0]}}$ verifica todas as hipóteses do Corolário 3.23, logo existe $c \in] - 1, 0[$ tal que $p(c) = 0$.

Nem toda a função inversa de uma função contínua e bijectiva é contínua. Por exemplo, a função

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] \cup]2,3] & \longrightarrow & [0,2] \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, & 2 < x \leq 3 \end{cases} \end{array}.$$

é contínua e bijectiva, a sua função inversa

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [0,2] & \longrightarrow & [0,1] \cup]2,3] \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x+1, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \end{array}$$

não é contínua, porque f^{-1} não é contínua em 1.

Segue-se um conjunto de resultados que culminarão com um Teorema no qual se apresentam condições suficientes para que a inversa de uma função contínua seja também uma função contínua.

Teorema 3.24. *Sejam I um intervalo de números reais e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e injectiva.*

Então f é estritamente monótona.

Dem. Comece-se por observar que, sendo f uma função injectiva, então f é monótona se e só se é estritamente monótona.

Por absurdo, suponha-se que f não é estritamente monótona. Como consequência da definição, conclui-se que existem $a, b, c \in I$ tais que $a < b < c$ e um dos dois seguintes casos acontece:

1. $f(a) < f(c)$ e $f(b) \notin [f(a), f(c)]$;
2. $f(a) > f(c)$ e $f(b) \notin [f(c), f(a)]$.

Suponha-se que acontece 1.

- Se $f(b) < f(a) < f(c)$, então pelo Teorema de Weierstrass (Teorema 3.20) aplicado à função $f_{|[b,c]}$ conclui-se que existe $x \in]b, c[$ tal que $f(x) = f(a)$.

  Como $x \neq a$, porque $a \notin]b, c[$, e $f(x) = f(a)$, então f não é injectiva, o que contradiz a hipótese.

- Se $f(a) < f(c) < f(b)$, então novamente pelo Teorema de Weierstrass (Teorema 3.20) aplicado à função $f_{|[a,b]}$ conclui-se que existe $y \in]a, b[$ tal que $f(y) = f(c)$.

  Como $y \neq c$, porque $c \notin]a, b[$, e $f(y) = f(c)$, então f não é injectiva, o que contradiz a hipótese.

Conclui-se então que a situação 1. não pode ocorrer. De forma análoga também se conclui que a situação 2. não pode ocorrer, obtendo-se assim que a função f é estritamente monótona. $\square$

Proposição 3.25. *Sejam I um intervalo de números reais e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função monótona.*

Se $f(I)$ é um intervalo, então f é contínua.

Dem. Suponha-se que f é uma função monótona crescente (no caso em que a função é monótona decrescente, a prova é análoga).

Seja $x_0 \in I$.

Sendo f crescente tem-se, para quaisquer $a, b \in I$ tais que $a \leq x_0 \leq b$,

$$f(a) \leq f(x_0) \leq f(b).$$

Ainda por f ser crescente, os limites laterias de f em x_0 existem, pelo que se conclui que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Note que, caso $x_0 = \sup I$, então só existe o limite lateral à esquerda, e caso $x_0 = \inf I$, então só existe o limite lateral à direita.

Para concluir a continuidade de f em x_0 falta verificar que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Suponha-se que $x_0 \neq \inf I$ e $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) < f(x_0)$. Então existe $\alpha > 0$ tal que

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) - \alpha < f(x_0),$$

donde, uma vez que f é crescente, tem-se $]f(x_0) - \alpha, f(x_0)[\cap f(I) = \emptyset$, o que é absurdo, porque $f(I)$ é um intervalo. Consequentemente, se $x_0 \neq \inf I$, então

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0). \tag{3.35}$$

Analogamente, se $x_0 \neq \sup I$, obtém-se

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0). \tag{3.36}$$

Por (3.35) e por (3.36) conclui-se que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

ou seja, f é contínua em x_0.

Sendo x_0 arbitrário em I, tem-se então que f é contínua. □

Teorema 3.26. *Sejam I e J intervalos de números reais e $f : I \to J$ uma função bijectiva e contínua.*

Então $f^{-1} : J \to I$ é uma função contínua.

Dem. Sendo f uma função contínua e injectiva, pelo Teorema 3.24 tem-se que f é uma função estritamente monótona. Uma vez que f é bijectiva e estritamente monótona, pela Proposição 3.1 obtém-se que a função inversa $f^{-1} : J \to I$ é estritamente monótona com $f^{-1}(J) = I$.

Finalmente, sendo f^{-1} uma função monótona em que o contradomínio é um intervalo de números reais, pela Proposição 3.25 conclui-se que f^{-1} é uma função contínua. □

Exercício 3.8.

1. *Mostre, por definição, que:*

   (a) *toda a função real de variável real constante é contínua;*

   (b) *a função identidade,* $\begin{array}{rccc} id: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \end{array}$, *é contínua;*

   (c) *a função* $\begin{array}{rccc} f: &]-\infty, 2[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x-2} \end{array}$ *é contínua em* $x = 1$*;*

(d) *a função* $\begin{array}{rccc} g: &]-2,3[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{x-1}{(x+2)(x-3)} \end{array}$ *é contínua em* $x=1$*;*

(e) *a função* $\begin{array}{rccc} r: & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ *é contínua.*

2. *Determine os valores de* a *e* b *para que a função* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, definida por*

$$f(x)=\begin{cases} 5 & \text{se } x<-1 \\ ax+b & \text{se } -1\leq x\leq 1 \\ x^2 & \text{se } x>1 \end{cases},$$

seja contínua.

3. *Estude a continuidade, em todos os pontos do domínio, de cada uma das funções que se segue:*

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por* $f(x)=[x]$*, onde* $[\cdot]$ *representa a característica de* x*;*

(b) $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ *definida por* $g(x)=\dfrac{1}{x}$*;*

(c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por* $h(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x<0 \\ x & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$;

(d) $l:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por* $l(x)=\sqrt{|x|^3+x^2+1}$*;*

(e) $m:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ *definida por* $m(x)=\frac{|x|}{x}$*;*

(f) $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por* $z(x)=\begin{cases} x & \text{se } x \text{ é racional} \\ x^2 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$.

4. *Sejam* $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *duas funções contínuas.*

Mostre que a função $\max(f,g):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, definida por* $\max(f,g)(x)=\max\{f(x),g(x)\}$*, é contínua.*

O que pode dizer sobre a continuidade da função $\min(f,g):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, definida por* $\min(f,g)(x)=\min\{f(x),g(x)\}$*? Justifique.*

5. *Apresente um exemplo, ou justifique que não existe, de uma função real de variável real* f *tal que:*

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é contínua em 0, mas* $|f|$ *é descontínua em 0;*

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *descontínua em 0, mas* $|f|$ *é contínua em 0;*

(c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, é contínua em 1 e descontínua em todos os pontos de* $\mathbb{R}\setminus\{1\}$*;*

(d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é contínua apenas nos pontos de* $\mathbb{Z}$*;*

(e) $f : [0,1] \to [0,1]$ *é contínua tal que* $f(x) \neq x$ *para todo* $x \in [0,1]$;

(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é descontínua e a função* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por* $g(x) = f(|x|)$, *é contínua;*

(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua e a função* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por* $g(x) = f(|x|)$, *é descontínua;*

(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua, mas não é uniformemente contínua;*

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uniformemente contínua, mas não é contínua;*

(j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua, limitada, mas não é uniformemente contínua;*

(k) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *é contínua, mas não é limitada;*

(l) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *é limitada, mas não é contínua;*

(m) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é descontínua, mas* $f_{|]-\infty,0[}$ *e* $f_{|[0,+\infty[}$ *são ambas uniformemente contínuas.*

6. *Dê exemplos de funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *em que o conjunto de pontos onde* f *é contínua é:*

   (a) $[0,1]$;

   (b) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

   (c) $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$.

7. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua não constante tal que:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

   (a) *Mostre que* $f(x) \neq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$;

   (b) *Calcule* $f(0)$;

   (c) *Mostre que* $f(1) > 0$;

   (d) *Calcule* $f(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, *em função de* $f(1)$.

8. *Prove, por definição, que:*

   (a) *a função* $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = \frac{1}{x+1}$, *é uniformemente contínua;*

   (b) *a função* $g : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$, *definida por* $g(x) = \frac{1}{x}$, *é uniformemente contínua;*

   (c) *a função* $h :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, *definida por* $h(x) = \frac{1}{x}$, *não é uniformemente contínua;*

9. *Considere as funções* $f, g : X \to \mathbb{R}$, *com* $X \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio.*

(a) *Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, a função $(\lambda.f)$ é uniformemente contínua? Justifique a sua resposta.*

(b) *A função $(f+g)$ é uniformemente contínua? Justifique a sua resposta.*

(c) *A função $(f \cdot g)$ é uniformemente contínua? Justifique a sua resposta.*

10. *Estude a continuidade uniforme de cada uma das seguintes funções:*

(a) *A função identidade em $\mathbb{R}$, ou seja $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $id(x) = x$;*

(b) *$f : [0,3] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$;*

(c) *$g :]1,2] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{x-1}$;*

(d) *$h :]0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$;*

(e) *$l :]0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $l(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.*

11. *Considere a função*

$$\begin{array}{rccl} h: & [-1,1]\cap\mathbb{Q} & \to & \mathbb{R} \\ & q & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 7q+2, & q<0 \\ A+\cos q, & q\geq 0 \end{array} \right. , \end{array}$$

sendo A um parâmetro real.

(a) *Determine o valor de A por forma a que a função h seja cotínua;*

(b) *Considerando o valor de A obtido na alínea anterior, justifique que h é uniformemente contínua.*

12. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e f e g funções contínuas em $[a,b]$ tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Mostre que existe $x \in]a,b[$ tais que $f(x) = g(x)$.*

13. *Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^5 + 3x^2 - 3x + 1$, possui uma raíz.*

14. *Localize, em intervalos de amplitude máxima de uma unidade, os zeros do seguinte polinómio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por*

$$p(x) = 3x^3 - 7x^2 - 5x + 6.$$

15. *Apresente um exemplo, ou justifique que não existe, de:*

(a) *Uma função $f : X \to Y$ real de variável real contínua, bijectiva tal que a função inversa $f^{-1} : Y \to X$ é descontínua;*

(b) *Uma função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua e invertível;*

(c) *Uma função* $f : X \to Y$ *real de variável real contínua, injectiva e não monótona;*

(d) *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua tal que* $f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$*;*

(e) *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *não sobrejectiva tal que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$*;*

(f) *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua, sobrejectiva tal que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$*;*

(g) *Uma função* $f : [a, b] \to [a, b]$*, com* $a, b \in \mathbb{R}$ *(*$a < b$*), contínua tal que*

$$f(x) \neq x, \qquad \forall x \in [a, b].$$

16. *Seja* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $f(0) \cdot f(1) < 0$.

Mostre que

$$\min_{x\in[0,1]} \left\{(f(x))^2 : x \in [0, 1]\right\} = 0.$$

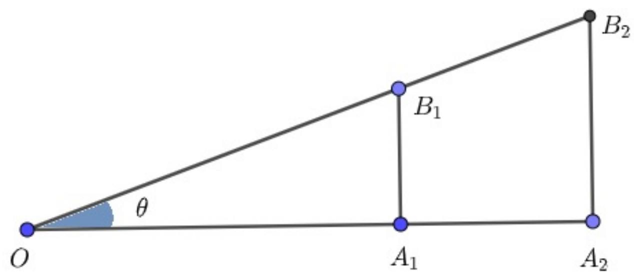
3.6 Funções Trigonométricas

Nesta secção apresentam-se as funções trigonométricas e as funções trigonométricas inversas. Para o fazer será necessário usar alguns resultados da geometria plana cujas provas saem fora do programa desta Unidade Curricular.

3.6.1 Funções trigonométricas

Considere os triângulos rectângulos, $\triangle OA_1B_1$ e $\triangle OA_2B_2$ apresentados no figura 3.3.

Figura 3.3: Triângulos rectângulos semelhantes



Uma vez que os triângulos $\triangle OA_1B_1$ e $\triangle OA_2B_2$ têm os ângulos $\angle OB_1A_1$ e $\angle OB_2A_2$ congruentes (com a mesma medida), o ângulo de medida $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ e o ângulo recto, conclui-se que $\triangle OA_1B_1$ e $\triangle OA_2B_2$ são triângulos semelhantes. Consequentemente, ângulos correspondentes têm a mesma medida e lados correspondentes são proporcionais, donde

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}}, \tag{3.37}$$

onde $\overline{XY}$ represente o comprimento de um segmento de recta $[XY]$. Por (3.37) obtêm-se as razões

- $\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}$;
- $\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}$;
- $\frac{\overline{OB_2}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{A_1B_1}}$;
- $\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}}$;
- $\frac{\overline{OA_2}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{A_1B_1}}$;
- $\frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}$.

que, por dependerem apenas do ângulo θ e não dos triângulos rectângulos $\triangle OA_1B_1$ e $\triangle OA_2B_2$ considerados, se designam por *razões trigonométricas*.

Definição 3.19. *Seja* $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. *Define-se* <u>*seno de* θ</u>*, denotando-se por* $\mathrm{sen}(\theta)$*, como sendo a razão* $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}$*;*

2. *Define-se* <u>*cosseno de* θ</u>*, denotando-se por* $\cos(\theta)$*, como sendo a razão* $\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}}$*;*

3. *Define-se* <u>*tangente de* θ</u>*, denotando-se por* $tg(\theta)$*, como sendo a razão* $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}$*;*

4. *Define-se* <u>*cotangente de* θ</u>*, denotando-se por* $cotg(\theta)$*, como sendo a razão* $\frac{\overline{OA_1}}{\overline{A_1B_1}}$*;*

5. *Define-se* <u>*secante de* θ</u>*, denotando-se por* $\sec(\theta)$*, como sendo a razão* $\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}$*;*

6. *Define-se* <u>*cossecante de* θ</u>*, denotando-se por* $cosec(\theta)$*, como sendo a razão* $\frac{\overline{OB_1}}{\overline{A_1B_1}}$*.*

Uma vez que as razões trigonométricas não dependem do triângulo rectângulo, mas apenas do ângulo, por simplicidade de cálculo, pode-se considerar sempre um triângulo rectângulo onde a hipotenusa tem comprimentos igual à unidade.

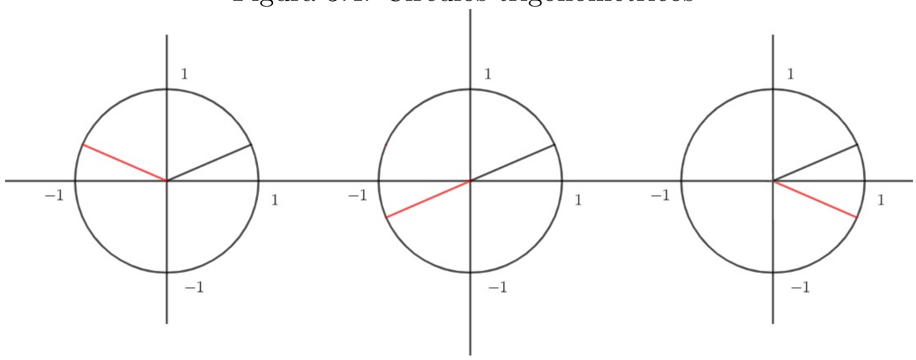
Exercício 3.9. *Seja* $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. *Mostre que* $\operatorname{sen}(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

2. *Existe uma relação análoga para as restantes razões trigonométricas? Justifique a resposta.*

Para $\theta \notin \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ já não é possível (em geometria euclidiana) construir um triângulo rectângulo onde θ é a medida de um ângulo que não o recto. No entanto é possível definir funções (e não razões) trigonométricas por forma a estender as propriedades verificadas para $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a outros números reais θ.

Figura 3.4: Círculos trigonométricos



Definição 3.20. *Define-se:*

1. $\operatorname{sen}(0) = 0$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\cos(0) = 1$ *e* $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$*;*

2. $\operatorname{sen}(\theta) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi - \theta), & \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ -\operatorname{sen}(\theta - \pi), & \theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \\ -\operatorname{sen}(2\pi - \theta), & \theta \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \end{cases}$; $\cos(\theta) = \begin{cases} -\cos(\pi - \theta), & \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ -\cos(\theta - \pi), & \theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \\ \cos(2\pi - \theta), & \theta \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \end{cases}$;

3. $\operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}(\varphi)$, *onde* $\theta = (\varphi + 2k\pi) \in \mathbb{R} \setminus [0, 2\pi]$ *com* $\varphi \in [0, 2\pi]$ *e* $k \in \mathbb{Z}$;

4. $\cos(\theta) = \cos(\varphi)$, *onde* $\theta = (\varphi + 2k\pi) \in \mathbb{R} \setminus [0, 2\pi]$ *com* $\varphi \in [0, 2\pi]$ *e* $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 3.10. *Seja* $x \in \mathbb{R}$. *Mostre que:*

1. $\operatorname{sen}(x) \in [-1, 1]$;

2. $\cos(x) \in [-1, 1]$;

3. $(\operatorname{sen}(x) + \cos(x)) \in]-2, 2[$.

Da Definição 3.19 e 3.20 é possível definir todas as seis funções trigonométricas:

Seno

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{sen}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{sen} x \end{array}$$

Cosseno

$$\begin{array}{rccl} \cos: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos x \end{array}$$

Tangente

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{tg}: & \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \end{array}$$

Cotangente

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{cotg}: & \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \end{array}$$

Secante

$$\begin{array}{rccl} \sec: & \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \end{array}$$

Cossecante

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{cosec}: & \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \end{array}$$

Segue-se uma lista com propriedades relevantes verificadas pelas funções trigonométricas.

Proposição 3.27. *Para qualquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:*

1. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$;
2. $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$, *para* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$;
3. $\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x = 1$, *para* $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;
4. $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$; *(o seno é uma função ímpar)*
5. $\cos(-x) = \cos(x)$; *(o cosseno é uma função par)*
6. $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x)$;
7. $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$;
8. $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x)$ *(a função seno é periódica de período* 2π*)*;
9. $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ *(a função cosseno é periódica de período* 2π*)*;
10. $\cos(x) - \cos(y) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)$;
11. $\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Dem. As propriedades de 1. a 5., 8. e 9. são de verificação elementar (na prova da propriedade 1. faz-se uso do Teorema de Pitágoras), pelo que são deixadas ao estudante como exercício. Após aprova da propriedade 6., a prova da propriedade 7. faz-se recorrendo a 6., pelo que é igualmente deixado ao cuidado do estudante.

6. Para $x, z \in \mathbb{R}$, das propriedades anteriores tem-se

$$\begin{aligned}&\big(\cos(x+z) = \cos(x)\cos(z) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(x)\big)\\ &\quad\Leftrightarrow \big(\cos(x-(-z)) = \cos(x)\cos(-z) + \operatorname{sen}(-z)\operatorname{sen}(x)\big),\end{aligned} \tag{3.38}$$

ou seja (fazendo $y = -z$), é necessário e suficiente provar que

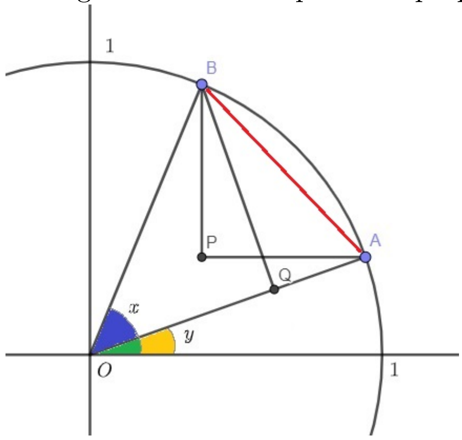
$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.39}$$

Aqui apresenta-se apenas a prova de (3.39) para $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, pois a prova para $x \in \mathbb{R} \setminus \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ou $y \in \mathbb{R} \setminus \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ segue directamente da Definição 3.20.

Sejam $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Sem perda de generalidade, assuma-se que $x > y$. Note que a situação $x = y$ corresponde ao ponto 1..

Considere a Figura 3.5, onde $\angle BPA$ e $\angle BQA$ são rectos.

Figura 3.5: Imagem de auxílio à prova da propriedade 6.



Uma vez que o raio da circunferência é igual a 1, da definição do seno e do cosseno conclui-se que

$$\overline{PA} = \cos y - \cos x \quad \text{e} \quad \overline{PB} = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y.$$

Por aplicação do Teorema de Pitágoras ao $\triangle PAB$ e ao $\triangle QAB$ obtém-se

$$\begin{cases} \overline{AB}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = (\cos y - \cos x)^2 + (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)^2 \\ \\ \overline{AB}^2 = \overline{QA}^2 + \overline{QB}^2 = (1 - \cos(x-y))^2 + \operatorname{sen}^2(x-y) \end{cases}$$

Consequentemente,

$$(\cos y - \cos x)^2 + (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)^2 = (1 - \cos(x-y))^2 + \operatorname{sen}^2(x-y),$$

ou seja

$$\begin{aligned} & \cos^2 y + \cos^2 x - 2\cos y \cos x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y - 2\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ = \; & 1 + \cos^2(x-y) - 2\cos(x-y) + \operatorname{sen}^2(x-y), \end{aligned}$$

donde

$$-2\cos y \cos x + 2 - 2\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 2 - 2\cos(x-y)$$

e finalmente

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

10. Pelo ponto 6. tem-se, para todo $z, w \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w \\ \\ \cos(z-w) = \cos z \cos w + \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w \end{cases},$$

donde

$$\cos(z+w)-\cos(z-w) = -2\mathrm{sen}\, z\,\mathrm{sen}\, w.$$

Fazendo $x = z+w$ e $y = z-w$, tem-se

$$\left\{\begin{array}{l} x = z+w \\ y = z-w \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y+2w \\ z = y+w \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} w = \frac{x-y}{2} \\ z = \frac{x+y}{2} \end{array}\right.$$

donde

$$\cos(x)-\cos(y) = -2\mathrm{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

11. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$.

Pela completude do conjunto dos números reais, existem $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi]$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $x = \varphi_1 + 2k_1\pi$ e $y = \varphi_2 + 2k_2\pi$, donde, pelo ponto 3. da Definição 3.20 tem-se

$$\mathrm{sen}\,(x) = \mathrm{sen}\,(\varphi_1) \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,(y) = \mathrm{sen}\,(\varphi_2). \tag{3.40}$$

Consequentemente, pela propriedade apresentada no Exercício 3.9 e pelo ponto 2. da Definição 3.20 obtém-se

$$\mathrm{sen}\,(\varphi_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x+2k_1\pi\right)$$
$$\text{e} \quad \mathrm{sen}\,(y) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-y+2k_2\pi\right). \tag{3.41}$$

Das igualdades (3.40) e (3.41), e de a função seno ser periódica de período 2π (ponto 8.), conclui-se que

$$\mathrm{sen}\,(x)-\mathrm{sen}\,(y) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$$

Finalmente, pelo ponto 10. e por o seno ser uma função ímpar (ponto 4.), obtém-se

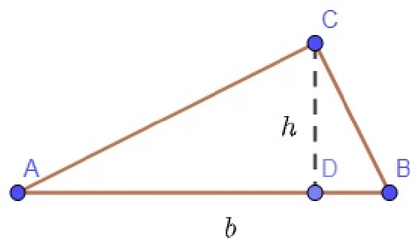
$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}\,(x)-\mathrm{sen}\,(y) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-y\right) \\
&= -2\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{2}-y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x-\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{2}\right) \\
&= -2\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(-\frac{x-y}{2}\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right).
\end{aligned}$$

□

Para demonstrar a proposição que se segue, mais uma vez, faz-se uso de resultados da geometria. Desta vez, os resultados são relativos a áreas de figuras geométricas planas. A saber:

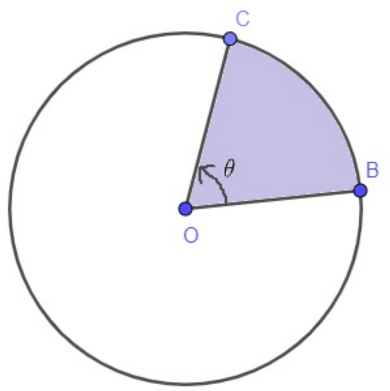
1. Área de um $\triangle ABC$:
$$\frac{b \times h}{2},$$
onde $b = \overline{AB}$ é o comprimento da base e $h = \overline{CD}$ é a altura do triângulo (ver figura 3.6);

Figura 3.6: Área triângulo



2. Área de uma secção de um círculo:
$$\frac{\theta}{2} r^2,$$
onde $\theta \in [0, 2\pi]$ é a medida do ângulo ao centro que define a secção do círculo e r é o raio da circunferência que define o círculo (ver Figura 3.7).

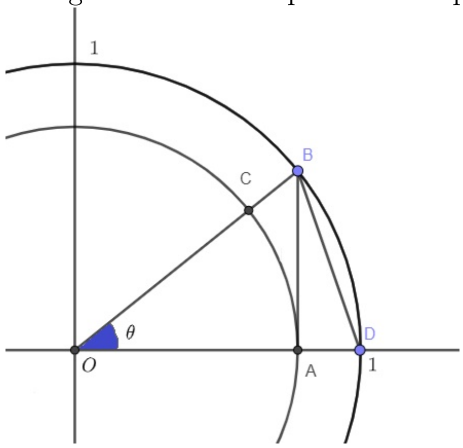
Figura 3.7: Secção de um círculo



Proposição 3.28. *Tem-se*

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta}=1.$$

Figura 3.8: Imagem de auxílio à prova da Proposição 3.28



Dem. Seja $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. (Observe a Figura 3.8)

Das propriedades de áreas de figuras geométrica planas, tem-se que a área da secção de círculo definida pelos pontos OAC é menor do que a área do $\triangle OAB$, sendo esta menor do que a área do $\triangle ODB$ que é menor do que a secção de círculo definida pelos pontos ODB. Assim sendo, obtêm-se as desigualdades

$$\frac{\theta}{2}\cos^2(\theta) < \frac{\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)}{2} < \frac{1\cdot\operatorname{sen}(\theta)}{2} < \frac{\theta}{2}. \tag{3.42}$$

Da primeira desigualdade em (3.42), obtém-se

$$\cos(\theta) < \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta},$$

e da terceira desigualdade em (3.42), obtém-se

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} < 1. \tag{3.43}$$

Consequentemente,

$$\cos(\theta) < \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} < 1, \quad \forall\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,$$

dado que θ é arbitrário em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Assim, pelo Teorema 3.6, tem-se que

$$\lim_{\theta\to 0^+}\cos(\theta) \leq \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} \leq \lim_{\theta\to 0^+} 1,$$

donde se conclui que

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} = 1. \tag{3.44}$$

Sendo o seno uma função ímpar, conclui-se ainda que

$$\lim_{\theta \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0^-} \frac{-\operatorname{sen}(\theta)}{-\theta} = \lim_{\theta \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{-\theta} = \lim_{\varphi \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(\varphi)}{\varphi} = 1. \tag{3.45}$$

Por (3.44) e por (3.45), obtém-se

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

□

Baseado na prova acabada de apresentar surge o seguinte resultado.

Proposição 3.29. *Tem-se*

$$|\operatorname{sen}(x)| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dem. Na prova da proposição anterior demonstrou-se que, ver (3.43),

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(x) < x, \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

donde

$$-\operatorname{sen}(x) > -x \Rightarrow \operatorname{sen}(-x) > -x \Rightarrow \operatorname{sen}(y) > y, \quad \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[.$$

Assim sendo

$$|\operatorname{sen}(x)| \leq |x|, \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

donde se conclui que (atenda ao Exercício 3.10)

$$|\operatorname{sen}(x)| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Teorema 3.30. *Todas as funções trigonométricas são contínuas.*
Mais, as funções seno e cosseno são uniformemente contínuas.

Dem. Recordando a Proposição 3.14, mais concretamente que o quociente entre duas funções contínuas, existindo, é uma função contínua, e atendendo às definições das funções trigonométricas, é suficiente provar que o seno e o cosseno são funções contínuas.

De facto, verifica-se que quer o seno quer o cosseno são funções uniformemente contínuas.

Prove-se, por definição, que o seno é uma função uniformemente contínua.

Seja $\varepsilon > 0$.

Escolha-se $\delta = \varepsilon$.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $|x - y| < \delta$. Tem-se, pelo ponto 11. da Proposição 3.27 e pela Proposição 3.29, que

$$\begin{aligned} |\text{sen}\,(x) - \text{sen}\,(y)| &= \left|2\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \\ &= 2\left|\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \cdot \left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \\ &\leq 2\left|\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x-y| < \delta = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que prova que a função seno é uniformemente contínua.

De forma análoga se prova que a função cosseno é também uniformemente contínua e conclui-se a prova. □

Exercício 3.11. *Mostre que a função cosseno é uma função uniformemente contínua.*

3.6.2 Funções trigonométricas inversas

Nenhuma das funções trigonométricas é bijectiva, logo nenhuma tem função inversa.

Contudo, considerando subconjuntos convenientes, quer do domínio quer do conjunto de chegada, em cada uma das funções trigonométricas é possível construir funções bijectivas e assim definir as chamadas "funções trigonométricas inversas".

Definem-se as funções:

Arco-seno :

Sendo a função

$$\begin{array}{rrcl} : & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & \text{sen}\, x \end{array} \tag{3.46}$$

bijectiva, a sua inversa chama-se <u>arco-seno</u>, isto é:

$$\begin{array}{rrcl} \text{arcsen}: & [-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \mapsto & \text{sen}^{-1} x \end{array} .$$

Arco-cosseno :

Sendo a função

$$\begin{array}{rccc} : & [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & \cos x \end{array}$$

bijectiva, a sua inversa chama-se arco-cosseno, isto é:

$$\begin{array}{rccc} \arccos : & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & x & \mapsto & \cos^{-1} x \end{array}.$$

Arco-tangente :

Sendo a função

$$\begin{array}{rccc} : & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{tg} x \end{array}$$

bijectiva, a sua inversa chama-se arco-tangente, isto é:

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arctg} : & \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \mapsto & \operatorname{tg}^{-1} x \end{array}.$$

Arco-cotangente :

Sendo a função

$$\begin{array}{rccc} : &]0,\pi[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{cotg} x \end{array}$$

bijectiva, a sua inversa chama-se arco-cotangente, isto é:

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arccotg} : & \mathbb{R} & \to &]0,\pi[\\ & x & \mapsto & \operatorname{cotg}^{-1} x \end{array}.$$

Arco-secante :

Sendo a função

$$\begin{array}{rccc} : & \left[0,\frac{\pi}{2}\right[& \to & [1,+\infty[\\ & x & \mapsto & \sec x \end{array}$$

bijectiva, a sua inversa chama-se arco-secante, isto é:

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arcsec} : & [1,+\infty[& \to & \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \mapsto & \sec^{-1} x \end{array}.$$

Arco-cossecante :

Sendo a função

$$\begin{array}{rccc} : & \left]0,\frac{\pi}{2}\right] & \to & [1,+\infty[\\ & x & \mapsto & \operatorname{cosec} x \end{array}$$

bijectiva, a sua inversa chama-se arco-cossecante, isto é:

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arccosec} : & [1,+\infty[& \to & \left]0,\frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \mapsto & \operatorname{cosec}^{-1} x \end{array}.$$

Exercício 3.12.

1. *Mostre que todas as funções trigonométricas inversas são contínuas.*

2. *Determine o domínio e o contradomínio das seguintes funções:*

   (a) $f(x) = 1 + 2\cos x$;
   (b) $f(x) = \text{sen} x - 2$;
   (c) $f(x) = 1 + \text{tg} x$;
   (d) $f(x) = \text{arcsen}\left(\frac{3x+2}{x+1}\right)$;
   (e) $f(x) = \arccos\left(\frac{x-3x^2}{x^2+1}\right)$.

3. *Calcule:*

   (a) $\text{sen}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$;
   (b) $\text{sen}(\text{arctg} 1)$;
   (c) $\arccos\left(\text{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$;
   (d) $\cos\left(\text{arctg}\sqrt{3}\right)$;
   (e) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
   (f) $\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{3}\right)$;
   (g) $\text{sen}(\arccos\frac{1}{3})$.

4. *Mostre que a função arco-seno é uma função ímpar.*

5. *A função arco-cosseno é uma função par? Porquê?*

6. *Resolva cada uma das seguintes equações:*

   (a) $\text{sen}(x+1) = -\frac{1}{2}$;
   (b) $\sec(3x) = \sqrt{2}$;
   (c) $\text{arcsen}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) + \text{arcsen}(-2x) = 0$;
   (d) $\text{tg}(\arccos x) = \text{tg}(\text{arcsen} x)$;
   (e) $2\text{sen}(2x) = -\sqrt{3}$.

7. *Mostre que a equação*

$$\text{sen}^3(x) + \cos^3(x) = 0,$$

   possui pelo menos uma solução no intervalo $[-1, 1]$.

8. *Considere a função*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \text{sen}(x) + \cos(x) \end{array}.$$

   (a) *Mostre que a função f possui máximo e mínimo.*
   (b) *Mostre que o máximo da função f pertence ao intervalo* $]1, 2[$.

9. *Mostre que a função*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos(x^2) \end{array}$$

não é uniformemente contínua.

10. *Mostre que*

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = 2$;

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

3.7 Função exponencial

É objectivo desta secção definir e apresentar as propriedades base da função exponencial, da função logarítmica, das funções hiperbólicas e das funções hiperbólicas inversas.

3.7.1 Função exponencial

Recordando a notação estabelecida em (1.1), tem-se

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{n \text{ vezes}},$$

para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mediante o estudo realizado na Secção 1.3, está definido o número real a^r, onde $a \in \mathbb{R}^+$ e $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Concretizando, o número racional r pode ser escrito no forma $r = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $q \in \mathbb{N}$, tendo-se, caso $p \in \mathbb{N}$,

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p, \tag{3.47}$$

onde $a^{\frac{1}{q}}$ é o único número real $x > 0$ tal que $x^q = a$ (recordar a Definição 1.19). Caso $-p \in \mathbb{N}$, tem-se

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = a^{-\frac{-p}{q}} = \left(a^{\frac{-p}{q}}\right)^{-1}. \tag{3.48}$$

A questão que se coloca neste momento é:

Como definir a^x, com $x \in \mathbb{R}$?

Na situação em que $x = 0$, define-se simplesmente por

$$a^0 = 1.$$

Para se definir a^x, onde x é um número irracional, é necessário realizar o estudo prévio que se segue.

De tudo o que foi escrito até aqui, para cada $a \in \mathbb{R}^+$ é possível definir a função

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{E}_a : & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{R} \\ & r & \mapsto & a^r \end{array}. \tag{3.49}$$

Seguem-se algumas propriedades das funções $\mathcal{E}_a$.

Proposição 3.31. *Seja $a \in \mathbb{R}^+$. Tem-se*

1. $a^r > 0$, $\forall r \in \mathbb{Q}$;
2. $a^{r+s} = a^r a^s$, $\forall r, s \in \mathbb{Q}$;
3. $\left(a^r\right)^s = a^{rs}$, $\forall r, s \in \mathbb{Q}$;
4. *Se $a > 1$, então $\mathcal{E}_a$ é uma função estritamente crescente;*
5. *Se $a < 1$, então $\mathcal{E}_a$ é uma função estritamente decrescente;*
6. *Se $a = 1$, então $\mathcal{E}_a(r) = 1$, $\forall r \in \mathbb{Q}$.*

Dem. Proposta de exercício. □

É objectivo estender, de forma contínua, as funções $\mathcal{E}_a$ ao domínio $\mathbb{R}$. Desta forma ficará definido a^x, para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Para isso é necessário provar que são contínuas as funções $\mathcal{E}_a$.

Lema 3.32. *Para cada $a \in \mathbb{R}^+$ tem-se*

$$\lim_{\substack{r \to 0 \\ (r \in \mathbb{Q})}} a^r = 1.$$

Dem. A situação em que $a = 1$ é trivial.

Suponha-se que $a > 1$. Consequentemente a função $\mathcal{E}_a$ é crescente, donde se conclui que existem os limites laterais (recorde um exercício na Secção 3.2)

$$\lim_{\substack{r \to 0^+ \\ (r \in \mathbb{Q})}} a^r \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{r \to 0^- \\ (r \in \mathbb{Q})}} a^r.$$

Por um lado, como existe $\lim_{\substack{r \to 0^+ \\ (r \in \mathbb{Q})}} a^r$, então

$$\lim_{\substack{r \to 0^+ \\ (r \in \mathbb{Q})}} a^r = \lim_n a^{\frac{1}{n}} = \lim_n \sqrt[n]{a} = 1. \tag{3.50}$$

Por outro lado, como existe $\lim\limits_{\substack{r\to 0^- \\ (r\in\mathbb{Q})}} a^r$, então

$$\lim_{\substack{r\to 0^- \\ (r\in\mathbb{Q})}} a^r = \lim_n a^{-\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1. \tag{3.51}$$

Finalmente, por (3.50) e por (3.51), conclui-se que

$$\lim_{\substack{r\to 0 \\ (r\in\mathbb{Q})}} a^r = 1.$$

Na situação em que $0 < a < 1$, a função $\mathcal{E}_a$ é decrescente, donde a conclusão obtém-se por um raciocínio análogo. □

Teorema 3.33. *Para cada $a \in \mathbb{R}^+$ a função $\mathcal{E}_a$ é contínua.*

Dem. Seja $a \in \mathbb{R}^+$.

Fixe-se arbitrariamente $r_0 \in \mathbb{Q}$. A função $\mathcal{E}_a$ é contínua em r_0 se e só se

$$\lim_{\substack{r\to r_0 \\ (r\in\mathbb{Q})}} a^r = a^{r_0}.$$

Como consequência do Lema 3.32 tem-se

$$\lim_{\substack{r\to r_0 \\ (r\in\mathbb{Q})}} (a^r - a^{r_0}) = a^{r_0} \lim_{\substack{r\to r_0 \\ (r\in\mathbb{Q})}} \left(a^{r-r_0} - 1\right) = a^{r_0}(1-1) = 0,$$

donde se obtém que $\mathcal{E}_a$ é contínua em r_0. Sendo r_0 arbitrário do domínio, conclui-se que cada função $\mathcal{E}_a$ é contínua. □

Teorema 3.34. *Para cada $a \in \mathbb{R}^+$, existe*

$$\lim_{\substack{r\to x \\ (r\in\mathbb{Q})}} a^r, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dem. Seja $a \in \mathbb{R}^+$.

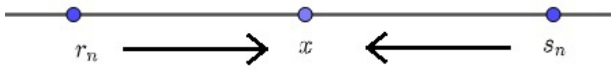
No caso em que $a = 1$, é trivial.

Suponha-se que $a > 1$ (no caso em que $0 < a < 1$, a prova segue de forma análoga). Sendo $\mathcal{E}_a$ estritamente crescente, tem-se que existem os seguintes limites:

$$\lim_{\substack{r\to x^+ \\ (r\in\mathbb{Q})}} a^r \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{r\to x^- \\ (r\in\mathbb{Q})}} a^r. \tag{3.52}$$

Uma vez que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, ou seja, todo o número real é ponto de acumulação do conjunto $\mathbb{Q}$, então existem sucessões $(r_n)_n$ e $(s_n)_n$ em $\mathbb{Q}$ tais que

Figura 3.9: Imagem da auxílio à prova do Teorema 3.34



1. $(r_n)_n$ é estritamente crescente e $\lim\limits_n r_n = x$;
2. $(s_n)_n$ é estritamente decrescente e $\lim\limits_n s_n = x$.

Como existem os limites em (3.52), então

$$\lim_{\substack{r \to x^+ \\ (r \in \mathbb{Q})}} a^r = \lim_n a^{s_n} \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{r \to x^- \\ (r \in \mathbb{Q})}} a^r = \lim_n a^{r_n},$$

donde é suficiente mostrar que

$$\lim_n a^{s_n} = \lim_n a^{r_n}$$

para concluir a prova.

Pela aritmética de limites de sucessões e da Proposição 3.31 tem-se

$$\lim_n a^{r_n} - \lim_n a^{s_n} = \lim_n \left(a^{r_n} - a^{s_n}\right) = \lim_n a^{s_n} \left(a^{r_n - s_n} - 1\right).$$

A sucessão $(a^{s_n})_n$ é limitada (porque é convergente) e $\lim_n(r_n - s_n) = 0$, logo, pelo Lema 3.32, tem-se $\lim\limits_n \left(a^{r_n - s_n} - 1\right) = 1 - 1 = 0$. Assim sendo, o Teorema 2.3 garante que

$$\lim_n a^{s_n} \left(a^{r_n - s_n} - 1\right) = 0,$$

donde se conclui que

$$\lim_n a^{s_n} = \lim_n a^{r_n},$$

o que conclui a prova. □

O Teorema 3.34 garante as condições para se definir a função exponencial, respondendo assim à questão colocada no início desta subsecção.

Definição 3.21 (Função exponencial)**.** *Seja $a \in \mathbb{R}^+$.*

Define-se função exponencial de base a como sendo a função

$$\begin{array}{rccl} Exp_a : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a^x = \begin{cases} \left(a^p\right)^{\frac{1}{p}}, & se\ x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ \\ \lim\limits_{\substack{r \to x \\ (r \in \mathbb{Q})}} a^r, & se\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}.$$

Observe que, para cada $a \in \mathbb{R}^+$, a função Exp_a é um prolongamento da função $\mathcal{E}_a$ e, pelo Teorema 3.33 e pela Definição 3.21, tem-se que Exp_a é uma função contínua.

Proposição 3.35. *Seja* $a \in \mathbb{R}^+$. *Tem-se*

1. $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

2. $a^{x+y} = a^x a^y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

3. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

4. *Se* $a > 1$, *então* Exp_a *é uma função estritamente crescente;*

5. *Se* $a < 1$, *então* Exp_a *é uma função estritamente decrescente;*

6. *Se* $a = 1$, *então* $Exp_a(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dem. A prova de cada um dos pontos desta proposição passa pela utilização da Proposição 3.31, da Definição 3.21 e das propriedades dos limites de funções reais de variável real. Como tal é deixada como exercício ao estudante. A título de exemplo, é aqui realizada a prova do ponto 2.

2. Pretende-se mostrar que

$$a^{x+y} = a^x a^y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Pela Proposição 3.31 a propriedade é válida para $x, y \in \mathbb{Q}$.

Assuma-se agora que $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pela Definição 3.21, pelo ponto 2 da Proposição 3.31 e pelas propriedades da aritmética de limites, tem-se

$$a^{x+y} = \lim_{\substack{r \to x+y \\ (r \in \mathbb{Q})}} a^r = \lim_{\substack{s \to y \\ (s \in \mathbb{Q})}} a^{x+s} = \lim_{\substack{s \to y \\ (s \in \mathbb{Q})}} \left(a^x a^s\right) = a^x \lim_{\substack{s \to y \\ (s \in \mathbb{Q})}} a^s = a^x a^y.$$

Finalmente considere-se $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pela Definição 3.21, pelas propriedades da aritmética de limites, pela continuidade da função Exp_a e pela situação acabada de demonstrar, tem-se

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^{x+\left(\lim_{\substack{r \to y \\ (r \in \mathbb{Q})}} r\right)} = a^{\left(\lim_{\substack{r \to y \\ (r \in \mathbb{Q})}} (x+r)\right)} = \lim_{\substack{r \to y \\ (r \in \mathbb{Q})}} a^{x+r} \\ &= \lim_{\substack{r \to y \\ (r \in \mathbb{Q})}} \left(a^x a^r\right) = a^x \lim_{\substack{r \to y \\ (r \in \mathbb{Q})}} a^r = a^x a^y. \end{aligned}$$

□

3.7.2 Função logarítmica

Para $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, a função

$$\begin{array}{rccc} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & a^x \end{array} \tag{3.53}$$

é bijectiva e contínua. Sendo bijectiva, então tem função inversa.

Definição 3.22 (Função logarítmica)**.** *Seja $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.*

Define-se logaritmo de base a como sendo a função inversa da função definida em (3.53)*, denotando-se por*

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}.$$

Como consequência da definição de função inversa, imediatamente se obtêm as seguintes propriedades.

Proposição 3.36. *Seja $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Tem-se:*

1. $\log_a(a^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
2. $a^{\log_a(y)} = y, \quad \forall y \in \mathbb{R}^+$.

Dem. Consequência imediata da Definição 3.22 e da Definição 1.7. □

Por notação, usualmente representa-se apenas por "log"a função logaritmo de base e (número de Neper).

Proposição 3.37. *Seja $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.*

Então a função $\log_a$ é uma função contínua.

Dem. Sendo Exp_a uma função contínua, então a função definida em (3.53) é contínua. Por definição, a função $\log_a$ é a inversa de uma função contínua em que quer o domínio quer o conjunto de chegada são intervalos. Consequentemente, pelo Teorema 3.26, conclui-se que $\log_a$ é uma função contínua. □

Como consequência das propriedades da função exponencial, obtêm-se as seguintes propriedades da função logarítmica.

Proposição 3.38. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Tem-se*

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$;
2. $\log_a(b^x) = x \log_a(b)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
3. $\log_a(x) = (\log_a(b)) \cdot (\log_b(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Dem. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

1. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$.

   Sendo a função definida em (3.53) bijectiva, então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ únicos tais que
   $$x = a^\alpha \quad \text{e} \quad y = a^\beta,$$
   donde, pela definição da função logarítmica, tem-se $\alpha = \log_a(x)$ e $\beta = \log_a(y)$. Assim, pela Proposição 3.35 e pela Proposição 3.36, tem-se
   $$\log_a(xy) = \log_a\left(a^\alpha \cdot a^\beta\right) = \log_a\left(a^{\alpha+\beta}\right) = \alpha + \beta = \log_a(x) + \log_a(y).$$

2. Seja $x \in \mathbb{R}$.

   Pela Proposição 3.36 e pela Proposição 3.35 tem-se
   $$b^x = \left(a^{\log_a(b)}\right)^x = a^{x \log_a(b)}.$$
   Sendo $\log_a$ uma função, então
   $$\log_a(b^x) = \log_a\left(a^{x \log_a(b)}\right)$$
   e pela Proposição 3.36 conclui-se que
   $$\log_a(b^x) = x \log_a(b).$$

3. Seja $x \in \mathbb{R}^+$.

   Pelo ponto anteriormente demonstrado e pela Proposição 3.36 tem-se
   $$(\log_a(b)) \cdot (\log_b(x)) = (\log_b(x)) \cdot (\log_a(b)) = \log_a\left(b^{\log_b(x)}\right) = \log_a(x).$$

□

3.7.3 Funções hiperbólicas

Definição 3.23. *Definem-se as funções que se seguem (chamadas de funções hiperbólicas):*

- *Chama-se seno hiperbólico à função*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{sh}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}.$$

- *Chama-se cosseno hiperbólico à função*

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{ch}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{e^x+e^{-x}}{2} \end{array}.$$

- *Chama-se tangente hiperbólica à função*

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{th}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \end{array}.$$

- *Chama-se cotangente hiperbólica à função*

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{coth}: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \end{array}.$$

- *Chama-se secante hiperbólica à função*

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{sech}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \end{array}.$$

- *Chama-se cossecante hiperbólica à função*

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{cosech}: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} \end{array}.$$

Segue-se uma lista com propriedades relevantes verificadas pelas funções hiperbólicas.

Proposição 3.39. *Para qualquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:*

1. $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$;
2. $\mathrm{th}^2 x + \mathrm{sech}^2 x = 1$;
3. $\coth^2 x - \mathrm{cosech}^2 x = 1$, *para* $x \neq 0$;
4. $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$;
5. $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)$; *(o seno hiperbólico é uma função ímpar)*
6. $\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)$; *(o cosseno hiperbólico é uma função par)*
7. $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(y)\mathrm{ch}(x)$;
8. $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(y)\mathrm{sh}(x)$.

Dem. Proposta de exercício a demonstração de cada uma das igualdades. □

Exercício 3.13. *Prove que a função seno hiperbólico é uma função bijectiva. Sugestão: Siga as seguintes etapas:*

1. *Mostre que* sh *é uma função estritamente crescente;*
2. *Calcule* $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh}(x)$ *e* $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh}(x)$*;*
3. *Conclua que* sh *é uma função bijectiva.*

3.7.4 Funções hiperbólicas inversas

O seno hiperbólico é uma função bijectiva, logo possui função inversa. Mais, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se (verifique)

$$\operatorname{sh} x = y \Leftrightarrow x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

Definição 3.24. *Chama-se* argumento do seno hiperbólico, *à função inversa do seno hiperbólico, ou seja à função*

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{argsh}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \end{array}.$$

A função cosseno hiperbólico não é bijectiva (verifique que ch não é injectiva nem sobrejectiva) e como tal não tem inversa. Contudo, a função

$$\begin{array}{rccl} : & [0,+\infty[& \to & [1,+\infty[\\ & x & \mapsto & \operatorname{ch} x \end{array} \tag{3.54}$$

é bijectiva (verifique) e como tal tem inversa.

Definição 3.25. *Define-se* argumento do cosseno hiperbólico *como sendo a função inversa da função definida em* (3.54)*, isto é*

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{argch}: & [1,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ & x & \mapsto & \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \end{array}.$$

A função tangente hiperbólica não é bijectiva, porque não é sobrejectiva, (verifique que th é injectiva e tem contradomínio $]-1,1[$), e como tal não tem inversa. Contudo, a função

$$\begin{array}{rccl} : & \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ & x & \mapsto & \operatorname{th} x \end{array} \tag{3.55}$$

é bijectiva e como tal tem inversa.

Definição 3.26. *Define-se* argumento da tangente hiperbólica *como sendo a função inversa da função definida em* (3.55)*, isto é*

$$\begin{array}{rrcl} \operatorname{argth}: &]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \end{array}.$$

A função cotangente hiperbólica não é bijectiva, porque não é sobrejectiva, (verifique que coth é injectiva e tem contradomínio $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$), e como tal não tem inversa. Contudo, a função

$$\begin{array}{rrcl} : & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R}\setminus[-1,1] \\ & x & \mapsto & \coth x \end{array} \tag{3.56}$$

é bijectiva e como tal tem inversa.

Definição 3.27. *Define-se* argumento da cotangente hiperbólica *como sendo a função inversa da função definida em* (3.56)*, isto é*

$$\begin{array}{rrcl} \operatorname{argcoth}: &]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[& \to & \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) \end{array}.$$

A função secante hiperbólica não é bijectiva, porque não é sobrejectiva nem injectiva, (verifique), e como tal não tem inversa. Contudo, a função

$$\begin{array}{rrcl} : & [0,+\infty[& \to &]0,1] \\ & x & \mapsto & \operatorname{sech} x \end{array} \tag{3.57}$$

é bijectiva e como tal tem inversa.

Definição 3.28. *Define-se* argumento da secante hiperbólica *como sendo a função inversa da função definida em* (3.57)*, isto é*

$$\begin{array}{rrcl} \operatorname{argsech}: &]0,1] & \to & [0,+\infty[\\ & x & \mapsto & \log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \end{array}.$$

A função cossecante hiperbólica não é bijectiva, porque não é sobrejectiva (verifique), e como tal não tem inversa. Contudo, a função

$$\begin{array}{rrcl} : & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ & x & \mapsto & \operatorname{cosech} x \end{array} \tag{3.58}$$

é bijectiva e como tal tem inversa.

Definição 3.29. *Define-se argumento da cossecante hiperbólica como sendo a função inversa da função definida em (3.58), isto é*

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{argcosech}: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ & x & \mapsto & \log\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) \end{array}.$$

Exercício 3.14. *Demonstre a regra de correspondência de cada uma das funções hiperbólicas inversas.*

Exercício 3.15. *Justifique que as funções hiperbólicas e as hiperbólicas inversas são funções contínuas.*

Exercício 3.16.

1. *Determine o domínio e o contradomínio das seguintes funções:*

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$;

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^x}$;

   (c) $f(x) = \operatorname{argch}\left(x+\frac{1}{x}\right)$;

   (d) $f(x) = \operatorname{th}(\operatorname{sen}(x))$;

   (e) $f(x) = \operatorname{argth}(\operatorname{sen}(x))$;

   (f) $f(x) = \operatorname{argcoth}(\cos x)$;

2. *Para cada uma das funções apresentadas no exercício anterior, identifique a sua paridade (caso exista).*

3. *Mostre que*

   (a) $\operatorname{th}(\log x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$;

   (b) $\dfrac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)} = \mathrm{e}^{2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. *Resolva cada uma das seguintes equações:*

   (a) $\log(x^2-1) + 2\log 2 = \log(4x-1)$;

   (b) $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{1-x}$;

   (c) $2^{x-3} = 6$;

   (d) $\log(x) + \log(x-1) = 1$;

   (e) $\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} = 0$;

   (f) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1+4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = 0$.

5. *Calcule:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}.$$

6. *Mostre que*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

7. *Sejam* $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Calcule
$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}.$$

8. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função definida por*
$$f(x) = \begin{cases} \alpha - \mathrm{th}(x), & se\ x < 0 \\ 2, & se\ x = 0 \\ \mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x) + \beta, & se\ x > 0 \end{cases},$$
   onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (a) *Determine* α *e* β *por forma a que* f *seja uma função contínua;*

   (b) *Calcule*
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\mathrm{e}^x} \quad e \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{\mathrm{e}^x}.$$

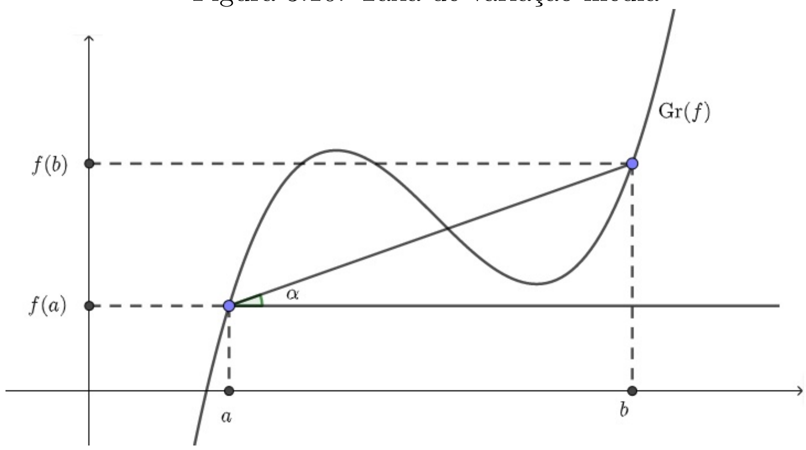
3.8 Derivadas

Definição 3.30. *Sejam $f : I \to Y$ uma função real de variável real, em que I é um intervalo, e $a, b \in I$ com $a < b$.*

Define-se taxa de variação média de f em $[a, b]$ como sendo o número real

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{3.59}$$

Figura 3.10: Taxa de variação média



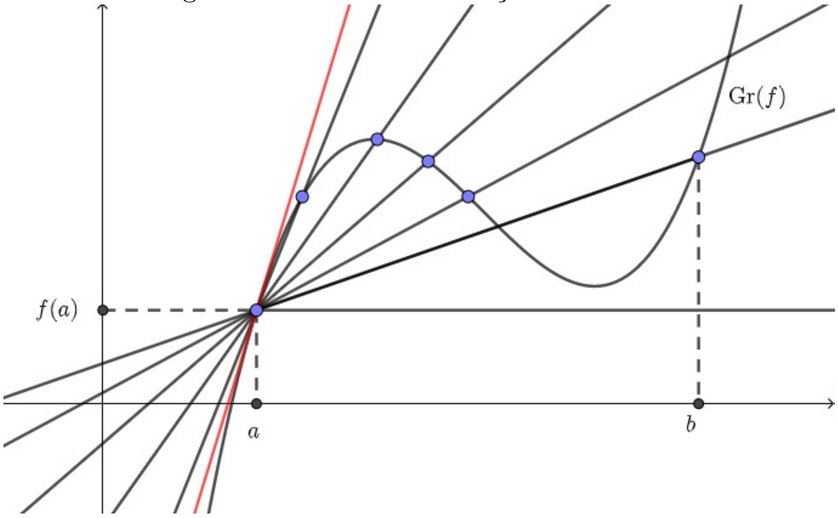
Entrando um pouco pela geometria analítica, e supondo, sem perda de generalidade, que $f(a) \leq f(b)$, tem-se que a taxa de variação média de f em $[a, b]$ não é mais do que o declive da recta que passa nos elementos de $Gr(f)$, $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Ou seja

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

sendo α a medida do ângulo formado pela semi-recta que contém o segmento de recta de extremos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, e pela semi-recta $\{(x, f(a)) : x \geq a\}$ (ver Figura 3.10).

Fazendo o b tender para a, a taxa de variação média transformar-se-á numa taxa de variação instantânea. (ver Figura 3.11). Ou seja, fazendo $b \to a$, o limite do declive das sucessivas rectas secantes será, caso exista, o declive da recta tangente (pintada a vermelho na Figura 3.11). Este declive da recta tangente corresponde à taxa de variação instantânea da função f no objecto a. É a esta taxa de variação instantânea que se chama derivada. Na definição que se segue formaliza-se a noção de derivada.

Figura 3.11: Taxa de variação instantânea



Definição 3.31. *Sejam $f : X \to Y$ uma função real de variável real e $a \in X \cap X'$.*

Diz-se que a função f é derivável em a se existe o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \tag{3.60}$$

Existindo o limite (3.60), *este chama-se derivada de f em a, denotando-se por*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Observe-se que, fazendo a mudança de variável $x = a + h$, o limite (3.60) assume a forma

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \tag{3.61}$$

A análise geométrica prévia à introdução da definição de derivada de uma função num objecto, motiva a definição que se segue.

Definição 3.32. *Seja $f : X \to Y$ uma função real de variável real derivável $a \in X \cap X'$.*

Define-se equação da recta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ como sendo

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Definição 3.33. *Seja $f : X \to Y$ uma função real de variável real.*

Diz-se que f é derivável se existe $f'(x)$ para todo $x \in X$.

Sendo f uma função derivável, chama-se derivada de f à função

$$\begin{array}{rccc} f': & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}.$$

Exemplo: A função
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$
é derivável em $a = 2$. Efectivamente,
$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-2^2}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4, \end{aligned}$$
donde f é derivável em $a = 2$, tendo-se $f'(2) = 4$.

Pela Definição 3.32, a recta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, f(2)) = (2, 4)$ tem por equação
$$y = 4(x-2)+4.$$
O facto de uma função ser derivável num objecto, não garante que seja uma função derivável.

Será que a função f é derivável?

A resposta é sim. Efectivamente, fixando arbitrariamente $a \in \mathbb{R}$, tem-se
$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x\to a}(x+a) = a+a = 2a, \end{aligned}$$
donde se conclui que f é derivável e
$$\begin{array}{rccc} f': & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x \end{array}.$$

Exercício 3.17. *Mostre, por definição, que:*

1. *Qualquer função constante,* $\begin{array}{rccc} f_c: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & c \end{array}$ *com* $c \in \mathbb{R}$, *é uma função derivável, tendo-se* $f_c'(x) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$;
2. *Para qualquer* $\lambda \in \mathbb{R}$, *a função* $\begin{array}{rccc} g_\lambda: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda x \end{array}$ *é uma função derivável, tendo-se* $g_\lambda'(x) = \lambda$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

O estudo do limite de uma função real de variável real num ponto de acumulação do seu domínio pode ser realizado estudando os respectivos limites laterais (recorde a Definição 3.12 e a Proposição 3.8). Uma vez que a derivada de uma função num seu objecto é um limite, então o limite que define a derivada pode ser estudado recorrendo aos limites laterais.

Definição 3.34. *Sejam $f : X \to Y$ uma função real de variável real e $a \in X \cap X'$.*

- *Se $a \in X'_+$, define-se derivada à direita de f em a como sendo o limite lateral*
$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$
- *Se $a \in X'_-$, define-se derivada à esquerda de f em a como sendo o limite lateral*
$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Exemplo: Considera a função módulo

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & |x| \end{array}.$$

Para $a \in \mathbb{R}$, da definição de módulo de um número real, obtém-se

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} \frac{|x| - |a|}{x - a} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{x - a}{x - a} = 1, & a \geq 0 \\ \\ \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{-x - (-a)}{x - a} = -1, & a < 0 \end{cases}$$

e

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{|x| - |a|}{x - a} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{x - a}{x - a} = 1, & a > 0 \\ \\ \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{-x - (-a)}{x - a} = -1, & a \leq 0 \end{cases}.$$

Consequentemente f é derivável em todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tendo-se

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ \\ -1, & a < 0 \end{cases},$$

mas f não é derivável em $a = 0$ porque $f'_+(0) = 1 \neq -1 = f'_-(0)$. Pela Definição 3.33, a função módulo não é derivável.

Exemplo: Mostrar que a função seno é derivável e obter a sua função derivada.

Fixe-se $a \in \mathbb{R}$. Por definição de derivada, pelo ponto 11. da Proposição 3.27, pela Proposição 3.28 e pela continuidade da funções cosseno, tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) = 1 \cdot \cos\left(\frac{a+a}{2}\right) = \cos(a). \end{aligned}$$

Sendo o objecto a arbitrário em $\mathbb{R}$, conclui-se que a função seno é derivável, tendo-se

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo: Mostrar que a função exponencial $Exp_{\mathrm{e}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável, calculando a função Exp'_{e}.

Para isso faz-se uso de um dos pontos do conjunto de Exercícios 3.16. Concretamente, a prova dos seguintes limites

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{-1}{x}\right)^{-x} = \mathrm{e}. \tag{3.62}$$

Seja $a \in \mathbb{R}$.

Tem-se

$$Exp'_{\mathrm{e}}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{a+h} - \mathrm{e}^a}{h} = \mathrm{e}^a \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}.$$

Fazendo uso da mudança de variável $y = \mathrm{e}^h - 1 \Leftrightarrow h = \log(1+y)$ e da continuidade da função logarítmica tem-se

$$\begin{aligned} Exp'_{\mathrm{e}}(a) &= \mathrm{e}^a \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^a \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = \mathrm{e}^a \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{1}{y}\log(1+y)} \\ &= \mathrm{e}^a \lim\nolimits_{y\to 0} \frac{1}{\log\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]} = \frac{\mathrm{e}^a}{\log\left[\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]} = \frac{\mathrm{e}^a}{\log(\mathrm{e})} = \mathrm{e}^a. \end{aligned}$$

Note que, por (3.62) e pela mudança de variável $x = \frac{1}{y}$, tem-se

$$\lim_{y\to 0^+} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

e

$$\lim_{y\to 0^-} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{-1}{x}\right)^{-x} = \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{-1} = \mathrm{e},$$

donde

$$\lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \mathrm{e}.$$

Assim, Exp_{e} é uma função derivável, tendo-se

$$Exp'(x) = (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x = Exp_{\mathrm{e}}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 3.40. *Sejam $f : X \to Y$ uma função real de variável real e $a \in X \cap X'$.*

Se f é derivável em a, então f é contínua em a.

Dem. Assuma-se que a função f é derivável em $a \in X \cap X'$.

Considerem-se as funções

$$\begin{array}{rccl} g: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x \neq a \\ f'(a), & x = a \end{cases} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} h: & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x-a \end{array}.$$

Sendo f derivável em a, então

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = g(a),$$

logo g é uma função contínua em a. A função h é uma função polinomial, logo também é contínua em a. Consequentemente, pelo ponto 2. da Proposição 3.14, tem-se que $g \cdot h$ é uma função contínua em a.

Mas

$$g(x)h(x) = \begin{cases} f(x)-f(a), & x \neq a \\ \\ f'(a)(x-a), & x = a \end{cases} = f(x)-f(a), \qquad \forall x \in X,$$

donde

$$f(x) = g(x)h(x) + f(a), \qquad \forall x \in X,$$

ou seja, a função f é o resultado da soma de duas funções contínuas em a donde, novamente pela Proposição 3.14, se conclui que f é contínua em a. $\square$

Como consequência imediata do Teorema 3.40 e das Definições 3.15 e 3.33, obtém-se o Corolário que se segue.

Corolário 3.41. *Toda a função $f: X \to Y$ real de variável real derivável é contínua.*

Dem. Sendo $f: X \to Y$ derivável, então f é derivável em todo $a \in X$. Pelo Teorema 3.40 tem-se que f é contínua em todo $a \in X$, ou seja, f é uma função contínua. $\square$

Observe que o recíproco do Corolário 3.41 não se verifica. Por exemplo, a função módulo

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & |x| \end{array}$$

é contínua, mas não é derivável.

O uso da definição para o cálculo da derivada de uma função é um processo pouco eficiente para ser sempre seguido. Por esse motivo, obtiveram-se um conjunto de regras que permitem obter a derivada de uma função num dado objecto sem recorrer directamente à definição.

Segue-se o estudo de um conjunto de regras de derivação.

Proposição 3.42. *Sejam $f, g : X \to Y$ funções reais de variável real deriváveis em $a \in X \cap X'$. Então:*

1. *A função $f + g$ é derivável em a e $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;*
2. *Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, a função $\lambda \cdot f$ é derivável em a e $(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda f'(a)$;*
3. *A função $f \cdot g$ é derivável em a e $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;*
4. *Se existe a função $\frac{f}{g}$, então $\frac{f}{g}$ é derivável em a, tendo-se*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Dem.

1. Suponha-se que f e g são funções deriváveis em a.

   Tem-se, pela definição da função soma e pelas propriedades dos limites,

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)+g'(a).\end{aligned}$$

2. Suponha-se que f é derivável em a e considere-se $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Tem-se, pela definição da função produto e pelas propriedades dos limites,

$$\begin{aligned}(\lambda \cdot f)(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(\lambda\cdot f)(x)-(\lambda\cdot f)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\lambda f(x)-\lambda f(a)}{x-a}\\ &= \lambda\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda f'(a).\end{aligned}$$

3. Suponha-se que f e g são funções deriváveis em a.

Pelo Teorema 3.40, a função g é contínua em a. Fazendo uso da definição de derivada, das propriedades dos limites e da continuidade de g em a, obtém-se

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a} g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}f(a)\\
&= g(a)f'(a)+g'(a)f(a).
\end{aligned}$$

4. Suponha-se que f e g são funções deriváveis em a.

   Pelo Teorema 3.40, a função g é contínua em a. Fazendo uso da definição de derivada, das propriedades dos limites e da continuidade de g em a, obtém-se

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)g(a)}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)-f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\\
&= \frac{1}{(g(a))^2}\big(f'(a)g(a)-f(a)g'(a)\big).
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo: Mostrar que a função cossecante é derivável.

Por definição, a cossecente é a função

$$\begin{aligned}
\operatorname{cosec}:\ \mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\} &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto \frac{1}{\operatorname{sen} x}
\end{aligned}.$$

Como quer a função seno, quer a função constante igual a 1 são deriváveis, pelo ponto 4. da Proposição 3.42 conclui-se que a função cossecante, com domínio $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, é derivável, tendo-se

$$\operatorname{cosec}'(x) = \frac{1'\operatorname{sen}(x) - 1\operatorname{sen}'(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{0 - \cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = -\operatorname{cotg}(x)\operatorname{cosec}(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemplo: Mostrar que a função

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

é derivável.

Já anteriormente se verificou que a função

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

é derivável, tendo-se $f'(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mais, a função

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

é também derivável (Exercício 3.17), tendo-se $g'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como $h = f \cdot g$, pelo ponto 3. da Proposição 3.42 conclui-se que h é derivável, tendo-se

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 3.18. *Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função*

$$\begin{array}{rccc} f_n: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n \end{array}$$

é derivável, tendo-se

$$f_n'(x) = nx^{n-1}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

[Sugestão: Prove por indução sobre n.]

Teorema 3.43 (Regra da Cadeia)**.**

Sejam $X, Y, W \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to Y$ e $g : Y \to W$ funções reais de variável real, $a \in X \cap X'$ e $b = f(a) \in Y'$.

Se f é derivável em a e g é derivável em $f(a)$, então $g \circ f$ é derivável em a tendo-se

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Dem. Esta prova de que existe a derivada da função composta é feita por definição, mas recorrendo à equivalência entre aos limites segundo Heine e segundo Cauchy, Teorema 3.4.

Por hipótese, a função f é derivável em a, logo (Teorema 3.4)

$$f'(a) = \lim_n \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}, \forall (x_n)_n \text{ sucessão em } X \setminus \{a\} \text{ tal que } \lim_n x_n = a. \quad (3.63)$$

Ainda por hipótese, a função g é derivável em $f(a)$, logo (Teorema 3.4)

$$g'(f(a)) = \lim_n \frac{g(y_n) - g(f(a))}{y_n - f(a)},$$
$$\forall (y_n)_n \text{ sucessão em } Y \setminus \{f(a)\} \text{ tal que } \lim_n y_n = f(a). \quad (3.64)$$

Seja $(x_n)_n$ uma sucessão em $X \setminus \{a\}$ tal que $\lim_n x_n = a$. Como f é uma função contínua em a, então $\lim_n f(x_n) = f(a)$.

Considerem-se os conjuntos

$$N_1 = \{n \in \mathbb{N} : f(x_n) \neq f(a)\} \quad \text{e} \quad N_2 = \{n \in \mathbb{N} : f(x_n) = f(a)\}.$$

- Se N_2 é infinito, então, por (3.63),

$$f'(a) = \lim_{\substack{n \\ (n \in N_2)}} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = 0$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \\ (n \in N_2)}} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} &= \lim_{\substack{n \\ (n \in N_2)}} \frac{g(f(a)) - g(f(a))}{x_n - a} = 0 \\ &= g'(f(a)).f'(a) \end{aligned} \quad (3.65)$$

- Se N_1 é infinito, então, por (3.63) e por (3.64),

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \\ (n \in N_1)}} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} &= \lim_{\substack{n \\ (n \in N_2)}} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{f(x_n) - f(a)} \cdot \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \\ &= g'(f(a)).f'(a). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Consequentemente, por (3.65) e por (3.66), obtém-se que

$$\forall (x_n)_n \text{ sucessão em } X \setminus \{a\} :$$
$$\left(\lim_n x_n = a\right) \Rightarrow \left(\lim_n \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = g'(f(a))f'(a)\right),$$

donde, pelo limite segundo Heine, Definição 3.11, e pelo Teorema 3.4, conclui-se que existe

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = g'(f(a))f'(a).$$

□

Exemplo: Mostre que a função

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{sen}^3(x) \end{array}$$

é derivável.

A função f é uma função composta, $f = g \circ h$, onde g e h são as seguintes funções:

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{sen}(x) \end{array}.$$

Já anteriormente se verificou que, quer a função g, quer a função h são deriváveis, tendo-se

$$g'(x) = 3x^2 \quad \text{e} \quad h'(x) = \cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sendo g e h funções deriváveis, pelo Teorema 3.43 conclui-se que $f = g \circ h$ é uma função derivável, tendo-se

$$f'(x) = (g \circ h)'(x) = g'(h(x))h'(x) = 3(h(x))^2 \cos(x) = 3\operatorname{sen}^2(x)\cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 3.44 (Derivada da função inversa)**.**

Sejam $f : X \to Y$ uma função real de variável real bijectiva e $a \in X \cap X'$ tais que:

1. *a função f é derivável em a;*
2. *a função inversa $f^{-1} : Y \to X$ é contínua em $f(a)$.*

Então a função inversa f^{-1} é derivável em $f(a)$ se e só se $f'(a) \neq 0$.

No caso de f^{-1} ser derivável em $f(a)$ tem-se

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Dem. Seja $(x_n)_n$ uma sucessão em $X \setminus \{a\}$ tal que $\lim_n x_n = a$.

Sendo f derivável em a, pelo Teorema 3.40, então f é contínua em a, donde se conclui que $\lim_n f(x_n) = f(a)$. Sendo f uma função injectiva, então $(f(x_n))_n$ é uma sucessão em $Y \setminus \{f(a)\}$ e consequentemente $f(a) \in Y \cap Y'$.

(⇒) Por hipótese assume-se que f^{-1} é derivável em $f(a)$.

Pela definição de função inversa tem-se

$$f^{-1} \circ f = id_X, \quad \text{ou seja} \quad f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in X.$$

Tendo-se f derivável em a e f^{-1} derivável em $f(a)$, pela regra da cadeia, Teorema 3.43, tem-se

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) \cdot f'(a) = 1,$$

donde se conclui que $f'(a) \neq 0$ e

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

($\Leftarrow$) Por hipótese, assuma-se que $f'(a) \neq 0$.

Sendo f uma função bijectiva, contínua em a e a sua inversa f^{-1} contínua em $f(a)$, então qualquer sucessão $(y_n)_n$ em $Y \setminus \{f(a)\}$ é convergente para $f(a)$ se e só se a correspondente sucessão em $X \setminus \{a\}$, $(x_n)_n$ tal que $x_n = f^{-1}(y_n)$, é convergente para a.

Desta forma, para qualquer $(y_n)_n$ sucessão em $Y \setminus \{f(a)\}$ tal que $\lim\limits_n y_n = f(a)$, tem-se que $\lim\limits_n x_n = a$, onde $x_n = f^{-1}(y_n)$, e consequentemente

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(a))}{y_n - f(a)} &= \frac{1}{\lim\limits_n \dfrac{y_n - f(a)}{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(a))}} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_n \dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}} = \frac{1}{f'(a)}. \end{aligned}$$

Pela caracterização dos limites segundo Heine, Teorema 3.4, conclui-se que f^{-1} é derivável em $f(a)$, tendo-se

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

$\square$

Exemplo: Mostrar que a função $\operatorname{arcsen} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ é derivável em todo $y \in]-1,1[$ e obter $\operatorname{arcsen}'(y)$

Seja $y \in]-1,1[$. Sendo arcsen bijectiva, então existe um único $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $\operatorname{arcsen}(y) = x$.

Por definição, a função arcsen é a inversa da função

$$\begin{array}{rccc} f: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ & z & \mapsto & \operatorname{sen}(z) \end{array},$$

pelo que $y = \operatorname{sen}(x)$, f é derivável em x e $f^{-1} = \operatorname{arcsen}$ é contínua em y, donde as hipóteses do Teorema da derivada da função inversa, Teorema 3.44, estão verificadas.

Como $f'(x) = \cos(x) \neq 0$ para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, então pelo Teorema da derivada da função inversa conclui-se que a função arcsen é derivável em $y \in]-1,1[$, tendo-se

$$\operatorname{arcsen}'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(y))}. \tag{3.67}$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria tem-se

$$\text{sen}^2(\text{arcsen}(y)) + \cos^2(\text{arcsen}(y)) = 1,$$

donde se obtém

$$\cos(\text{arcsen}(y)) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(\text{arcsen}(y))} = \sqrt{1 - y^2},$$

pois $\text{arcsen}(y) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Finalmente, de (3.67) conclui-se que

$$\text{arcsen}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Teorema 3.45. *Seja $f : X \to Y$ uma função real de variável real derivável em $a \in X \cap X'$ tal que $f'(a) \neq 0$.*

Então:

1. *se $f'(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que*

$$\forall x, y \in X, \ \Big(a - \delta < x < a < y < a + \delta \Rightarrow f(x) < f(a) < f(y)\Big);$$

2. *se $f'(a) < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que*

$$\forall x, y \in X, \ \Big(a - \delta < x < a < y < a + \delta \Rightarrow f(x) > f(a) > f(y)\Big).$$

Dem. Suponha-se que $f'(a) > 0$ (análogo se $f'(a) < 0$).

Assim,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$

logo pela Proposição 3.9, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in]a - \delta, a + \delta[\cap X \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0. \tag{3.68}$$

Finalmente:

- Se $x \in]a - \delta, a[\cap X$, então $(x - a) < 0$ e por (3.68) obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \ &\Leftrightarrow \ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) < 0 \cdot (x - a) \\ &\Leftrightarrow \ (f(x) - f(a)) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(a); \end{aligned}$$

- Se $y \in]a, a + \delta[\cap X$, então $(y - a) > 0$ e por (3.68) obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} > 0 \ &\Leftrightarrow \ \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \cdot (y - a) > 0 \cdot (y - a) \\ &\Leftrightarrow \ (f(y) - f(a)) > 0 \Leftrightarrow f(y) > f(a). \end{aligned}$$

Assim, para $x, y \in X \cap]a-\delta, a+\delta[$ tais que $x < a < y$ tem-se $f(x) < f(a) < f(y)$. $\square$

Como consequência imediata do Teorema 3.45 tem-se o seguinte resultado (recorde a Definição 1.22 e a Definição 1.23).

Corolário 3.46. *Seja $f : X \to Y$ uma função real de variável real derivável em $a \in X \cap X'_- \cap X'_+$.*

Se a é um extremante local de f, então $f'(a) = 0$.

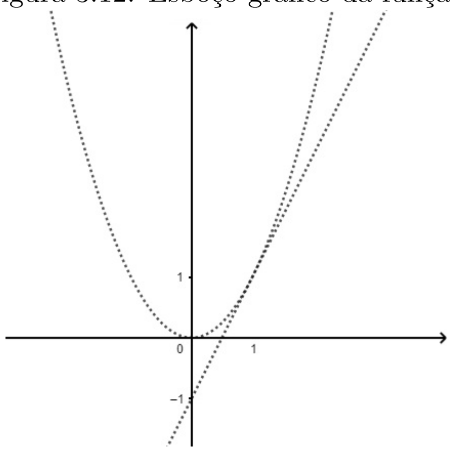
Dem. Supondo que $f'(a) \neq 0$, então um dos pontos, 1. ou 2., do Teorema 3.45 acontece. Em ambas as situações conclui-se que a não é extremante local de f, o que contradiz a hipótese. Consequentemente $f'(a) = 0$. $\square$

Observe que o facto de uma função real de variável real ter derivada positiva num ponto, não garante que seja uma função monótona crescente. Nem mesmo que exista um intervalo, contido no domínio, onde a função seja monótona crescente. Por exemplo: Considere a função

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 2x-1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{array},$$

cujo o esboço gráfico é apresentado na Figura 3.12. A função f é derivável em $a = 1$, tendo-se $f'(1) = 2$ (verifique), mas não existe $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo, tal que $f_{|_I}$ seja monótona crescente.

Figura 3.12: Esboço gráfico da função f



Mais, existem funções reais de variável real, $g : X \to Y$, deriváveis tais que $g'(x) > 0$, para todo $x \in X$, e não são monótonas.

Exercício 3.19. *Apresente um exemplo de uma função real de variável, $g : X \to Y$, derivável tal que $g'(x) > 0$, para todo $x \in X$, e g não é monótona.*

Por último, é importante ter em atenção que o recíproco do Corolário 3.46 é falso. Por exemplo, a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = x^3$, é derivável, $h'(0) = 0$ e h não possui extremantes (verifique).

Teorema 3.47 (Teorema de Rolle)**.**

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em todo $x \in]a, b[$.

Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Dem. Sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, então pelo Teorema de Weierstrass, Teorema 3.20, f possui máximo e mínimo.

- Se a e b são simultaneamente maximizante e minimizante de f, então f só pode ser uma função constante, logo $f'(c) = 0$ para todo $c \in]a, b[$.;

- Caso contrário, então existe $c \in]a, b[$ que é extremante de f, donde, pelo Corolário 3.46, se conclui que $f'(c) = 0$.

□

Teorema 3.48 (Teorema de Lagrange)**.**

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em todo $x \in]a, b[$.

Então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dem. Defina-se a função

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} x \end{array}.$$

A função φ é contínua em $[a, b]$.

A função φ é derivável em todo o $x \in]a, b[$, tendo-se

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Mais, tem-se

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &= f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a = \frac{f(a)(b-a) - f(b)a + f(a)a}{b-a} \\
&= \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} = \frac{f(a)b - f(b)b + f(b)b - f(b)a}{b-a} \\
&= -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}b + f(b)\frac{b-a}{b-a} = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b \\
&= \varphi(b).
\end{aligned}$$

Consequentemente, a função φ satisfaz toda as hipóteses do Teorema de Rolle, logo existe $c \in]a,b[$ tal que $\varphi'(c) = 0$, ou seja

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

donde se conclui que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Como consequência do teorema de Lagrange, obtêm-se os seguintes resultados que permitem estudar a monotonia de funções deriváveis.

Corolário 3.49. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em todo $x \in]a,b[$.*

Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in]a,b[$, então f é uma função constante.

Dem. Seja $x \in]a,b]$.

Aplicando o Teorema de Lagrange à função $f_{|_{[a,x]}}$, conclui-se que existe $c_x \in]a,x[$ tal que

$$f'(c_x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Leftrightarrow 0 = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Leftrightarrow f(x) = f(a).$$

Como x é arbitrário em $]a,b]$, conclui-se que

$$f(x) = f(a), \qquad \forall x \in [a,b],$$

ou seja f é uma função constante. □

Corolário 3.50. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em todo $x \in]a,b[$.*

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente.*

2. *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente.*

Dem. Sejam $y, z \in [a, b]$ tais que $y < z$. Aplicando o Teorema de Lagrange à função $f_{|[y,z]}$, existe $c \in]y, z[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

ou seja

$$f(z) - f(y) = f'(c)(z - y).$$

Notando que $z - y > 0$, tem-se:

1. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$, então $f(z) - f(y) > 0$, donde f é estritamente crescente.

2. Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, então $f(z) - f(y) < 0$, donde f é estritamente decrescente.

□

Exercício 3.20.

1. *Mostre cada uma das igualdades que se segue, identificando o conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ onde a respectiva igualdade se verifica:*

   (a) $(\alpha x)' = \alpha$, *para* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $x \in X$;

   (b) $(a^x)' = a^x \log(a)$, *para* $a > 0$ *e* $x \in X$;

   (c) $\log'_a(x) = \dfrac{1}{x \log a}$, *para* $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ *e* $x \in X$;

   (d) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, *para* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $x \in X$;

   (e) $\cos'(x) = -\mathrm{sen}(x)$, *para* $x \in X$;

   (f) $\mathrm{tg}'(x) = \sec^2(x)$, *para* $x \in X$;

   (g) $\mathrm{cotg}'(x) = -\mathrm{cosec}^2(x)$, *para* $x \in X$;

   (h) $\sec'(x) = \sec(x)\mathrm{tg}(x)$, *para* $x \in X$;

   (i) $\mathrm{cosec}'(x) = -\mathrm{cosec}(x)\mathrm{cotg}(x)$, *para* $x \in X$;

   (j) $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$, *para* $x \in X$;

   (k) $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$, *para* $x \in X$;

   (l) $\mathrm{th}'(x) = \mathrm{sech}^2(x)$, *para* $x \in X$;

   (m) $\mathrm{coth}'(x) = -\mathrm{cosech}^2(x)$, *para* $x \in X$;

   (n) $\mathrm{sech}'(x) = -\mathrm{sech}(x)\mathrm{th}(x)$, *para* $x \in X$;

   (o) $\mathrm{cosech}'(x) = -\mathrm{cosech}(x)\mathrm{coth}(x)$, *para* $x \in X$;

   (p) $\mathrm{arcsen}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, *para* $x \in X$;

   (q) $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$, *para* $x \in X$;

(r) $\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, *para* $x \in X$;

(s) $\operatorname{arccotg}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$, *para* $x \in X$;

(t) $\operatorname{arcsec}'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, *para* $x \in X$;

(u) $\operatorname{arccosec}'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$, *para* $x \in X$;

(v) $\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, *para* $x \in X$;

(w) $\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$, *para* $x \in X$;

(x) $\operatorname{argcoth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$, *para* $x \in X$;

(y) $\operatorname{argsech}'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$, *para* $x \in X$;

(z) $\operatorname{argcosech}'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$, *para* $x \in X$;

2. *Da lista que se segue, identifique, justificando, as funções que são e as que não são deriváveis.*

(a) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3+3x \end{array}$;

(b) $\begin{array}{rccc} g: &]-\infty,0]\cup\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3+3x \end{array}$;

(c) $\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{sh}(\operatorname{sen}^2(x)) \end{array}$;

(d) $\begin{array}{rccc} l: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \operatorname{sen}(x), & x > \frac{\pi}{2} \\ x, & x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{array}$;

(e) $\begin{array}{rccc} m: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \operatorname{sen}(x), & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases} \end{array}$;

(f) $\begin{array}{rccc} t: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \operatorname{sen}(x), & x > 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases} \end{array}$;

(g) $\begin{array}{rccc} s: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$;

3. *Para cada uma das funções que se segue, identifique os objectos onde é derivável, calculando a respectiva derivada.*

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \cos^2(\operatorname{sh}(x))$;

(b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = \operatorname{sh}^{\frac{2}{3}}(x)$;

(c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por* $h(x) = \log_3(1+\cos^2(x))$.

4. *Considere a função*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x+\operatorname{sen}(x) \end{array}.$$

(a) *Mostre que a função* f *é derivável.*

(b) *Estude o sinal de* f' *e identifique os intervalos de monotonia de* f.

(c) *Obtenha a equação da recta tangente ao gráfico de* f *em* $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+1)$.

5. *Estude a monotonia da função*

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{sh}(\operatorname{sen}^2(x)) \end{array},$$

identificando os extremos locais e globais, caso existam.

6. *Mostre que*

$$\log(x+1) < x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

[Sugestão: aplique convenientemente o Teorema de Lagrange]

7. *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que:*

   (a) *Entre dois zeros de f' existe, no máximo, um zero de f;*

   (b) *Entre dois zeros de f existe, pelo menos, um zero de f'.*

8. *Utilize o exercício anterior para mostrar que o polinómio*

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

possui exactamente um zero no intervalo $]1,3[$.

9. *Considere a função*

$$\begin{array}{rccc} f: & [1,+\infty[& \to & [2,+\infty[\\ & x & \mapsto & 3x^2 - x - \log(x) \end{array}.$$

   (a) *Justifique que f é uma função derivável e obtenha a função f';*

   (b) *Mostre que f é uma função bijectiva;*

   (c) *Calcule $\left(f^{-1}\right)'(2)$;*

   (d) *Mostre que*

$$\lim_n \left[f\left(n + \frac{1}{n}\right) - f(n) \right] = 6.$$

   (e) *Estude a continuidade uniforme de f em $[1,+\infty[$;*

   (f) *Obtenha um polinómio do 1º grau, $p(x) = mx + b$, tal que a função*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} f(x), & x \geq 1 \\ p(x), & x < 1 \end{cases} \end{array}$$

   é derivável.

   (g) *Justifique que g, obtida na alínea anterior, é uma função bijectiva.*

10. *Apresente um exemplo, ou justifique que não existe:*

    (a) *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *não derivável tal que* $|f|$ *é derivável.*

    (b) *Duas funções* $f : X \to \mathbb{R}$ *e* $g : Y \to \mathbb{R}$ *não deriváveis tais que* $f(X) \subseteq Y$ *e* $(g \circ f) : X \to \mathbb{R}$ *é derivável.*

    (c) *Uma função* $f : X \to \mathbb{R}$ *derivável, não crescente tal que* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in X$.

    (d) *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *não injectiva, derivável e cuja função derivada* f' *não se anula.*

    (e) *Uma função* $f : X \to \mathbb{R}$, *não injectiva, derivável e cuja função derivada* f' *não se anula.*

    (f) *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(-1) = f(1) = 1$, *mas* $f'(x) \neq 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

    (g) *Uma função* $f : X \to \mathbb{R}$ *par tal que* f *é derivável em pelo menos um obejecto* $a \in X \setminus \{0\}$ *e* f *possui derivada positiva em todos os objecto onde* f *seja derivável.*

    (h) *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivável em apenas um objecto.*

Bibliografia

[1] R. Bartle e D. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, Wiley, 1982.

[2] M. Figueira, *Fundamentos de Análise Infinitesimal*, 3ª Edição, Textos de Matemática da FCUL, nº5, 2001.

[3] S. Guerreiro, *Curso de Análise Matemática*, Escolar Editora, 1989.

[4] E.L. Lima, *Curso de Análise*, Vol.2, 7ª Edição, Projecto Euclides, 1992.

[5] E.L. Lima, *Análise Real*, Vol.1, 8ª Edição, Coleção Matemática Universitária, 2004.

[6] F. Miranda e L. Santos, *Introdução à análise real*, sebenta nº7, Departamento de Matemática da Universidade do Minho, 2004.

[7] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3ª Edição, McGraw-Hill 1976.

[8] C. Sarrico, *Análise Matemática, Leituras e exercícios*, Trajectos Ciência, Gradiva, 1997.