

# Análise Matemática EE

MIEBIOM

2013/2014

Docente: José Joaquim Oliveira

Departamento de Matemática e Aplicações

Universidade do Minho



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Funções vectoriais de variável real</b>	<b>1</b>
1.1	Definições e notações . . . . .	1
1.2	Limites e continuidade . . . . .	4
1.3	Curvas e suas parametrizações . . . . .	5
1.4	Derivada . . . . .	6
1.5	Exercícios . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Funções reais de várias variáveis</b>	<b>11</b>
2.1	Gráficos e curvas de nível . . . . .	11
2.2	Limites e continuidade . . . . .	13
2.3	Derivada direccional . . . . .	18
2.4	Derivada parcial . . . . .	21
2.5	Derivada . . . . .	24
2.6	Significado geométrico da derivada ( $\mathbb{R}^2$ ) . . . . .	28
2.7	Derivada da função composta: <i>Regra da Cadeia</i> . . . . .	29
2.8	Função implícita . . . . .	30
2.9	Polinómio de Taylor . . . . .	32
2.10	Extremos livres . . . . .	35
2.11	Extremos condicionados . . . . .	39
2.12	Exercícios . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Integrais Múltiplos</b>	<b>51</b>
3.1	Integral de Riemann: definição . . . . .	51
3.2	Análise geométrica do integral duplo . . . . .	55
3.3	Cálculo do integral de Riemann . . . . .	56
3.4	Coordenadas polares . . . . .	59
3.5	Mudança de variável em integrais duplos . . . . .	61
3.6	Integral triplo . . . . .	63
3.7	Aplicações do integral triplo . . . . .	64
3.8	Coordenadas cilíndricas . . . . .	66

3.9	Coordenadas esféricas . . . . .	67
3.10	Mudança de variável em integrais triplos . . . . .	68
3.11	Exercícios . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Análise Vectorial</b>	<b>73</b>
4.1	Campos de forças . . . . .	73
4.2	Integral de linha . . . . .	76
4.3	Teorema de Green . . . . .	80
4.4	Superfícies parametrizadas . . . . .	84
4.5	Integral de superfície . . . . .	86
4.6	Teorema de Stokes . . . . .	89
4.7	Teorema da Divergência . . . . .	91
4.8	Exercícios . . . . .	94
	<b>Bibliography</b>	<b>99</b>

# Capítulo 1

## Funções vectoriais de variável real

As *funções vectoriais de variável real* são funções que permitem descrever o movimento de um objecto no plano ou no espaço. Assim sendo, com o estudo de tais funções pretende-se compreender as propriedades inerentes à dinâmica do movimento de um objecto ao longo do tempo.

### 1.1 Definições e notações

Do curso prévio de Álgebra Linear, os alunos conhecem o espaço vectorial real  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , como sendo o conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\},$$

no qual estão definidas duas operações:

**Adição:** Dados  $X = (x_1, \dots, x_n)$  e  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  vectores de  $\mathbb{R}^n$ , define-se

$$X + Y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n);$$

**Multiplicação Escalar:** Dados  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , define-se

$$\alpha X = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n);$$

que satisfazem certas propriedades que conferem ao conjunto  $\mathbb{R}^n$  a estrutura de espaço vectorial real.

**Definição 1.1** (Produto interno). *Dados dois vectores  $X = (x_1, \dots, x_n)$  e  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , define-se produto interno entre  $X$  e  $Y$  por*

$$X \cdot Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

**Definição 1.2** (Distância). *Dados dois vectores  $X = (x_1, \dots, x_n)$  e  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , define-se distância entre  $X$  e  $Y$  por*

$$\|X - Y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

A *norma* de um vector  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  define-se como sendo a sua distância à origem, isto é

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

As noções de norma e de produto interno permitem introduzir a noção de *ângulo* entre dois vectores  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  como sendo o número real, do intervalo  $[0, \pi]$ , definido por

$$\angle(X, Y) = \arccos\left(\frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|}\right).$$

No espaço  $\mathbb{R}^3$  define-se ainda o *produto externo*, também conhecido como *produto vectorial*, entre dois vectores,  $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ , como sendo o vector

$$X \times Y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Observe que o vector  $X \times Y$ , quando não é o vector nulo, é simultaneamente um vector perpendicular a  $X$  e a  $Y$  isto é,  $\angle(X, X \times Y) = \angle(Y, X \times Y) = \frac{\pi}{2}$ . Para simplificar o cálculo do produto externo, observe que  $X \times Y$  se pode obter através do cálculo formal do “determinante”

$$X \times Y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

sendo  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  a base canónica do espaço  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 1.3** (Bola). *Sejam  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $r$  um número real positivo ( $r > 0$ ). Chama-se bola de centro  $X_0$  e raio  $r$  ao conjunto*

$$B_r(X_0) = \{X \in \mathbb{R}^n : \|X - X_0\| < r\}.$$

Um ponto  $X_0$  do espaço  $\mathbb{R}^n$  diz-se *ponto aderente* de um subconjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  se na sua “proximidade” existem pontos de  $A$ , formalmente, se

$$\forall r > 0, \left( B_r(X_0) \right) \cap A \neq \emptyset.$$

A *aderência* de  $A$  designa o conjunto de todos os pontos aderentes a  $A$ , representando-se por  $\bar{A}$ , e  $A$  diz-se *fechado* quando  $A = \bar{A}$ .

Um ponto  $Y_0$  do subconjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  diz-se *ponto interior de  $A$*  se na sua “proximidade” só existem pontos de  $A$ , formalmente, se

$$\exists r > 0, B_r(Y_0) \subseteq A.$$

O *interior* de  $A$  designa o conjunto de todos os pontos interiores de  $A$ , representando-se por  $int(A)$ , e  $A$  diz-se *aberto* quando  $A = int(A)$ .

Chama-se *fronteira* de um subconjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ao conjunto

$$fr(A) = \bar{A} \setminus int(A).$$

Um ponto  $X_0$  do espaço  $\mathbb{R}^n$  diz-se *ponto de acumulação* de um subconjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  se na sua “proximidade” existem pontos de  $A$  diferentes de  $X_0$ , formalmente, se

$$\forall r > 0, \left( B_r(X_0) \setminus \{X_0\} \right) \cap A \neq \emptyset.$$

Um ponto  $Y_0$  do subconjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  diz-se *ponto isolado de  $A$*  se na sua “proximidade” não existem pontos de  $A$  diferentes de  $Y_0$ , formalmente, se

$$\exists r > 0, B_r(Y_0) \cap A = \{Y_0\}.$$

**Definição 1.4** (Função vectorial). *Chama-se* função vectorial de variável real a qualquer função

$$\begin{aligned} \vec{r}: D \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (r_1(t), \dots, r_n(t)) \end{aligned}$$

O conjunto  $D$  chama-se domínio de  $\vec{r}$  e as  $n$  funções  $r_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  chamam-se as funções coordenadas (ou funções componentes) de  $\vec{r}$ .

**Exemplo 1.1** São exemplos de funções vectoriais:

1.  $\vec{r}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $t \longmapsto \left(t, \frac{1}{t}\right);$
2.  $\vec{s}: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$   
 $t \longmapsto (\sin t, \cos t, 1).$

Embora as propriedades a estudar sejam válidas para as funções vectoriais dadas pela Definição 1.4, neste curso iremos apenas trabalhar com funções vectoriais que tomam valores nos espaços vectoriais  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ . Mais, os resultados serão apresentados apenas para funções vectoriais com valores em  $\mathbb{R}^3$ , mas os alunos terão de ter em conta que, mesmo não sendo explicitamente escrito, os resultados são também válidos para as funções vectoriais com valores em  $\mathbb{R}^2$ .

Sendo  $\hat{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\hat{j} = (0, 1, 0)$  e  $\hat{k} = (0, 0, 1)$ , tem-se que  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  é a base canónica de  $\mathbb{R}^3$  e uma função vectorial

$$\begin{aligned} \vec{r}: D \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (r_1(t), r_2(t), r_3(t)) \end{aligned}$$

pode ser escrita da forma

$$\vec{r}(t) = r_1(t)\hat{i} + r_2(t)\hat{j} + r_3(t)\hat{k}.$$

Reciprocamente, dadas funções reais de variável real,  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$ , pode definir-se uma função vectorial  $\vec{r}$  por  $\vec{r}(t) = r_1(t)\hat{i} + r_2(t)\hat{j} + r_3(t)\hat{k}$ , sendo o domínio de  $\vec{r}$  a intersecção dos domínios de  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$ .

## 1.2 Limites e continuidade

**Definição 1.5** (Limite). *Seja  $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma função vectorial e  $a \in \mathbb{R}$  ponto de acumulação de  $D$ .*

*Diz-se que  $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$  é o limite de  $\vec{r}$  quando  $t$  tende para  $a$  se, para cada  $i = 1, 2, 3$ , se tem  $\lim_{t \rightarrow a} r_i(t) = b_i$ , ou seja*

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \left( \lim_{t \rightarrow a} r_1(t), \lim_{t \rightarrow a} r_2(t), \lim_{t \rightarrow a} r_3(t) \right) = (b_1, b_2, b_3).$$

**Definição 1.6** (Continuidade). *Seja  $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma função vectorial e  $a \in D$ .*

*Diz-se que  $\vec{r}$  é contínua em  $a$  se cada uma das suas funções coordenadas for contínua em  $a$ , isto é*

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = (r_1(a), r_2(a), r_3(a)).$$

Uma função vectorial diz-se contínua se for contínua em todo o ponto do seu domínio.

**Proposição 1.1.** *Sejam  $\vec{r}(t) = r_1(t)\hat{i} + r_2(t)\hat{j} + r_3(t)\hat{k}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , uma função vectorial,  $a \in \mathbb{R}$  e  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ . Então*

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{b} \Leftrightarrow \left( \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |t - a| < \delta \Rightarrow \|\vec{r}(t) - \vec{b}\| < \varepsilon \right);$$

$$\vec{r}(t) \text{ é contínua em } a \Leftrightarrow \left( \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |t - a| < \delta \Rightarrow \|\vec{r}(t) - \vec{r}(a)\| < \varepsilon \right).$$

*Demonstração.* (ver [3])

□

### 1.3 Curvas e suas parametrizações

**Definição 1.7** (Caminho). *Chama-se caminho a qualquer função vectorial contínua cujo domínio é um intervalo real.*

**Definição 1.8** (Curva). *Chama-se curva no espaço ao contradomínio de um caminho  $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ .*

*Chama-se curva no plano ao contradomínio de um caminho  $\vec{p}: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ .*

Como consequência da definição anterior, cada função vectorial contínua definida num intervalo  $I$ ,  $\vec{r}(t) = r_1(t)\hat{i} + r_2(t)\hat{j} + r_3(t)\hat{k}$ , define uma curva  $C$  no espaço dada por

$$C = \{(r_1(t), r_2(t), r_3(t)) : t \in I\}.$$

Tal como acontece em muitos problemas da Física, se o parâmetro  $t$  representar o tempo, então a curva  $C$  no espaço pode ser interpretada como a trajectória de uma partícula em movimento, a qual, no instante  $t$ , ocupa a posição  $(r_1(t), r_2(t), r_3(t))$ , e o caminho  $\vec{r}(t)$  é interpretado como a descrição do movimento da partícula.

**Definição 1.9** (Parametrização). *Chama-se parametrização de uma curva  $C$  a qualquer caminho cujo contradomínio seja  $C$ .*

Atenção, uma mesma curva admite várias parametrizações, mas um caminho define uma e uma só curva.

**Exemplo 1.2** A curva no plano  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  (circunferência de centro na origem e de raio 1) admite como parametrizações:

$$\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]; \quad \vec{s}(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 4\pi]. \quad (1.1)$$

**Definição 1.10** (Caminho e curva simples). *Um caminho  $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  diz-se simples se*

$$\forall s, t \in [a, b] : \vec{r}(s) = \vec{r}(t) \Rightarrow \{s, t\} = \{a, b\}.$$

*Uma curva diz-se simples se admite um caminho simples.*

Note que, nos caminhos apresentados em (1.1),  $\vec{r}(t)$  é simples mas  $\vec{s}(t)$  não é simples. No entanto, ambos os caminhos são parametrizações de uma curva simples.

**Definição 1.11** (Curva fechada). *Uma curva diz-se fechada se admite uma parametrização  $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ .*

## 1.4 Derivada

**Definição 1.12** (Derivada). *Sejam  $\vec{r}(t) = r_1(t)\hat{i} + r_2(t)\hat{j} + r_3(t)\hat{k}$ , um caminho de domínio  $I$  e  $a \in I$ .*

*Chama-se derivada de  $\vec{r}$  em  $a$ , denotando-se por  $\vec{r}'(a)$ , como sendo o limite*

$$\begin{aligned}\vec{r}'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(a+h) - \vec{r}(a)}{h} \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_1(a+h) - r_1(a)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_2(a+h) - r_2(a)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_3(a+h) - r_3(a)}{h} \right) \\ &= (r_1'(a), r_2'(a), r_3'(a)),\end{aligned}$$

*caso este exista.*

Dado um caminho  $\vec{r}(t) = r_1(t)\hat{i} + r_2(t)\hat{j} + r_3(t)\hat{k}$ , com  $t \in I$  ( $I$  intervalo de  $\mathbb{R}$ ), define-se *derivada* de  $\vec{r}$  como sendo a função vectorial

$$\begin{aligned}\vec{r}' : D \subseteq I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \vec{r}'(t) \end{aligned}$$

onde  $D = \{t \in I : \text{existe } \vec{r}'(t)\}$ .

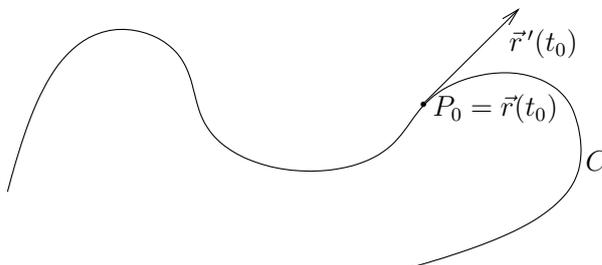


Figura 1.1: Curva

Dada uma curva  $C$  no espaço (ou no plano), uma sua parametrização  $\vec{r}(t) = r_1(t)\hat{i} + r_2(t)\hat{j} + r_3(t)\hat{k}$ ,  $t \in I$ , e um ponto  $P_0 \in C$ , então  $P_0 = (r_1(t_0), r_2(t_0), r_3(t_0))$  para algum  $t_0 \in I$ . Geometricamente, o vector  $\vec{r}'(t_0)$ , caso exista e não seja o vector nulo, tem declive tangente à curva  $C$  no ponto  $P_0$ . Assim sendo, faz sentido a definição de recta tangente à curva.

**Definição 1.13** (Recta tangente). *Sejam  $C$  uma curva,  $\vec{r}(t)$  uma sua parametrização e  $P_0 = \vec{r}(t_0)$ .*

*A recta tangente a  $C$  no ponto  $P_0$  é definida pela equação*

$$X = P_0 + \lambda \vec{r}'(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

*desde que  $\vec{r}'(t_0)$  exista e não seja o vector nulo.*

**Exemplo 1.3** Considere a curva  $C$  definida pelo caminho

$$\vec{r}(t) = \text{sen } t\hat{i} + \cos t\hat{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Determine a equação da recta tangente à curva  $C$  no ponto  $P_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

Resolução: Tem-se  $(\text{sen } t_0, \cos t_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , com  $t_0 \in [0, 2\pi]$ , se e só se  $t_0 = \frac{\pi}{4}$ .

Tem-se também  $\vec{r}'(t) = \cos t\hat{i} - \text{sen } t\hat{j}$ , donde  $\vec{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

Assim, a equação da recta tangente à curva  $C$  no ponto  $P_0$  é:

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \lambda \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como consequência da definição de derivada de um caminho e das regras de derivação de funções reais de variável real, obtém-se o seguinte resultado.

**Proposição 1.2.** *Sejam  $\vec{r}, \vec{s} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  caminhos deriváveis,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável. Então, para cada  $t \in I$ , tem-se:*

1.  $(\vec{r}(t) + \vec{s}(t))' = \vec{r}'(t) + \vec{s}'(t);$
2.  $(\lambda\vec{r}(t))' = \lambda\vec{r}'(t);$
3.  $(f(t)\vec{r}(t))' = f'(t)\vec{r}(t) + f(t)\vec{r}'(t);$
4.  $(\vec{r}(t) \cdot \vec{s}(t))' = \vec{r}'(t) \cdot \vec{s}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{s}'(t), \quad (\text{produto interno});$
5.  $(\vec{r}(t) \times \vec{s}(t))' = \vec{r}'(t) \times \vec{s}(t) + \vec{r}(t) \times \vec{s}'(t), \quad (\text{produto externo});$
6.  $(\vec{r}(f(t)))' = \vec{r}'(f(t))f'(t), \text{ caso } f(t) \in I, \quad (\text{derivada da composta}).$

*Demonstração.* Fica como exercício □

**Definição 1.14** (Curva regular). *Seja  $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização de uma curva  $C$ .*

*Se  $\vec{r}(t)$  é de classe  $C^1$  (i.e.  $\vec{r}(t)$  é derivável e a sua derivada  $\vec{r}'(t)$  é contínua), então a curva  $C$  diz-se regular.*

*A curva  $C$  diz-se seccionalmente regular se é possível escrever a curva  $C$  como união finita de curvas regulares, isto é*

$$C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k, \text{ onde } C_j \text{ é regular, } j = 1, \dots, k.$$

Quando a parametrização  $\vec{r}(t)$ ,  $t \in I$ , de uma curva regular é interpretada como a descrição do movimento de uma partícula no espaço (ou no plano) sendo  $\vec{r}(t)$  o vector posicional da partícula no instante  $t$ , os vectores

$$\vec{r}'(t) \quad \text{e} \quad \vec{r}''(t)$$

são vistos, respectivamente, como o *vector velocidade* e o *vector aceleração* da partícula no instante  $t$ . Aos escalares

$$\|\vec{r}'(t)\| \quad \text{e} \quad \|\vec{r}''(t)\|$$

chama-se, respectivamente, *velocidade* e *aceleração* no instante  $t$ .

Assim, se  $[a, b] \subseteq I$ , então

$$D = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt \quad (1.2)$$

corresponde à distância total percorrida pela partícula no intervalo de tempo  $[a, b]$ . Atenção,  $D$  pode não corresponder ao comprimento da curva  $\vec{r}([a, b])$  porque, na sua trajectória, a partícula pode percorrer mais do que uma vez parte da curva. Como exercício, calcule a distância total percorrida pela partícula quando o seu movimento é descrito por cada um dos caminhos em (1.1).

**Definição 1.15** (Comprimento da curva). *Seja  $C$  uma curva regular definida pelo caminho simples  $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ .*

*Define-se comprimento de  $C$  como sendo o valor de (1.2).*

## 1.5 Exercícios

1. Faça um esboço das curvas  $C$  com as seguintes parametrizações:

- (a)  $\vec{r}(t) = (t, t^2)$ , com  $t \in [0, 2]$ ;
- (b)  $\vec{r}(t) = (2t, 4t^2)$ , com  $t \in [0, 1]$ ;
- (c)  $\vec{r}(t) = (-\frac{t}{2} + 1, t + 2)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ ;
- (d)  $\vec{r}(t) = (-\frac{t}{2} + 1, t + 2)$ , com  $t \in [-1, 2]$ ;
- (e)  $\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t)$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ ;
- (f)  $\vec{r}(t) = (2 \cos t, \sin t)$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ .

2. Encontre uma parametrização para cada uma das seguintes curvas, nos sentidos indicados:

- (a) Circunferência de centro  $(0,0)$  e raio 2 percorrida em sentido horário;
- (b) Circunferência de centro  $(0,0)$  e raio 2 percorrida em sentido anti-horário;
- (c) O segmento de recta no plano desde o ponto  $(1, 2)$  até ao ponto  $(-2, 1)$ ;
- (d) O segmento de recta no espaço desde o ponto  $(1, 2, 0)$  até ao ponto  $(-2, 1, 3)$ .

3. Para a curva  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  no plano, obtenha:

- (a) um caminho simples com domínio  $[0, 2\pi]$ ;
- (b) um caminho simples com domínio  $[0, \pi]$ ;

(c) um caminho não simples com domínio  $[0, 2\pi]$ .

4. Considere as curvas com as seguintes parametrizações:

(a)  $\vec{r}(t) = (3t^2, t^3 + 1)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ ;

(b)  $\vec{r}(t) = (3 \operatorname{sen}(t^2) - 1, 3 \cos(t^2))$ , com  $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$ ;

(c)  $\vec{r}(t) = (3 \operatorname{sen}^2 t, \cos t - 1, t^2)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ ;

(d)  $\vec{r}(t) = (t^2, \pi^2)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ .

Para cada uma das curvas apresentadas, determine:

i) O vector velocidade  $\vec{r}'(t)$ ;

ii) A velocidade  $\|\vec{r}'(t)\|$ ;

iii) Os tempos  $t$  em que ocorre uma paragem da partícula.

5. Determine uma equação da recta  $s$ , tangente à curva  $C$ , definida pelo caminho

$$\vec{r}(t) = \frac{e^t}{2} \hat{i} + e^{-t} \hat{j},$$

no ponto  $(1, \frac{1}{2})$ .

6. Determine uma equação da recta  $s$ , tangente à curva  $C$ , definida pelo caminho

$$\vec{r}(t) = \cos^2 t \hat{i} + (3t - t^3) \hat{j} + t \hat{k},$$

no ponto  $\vec{r}(0)$ .

7. Determine o comprimento da curva  $C$  dada pela parametrização:

(a)  $\vec{r}(t) = (t, t^2)$ , com  $t \in [0, 2]$ ;

(b)  $\vec{r}(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t)$ , com  $t \in [0, 3\pi]$ ;

(c)  $\vec{r}(t) = (t, |t|)$ , com  $t \in [-1, 2]$ .

8. Suponha que uma partícula, cujo seu movimento é descrito pelo caminho  $\vec{c}(t)$ , sai "disparada" no instante  $t = t_0$ . Na ausência de atrito e de gravidade, calcule a posição que a partícula ocupará no instante  $t = t_1$ .

(a)  $\vec{c}(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$ , onde  $t_0 = 2$  e  $t_1 = 3$ ;

(b)  $\vec{c}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ , onde  $t_0 = 1$  e  $t_1 = 2$ ;

(c)  $\vec{c}(t) = (4e^t, 6t^4, \cos t)$ , onde  $t_0 = 0$  e  $t_1 = 2$ .



## Capítulo 2

# Funções reais de várias variáveis

Do ponto de vista das aplicações, as funções são usadas para descrever fenómenos (físicos, químicos, biológicos, etc.) e com o seu estudo pretende-se compreender a sua evolução. Contudo a grande maioria dos fenómenos que nos rodeia têm um comportamento influenciado por várias variáveis e não apenas por uma. Por exemplo, o valor da área de um rectângulo depende de duas variáveis (comprimento da base  $b$ , comprimento da altura  $a$ )

$$\text{Área} = b \times a.$$

O trabalho realizado por uma força ( $\text{Trabalho} = \text{Força} \times \text{Deslocamento}$ ) também depende de duas variáveis. Assim, o estudo de funções de uma só variável, tal como foi feito em unidades curriculares anteriores, é manifestamente insuficiente para descrever muitos dos fenómenos em estudo nas diversas ciências. Neste capítulo faz-se um primeiro estudo de funções reais de várias variáveis reais.

### 2.1 Gráficos e curvas de nível

Comece-se por definir o objecto de estudo neste capítulo.

**Definição 2.1** (Função). *Chama-se função real de várias variáveis reais a uma função*

$$\begin{array}{l} f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longmapsto f(X) \end{array} ,$$

com  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  não vazio. O conjunto  $D$  chama-se domínio de  $f$ ,  $\mathbb{R}$  é o conjunto de chegada, os elementos  $X = (x_1, \dots, x_n) \in D$  chamam-se objectos e  $f(X) \in \mathbb{R}$  designa-se por imagem de  $X$  por  $f$ .

Chama-se contra-domínio de  $f$  ao conjunto das imagens isto é,

$$f(D) = \{f(X) : X \in D\}.$$

**Definição 2.2** (Função vectorial). *Chama-se função vectorial de várias variáveis reais a uma função*

$$\begin{aligned} F : D \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ X &\mapsto (f_1(X), \dots, f_k(X)) \end{aligned} \quad ,$$

com  $k \in \mathbb{N}$ , sendo as funções reais  $f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , chamadas de funções componentes.

**Definição 2.3** (Função limitada). *Uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se limitada se o conjunto das imagens for um subconjunto limitado de  $\mathbb{R}$  isto é:*

$$\exists L > 0 : |f(X)| < L, \forall X \in D.$$

**Exemplo 2.1** São exemplos de funções reais de várias variáveis:

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  ;
- $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y, z) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$  .

Frequentemente, tal como acontece com as funções de uma só variável, uma função é apresentada pela sua expressão designatória. Quando assim acontecer, entende-se que o domínio da função é constituído por todos os valores do espaço para os quais a expressão tem sentido. Por exemplo, para a função dada por  $f(x, y) = \log(xy)$ , o domínio é

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\} = \left( ] - \infty, 0[ \times ] - \infty, 0[ \right) \cup \left( ] 0, +\infty[ \times ] 0, +\infty[ \right).$$

Tal como para funções de uma só variável, o gráfico constitui uma ferramenta importante para estudar o comportamento das funções.

**Definição 2.4** (Gráfico). *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.*

*Chama-se gráfico de  $f$  ao subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  constituído pelos pontos*

$$(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

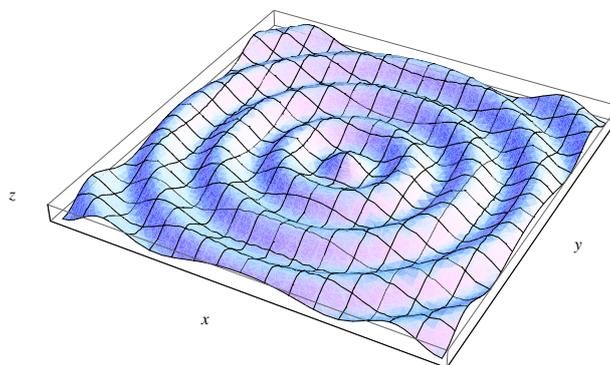
com  $X = (x_1, \dots, x_n) \in D$  isto é

$$\text{graf}(f) = \{(x_1, \dots, x_n, f(X)) : X = (x_1, \dots, x_n) \in D\}.$$

Apesar da definição fazer todo o sentido para qualquer função real de várias variáveis reais, é evidente que, do ponto de vista estritamente geométrico, só tem sentido para funções reais de duas variáveis. Neste caso, o gráfico da função é interpretado como uma superfície no espaço,  $\mathbb{R}^3$ , constituída pelos pontos  $(x, y, z)$  tais que  $z = f(x, y)$  e  $(x, y)$  pertencente ao domínio da função  $f$ .

**Exemplo 2.2** A figura 2.1 representa o gráfico da função  $g(x, y) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$ .

Uma outra forma de estudar graficamente uma função é através do uso dos conjuntos de nível.

Figura 2.1: Gráfico da função  $g$ 

**Definição 2.5** (Conjunto de nível). *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $k \in \mathbb{R}$ .*

*Define-se conjunto de nível  $k$  como sendo o conjunto dos pontos do domínio  $D$  cuja imagem é igual a  $k$ , ou seja*

$$N_k = \{X \in D : f(X) = k\}.$$

Para funções de duas variáveis  $f(x, y)$ , um conjunto de nível chama-se *curva de nível* e um conjunto de curvas de nível chama-se *diagrama de nível*. Para funções de três variáveis  $f(x, y, z)$ , os conjuntos de nível chamam-se *superfícies de nível*.

**Exemplo 2.3** Para a função  $f(x, y) = x^2 + y^2$  tem-se que o seu gráfico é um parabolóide e as suas curvas de nível são circunferências concêntricas de centro  $(0, 0)$ . Observe a figura 2.2.

**Exemplo 2.4** Considere a função  $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . O gráfico da função  $h$  é um subconjunto do espaço  $\mathbb{R}^4$ , daí não ser possível apresentar um esboço do mesmo. Contudo, é possível visualizar, em  $\mathbb{R}^3$ , os conjuntos de nível  $k$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) de  $h$ , as chamadas superfícies de nível, que “resultam da intersecção do gráfico de  $h$  com um espaço  $\mathbb{R}^3$  ao nível  $k$ ”. De facto, as superfícies de nível  $k$  de  $h$  são as seguintes:

$$N_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = k\} = \emptyset, \text{ se } k < 0;$$

$$N_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\} = \{(0, 0, 0)\}, \text{ se } k = 0;$$

$$N_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = k\}, \text{ esferas de centro } (0, 0, 0) \text{ e raio } \sqrt{k}, \text{ se } k > 0.$$

## 2.2 Limites e continuidade

A ideia de limite e de continuidade de funções reais de várias variáveis são as mesmas que resultaram nas definições de limite e de continuidade para funções reais de uma só variável. No entanto, na prática, existem diferenças resultantes do facto de o espaço  $\mathbb{R}$  ser orientado isto é, existe uma ordem entre os seus elementos, e o espaço  $\mathbb{R}^n$  ( $n > 1$ ) não o ser.

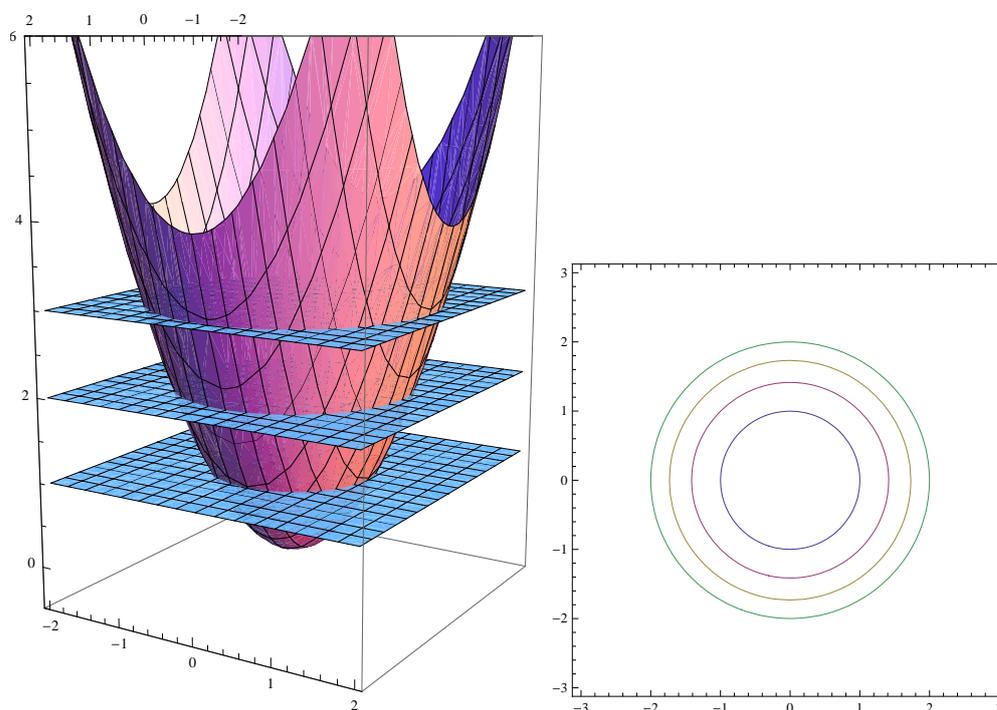


Figura 2.2: Secções horizontais de  $f(x, y) = x^2 + y^2$

**Definição 2.6** (Limite). *Sejam  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $A$  um ponto de acumulação de  $D$ .*

*Diz-se que o limite de  $f$  quando  $X$  tende para  $A$  é o número real  $\ell$  se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left( 0 < \|X - A\| < \delta \text{ e } X \in D \right) \Rightarrow |f(X) - \ell| < \varepsilon,$$

*denotando-se por*

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \ell.$$

A ideia presente na definição apresentada é a de que um número real  $\ell$  é o limite de uma função  $f$  quando  $X$  tende para  $A$  se, sempre que os objectos  $X \in D \setminus \{A\}$  se aproximam de  $A$  então as respectivas imagens  $f(X)$  se aproximam de  $\ell$ . Para funções de uma só variável,  $x \rightarrow a$  significa que  $x \rightarrow a^+$  ou  $x \rightarrow a^-$ , ao passo que, para funções de várias variáveis, escrever  $X \rightarrow A$  significa que os objectos  $X$  seguem uma qualquer trajectória para chegar a  $A$ , existindo uma infinidade de trajectórias distintas para o fazer. Assim sendo, em  $\mathbb{R}^n$  ( $n > 1$ ), não faz sentido falar em limites laterais, mas sim em *limites trajectoriais*, i.e., dada uma curva  $\mathcal{C}$  que contém o ponto  $A$ , fazer tender  $X$  para  $A$  com  $X$  pertencente à curva  $\mathcal{C}$ . Os limites trajectoriais representam-se por

$$\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in \mathcal{C}}} f(X).$$

Como consequência da definição de limite tem-se que, se existe  $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \ell$ , então

todos os limites trajectoriais  $\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in C}} f(X)$  existem e são iguais a  $\ell$ . Daí que, se existem  $C_1$  e  $C_2$  curvas distintas contendo  $A$  tais que

$$\nexists \lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in C_1}} f(X) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in C_1}} f(X) \neq \lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in C_2}} f(X),$$

então o limite  $\lim_{X \rightarrow A} f(X)$  não existe. Mais, a conclusão de que certo limite existe não pode ser obtida apenas pela análise dos limites trajectoriais, mas sim através da definição ou do uso de alguma proposição apresentada adiante.

Seguem-se algumas propriedades dos limites cujas demonstrações estão omitidas. Os alunos poderão consultar as provas na bibliografia indicada, [2]. Sendo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções, são válidas as seguintes proposições:

**Unicidade de Limite:** se  $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \ell_1$  e  $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \ell_2$ , então  $\ell_1 = \ell_2$ ;

**Enquadramento:** se existem  $\ell \in \mathbb{R}$  e  $r > 0$  tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} |f(X) - \ell| \leq g(X), \quad \forall X \in B_r(A) \setminus \{A\} \\ \lim_{X \rightarrow A} g(X) = 0 \end{array} \right. , \quad \text{então} \quad \lim_{X \rightarrow A} f(X) = \ell.$$

**Produto de uma função limitada por um infinitésimo:**

$$\text{Se} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{X \rightarrow A} f(X) = 0 \\ g \text{ é limitada} \end{array} \right. , \quad \text{então} \quad \lim_{X \rightarrow A} f(X)g(X) = 0.$$

**Aritmética de limites:** Se  $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \ell_1$  e  $\lim_{X \rightarrow A} g(X) = \ell_2$ , então:

$$\lim_{X \rightarrow A} \lambda f(X) = \lambda \ell_1, \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R};$$

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) + g(X) = \ell_1 + \ell_2;$$

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X)g(X) = \ell_1 \ell_2;$$

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \quad \text{caso } \ell_2 \neq 0.$$

**Exemplo 2.5** Usando a definição de limite, mostre que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-5xy^3}{2x^2 + 3y^2} = 0$ .

O domínio de  $f(x, y) = \frac{-5xy^3}{2x^2 + 3y^2}$  é  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Pretende-se provar que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left( (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \text{ e } \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \right) \implies \left| \frac{-5xy^3}{2x^2 + 3y^2} \right| < \varepsilon.$$

Note que

$$\left| \frac{-5xy^3}{2x^2 + 3y^2} \right| = \frac{5}{3} |x| |y| \frac{3y^2}{2x^2 + 3y^2} \leq \frac{5}{3} |x| |y|$$

e como

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

conclui-se que

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \implies \begin{cases} |x| < \delta \\ |y| < \delta \end{cases} \implies \left| \frac{-5xy^3}{2x^2 + 3y^2} \right| < \frac{5}{3} \delta^2.$$

Consequentemente, dado arbitrariamente  $\varepsilon > 0$ , pretende-se obter

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \implies \left| \frac{-5xy^3}{2x^2 + 3y^2} \right| < \varepsilon,$$

mas já se viu que

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \implies \left| \frac{-5xy^3}{2x^2 + 3y^2} \right| < \frac{5}{3} \delta^2.$$

Assim, basta escolher  $\delta$  tal que  $\frac{5}{3} \delta^2 = \varepsilon$ , ou seja  $\delta = \sqrt{\frac{3}{5}} \varepsilon$ , para se mostrar o pretendido.

**Exemplo 2.6** Mostre que não existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$ .

Considerando as rectas não verticais que passam pela origem, de equação  $y = mx$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , e calculando os respectivos limites trajectoriais obtém-se

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{x+y}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+mx}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+m}{x(1+m^2)}.$$

Como o último limite existe apenas quando  $m = -1$ , caso em que vale 0, conclui-se que o limite não existe.

**Exemplo 2.7** Mostre que não existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ .

Considerando as rectas de equações  $y = 0$  e  $x = 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1. \end{aligned}$$

Como os dois limites trajectoriais são diferentes, conclui-se a não existência do limite.

**Exemplo 2.8**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( e^{xy} + \frac{x^4 y}{x^4 + y^2} \right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( e^{xy} + \frac{x^4}{x^4 + y^2} y \right) = 1$

porque  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{xy} = 1$ ,  $0 \leq \frac{x^4}{x^4 + y^2} \leq 1$ ,  $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ , e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$ .

**Exemplo 2.9**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}{\frac{1}{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0$$

porque  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0$  e  $\left| \operatorname{sen} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right| \leq 1$ ,  $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ .

Como caso particular dos limites trajectoriais, aparecem os chamados "limites iterados". No cálculo do limite

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, \dots, x_n),$$

todas as componentes  $x_i$  estão a tender, em **simultâneo**, para os correspondentes  $a_i$ , ao passo que, no limite

$$\lim_{x_n \rightarrow a_n} \left( \lim_{x_{n-1} \rightarrow a_{n-1}} \cdots \left( \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, \dots, x_n) \right) \cdots \right) \quad (2.1)$$

as componentes  $x_i$  tendem sucessivamente para os correspondentes  $a_i$ . A cada um dos  $n!$  limites do tipo (2.1) chama-se *limite iterado*.

**Exercício** Justifique que os limites iterados são limites trajectoriais.

**Exemplo 2.10** O limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-2x + 3y^3}{5x + y^2}$  não existe porque os seus limites iterados são diferentes:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x + 3y^3}{5x + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3y^3}{y^2} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2x + 3y^3}{5x + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{5x} = -\frac{2}{5}.$$

**Nota 2.1** Ao estudar o limite  $\lim_{X \rightarrow A} f(X)$ , ainda que existam todos os limites iterados e sejam iguais a um certo  $\ell$  e exista um número apreciável de limites trajectoriais, também todos iguais a  $\ell$ , não se pode concluir, de forma alguma, que o limite  $\lim_{X \rightarrow A} f(X)$  exista e muito menos que seja igual a  $\ell$ . Apenas se pode dizer o seguinte: se o limite existir ele será igual a  $\ell$ .

**Definição 2.7** (Continuidade). *Sejam  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $X_0 \in D$ .*

*Diz-se que  $f$  é contínua em  $X_0$  quando*

$$X_0 \text{ é um ponto isolado de } D$$

ou

$$X_0 \text{ é um ponto de acumulação de } D \text{ e } \lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = f(X_0).$$

Diz-se que uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é *contínua* quando  $f$  é contínua em todos os pontos do domínio  $D$ .

Como consequência imediata da definição de continuidade de funções reais de várias variáveis reais e das propriedades da aritmética dos limites tem-se que o produto, a soma e o quociente de funções contínuas é ainda uma função contínua. Daqui se depreende ainda que uma função polinomial de várias variáveis (soma finita de parcelas do tipo  $cx_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$ , onde  $c$  é uma constante real,  $n_1, \dots, n_k$  são números naturais e  $(x_1, \dots, x_n)$  são os objectos) é uma função contínua. Mais, qualquer função racional (quociente de dois polinómios) é também uma função contínua em todos os pontos do seu domínio.

**Proposição 2.1.** *Se  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $A = (a_1, \dots, a_n)$  e  $g : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(D) \subseteq U$ , é uma função contínua, então a função composta  $h = g \circ f$ , definida por  $h(x_1, \dots, x_n) = g(f(x_1, \dots, x_n))$ , é contínua em  $A = (a_1, \dots, a_n)$ .*

*Demonstração.* Quando  $A$  é um ponto isolado de  $D$ , imediatamente da definição tem-se que  $h$  é contínua em  $A$ .

Suponha-se que  $A \in D$  é um ponto de acumulação de  $D$ . Da definição de função composta tem-se

$$\lim_{X \rightarrow A} h(X) = \lim_{X \rightarrow A} (g \circ f)(X) = \lim_{X \rightarrow A} g(f(X))$$

e, como  $g$  é uma função contínua de uma só variável, obtém-se

$$\lim_{X \rightarrow A} g(f(X)) = g\left(\lim_{X \rightarrow A} f(X)\right).$$

Sendo  $f$  contínua em  $A$  tem-se  $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A)$ , donde

$$g\left(\lim_{X \rightarrow A} f(X)\right) = g(f(A)) = h(A).$$

Assim,  $\lim_{X \rightarrow A} h(X) = h(A)$  isto é,  $h$  é contínua em  $A$ . □

**Exemplo 2.11** A função  $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$  é contínua em todo o seu domínio,  $\mathbb{R}^2$ , porque  $h = g \circ f$  onde  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ ,  $g(u) = \sqrt{u}$  é contínua em  $[0, +\infty)$  e  $f(\mathbb{R}^2) \subseteq [0, +\infty)$ .

## 2.3 Derivada direcciona

Até final deste capítulo, a menos que algo seja escrito em contrário, quando escrever  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  assume-se sempre que o domínio  $D$  é um conjunto aberto.

**Definição 2.8** (Derivada direcciona). *Sejam  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $A = (a_1, \dots, a_n)$  um ponto interior de  $D$  e  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  um vector.*

*Define-se derivada direcciona de  $f$  segundo a direcção  $\vec{v}$  no ponto  $A$  como sendo o limite*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + h\vec{v}) - f(A)}{h},$$

*caso exista.*

**Exemplo 2.12** Para  $f(x, y) = xy$ ,  $A = (1, 0)$ ,  $\vec{v} = (1, 1)$  e  $\vec{u} = (0, -1)$ , tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((1, 0) + h(1, 1)) - f(1, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)h - 0}{h} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((1, 0) + h(0, -1)) - f(1, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 0}{h} = -1.$$

Geometricamente, a derivada direccional de uma função  $f$  de duas variáveis num ponto  $A = (a, b)$  segundo a direcção de  $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , representa o declive da recta tangente à curva  $C$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$ , onde  $C$  é a curva do espaço que resulta da intersecção do gráfico de  $f$  com o plano (vertical) definido pelo ponto  $(a, b, f(a, b))$  e pelas direcções  $(v_1, v_2, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ .

O resultado que se segue estabelece uma relação entre o sinal da derivada direccional de uma função  $f$  e a sua monotonia.

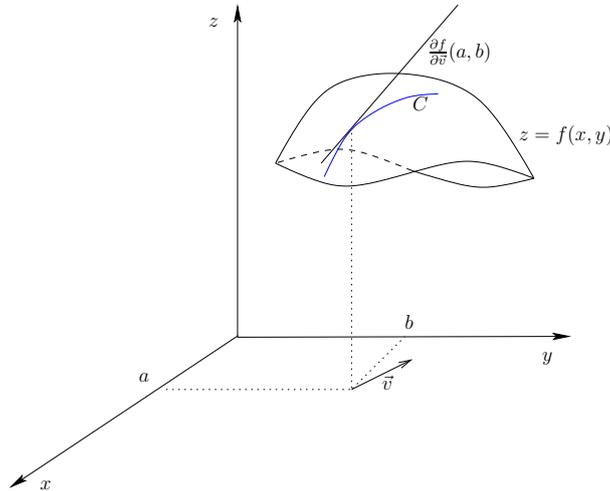


Figura 2.3: Derivada direccional

**Teorema 2.2.** Sejam  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .

Se  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) = 0$  para todo  $A \in D$ , então  $f$  é constante em cada segmento de recta  $S$  contido em  $D$  e paralelo a  $\vec{v}$ .

Se  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) > 0$  para todo  $A \in D$ , então  $f$  é estritamente crescente, no sentido de  $\vec{v}$ , em cada segmento de recta  $S$  contido em  $D$  e paralelo a  $\vec{v}$ .

Se  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) < 0$  para todo  $A \in D$ , então  $f$  é estritamente decrescente, no sentido de  $\vec{v}$ , em cada segmento de recta  $S$  contido em  $D$  e paralelo a  $\vec{v}$ .

*Demonstração.* Seja  $S \subseteq D$  um segmento de recta paralelo a  $\vec{v}$ . Então existem  $P, Q \in D$  e  $a > 0$  tais que

$$S = \{P + x\vec{v} : x \in [0, a]\} \quad \text{e} \quad Q = P + a\vec{v}.$$

Defina-se a função real de uma só variável real

$$\begin{aligned} \varphi : [0, a] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(P + x\vec{v}) \end{aligned}$$

Para  $x \in [0, a]$ , tem-se

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + (x+h)\vec{v}) - f(P + x\vec{v})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((P + x\vec{v}) + h\vec{v}) - f(P + x\vec{v})}{h} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P + x\vec{v}). \end{aligned}$$

Assim, se  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) = 0$  para todo  $A \in D$ , então

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P + x\vec{v}) = 0, \quad \forall x \in [0, a],$$

donde  $\varphi$  é uma função constante e consequentemente  $f$  é constante em  $S$ .

Se  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) > 0$  para todo  $A \in D$ , então

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P + x\vec{v}) > 0, \quad \forall x \in [0, a],$$

donde  $\varphi$  é uma função estritamente crescente e consequentemente  $f$  é estritamente crescente em  $S$  seguindo o sentido de  $\vec{v}$ .

Se  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) < 0$  para todo  $A \in D$ , então

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P + x\vec{v}) < 0, \quad \forall x \in [0, a],$$

donde  $\varphi$  é uma função estritamente decrescente e consequentemente  $f$  é estritamente decrescente em  $S$  seguindo o sentido de  $\vec{v}$ . □

**Proposição 2.3.** *Sejam  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $A \in D$  e  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .*

*Se existe  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A)$ , então  $\frac{\partial(\alpha f)}{\partial(\beta \vec{v})}(A) = \alpha\beta \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A)$  para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Para  $\beta = 0$ , tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial(\beta \vec{v})}(A) = \frac{\partial f}{\partial \vec{0}}(A) = 0 = 0 \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A).$$

Para qualquer  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  tem-se

$$\frac{\partial(\alpha f)}{\partial(\beta \vec{v})}(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha f(A + h\beta \vec{v}) - \alpha f(A)}{h} = \alpha\beta \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + \beta h \vec{v}) - f(A)}{\beta h} = \alpha\beta \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A).$$

□

## 2.4 Derivada parcial

**Definição 2.9** (Derivada parcial). *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $A \in D$  e  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  os vectores da base canónica de  $\mathbb{R}^n$  isto é,  $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , define-se derivada parcial de  $f$  em ordem a  $x_i$  no ponto  $A$  como sendo a derivada direccional de  $f$  segundo a direcção  $\vec{e}_i$  no ponto  $A$ , denotando-se por*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A).$$

Da definição obtém-se, para  $A = (a_1, \dots, a_n)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) &= \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + h\vec{e}_i) - f(A)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((a_1, \dots, a_n) + h(0, \dots, 1, \dots, 0)) - f(a_1, \dots, a_n)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}, \end{aligned}$$

donde se observa que, no cálculo do limite anterior isto é, da derivada parcial, a variação ocorre apenas na coordenada da posição  $i$  enquanto que todas as restantes coordenadas se mantêm constantes. Consequentemente, no cálculo da derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ , consideram-se as coordenadas  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  como constantes e deriva-se a função de uma só variável real

$$x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

**Exemplo 2.13** Considere  $f(x, y, z) = xy^2 + ze^{x^2}$ . Usando as conhecidas regras de derivação para funções reais de uma só variável real obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y^2 + 2xze^{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2yx, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = e^{x^2}.$$

Dada uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , define-se a função *derivada parcial* de  $f$  em ordem a  $x_i$  por

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} : U_i &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \end{aligned},$$

onde  $U_i$  é o subconjunto dos pontos de  $D$  para os quais a derivada parcial de  $f$  em ordem a  $x_i$  existe. Assim, sendo  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  também uma função real de  $n$  variáveis reais, pode-se igualmente pensar nas suas derivadas parciais em ordem a cada uma das coordenadas. Pode-se então falar nas derivadas parciais de  $f$  de segunda ordem, denotam-se por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)}{\partial x_i}, \quad \text{para } i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_i}, \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

De forma análoga se definem as derivadas parciais de  $f$  de terceira ordem, denotando-se por

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right), \quad \text{para } i, j, k = 1, \dots, n$$

e

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \right), \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n.$$

Igualmente se definem as derivadas parciais de  $f$  de qualquer ordem  $m \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 2.14** Para a função  $f(x, y) = x \operatorname{sen}(y^2)$  tem-se as seguintes derivadas parciais de primeira ordem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \operatorname{sen}(y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy \cos(y^2)$$

e de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x \cos(y^2) - 4xy^2 \operatorname{sen}(y^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2y \cos(y^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2y \cos(y^2).$$

As derivadas de segunda ordem de  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  do tipo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \text{com } i \neq j,$$

chamam-se *derivadas mistas* ou *cruzadas*. Apesar de no exemplo anterior estas serem iguais, este facto nem sempre acontece. Na verdade, as derivadas parciais cruzadas podem ser diferentes isto é,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \text{para } i \neq j,$$

como se ilustra com o exemplo que se segue.

**Exemplo 2.15** Calcular  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  onde

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

As derivadas parciais de primeira ordem são

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{-y^5 + 4x^2 y^3 + x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e as derivadas parciais de segunda ordem na origem são

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^5/h^4 - 0}{h} = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k^5/k^4 - 0}{k} = -1.\end{aligned}$$

Neste caso  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ .

O exemplo anterior evidencia que, no cálculo das derivadas parciais cruzadas, não é indiferente a ordem pela qual a derivação é feita. No entanto, o teorema que se segue, conhecido por *Teorema de Schwarz*, garante que, em certas condições de regularidade da função  $f$ , as derivadas cruzadas são iguais isto é, estabelece condições suficientes perante as quais é indiferente a ordem pela qual a derivação é feita.

**Teorema 2.4** (Teorema de Schwarz). *Sejam  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $A \in D$  tais que existem as derivadas parciais*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A), \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(A), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A).$$

*Se são contínuas em  $A$  as funções  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ , então também existe a derivada parcial  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)$  e tem-se*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A).$$

*Demonstração.* Ver Teorema 6.2 de [3]. □

**Nota 2.2** Observe que, no Exemplo 2.14, as funções  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(y^2)$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2y \cos(y^2)$  são contínuas em todos os pontos  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ , logo, pelo Teorema de Schwarz conclui-se que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2y \cos(y^2).$$

Da mesma forma que se definiu derivada parcial de ordem superior à primeira, também se pode definir derivada direccional de ordem superior à primeira. Dada uma função  $f$  de  $n$  variáveis reais, cada derivada direccional de  $f$  segundo um vector  $\vec{v}$ , se existir, é também uma função real de  $n$  variáveis reais. Define-se então as *derivadas direccionais de segunda ordem de  $f$*  por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{w} \partial \vec{v}} = \frac{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \right)}{\partial \vec{w}}, \quad \text{para } \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n.$$

De forma análoga se pode ainda definir as *derivadas direccionais de terceira ordem de  $f$*  e sucessivamente as derivadas direccionais de ordem  $m \in \mathbb{N}$ .

## 2.5 Derivada

Na noção de função derivável está presente uma certa noção de regularidade no comportamento da função. Esta situação reflecte-se no resultado, conhecido dos alunos, que diz que qualquer função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que seja derivável num ponto  $a \in \mathbb{R}$  é também contínua nesse ponto. Contudo, existem funções reais de várias variáveis que, admitindo todas as derivadas direccionais num certo ponto, são descontínuas nesse ponto. Por exemplo, a função  $f$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

possui todas as derivadas direccionais no ponto  $(0, 0)$ , mas é descontínua em  $(0, 0)$ . Neste sentido, a derivada direccional não é a generalização natural, para funções de várias variáveis, da noção de derivada de uma função real de uma só variável.

Relembre que, para uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivável em  $a \in \mathbb{R}$  tem-se

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))}{x - a} = 0,$$

donde se conclui que a recta  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$  é uma boa aproximação polinomial de primeiro grau (de facto é a melhor) para o gráfico de  $f$  em pontos  $x$  "próximos" de  $a$ . De forma natural surge a seguinte generalização da noção de derivada para funções reais de várias variáveis.

**Definição 2.10** (Derivada). *Sejam  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $A = (a_1, \dots, a_n) \in D$ . Diz-se que  $f$  é diferenciável em  $A$  (ou derivável em  $A$ ) se existem*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)$$

e

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X) - \left( f(A) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)(x_n - a_n) \right)}{\|X - A\|} = 0. \quad (2.2)$$

Chama-se derivada de  $f$  em  $A$ , ou diferencial de  $f$  em  $A$ , à função linear

$$f'(A) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_n) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)v_n \end{array}. \quad (2.3)$$

**Nota 2.3** Do limite (2.2) presente na definição de derivada, obtém-se a seguinte aproximação para  $f(x_1, \dots, x_n)$ , com  $(x_1, \dots, x_n)$  "próximo de"  $(a_1, \dots, a_n)$ ,

$$f(X) = f(x_1, \dots, x_n) \approx f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)(x_i - a_i). \quad (2.4)$$

**Nota 2.4** Sendo a derivada, num ponto  $A$ , de uma função  $f$  de várias variáveis,  $f'(A)$ , a aplicação linear apresentada em (2.3), esta é representada pela seguinte matriz (relativa às bases canónicas em  $\mathbb{R}^n$  e em  $\mathbb{R}$ ),

$$\mathcal{M}(f'(A)) = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \end{array} \right]_{1 \times n}$$

**Definição 2.11** (Derivada função vectorial). *Uma função vectorial*

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ X &\mapsto (f_1(X), \dots, f_m(X)) \end{aligned}$$

diz-se diferenciável (ou derivável) em  $A \in \mathbb{R}^n$  se todas as suas funções componentes  $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  forem deriváveis em  $A$ . Define-se derivada de  $F$  em  $A$ ,  $F'(A)$ , como sendo a aplicação linear de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$  cuja matriz que a representa (em relação às bases canônicas) é

$$\mathcal{M}(F'(A)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(A) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(A) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(A) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(A) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(A) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(A) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(A) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(A) \end{bmatrix}_{m \times n}$$

À matriz das derivadas parciais de  $F$  em  $A$ ,  $\mathcal{M}(F'(A))$ , chama-se matriz Jacobiana de  $F$  em  $A$ .

Ao determinante da matriz Jacobiana de uma função  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  chama-se *Jacobiano* de  $F$  e denota-se por

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \det \mathcal{M}(F'(X)).$$

O resultado seguinte estabelece um primeiro critério de diferenciabilidade para funções reais de várias variáveis.

**Teorema 2.5.** *Sejam  $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $A \in D$ .*

*Se existem e são contínuas em  $A$  todas as derivadas parciais de primeira ordem de  $f$  em  $A$ , então  $f$  é diferenciável em  $A$ .*

*Demonstração.* Ver Proposição 4.1 de [3]. □

Se uma função  $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  possui todas as derivadas parciais contínuas até à ordem  $k \in \mathbb{N}$ , diz-se que é de classe  $C^k$  em  $D$ . No caso em que  $f$  possui todas as derivadas parciais de qualquer ordem, diz-se que  $f$  é de classe  $C^\infty$ . Claramente se conclui que

$$C^1 \supseteq C^2 \supseteq \dots \supseteq C^k \supseteq \dots \supseteq C^\infty,$$

e, analogamente ao que acontece em funções reais de uma só variável, todas as inclusões são estritas.

**Exemplo 2.16** A função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^4} + y$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ , porque possui todas as derivadas parciais de primeira ordem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1$$

e são contínuas, mas  $f$  não é de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^2$  porque não possui todas as derivadas parciais de segunda ordem em  $(0, 0)$ .

**Teorema 2.6.** *Se  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em  $A \in D$ , então  $f$  é contínua em  $A$ .*

*Demonstração.* Sendo  $f$  diferenciável em  $A = (a_1, \dots, a_n)$ , tem-se, por (2.2),

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X) - \left( f(A) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)(x_n - a_n) \right)}{\|X - A\|} = 0$$

o que implica que

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) - \left( f(A) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)(x_n - a_n) \right) = 0,$$

donde

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) - f(A) = 0 \Leftrightarrow \lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A),$$

e conseqüentemente  $f$  é contínua em  $A$ .  $\square$

O seguinte resultado estabelece a relação existente entre os conceitos de derivada e de derivada direccional de uma função derivável.

**Teorema 2.7.** *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $A \in D$ . Então, para qualquer  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , tem-se*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) = f'(A)(\vec{v}). \quad (2.5)$$

*Demonstração.* Sejam  $f$  diferenciável em  $A \in D$  e  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ . De (2.2) conclui-se que

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{|f(X) - f(A) - f'(A)(X - A)|}{\|X - A\|} = 0,$$

donde, fazendo a mudança de variável  $X = A + h\vec{v}$ , se obtém

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(A + h\vec{v}) - f(A) - f'(A)(h\vec{v})|}{\|h\vec{v}\|} = 0$$

o que é equivalente a (notar que  $f'(A)$  é linear)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(A + h\vec{v}) - f(A) - hf'(A)(\vec{v})|}{|h|} = 0 \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(A + h\vec{v}) - f(A)}{h} - f'(A)(\vec{v}) \right| = 0,$$

e conseqüentemente

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + h\vec{v}) - f(A)}{h} = f'(A)(\vec{v}),$$

ou seja

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) = f'(A)(\vec{v}).$$

$\square$

**Nota 2.5** Como consequências do teorema anterior, é relevante referir que:

1. Quando  $f$  é diferenciável em  $A$ , o Teorema 2.7 fornece uma fórmula simples para calcular a derivada direccional  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A)$ , sem recorrer à definição. Para isso basta calcular as derivadas parciais e usar a igualdade (2.5) do teorema. Mas atenção, a igualdade (2.5) só pode ser usada depois de garantida a diferenciabilidade de  $f$  no ponto  $A$ ;
2. O Teorema 2.7, estabelece dois critérios de diferenciabilidade para uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  no ponto  $A$ , nomeadamente:
  - (a) se não existe  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A)$  para algum  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , então  $f$  não é diferenciável em  $A$ ;
  - (b) se para algum vector  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) \neq \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)v_n$$

então  $f$  não é diferenciável em  $A$ .

Ainda do Teorema 2.7, para uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável em  $A \in D$ , tem-se, para todo  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)v_n = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right) \cdot \vec{v}. \quad (2.6)$$

**Definição 2.12** (Vector gradiente). *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável em  $A \in D$ .*

*Chama-se vector gradiente de  $f$  no ponto  $A$ , denotando-se por  $\nabla f(A)$ , ao vector de  $\mathbb{R}^n$*

$$\nabla f(A) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right).$$

De (2.5) e de (2.6) obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) = f'(A)(\vec{v}) = \nabla f(A) \cdot \vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

e consequentemente, para qualquer  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|\vec{u}\| = 1$ , tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(A) = \nabla f(A) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(A)\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos \theta = \|\nabla f(A)\| \cdot \cos \theta, \quad (2.7)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre os vectores  $\nabla f(A)$  e  $\vec{u}$ . Assim, da igualdade (2.7), conclui-se que:

1. A taxa de variação máxima de  $f$ , partindo de  $A$ , verifica-se quando  $\theta = 0$  isto é, quando o vector  $\vec{u}$  tem a direcção e o sentido do vector  $\nabla f(A)$ ;
2. A taxa de variação mínima de  $f$ , partindo de  $A$ , verifica-se quando  $\theta = \pi$  isto é, quando o vector  $\vec{u}$  tem a direcção do vector  $\nabla f(A)$  e o sentido contrário ao do vector  $\nabla f(A)$ ;
3. A taxa de variação de  $f$ , partindo de  $A$ , é nula quando  $\theta = \frac{\pi}{2}$  isto é, quando o vector  $\vec{u}$  é perpendicular ao vector  $\nabla f(A)$ . Neste caso, quando  $\nabla f(A)$  não é o vector nulo, tem-se que  $\nabla f(A)$  é normal ao conjunto de nível  $f(A)$  de  $f$  no ponto  $A$ .

**Proposição 2.8.** *De todas as direcções e sentidos segundo os quais uma função derivável,  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , é estritamente crescente partindo de um ponto  $A \in D$ , o vector gradiente de  $f$  em  $A$  é aquele que aponta na direcção e sentido de crescimento mais acentuado.*

**Exemplo 2.17** Considere a superfície  $S$  do espaço  $\mathbb{R}^3$  definida pelo conjunto dos pontos

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy^2 + 3x - z^2 = 4\}.$$

Pretende-se obter a equação do plano tangente à superfície  $S$  no ponto  $P = (2, 1, -2)$  e as equações da recta normal à superfície  $S$  no mesmo ponto  $P$ .

Para definir um plano é necessário obter um ponto pertencente ao plano e um vector director (ou seja um vector perpendicular ao plano).

O ponto é  $P = (2, 1, -2)$ .

Para obter o vector director é necessário considerar a superfície  $S$  como uma superfície de nível de uma certa função de três variáveis reais. Mais concretamente, tem-se que

$$S = N_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy^2 + 3x - z^2 = 4\}$$

é a superfície de nível 4 da função  $f(x, y, z) = xy^2 + 3x - z^2$ . Das propriedades do vector gradiente tem-se que  $\nabla f(P)$  é o vector que se procura. Assim,

$$\nabla f(P) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1, -2), \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1, -2), \frac{\partial f}{\partial z}(2, 1, -2) \right) = (4, 4, 4)$$

e a equação do plano tangente é

$$(\vec{PX}) \cdot \nabla f(P) = 0 \iff (x - 2, y - 1, z + 2) \cdot (4, 4, 4) = 0,$$

ou seja  $4x + 4y + 4z - 4 = 0$ .

Para obter a recta normal, é só escrever a recta que passa em  $P$  e tem a direcção de  $\nabla f(P)$  isto é, a recta de equação vectorial

$$(x, y, z) = (2, 1, -2) + \lambda(4, 4, 4), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

da qual se podem obter as equações gerais

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 1}{4} = \frac{z + 2}{4}.$$

## 2.6 Significado geométrico da derivada ( $\mathbb{R}^2$ )

Suponha-se que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Então existem as derivadas parciais de  $f$  em  $(a, b)$  e, de (2.2), conclui-se que

$$f(x, y) = f(a, b) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)}_{f'(a, b)(\vec{v}), \text{ parte linear}} + \underbrace{r(x, y)}_{\text{resto}}, \quad (2.8)$$

para todo o vector  $\vec{v} = (x - a, y - b) \in \mathbb{R}^2$ , com

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{r(x,y)}{\|(x-a, y-b)\|} = 0. \quad (2.9)$$

Do limie (2.9) tem-se que, para  $(x, y)$  suficientemente próximo de  $(a, b)$ , o valor do resto  $r(x, y)$  é muito pequeno pelo que, de (2.8), a função afim

$$P(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b),$$

cujos seu gráfico é uma superfície planar, é uma “boa” aproximação para  $f(x, y)$ .

**Definição 2.13** (Plano tangente). *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $(a, b) \in D$ . Chama-se plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$ , ao plano de equação*

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b),$$

onde  $f(a, b)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  são constantes reais.

**Nota 2.6** Observe que o gráfico de uma função real  $f$  de duas variáveis reais pode ser sempre considerado como a superfície de nível de uma certa função de três variáveis reais e, seguindo um raciocínio semelhante ao do último exemplo da secção anterior, assim obter o plano tangente ao gráfico de  $f$  num ponto dado. Com efeito, para uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , o gráfico de  $f$  foi definido como sendo o conjunto

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ e } z = f(x, y)\},$$

que pode ser escrito na forma

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ e } z - f(x, y) = 0\},$$

donde se conclui que o  $\text{Graf}(f)$  é o conjunto de nível zero da função  $g(x, y, z) = z - f(x, y)$ .

## 2.7 Derivada da função composta: Regra da Cadeia

Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável de  $n$  variáveis reais  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e suponha-se que cada uma das variáveis  $x_i$  é em si uma função derivável de  $m$  variáveis reais ou seja,  $x_i = x_i(t_1, \dots, t_m)$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $(t_1, \dots, t_m) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ . Se

$$(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)) \in D, \quad \text{para todo } (t_1, \dots, t_m) \in U,$$

então está definida a função composta  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$h(t_1, \dots, t_m) = f(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)), \text{ para todo } (t_1, \dots, t_m) \in U.$$

De facto,  $h = f \circ \mathcal{X}$ , onde a função  $\mathcal{X} : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é definida por

$$\mathcal{X}(t_1, \dots, t_m) = (x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)).$$

Seendo  $f$  diferenciável em  $A = (a_1, \dots, a_n)$  e  $\mathcal{X}$  diferenciável em  $B = (b_1, \dots, b_m)$ , com  $\mathcal{X}(B) = A$ , tem-se que a função composta  $h = f \circ \mathcal{X}$  é diferenciável em  $B$  e

$$h'(B) = f'(\mathcal{X}(B)) \cdot \mathcal{X}'(B), \quad (2.10)$$

onde “ $\cdot$ ” representa o produto de matrizes. Mais concretamente, a igualdade (2.10) tem a forma

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial t_1}(B) & \cdots & \frac{\partial h}{\partial t_m}(B) \end{bmatrix}_{1 \times m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \end{bmatrix}_{1 \times n} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1}(B) & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_m}(B) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1}(B) & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_m}(B) \end{bmatrix}_{n \times m}$$

donde se obtém, para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ , a conhecida *regra da cadeia*

$$\frac{\partial h}{\partial t_i}(B) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \frac{\partial x_1}{\partial t_i}(B) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) \frac{\partial x_2}{\partial t_i}(B) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \frac{\partial x_n}{\partial t_i}(B). \quad (2.11)$$

**Exemplo 2.18** Considere a função  $f$  definida por  $f(x, y) = x^2y$ , com  $x = x(u, v) = uv$  e  $y = y(u, v) = ue^v$ . Usando a regra da cadeia, pretende-se obter as derivadas parciais da função  $h(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ .

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) = 2xyv + x^2e^v = 2u^2v^2e^v + u^2v^2e^v,$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) = 2xyu + x^2ue^v = 2u^3ve^v + u^3v^2e^v.$$

## 2.8 Função implícita

Dada uma equação do tipo  $F(x, y) = 0$ , situações existem em que não existe solução da equação, por exemplo

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

Também existem situações em que o valor da variável  $y$  não fica univocamente determinado pela escolha da variável  $x$ , por exemplo

$$\text{sen}(y) + \cos(x) = 0.$$

Mais, existem ainda situações em o valor da variável  $y$  fica univocamente determinado pela escolha da variável  $x$ , por exemplo

$$x^2y + x + 3y = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3)y = -x \Leftrightarrow y = -\frac{x}{x^2 + 3}.$$

Nesta última situação a variável  $y$  é uma função de  $x$  ou seja,  $y = y(x) = -\frac{x}{x^2 + 3}$ , e neste caso diz-se que a equação  $x^2y + x + 3y = 0$  define  $y$  como função de  $x$ .

Finalmente, é relevante referir que dada uma equação do tipo  $F(x, y) = 0$  para a qual o valor de  $y$  fica univocamente determinado pela escolha de  $x$ , nem sempre é possível resolver a equação em ordem a  $y$  isto é, obter de forma explícita a resolução

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = y(x).$$

Neste caso diz-se que a equação  $F(x, y) = 0$  define *implicitamente*  $y$  como uma função de  $x$ , tendo-se  $F(x, y(x)) = 0$  para todo  $x \in I$  ( $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ ).

A ideia aqui apresentada pode, de forma natural, ser generalizada para equações com mais do que duas variáveis.

**Definição 2.14** (Função implícita). *Sejam  $F : D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $(A, b) \in D$  uma solução da equação*

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = 0. \quad (2.12)$$

*Diz-se que a equação (2.12) define implicitamente  $y$  como função de  $(x_1, \dots, x_n)$  se existem uma função  $y = y(x_1, \dots, x_n)$  e um aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  contendo o ponto  $A$  tais que*

$$F(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n)) = 0 \quad \text{para todo } (x_1, \dots, x_n) \in U.$$

O teorema que se segue apresenta condições sob as quais se pode afirmar que a equação  $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$  define implicitamente  $y$  como função de  $(x_1, \dots, x_n)$ . A demonstração envolve noções e resultados matemáticos fora do âmbito deste curso pelo que está omitida. Contudo as ideias podem ser exploradas em [2].

**Teorema 2.9** (Teorema da função implícita). *Sejam  $F : D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $(A, b) = (a_1, \dots, a_n, b) \in D$  tais que*

1.  $F(a_1, \dots, a_n, b) = 0$ ;
2.  $F$  é de classe  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ;
3.  $\frac{\partial F}{\partial y}(a_1, \dots, a_n, b) \neq 0$ .

*Então a equação  $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$  define a variável  $y$  como função de  $(x_1, \dots, x_n)$  para  $(x_1, \dots, x_n)$  “próximo” de  $(a_1, \dots, a_n)$  isto é,*

$$\exists r > 0 \text{ tal que } F(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n)) = 0, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in B_r(A).$$

*Mais, a função  $y$  é de classe  $C^k$ .*

**Teorema 2.10.** *Suponha-se que  $F$  está nas condições do teorema da função implícita. Então, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , tem-se*

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \dots, x_n, y)}$$

*para todo  $(x_1, \dots, x_n) \in B_r(A)$ .*

*Demonstração.* Estando nas condições do Teorema da função implícita, conclui-se que existem  $r > 0$  e a função  $y = y(x_1, \dots, x_n)$  tais que

$$F(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n)) = 0, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in B_r(A). \quad (2.13)$$

Seja  $i \in \{1, \dots, n\}$  e denote-se  $(X, y) = (x_1, \dots, x_n, y)$ . Pela regra da cadeia, derivando ambos os membros da equação (2.13) em ordem a  $x_i$ , obtém-se

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(X, y) \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_i}(X, y) \frac{\partial x_i}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(X, y) \frac{\partial x_n}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y}(X, y) \frac{\partial y}{\partial x_i}(X) = 0.$$

Como  $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = 0$ , para  $j \neq i$ , e  $\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1$ , tem-se

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(X, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(X, y) \frac{\partial y}{\partial x_i}(X) = 0$$

e conseqüentemente

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}(X) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(X, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(X, y)}.$$

□

**Exemplo 2.19** Considere a equação

$$e^{xy} + \operatorname{sen}\left(\frac{xe^{y\pi}}{2}\right) - 2 = 0. \quad (2.14)$$

Pretende-se demonstrar que a equação (2.14) define implicitamente  $y$  como função de  $x$ . A função  $F(x, y) = e^{xy} + \operatorname{sen}\left(\frac{xe^{y\pi}}{2}\right) - 2$  é de classe  $C^\infty$  e  $(x, y) = (1, 0)$  é uma solução de (2.14). Como  $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 1 \neq 0$ , pelo Teorema da função implícita conclui-se que a equação (2.14) define  $y$  como função de  $x$  "próximo" de 1 isto é, existem  $y = y(x)$  função de classe  $C^\infty$  e  $\delta > 0$  tais que

$$e^{xy(x)} + \operatorname{sen}\left(\frac{xe^{y(x)\pi}}{2}\right) - 2 = 0, \quad \forall x \in ]1 - \delta, 1 + \delta[.$$

Mais,  $y(1) = 0$  e

$$y'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1, 0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0)} = -\frac{0}{1} = 0.$$

## 2.9 Polinómio de Taylor

A fórmula de Taylor permite obter aproximações polinomiais para uma qualquer função derivável  $f$  e daí retirar todas as vantagens que a simplicidade das funções polinomiais possuem. Como se verá, teoricamente, a qualidade da aproximação a obter depende apenas das propriedades de diferenciabilidade que a função  $f$  possui.

Comece-se por recordar a fórmula de *Taylor Lagrange* para funções reais de uma só variável, conhecida pelos alunos de um curso prévio de Análise Matemática em  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 2.11.** *Sejam  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $n+1$  vezes derivável em  $I$  e  $a \in I$ . Então, para cada  $x \in I$ , existe  $\theta$  entre  $x$  e  $a$  tal que*

$$f(x) = \mathcal{P}_{n,a}(x) + \mathcal{R}_{n,a}(x), \quad (2.15)$$

onde  $\mathcal{P}_{n,a}(x)$  é o polinómio de Taylor de ordem  $n$  de  $f$  em torno de  $a$  dado por

$$\mathcal{P}_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \quad (2.16)$$

e  $\mathcal{R}_{n,a}(x)$  é o resto de Lagrange de ordem  $n$  de  $f$  em torno de  $a$  dado por

$$\mathcal{R}_{n,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta)(x-a)^{n+1}. \quad (2.17)$$

Mais, o resto de Lagrange verifica a condição

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\mathcal{R}_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0. \quad (2.18)$$

O polinómio de Taylor para funções de várias variáveis vem melhorar a aproximação polinomial previamente obtida em (2.4).

**Teorema 2.12** (Teorema de Taylor). *Sejam  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^{m+1}$ ,  $r > 0$  e  $A \in D$  tais que  $B_r(A) \subseteq D$ . Então, para cada  $X \in B_r(A)$  e  $\vec{v} = A\vec{X}$ , existe  $\theta \in ]0, 1[$  tal que*

$$f(X) = \mathcal{P}_{m,A}(X) + \mathcal{R}_{m,A}(X), \quad (2.19)$$

onde  $\mathcal{P}_{m,A}(X)$  é o polinómio de Taylor de ordem  $m$  de  $f$  em torno de  $A$  dado por

$$\mathcal{P}_{m,A}(X) = f(A) + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v}^2}(A) + \cdots + \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial \vec{v}^m}(A) \quad (2.20)$$

e  $\mathcal{R}_{m,A}(X)$  é o resto de Lagrange de ordem  $m$  de  $f$  em torno de  $A$  dado por

$$\mathcal{R}_{m,A}(X) = \frac{1}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial \vec{v}^{m+1}}(A + \theta \vec{v}). \quad (2.21)$$

Mais, o resto de Lagrange verifica a condição

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{\mathcal{R}_{m,A}(X)}{\|X - A\|^m} = 0. \quad (2.22)$$

*Demonstração.* Sejam  $A \in D$  e  $r > 0$  tais que  $B_r(A) \subseteq D$ . Para  $X \in B_r(A)$ , defina-se  $\vec{v} = A\vec{X}$  e considere-se  $S$  o segmento de recta dado por

$$S = \{A + t\vec{v} : t \in [0, 1]\}.$$

Tal como foi feito na prova do Teorema 2.2, defina-se a função real de uma só variável real

$$\varphi : \begin{array}{ll} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto f(A + t\vec{v}) \end{array} .$$

Sendo  $f$  de classe  $C^{m+1}$ , tem-se que a função  $\varphi$  é  $m+1$  vezes derivável e do Teorema 2.11 (fórmula de Taylor-Lagrange para funções de uma só variável) conclui-se que existe  $\theta \in ]0, 1[$  tal que (na fórmula (2.15) considera-se  $x = 1$  e  $a = 0$ )

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \cdots + \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0) + \frac{1}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\theta).$$

Da definição de  $\varphi$  tem-se  $\varphi(0) = f(A)$ ,  $\varphi(1) = f(A + \vec{v}) = f(A + X - A) = f(X)$  e, da contas feitas na prova do Teorema 2.2,  $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A)$ . Mais, pelo mesmo processo de cálculo se verifica que  $\varphi^{(k)}(t) = \frac{\partial^k f}{\partial \vec{v}^k}(A + t\vec{v})$  para  $k \in \{1, \dots, m+1\}$  e  $t \in [0, 1]$ , donde se obtém

$$f(X) = f(A) + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v}^2}(A) + \cdots + \frac{1}{m!}\frac{\partial^m f}{\partial \vec{v}^m}(A) + \frac{1}{(m+1)!}\frac{\partial^{m+1} f}{\partial \vec{v}^{m+1}}(A + \theta\vec{v}).$$

A propriedade verificada pelo resto, (2.22), é uma consequência imediata da propriedade (2.18).  $\square$

Para obter o polinómio de Taylor de ordem  $m \in \mathbb{N}$  de uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  em torno de um ponto  $A \in D$ , é necessário obter todas as derivadas direccionais de  $f$  de ordem  $k \leq m$  no ponto  $A$ . Contudo, tecnicamente, não é viável fazê-lo usando a definição de derivada direccional de ordem superior. Tal como acontece para as derivadas direccionais de primeira ordem, nas funções de classe  $C^m$  é sempre possível obter as derivadas direccionais de ordem  $k$  através do cálculo das derivadas parciais de ordem  $k$ . Efectivamente, considerando  $\vec{v} = \vec{AX} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$  e  $f$  diferenciável em  $A$ , do Teorema 2.7 obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)v_n = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)(x_n - a_n).$$

Como  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$  é também uma função diferenciável em  $A$ , tem-se, ainda pelo Teorema 2.7, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v}^2}(A) &= \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \right) (A) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \right) (A)v_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \right) (A)v_n \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}v_n \right) (A)v_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}v_n \right) (A)v_n \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)(x_i - a_i)(x_j - a_j). \end{aligned}$$

Iterando este processo obtém-se a seguinte fórmula de cálculo das derivadas direccionais de  $f$  de ordem  $k \leq m$  através do conhecimento das derivadas parciais de  $f$  de ordem  $k$ :

$$\frac{\partial^k f}{\partial \vec{v}^k}(A) = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}}(A)(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_p} - a_{i_p}).$$

## 2.10 Extremos livres

Em todas as áreas do saber, desde os problemas práticos da Engenharia até aos problemas teóricos da Física Teórica, a procura de máximos ou de mínimos de funções ocupa um lugar de primordial importância. Isto porque muitos problemas de optimização, como maximizar o aproveitamento da energia, minimizar perdas de calor, maximizar lucros, minimizar custos, etc., podem ser formulados pela procura de máximos, ou de mínimos, de funções reais de várias variáveis reais.

**Definição 2.15** (Extremos locais). *Sejam  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $A \in D$ .*

- Diz-se que  $f$  tem um máximo local em  $A$  se existe  $r > 0$  tal que

$$f(A) \geq f(X), \quad \forall X \in B_r(A).$$

Neste caso o ponto  $A$  chama-se maximizante local de  $f$ .

- Diz-se que  $f$  tem um mínimo local em  $A$  se existe  $r > 0$  tal que

$$f(A) \leq f(X), \quad \forall X \in B_r(A).$$

Neste caso o ponto  $A$  chama-se minimizante local de  $f$ .

- Diz-se que  $f$  tem um extremo local em  $A$  se  $f(A)$  é um máximo ou mínimo local.

Como consequência imediata das propriedades do vector gradiente, Proposição 2.8, obtém-se o seguinte resultado.

**Teorema 2.13.** *Sejam  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $A \in D$ .*

*Se  $f$  tem um extremo local em  $A$ , então  $\nabla f(A) = \vec{0}$ .*

*Demonstração.* Se  $\nabla f(A) \neq \vec{0}$ , então, pela Proposição 2.8, conclui-se que existe  $\delta > 0$  tal que  $f(Y) < f(A) < f(X)$  com  $Y = A - \alpha \nabla f(A)$  e  $X = A + \alpha \nabla f(A)$  para todo  $\alpha \in ]0, \delta[$ . Consequentemente  $f(A)$  não é um extremo local de  $f$ .  $\square$

**Definição 2.16.** *Sejam  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $A \in D$ .*

*Diz-se que  $A$  é um ponto crítico de  $f$  se  $\nabla f(A) = \vec{0}$ .*

*Os pontos críticos de  $f$  que não são maximizantes nem minimizantes locais de  $f$ , chamam-se pontos de sela.*

**Exemplo 2.20** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6$ . Pretende-se determinar os extremos locais de  $f$ .

Como  $f$  é uma função derivável, os seus extremos locais ocorrem em pontos críticos. Assim,

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2, 2y - 4),$$

donde  $(1, 2)$  é o único ponto crítico de  $f$ . Mais,  $f(1, 2) = 1$  e

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 1 \geq 1 = f(1, 2),$$

donde se conclui que  $f(1, 2) = 1$  é um mínimo local de  $f$ .

No que se segue, apresenta-se um estudo de um ponto crítico  $A$  de uma função diferenciável  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a fim de o classificar. Da definição de ponto crítico tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) = 0,$$

donde se conclui que todas as derivadas direccionais de  $f$  em  $A$  são nulas. Assumindo que  $f$  é diferenciável o número de vezes necessário, deriva-se  $f$  até encontrar a menor ordem  $m \in \mathbb{N}$  para a qual existe um vector  $\vec{v}$  tal que a derivada direccional de  $f$  em  $A$  segundo  $\vec{v}$  é não nula, isto é,

$$\frac{\partial^k f}{\partial \vec{u}^k}(A) = 0, \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall k < m$$

e

$$\exists \vec{v} \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial^m f}{\partial \vec{v}^m}(A) \neq 0.$$

Pela fórmula de Taylor-Lagrange (2.19) tem-se, para qualquer  $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$f(A + \vec{w}) - f(A) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial \vec{w}^m}(A) + \mathcal{R}_{m,A}(A + \vec{w}),$$

com  $\lim_{\vec{w} \rightarrow \vec{0}} \frac{\mathcal{R}_{m,A}(A + \vec{w})}{\|\vec{w}\|^m} = 0$ , donde se conclui que, para  $\|\vec{w}\|$  pequeno, o sinal de  $f(A + \vec{w}) - f(A)$  é igual ao sinal de  $\frac{\partial^m f}{\partial \vec{w}^m}(A)$ . Consequentemente,  $f(A)$  é um máximo local se  $\frac{\partial^m f}{\partial \vec{w}^m}(A) < 0$  para todo  $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ , e  $f(A)$  é um mínimo local se  $\frac{\partial^m f}{\partial \vec{w}^m}(A) > 0$  para todo  $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ .

Se  $m$  é ímpar e  $\frac{\partial^m f}{\partial \vec{v}^m}(A) \neq 0$ , então, pela Proposição 2.3,  $\frac{\partial^m f}{\partial (-\vec{v})^m}(A) = -\frac{\partial^m f}{\partial \vec{v}^m}(A)$  e consequentemente  $A$  é ponto de sela de  $f$ .

Se  $m$  é par, então uma das seguintes situações pode ocorrer:

- i) Para todo  $\vec{w} \neq \vec{0}$ ,  $\frac{\partial^m f}{\partial \vec{w}^m}(A) > 0$ ;
- ii) Para todo  $\vec{w} \neq \vec{0}$ ,  $\frac{\partial^m f}{\partial \vec{w}^m}(A) < 0$ ;
- iii) Existem  $\vec{w} \neq \vec{0}$  e  $\vec{v} \neq \vec{0}$  tais que  $\frac{\partial^m f}{\partial \vec{w}^m}(A) > 0$  e  $\frac{\partial^m f}{\partial \vec{v}^m}(A) < 0$ ;
- iv) Existe  $\vec{w} \neq \vec{0}$  tal que  $\frac{\partial^m f}{\partial \vec{w}^m}(A) = 0$  e, para qualquer  $\vec{u} \neq \vec{w}$ , tem-se  $\frac{\partial^m f}{\partial \vec{u}^m}(A) \geq 0$ ;
- v) Existe  $\vec{w} \neq \vec{0}$  tal que  $\frac{\partial^m f}{\partial \vec{w}^m}(A) = 0$  e, para qualquer  $\vec{u} \neq \vec{w}$ , tem-se  $\frac{\partial^m f}{\partial \vec{u}^m}(A) \leq 0$ .

No caso **i)** tem-se  $f(A + \vec{w}) - f(A) > 0$  para todo  $\vec{w} \neq \vec{0}$  com norma pequena, logo  $f(A)$  é um mínimo local.

No caso **ii)** tem-se  $f(A + \vec{w}) - f(A) < 0$  para todo  $\vec{w} \neq \vec{0}$  com norma pequena, logo  $f(A)$  é um máximo local.

No caso **iii)**, existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $\alpha \in ]0, \delta[$  tem-se  $f(A + \alpha\vec{w}) - f(A) > 0$  e  $f(A + \alpha\vec{v}) - f(A) < 0$ , logo  $f(A)$  não é um extremo local de  $f$ .

No caso **iv**), às direcções definidas pelos vectores  $\vec{w} \neq \vec{0}$  tais que  $\frac{\partial^m f}{\partial \vec{w}^m}(A) = 0$  chamam-se *direcções singulares*. Segundo cada uma das direcções singulares  $\vec{w}$ , determina-se a derivada direccional de  $f$  em  $A$  até obter uma ordem  $l = l(\vec{w}) > m$  tal que

$$\frac{\partial^k f}{\partial \vec{w}^k}(A) = 0, \quad \forall k \leq l$$

e

$$\frac{\partial^l f}{\partial \vec{w}^l}(A) \neq 0.$$

Se  $l$  é ímpar, então tem-se uma situação análoga à apresentada no caso **iii**), pelo que se conclui que  $A$  é um ponto de sela. Se  $l$  é par e  $\frac{\partial^l f}{\partial \vec{w}^l}(A) < 0$ , então, mais uma vez pelos mesmos argumentos, tem-se que  $A$  é ponto de sela. Se  $l$  é par e  $\frac{\partial^l f}{\partial \vec{w}^l}(A) > 0$  para todas as direcções singulares, então apenas se conclui que  $f(A)$  não é máximo local.

No caso **v**), a situação é dual à do caso **iv**) e procede-se da seguinte forma: Segundo cada direcção singular  $\vec{w}$ , determina-se  $l = l(\vec{w}) > m$  tal que

$$\frac{\partial^k f}{\partial \vec{w}^k}(A) = 0, \quad \forall k \leq l$$

e

$$\frac{\partial^l f}{\partial \vec{w}^l}(A) \neq 0.$$

Se  $l$  é ímpar, então  $A$  é ponto de sela; Se existe alguma direcção singular  $\vec{w}$  tal que  $\frac{\partial^l f}{\partial \vec{w}^l}(A) > 0$ , então  $A$  é um ponto de sela; Se, para todas as direcções singulares  $\vec{w}$ ,  $\frac{\partial^l f}{\partial \vec{w}^l}(A) < 0$ , então apenas se conclui que  $f(A)$  não é mínimo local.

De notar que, dos argumentos expostos anteriormente, situações existem em que a dúvida subsiste sobre a classificação dos pontos críticos.

Como o cálculo das derivadas direccionais, para funções diferenciáveis, pode ser feito através do cálculo das derivadas parciais, no resultado que se segue apresenta-se o estudo que permite classificar os pontos críticos de funções de duas variáveis através do cálculo das derivadas parciais de segunda ordem.

**Teorema 2.14.** *Sejam  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^3$  e  $(a, b) \in D$  um ponto crítico. Definindo*

$$\mathcal{D} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \right)^2.$$

*tem-se:*

*Se  $\mathcal{D} > 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ , então  $(a, b)$  é um minimizante local de  $f$ ;*

*Se  $\mathcal{D} > 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ , então  $(a, b)$  é um maximizante local de  $f$ ;*

*Se  $\mathcal{D} < 0$ , então  $(a, b)$  é ponto de sela;*

*No caso  $\mathcal{D} = 0$  tem-se uma situação inconclusiva pela análise das derivadas de 2ª ordem.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, assumamos que o ponto de equilíbrio ocorre na origem i.e.  $(a, b) = (0, 0)$ . Como  $f$  é de classe  $C^3$ , pela fórmula de Taylor-Lagrange tem-se

$$f(x, y) - f(0, 0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y^2 \right) + \mathcal{R}_{2,(0,0)}(x, y)$$

com  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\mathcal{R}_{2,(0,0)}(x, y)}{x^2 + y^2} = 0$ , donde

$$f(x, y) - f(0, 0) \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y^2$$

que pode ser escrito na forma

$$f(x, y) - f(0, 0) \approx ax^2 + bxy + cy^2,$$

quando se define

$$a = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0), \quad b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \quad \text{e} \quad c = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0).$$

Para classificar o ponto crítico  $(0, 0)$  é suficiente analisar o sinal do polinómio  $ax^2 + bxy + cy^2$  para  $(x, y)$  perto de  $(0, 0)$ . Pela definição de  $\mathcal{D}$ , tem-se  $\mathcal{D} = -b^2 + 4ac$  e

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2 \right) \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a}y \right)^2 + \left( \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} \right) y^2 \right] \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a}y \right)^2 + \frac{\mathcal{D}}{4a^2} y^2 \right] \end{aligned}$$

**Caso  $\mathcal{D} > 0$ :** Se  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) > 0$ , então

$$a > 0 \Rightarrow ax^2 + bxy + cy^2 > 0 \Rightarrow f(x, y) > f(0, 0) \text{ para } (x, y) \text{ "perto" de } (0, 0),$$

donde  $f(0, 0)$  é mínimo local de  $f$ .

Se  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) < 0$ , então

$$a < 0 \Rightarrow ax^2 + bxy + cy^2 < 0 \Rightarrow f(x, y) < f(0, 0) \text{ para } (x, y) \text{ "perto" de } (0, 0),$$

donde  $f(0, 0)$  é máximo local de  $f$ .

**Caso  $\mathcal{D} < 0$ :** Por um lado, para  $y = 0$  tem-se  $ax^2 + bxy + cy^2 = ax^2$ . Por outro, para  $x = -\frac{b}{2a}y$  tem-se  $ax^2 + bxy + cy^2 = \frac{\mathcal{D}}{4a}y^2$ . Consequentemente  $(0, 0)$  é ponto de sela.

**Caso  $\mathcal{D} = 0$ :** Situação inconclusiva.

□

## 2.11 Extremos condicionados

Situações existem em que a procura de máximos ou mínimos locais de funções não é feita em todo o domínio mas sim entre pontos que verificam determinada condição. Por exemplo, procurar o máximo do produto de dois números (máximo da função  $f(x, y) = xy$ ) desde que a sua soma seja seis (sujeito à restrição  $x + y = 6$ ).

Em seguida é descrito o procedimento a seguir por forma a obter os extremos locais de uma função real  $f(x, y)$  sujeitos a uma condição  $g(x, y) = 0$ . Por outras palavras, pretende-se obter, de entre os pontos  $(x, y)$  pertencentes à curva de nível zero da função  $g$  (isto é  $N_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ ), aqueles que maximizam ou minimizam a função  $f$ . Pontos estes que se chamam *extremos condicionados* de  $f$  pela condição  $g(x, y) = 0$ .

Sejam  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis,

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}, \quad t \in I, \quad (I \text{ intervalo real})$$

uma parametrização da curva  $N_0$  e  $P = (x_0, y_0) \in N_0$  um extremante condicionado de  $f$  verificando  $\nabla g(P) \neq \vec{0}$ . Como  $P \in N_0$ , então existe  $t_0 \in I$  tal que  $\vec{r}(t_0) = P$ .

Por hipótese  $P = \vec{r}(t_0)$  é um extremo condicionado de  $f$  pela condição  $g(x, y) = 0$ , logo a função  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$h(t) = (f \circ \vec{r})(t) = f(x(t), y(t)),$$

tem um extremo em  $t_0$ , donde  $h'(t_0) = 0$ . Pela regra da cadeia tem-se

$$0 = h'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)y'(t_0) = \nabla f(P) \cdot \vec{r}'(t_0).$$

Isto significa que os vectores  $\nabla f(P)$  e  $\vec{r}'(t_0)$  são ortogonais e, como  $\vec{r}'(t_0)$  é tangente à curva de nível  $N_0$ , conclui-se que  $\nabla f(P)$  e  $\nabla g(P)$  são colineares (relembrar que  $\nabla g(P)$  é perpendicular à curva de nível em  $P$ ), isto é, existe um escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  (chamado *multiplicador de Lagrange*) tal que

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P).$$

A exemplo do que foi feito para funções reais,  $f$  e  $g$ , de duas variáveis reais, o mesmo pode ser feito para funções de várias variáveis reais surgindo assim o chamado *método dos multiplicadores de Lagrange* para obter possíveis extremos condicionados.

**Teorema 2.15** (Método dos multiplicadores de Lagrange). *Sejam  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : U \subseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis.*

*Se  $P \in D$  é um extremo condicionado de  $f$  pela condição  $g(X) = 0$  e  $\nabla g(P) \neq 0$ , então existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P).$$

De salientar que o teorema anterior apresenta condições necessárias, mas não suficientes, para que um ponto seja extremo condicionado de  $f$  por uma condição  $g(X) = 0$ . Tal como se ilustra no exemplo que se segue, o processo centra-se na procura de todos os pontos que verificam a condição necessária para depois decidir quais é que correspondem a extremos condicionados. Mas atenção, é importante referir que o método dos multiplicadores de Lagrange não “apanha” os chamados *pontos singulares* da condição  $g(X) = 0$  isto é, os pontos

$X$  da curva de nível  $N_0 = \{X \in \mathbb{R}^n : g(X) = 0\}$  que verificam  $\nabla g(X) = \vec{0}$ .

**Exemplo 2.21** Determinar o máximo da função  $f(x, y) = xy$  sujeito à condição  $x + y = 6$ .

Tem-se  $x + y = 6 \Leftrightarrow x + y - 6 = 0$ , donde se tem  $g(x, y) = x + y - 6$  e

$$\nabla f(x, y) = (y, x), \quad \nabla g(x, y) = (1, 1).$$

Determinar os pontos singulares:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = (0, 0) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1, 1) = (0, 0) \\ x + y = 6 \end{cases}, \quad \text{impossível.}$$

Consequentemente, pelo método dos multiplicadores de Lagrange, as soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y, x) = \lambda(1, 1) \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda \\ x = \lambda \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}.$$

são os únicos candidatos a extremantes condicionados de  $f$  pela condição  $g(x, y) = 0$ . Neste caso  $(x, y) = (3, 3)$  é a única solução donde este é o extremante condicionado de  $f$  pela condição  $x + y = 6$ , sendo  $f(3, 3) = 9$  o valor do extremo. Facilmente se verifica que se está perante um máximo.

## 2.12 Exercícios

- Para cada uma das funções que se seguem, determine o seu domínio e o seu contra-domínio:
  - $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ ;
  - $f(x, y) = -y^2$ ;
  - $f(x, y) = -e^{-x^2 - y^2}$ ;
  - $f(x, y) = x^3 - \text{sen } y$ ;
  - $f(x, y) = |xy|$ ;
  - $f(x, y) = \text{sen } y$ ;
  - $f(x, y) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$ ;
  - $f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ .
- Sem recorrer a instrumentos electrónicos, faça a correspondência de cada uma das funções do exercício anterior com os gráficos apresentados na última página deste capítulo.
- Para cada uma das funções que se seguem, faça um esboço do diagrama de nível e do gráfico:

- (a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ;
- (b)  $f(x, y) = y^2$ ;
- (c)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ ;
- (d)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;
- (e)  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$ ;
- (f)  $f(x, y) = x + y$ ;
- (g)  $f(x, y) = x^2 + y$ ;
- (h)  $f(x, y) = \operatorname{sh} x$ ;
- (i)  $f(x, y) = \cos(y^2 + x)$ ;
- (j)  $f(x, y) = \log |x^2 - y|$ .

4. Descreva, para cada uma das funções que se seguem, as superfícies de nível  $c \in \mathbb{R}$ :

- (a)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ ;
- (b)  $f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2$ ;
- (c)  $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z$ .

5. Estude a existência dos seguintes limites:

- (a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ , com  $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2, \\ 0 & \text{se } y \neq x^2; \end{cases}$
- (b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ , com  $g(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 5 & \text{se } x^2 + y^2 > 1; \end{cases}$

6. Calcule, caso exista (ou demonstre que não existe) cada um os seguintes limites:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{xy}{x^2 + y^2}; & \text{(b)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}; \\
 \text{(c)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}; & \text{(d)} \lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,0,1)} \frac{x^4 z}{(x^4 + y^2)^3}; \\
 \text{(e)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 y}{2x^2 + 4y^2}; & \text{(f)} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x+y}{x-y}; \\
 \text{(g)} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x-y}; & \text{(h)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^4}{(x^4 + y^2)^3}; \\
 \text{(i)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-2x^2 y^3}{2x^4 + 3y^6}; & \text{(j)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}; \\
 \text{(l)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 - 2y}{x^4 + y^2}; & \text{(m)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-2x^2 + 3y}{x^2 + y^2}; \\
 \text{(n)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^3}{3x^2 + 4y^6}; & \text{(o)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}; \\
 \text{(p)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 \operatorname{sen} x}{x^2 + 3y^2}; & \text{(q)} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \cos\left(\frac{\log(x^6)}{y^2 - x + 1}\right);
 \end{array}$$

7. Estude a continuidade de cada uma das funções  $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2xy^2 + y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2xy^2 + y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

8. Estude a continuidade das funções definidas por:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases} & \text{(b)} f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{se } xy \neq 0, \\ 0 & \text{se } xy = 0; \end{cases} \\
 \text{(c)} f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases} & \text{(d)} f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < y < x^2, \\ 1 & \text{caso contrário}; \end{cases} \\
 \text{(e)} f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases} & \text{(f)} f(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq y, \\ y & \text{se } x < y; \end{cases}
 \end{array}$$

$$(g) f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

$$(h) f(x, y) = \log(x^3 y)$$

$$(i) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^4}{(x^4 + y^2)^3}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

$$(j) f(x, y) = \begin{cases} x, & x < y \\ -y + 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(k) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

$$(l) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x - y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

9. Relativamente a uma função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

(a) se  $f(0, 0) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1$  então  $f$  é contínua em  $(0, 0)$ ;

(b) se  $f(0, 0) = 1$  e  $f(x, x^3) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , então  $f$  é descontínua em  $(0, 0)$ ;

(c) se  $f$  é contínua em  $(0, 0)$  e  $f(x, x^2) = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1;$$

(d) se  $f(x, x^2) = x + 2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , e  $f(x, -x^2) = e^x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , então  $f$  é contínua em  $(0, 0)$ .

10. Usando a definição, calcule a derivada direccional  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A)$  da função  $f$  no ponto  $A$  segundo o vector  $\vec{v}$ , para:

(a)  $f(x, y) = xy, \vec{v} = \hat{i} + \hat{j}, A = (1, 0)$ ;

(b)  $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}, \vec{v} = -\hat{i} + \hat{j}, A = (1, 1)$ ;

(c)  $f(x, y) = 3x + y^2, \vec{v} = \hat{i} + \hat{j}, A = (0, 0)$ ;

(d)  $f(x, y, z) = x^2 + xy + z^2, \vec{v} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}, A = (1, 2, -1)$ .

11. Determine as funções derivadas parciais de primeira ordem das funções definidas por

(a)  $f(x, y) = 5y^3 + 2xy - x^2$ ;

(b)  $f(x, y) = ye^x + x \cos(x^2 y)$ ;

(c)  $f(x, y) = \log(\cos(xy))$ ;

(d)  $f(x, y, z) = \text{sen } x + \log x + e^{xz}$ ;

(e)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 y z^3}$ .

12. O diagrama de nível para uma função  $f$ , no qual os níveis mais elevados têm a cor mais clara, é apresentado em cada uma das seguintes figuras. Qual o sinal de  $f_x$  e de  $f_y$  (para uma série de pontos à sua escolha)?



17. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(a) Determine  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

(b) Calcule  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ .

(c) Explique porque não há contradição com o teorema de Schwarz.

18. Considere a função definida por  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x + y} & \text{se } x \neq -y, \\ 0 & \text{se } x = -y. \end{cases}$

(a) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ .

(b) Verifique que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ .

19. Para cada uma das seguintes funções:

$$f(x, y, z) = x + y + \sin(xy^2), \quad g(x, y, z) = e^{xy} + 4z, \quad h(x, y, z) = \sin x + 3 \sin y + z,$$

(a) justifique que são diferenciáveis na origem;

(b) determine a derivada direccional na origem segundo a direcção  $\vec{v} = (1, 3, -1)$ .

20. Considere a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ .

(a) Determine as funções derivadas parciais de primeira ordem de  $f$ .

(b) Verifique se  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ . Justifique.

21. Considere a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x, y) = 3xy + y^2$ .

(a) Justifique que  $f$  é derivável em todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$ ;

(b) Determine  $f'(2, 3)$ ;

(c) Determine a taxa de variação de  $f$  no ponto  $(2, 3)$  e na direcção de  $\vec{v} = (3, 4)$ ;

(d) Qual o sentido e direcção a seguir, partindo de  $(2, 3)$ , para que a taxa de variação de  $f$  seja máxima?

(e) Qual a taxa de variação máxima de  $f$  no ponto  $(2, 3)$ ?

(f) Encontre a equação do plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(2, 3, 27)$ .

22. Determine a equação da recta normal à superfície  $S$ , definida pela equação  $xyz = 12$ , no ponto  $(2, -2, -3)$ .

23. Para cada uma das superfícies que se segue, determine uma equação para o plano tangente e uma equação para a recta normal no ponto indicado.

(a)  $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ ,  $P = (5, 13, -12)$ ;

(b)  $xy^2 + 3x - z^2 = 4$ ,  $P = (2, 1, -2)$ ;

(c)  $xy - z = 0$ ,  $P = (-2, -3, 6)$ .

24. Determine o ângulo entre o plano  $XOY$  e o plano tangente ao elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1$$

no ponto  $(2, 2, 1)$ .

25. Calcule a derivada de cada uma das funções definidas a seguir, indicando o conjunto dos pontos  $(x, y)$  onde está definida:

(a)  $f(x, y) = (x^2y, e^{x+2y})$ ;

(b)  $f(x, y) = (\ln(x^2 + y^2), \cos(xy))$ ;

(c)  $f(x, y, z) = (zx^2, -ye^z)$ .

26. Use a “regra da cadeia” de uma só variável independente para calcular  $w'(t)$ , sendo

$$w(x, y) = x^2y - y^2, \quad \text{com} \quad x = x(t) = \sin t \text{ e } y = y(t) = e^t.$$

27. Use a “regra da cadeia” de várias variáveis para calcular  $\frac{\partial f}{\partial s}$  e  $\frac{\partial f}{\partial t}$ , sendo

$$f(x, y) = 2xy, \quad \text{com} \quad x = x(s, t) = s^2 + t^2 \text{ e } y = y(s, t) = \frac{s}{t}.$$

28. Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável tal que  $\nabla F(2, 3) = (-1, 2)$ . Determine:

(a)  $f'(2)$ , sendo  $f(x) = F(x, x + 1)$ ;

(b)  $f'(1)$ , sendo  $f(x) = F(2x, -x^2 + 4)$ .

29. Seja  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável tal que  $\nabla G(2, 3, 0) = (-1, 2, 3)$ . Determine:

(a)  $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 2)$  e  $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 2)$ , sendo  $g(x, y) = G(yx, x + y, \sin(\frac{\pi}{2}y))$ ;

(b)  $\frac{\partial g}{\partial x}(0, -1)$  e  $\frac{\partial g}{\partial y}(0, -1)$ , sendo  $g(x, y) = G(-2ye^x, -3y + y^3x^2, x \cos(\frac{\pi}{2}y))$ .

30. Mostre que  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  para  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $u(x, y) = f(x - y, y - x)$ , onde  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$ .

31. Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^2$  e  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $u(x, y) = f(x + g(y))$ . Verifique que  $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

32. Seja  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e defina-se  $\phi: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  pondo  $\phi(x, y, z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$ . Mostre que  $x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} + z \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ .

33. Considere a seguinte equação

$$xyz^3 + x^2yz^2 - x + 2y + z = 0.$$

- (a) Mostre que a equação apresentada define implicitamente  $z$  como função de  $(x, y)$  para pontos “próximos” de  $(1, 1, -1)$ .
- (b) Determine  $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)$ .

34. Considere a seguinte equação de três variáveis reais

$$xz^2 + xy^2z = yz^2 + 5.$$

- (a) Mostre que a equação apresentada define  $z$  como função de  $(x, y)$  para pontos “próximos” de  $(3, 1, 1)$ ;
- (b) Determine  $z'(3, 1)$ ;
- (c) Para  $z(x, y)$ , definida na alínea (a), determine  $H'(3, 1)$ , onde  $H(x, y) = G(x, y, z(x, y))$  para  $(x, y)$  “próximo” de  $(3, 1)$ , com  $G(x, y, z) = e^{xy} + xyz$ .

35. Seja  $z = \varphi(x, y)$  uma função definida implicitamente, para  $(x, y, z)$  “próximo” de  $(1, 1, 0)$ , pela equação  $xe^{yz} + z \log y = 1$ . Determine  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 1)$  e  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1)$ .

36. Escreva o polinômio de Taylor de ordem 2 para as funções apresentadas a seguir, em torno dos pontos indicados:

- (a)  $f(x, y) = \sin(xy)$ , ponto  $(1, \pi)$ ;
- (b)  $f(x, y) = \cos(xy)$ , ponto  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ;
- (c)  $f(x, y) = e^{x+y}$ , ponto  $(0, 0)$ ;
- (d)  $f(x, y) = (x + y)^2$ , ponto  $(0, -2)$ ;
- (e)  $f(x, y) = \arctg(x + y)$ , ponto  $(1, 0)$ ;
- (f)  $f(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy)$ , ponto  $(0, 0)$ .

37. Considere a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy)$ .

- (a) Determine o polinômio de Taylor e o resto de Lagrange de segunda ordem de  $f$  no ponto  $(0, 0)$ ;

- (b) Verifique se existe e é finito  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - 1}{x^2 + y^2}$ .

38. Determine os pontos críticos de cada uma das funções apresentadas. Averigüe se algum deles é maximizante local, minimizante local ou ponto de sela.

- (a)  $f(x, y) = x^4 + y^4$ ;
- (b)  $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$ ;
- (c)  $f(x, y) = x^4 + y^3$ ;
- (d)  $f(x, y) = x^2y^2$ ;
- (e)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ ;
- (f)  $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5$ .

39. Determine e classifique os pontos críticos das funções definidos por:

- (a)  $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - y$ ;
- (b)  $f(x, y) = (x + y)(xy + 1)$ ;
- (c)  $f(x, y) = e^{2x^2 + y^2}$ ;
- (d)  $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ .

40. Determine, caso existam, os extremos locais das funções definidas por:

- (a)  $f(x, y) = (2x - y)^2$ ;
- (b)  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 - 1$ ;
- (c)  $f(x, y) = x^3y^3$ ;
- (d)  $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - y$ ;
- (e)  $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$ ;
- (f)  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$ ;

41. Determinado foguete tem um sistema de controlo sensível quer à humidade quer à temperatura. Supondo que o raio (em Kms) no qual o foguete pode ser controlado é dado pela função

$$R(h, t) = 27800 - 5t^2 - 6ht - 3h^2 + 400t + 300h,$$

identifique as condições atmosféricas óptimas (temperatura vs humidade) para operar o foguete.

42. Determine o máximo do produto entre dois números reais, desde que a soma deles seja igual a quatro.

43. De entre todos os triângulos rectângulos com hipotenusa de comprimento quatro, calcule as dimensões daquele que possui área máxima.

44. Determine as dimensões do rectângulo de área máxima que se encontra inscrito na elipse de equação

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

45. Determine os extremos das funções  $f$ , definidas a seguir, vinculados pelas respectivas condições:

(a)  $f(x, y) = \ln(xy)$  e  $2x + 3y = 5$ ;

(b)  $f(x, y) = x + y$  e  $x^2 + y^2 = 1$ ;

(c)  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$  e  $x^2 - y^2 = 1$ ;

(d)  $f(x, y) = xy$  e  $x^2 + y^2 = 18$ ;

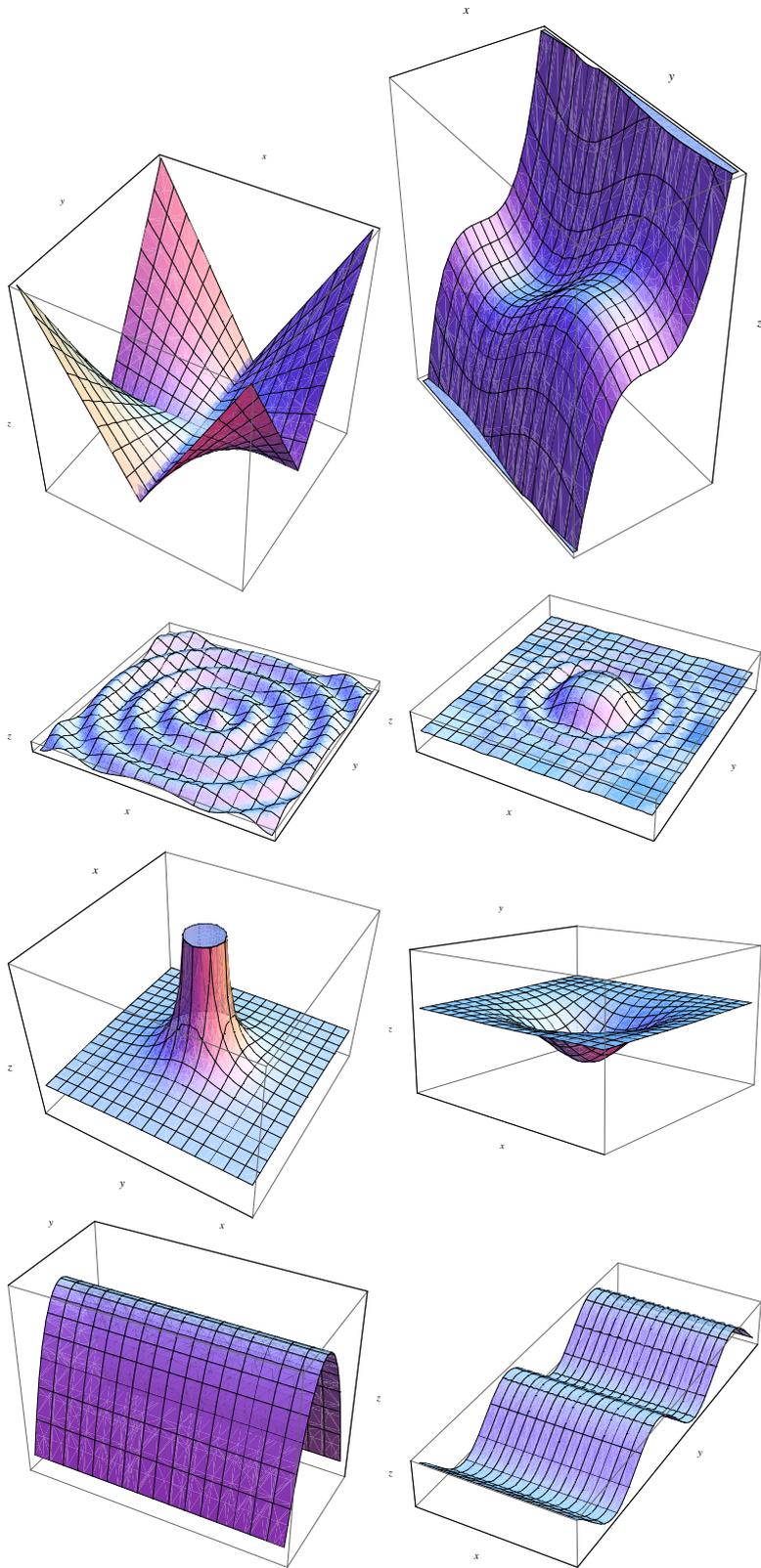
(e)  $f(x, y) = x + 2y$  e  $x^2 + y^2 = 5$ .

46. Pretende-se construir um quarto, com a forma de um paralelepípedo, para armazenamento de materiais em temperatura elevada com um volume de 100 metros cúbicos. Como o ar quente sobe, a perda de calor por unidade de área pelo tecto é cinco vezes maior que a perda de calor pelo chão. A perda de calor pelas quatro paredes é três vezes maior do que a perda de calor pelo chão. Determine as dimensões do quarto a construir que minimize a perda de calor e, portanto, minimiza o custo do aquecimento.

47. Considere uma placa circular de raio 1, identificada com os pontos  $P = (x, y)$  do plano  $\mathbb{R}^2$  que verificam  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Sabendo que a temperatura em qualquer ponto  $(x, y)$  da placa é

$$T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y + 10,$$

encontre os pontos mais quentes e mais frios na placa.



## Capítulo 3

# Integrais Múltiplos

Este capítulo é dedicado ao estudo do integral Riemann de funções reais de duas ou três variáveis reais (integral duplo e triplo).

### 3.1 Integral de Riemann: definição

Nesta secção introduz-se a noção de integral de Riemann de uma função real de duas variáveis reais sobre uma região  $\mathcal{R}$  limitada do plano (integral duplo). Primeiro aborda-se a situação para uma região rectangular e depois generaliza-se para o caso de uma qualquer região limitada. Desde já é importante referir que as ideias presentes na construção do integral duplo de Riemann podem ser replicadas para a construção do integral múltiplo de uma função real de  $n$  variáveis reais, em particular para a construção do integral triplo.

Considere-se  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada, onde  $A$  é o rectângulo de  $\mathbb{R}^2$  definido por

$$A = [a, b] \times [c, d].$$

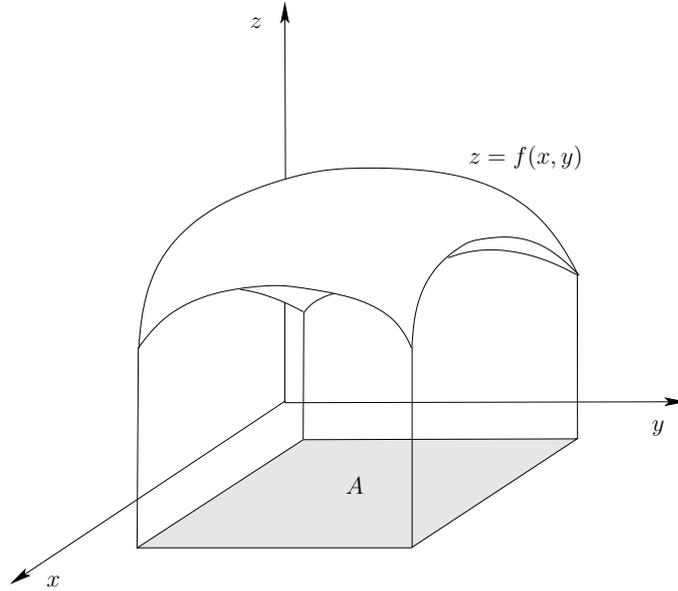
Verificando-se  $f(x, y) \geq 0$  para todo  $(x, y) \in A$ , então é possível definir o sólido  $\mathcal{S}$  limitado pelas superfícies:

- Rectângulo  $A$  no plano  $XOY$ ;
- Planos verticais de equação  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = c$  e  $y = d$ ;
- gráfico de  $f$ , isto é, a superfície de equação  $z = f(x, y)$  com  $(x, y) \in A$ ,

ou seja (ver figura 3.1),  $\mathcal{S}$  está definido por

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A \text{ e } 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Suponha-se que se pretende obter o “volume” do sólido  $\mathcal{S}$  (observe que não foi ainda definido o que se entende por “volume”, apesar de todos termos uma ideia empírica do que isso é). Como, no geral, a superfície  $z = f(x, y)$  é pouco regular, não é possível obter o volume recorrendo apenas às fórmulas da geometria elementar. O processo a seguir será o chamado *método da exaustão* em que o valor do volume se obtém por um processo iterativo de aproximações sucessivas por excesso e por defeito.

Figura 3.1: Sólido  $\mathcal{S}$ 

Considerando uma partição  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , com  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ , no intervalo  $[a, b]$  obtém-se a decomposição  $[a, b] = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i]$  em  $n$  sub-intervalos e, considerando uma partição  $P^* = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ , com  $c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$ , no intervalo  $[c, d]$  obtém-se a decomposição  $[c, d] = \bigcup_{j=1}^m [y_{j-1}, y_j]$  em  $m$  sub-intervalos. As duas partições definem uma decomposição,  $\mathcal{P}$ , do rectângulo  $A = \bigcup_{i,j} R_{ij}$  em  $nm$  sub-rectângulos da forma

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\},$$

isto é

$$\mathcal{P} = \{R_{ij} : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}.$$

Para cada um dos sub-rectângulos  $R_{ij}$  define-se o seu *diâmetro*,  $\delta_{ij}$ , como sendo o comprimento da sua diagonal, isto é,

$$\delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$

e o *diâmetro da decomposição*  $\mathcal{P}$ ,  $\delta_{\mathcal{P}}$ , como o máximo dos diâmetros isto é,

$$\delta_{\mathcal{P}} = \max_{i,j} \delta_{ij}.$$

**Definição 3.1** (Somadas de Darboux). *Sejam  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada,  $A = [a, b] \times [c, d]$  um rectângulo e  $\mathcal{P} = \{R_{ij}\}$  uma decomposição de  $A$  em sub-rectângulos  $R_{ij}$ .*

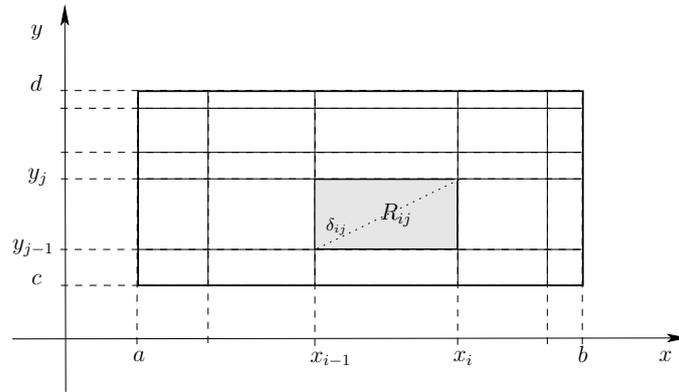


Figura 3.2: Decomposição  $\mathcal{P} = \{R_{ij}\}$  do retângulo  $A$

Define-se soma superior de Darboux como sendo a soma

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_i \sum_j M_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$

onde  $M_{ij} = \sup_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y)$ .

Define-se soma inferior de Darboux como sendo a soma

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_i \sum_j m_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$

onde  $m_{ij} = \inf_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y)$ .

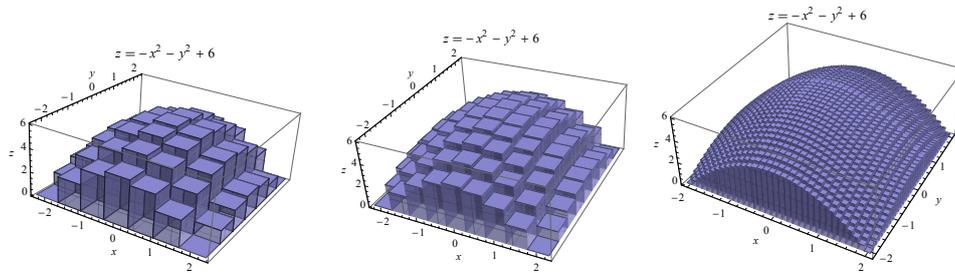


Figura 3.3: Somas de Darboux de  $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 6$  com  $\delta_{\mathcal{P}} = \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}$

De referir que as definições das somas de Darboux fazem sentido para qualquer função limitada e não apenas para as funções positivas. Mais, como consequência imediata das definições de ínfimo e de supremo de uma função, é válida a desigualdade

$$s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}),$$

para qualquer decomposição  $\mathcal{P} = \{R_{ij}\}$  de  $A$ . Para o caso de  $f$  ser uma função positiva, a ideia de volume leva-nos às desigualdades

$$s(f, \mathcal{P}) \leq \text{volume}(S) \leq S(f, \mathcal{P}), \tag{3.1}$$

porque, em cada uma das parcelas das somas de Darboux, o factor  $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$  corresponde à área do rectângulo  $R_{ij}$  e  $m_{ij}$ ,  $M_{ij}$  são, respectivamente, o ínfimo e o supremo da função  $f$  em cada um dos rectângulos  $R_{ij}$ . Desta forma, as somas superiores de Darboux são aproximações por excesso para o valor do "volume" do sólido  $\mathcal{S}$  e as somas inferiores de Darboux são aproximações por defeito para o valor do "volume" do sólido  $\mathcal{S}$ . Refinando a decomposição  $\mathcal{P}$ , isto é, decompondo cada um dos sub-rectângulos  $R_{ij}$  em rectângulos mais pequenos, surge uma nova decomposição  $\mathcal{P}^*$ , com um diâmetro  $\delta_{\mathcal{P}^*} < \delta_{\mathcal{P}}$ , e as aproximações, quer por defeito quer por excesso, dadas pelas somas de Darboux melhoram. Despoletando este processo iterativo por forma a que os sucessivos diâmetros convirjam para zero, surgem as definições de *integral superior* e *integral inferior*.

**Definição 3.2** (Integral inferior e superior). *Sejam  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e  $A = [a, b] \times [c, d]$  um rectângulo.*

*Define-se integral superior de  $f$  sobre  $A$  como sendo o limite*

$$\overline{\iint}_A f(x, y) d(x, y) = \lim_{\delta_{\mathcal{P}} \rightarrow 0^+} S(f, \mathcal{P}), \quad (3.2)$$

*caso exista.*

*Define-se integral inferior de  $f$  sobre  $A$  como sendo o limite*

$$\underline{\iint}_A f(x, y) d(x, y) = \lim_{\delta_{\mathcal{P}} \rightarrow 0^+} s(f, \mathcal{P}), \quad (3.3)$$

*caso exista.*

**Definição 3.3** (Integral de Riemann). *Uma função  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  limitada diz-se integrável sobre o rectângulo  $A$  se existem os integrais superiores e inferiores e são iguais, isto é*

$$\overline{\iint}_A f(x, y) d(x, y) = \underline{\iint}_A f(x, y) d(x, y), \quad (3.4)$$

*denotando-se simplesmente por*

$$\iint_A f(x, y) d(x, y),$$

*o qual se chama integral de Riemann de  $f$  sobre  $A$ .*

Das igualdades (3.2) e (3.3), da definição das somas de Darboux e da definição de função integrável, conclui-se que, para qualquer função integrável  $f$  sobre um rectângulo  $A$ , se tem

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) d(x, y) &= \lim_{\delta_{\mathcal{P}} \rightarrow 0^+} \sum_i \sum_j f(x_i^*, y_j^*) \text{Área}(R_{ij}) \\ &= \lim_{\delta_{\mathcal{P}} \rightarrow 0^+} \sum_i \sum_j f(x_i^*, y_j^*) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde  $(x_i^*, y_j^*)$  é um qualquer ponto pertencente ao sub-rectângulo  $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ .

**Exemplo 3.1** A função  $f : [0, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = 1$  é uma função integrável à Riemann porque o integral superior é igual ao integral inferior e igual a 2. Com efeito, para qualquer decomposição  $\mathcal{P}$  de  $[0, 1] \times [0, 2]$  em sub-rectângulos tem-se  $s(f, \mathcal{P}) = S(f, \mathcal{P}) = 2$ , donde

$$\iint_{[0,1] \times [0,2]} 1 \, d(x, y) = 2.$$

**Exemplo 3.2** A função  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \cap ([0, 1] \times [0, 1]) \\ 0, & (x, y) \in ([0, 1] \times [0, 1]) \setminus \mathbb{Q}^2 \end{cases}$$

não é uma função integrável porque o integral superior é igual a 1 e o integral inferior é igual a 0. Com efeito, para qualquer decomposição  $\mathcal{P}$  de  $[0, 1] \times [0, 1]$  em sub-rectângulos tem-se  $s(f, \mathcal{P}) = 0$  e  $S(f, \mathcal{P}) = 1$ , donde

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) \, d(x, y) = 0 \neq 1 = \overline{\iint}_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) \, d(x, y).$$

Uma questão fundamental que se coloca neste momento é a de saber identificar quais as funções integráveis. Existe uma resposta para esta questão, contudo envolve conceitos e resultados que estão fora do âmbito do estudo desta Unidade Curricular. Dada a importância em identificar funções integráveis, o teorema seguinte, não sendo o resultado óptimo, apresenta algumas das funções integráveis com que iremos trabalhar. Para os alunos mais interessados, estes resultados podem ser vistos em [6].

**Teorema 3.1.** *Se  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, então  $f$  é uma função integrável sobre  $A$ .*

*Demonstração.* Consequência do Teorema 4, pag. 365, de [6]. □

Este resultado deixa de fora todas as funções que apresentam pontos de descontinuidade, contudo é importante referir que existe um conjunto vasto de funções integráveis que não são contínuas.

## 3.2 Análise geométrica do integral duplo

Voltando ao problema que motivou a introdução do integral duplo, o cálculo do “volume” do sólido  $\mathcal{S}$  para o caso em que  $f(x, y) \geq 0$ , das igualdades (3.1), (3.2) e (3.3) tem-se

$$\iint_A f(x, y) \, d(x, y) \leq \text{Volume}(\mathcal{S}) \leq \overline{\iint}_A f(x, y) \, d(x, y).$$

A desigualdade anterior e a Definição 3.3, em particular a igualdade (3.4), permitem definir o volume do sólido  $\mathcal{S}$  da seguinte forma: se  $f$  é uma função integrável sobre  $A$ , então define-se o *volume* do sólido  $\mathcal{S}$  como sendo

$$\text{Volume}(\mathcal{S}) = \iint_A f(x, y) \, d(x, y);$$

se  $f$  não é uma função integrável sobre  $A$ , então diz-se que o conjunto  $\mathcal{S}$  não tem volume.

Para o caso em que  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função integrável tal que  $f(x, y) \leq 0$ , para todo  $(x, y) \in A$ , conclui-se, das definições das somas de Darboux e de integral de Riemann, que o volume do sólido  $\mathcal{D}$  definido por

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A \text{ e } 0 \geq z \geq f(x, y)\}$$

se obtém por

$$\text{Volume}(\mathcal{D}) = - \iint_A f(x, y) d(x, y).$$

De forma natural se obtém ainda que, para funções  $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  integráveis sobre o rectângulo  $A$  tais que  $f(x, y) \geq g(x, y)$  para todo  $(x, y) \in A$ , o volume do sólido

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A \text{ e } g(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$$

se determina através do integral

$$\text{Volume}(\Gamma) = \iint_A (f(x, y) - g(x, y)) d(x, y). \quad (3.6)$$

### 3.3 Cálculo do integral de Riemann

As propriedades que se seguem são uma consequência quase imediata das definições das somas de Darboux e de integral de Riemann.

**Proposição 3.2** (Linearidade). *Sejam  $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis sobre um rectângulo  $A$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então*

1.  $f + g$  é integrável em  $A$  e

$$\iint_A [f(x, y) + g(x, y)] d(x, y) = \iint_A f(x, y) d(x, y) + \iint_A g(x, y) d(x, y);$$

2.  $\alpha f$  é integrável em  $A$  e

$$\iint_A [\alpha f(x, y)] d(x, y) = \alpha \iint_A f(x, y) d(x, y).$$

*Demonstração.* Ver Teorema 3.11 de [1]. □

**Proposição 3.3** (Monotonia). *Sejam  $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis sobre um rectângulo  $A$ . Então*

1. Se  $f(x, y) \geq g(x, y)$  para todo  $(x, y) \in A$ , então

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) \geq \iint_A g(x, y) d(x, y);$$

2. Em particular, se  $f(x, y) \geq 0$  para todo  $(x, y) \in A$ , então

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) \geq 0;$$

3. A função  $|f|(x, y) = |f(x, y)|$  é integrável em  $A$  e

$$\left| \iint_A f(x, y) d(x, y) \right| \leq \iint_A |f(x, y)| d(x, y).$$

*Demonstração.* Ver Teorema 3.11 e Corolário 3.27 de [1].  $\square$

O teorema que se segue, cuja demonstração está omitida, diz que um integral duplo se resume apenas a um duplo integral simples, apresentando assim um processo simples para o cálculo do valor de um integral duplo.

**Teorema 3.4** (Teorema de Fubini). *Se  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função integrável no rectângulo  $A = [a, b] \times [c, d]$ , então*

$$\int \int_A f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

*Demonstração.* Ver Teorema 3.28 de [1].  $\square$

**Exemplo 3.3** A função  $f(x, y) = xy^2$ , sendo contínua, é integrável no rectângulo  $A = [0, 2] \times [-1, 3]$  e, por aplicação do Teorema de Fubini e do 2º Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se

$$\begin{aligned} \iint_A xy^2 d(x, y) &= \int_0^2 \int_{-1}^3 xy^2 dy dx = \int_0^2 \left[ \frac{1}{3} xy^3 \right]_{y=-1}^{y=3} dx \\ &= \int_0^2 \left( \frac{1}{3} x 3^3 - \frac{1}{3} x (-1)^3 \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^2 28x dx \\ &= \frac{1}{3} [14x^2]_0^2 = \frac{56}{3}. \end{aligned}$$

Suponha-se agora que se pretende obter o integral duplo de uma função real de duas variáveis reais,  $f$ , sobre uma região  $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$  limitada que não seja um rectângulo. Sendo  $\mathcal{R}$  limitada, existe um rectângulo  $A$  que a contém isto é,  $\mathcal{R} \subseteq A$ . Neste sentido é coerente a definição que se segue:

**Definição 3.4** (Função integrável sobre domínios não rectangulares). *Seja  $f : \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $\mathcal{R}$  uma região limitada não rectangular.*

*Diz-se que  $f$  é integrável sobre  $\mathcal{R}$  se a função  $f^*$  definida por*

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in \mathcal{R} \\ 0, & (x, y) \in A \setminus \mathcal{R} \end{cases},$$

*com  $A$  um rectângulo contendo  $\mathcal{R}$ , for integrável sobre  $A$ . Mais, define-se*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) d(x, y) = \iint_A f^*(x, y) d(x, y).$$

De salientar que, como a função  $f^*$  vale zero nos pontos não pertencentes a  $\mathcal{R}$ , o integral  $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) d(x, y)$  está bem definido pois não depende da escolha do retângulo  $A$ .

Fazendo uso do Teorema de Fubini e da Definição 3.4, obtém-se um procedimento de cálculo simples para obter o valor de um integral duplo sobre uma região *verticalmente simples* ou *horizontalmente simples* (ver figura 3.4).

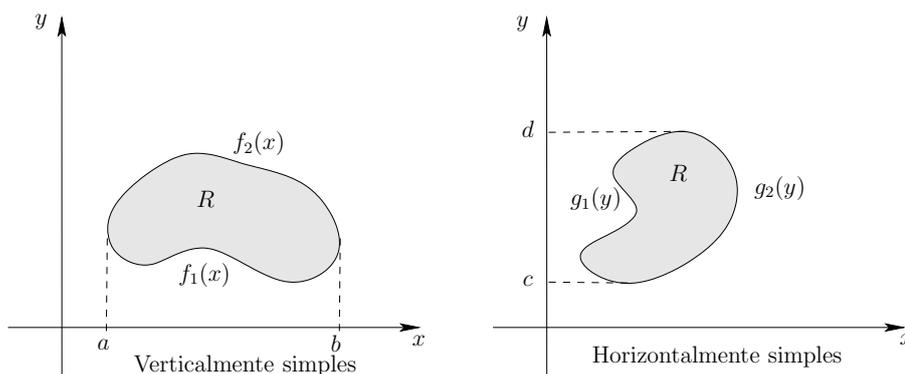


Figura 3.4: Região verticalmente simples; horizontalmente simples

**Definição 3.5** (Conjunto verticalmente simples). Um subconjunto  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  diz-se verticalmente simples se existem duas funções reais,  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  para  $x \in [a, b]$ , tais que

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}.$$

**Definição 3.6** (Conjunto horizontalmente simples). Um subconjunto  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  diz-se horizontalmente simples se existem duas funções reais,  $g_1(y)$ ,  $g_2(y)$  para  $y \in [c, d]$ , tais que

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(y) \leq x \leq g_2(y), c \leq y \leq d\}.$$

No caso em que  $R$  é verticalmente simples, tem-se

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

No caso em que  $R$  é horizontalmente simples, tem-se

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

**Exemplo 3.4** Considerando a função  $f(x, y) = x(1+y)^2$  no domínio

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq x^2\},$$

região verticalmente simples, tem-se

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} x(1+y)^2 d(x, y) &= \int_0^1 \int_0^{x^2} x(1+y)^2 dy dx = \int_0^1 \left[ x \frac{(1+y)^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx \\ &= \int_0^1 x \frac{(1+x^2)^3}{3} - \frac{x}{3} dx = \left[ \frac{(1+x^2)^4}{24} - \frac{x^2}{6} \right]_0^1 = \frac{11}{24}. \end{aligned}$$

De forma imediata se conclui que, as Proposições 3.2 e 3.3 continuam válidas quando no lugar do rectângulo  $A$  se coloca uma região  $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$  limitada na qual  $f$  e  $g$  são funções integráveis.

Por fim, apresenta-se uma proposição que estabelece condições segundo as quais é possível decompor o domínio de integração de uma função  $f$ , como união de duas, ou mais, regiões de integração.

**Proposição 3.5.** *Se  $f$  é uma função de duas variáveis reais, integrável nos subconjuntos  $R, S \subseteq \mathbb{R}^2$  limitados, então  $f$  é integrável em  $R \cap S$ ,  $R \cup S$  e em  $R \setminus S$  sendo válidas as igualdades*

$$\iint_{R \cup S} f(x, y) d(x, y) = \iint_R f(x, y) d(x, y) + \iint_S f(x, y) d(x, y) - \iint_{R \cap S} f(x, y) d(x, y)$$

e

$$\iint_{R \setminus S} f(x, y) d(x, y) = \iint_R f(x, y) d(x, y) - \iint_{R \cap S} f(x, y) d(x, y).$$

*Demonstração.* Ver Teorema 3.28 de [1]. □

### 3.4 Coordenadas polares

Nesta secção apresenta-se um novo sistema de coordenadas no plano, alternativo ao conhecido sistema de coordenadas cartesianas, que é muito útil no cálculo de alguns integrais duplos como veremos na secção seguinte.

Considere um plano  $p$  constituído por pontos  $P$  e escolha-se, como referenciais, um ponto  $O$ , o qual se designa por *pólo* (ou por *origem*), e um semi-eixo graduado de origem  $O$ , designado por *eixo polar* (ver figura 3.5). Identificando um qualquer ponto  $P$  do plano  $p$  com o par ordenado  $(r, \theta)$ , onde  $r$  representa a distância de  $P$  a  $O$  e  $\theta$  o ângulo orientado (medido em radianos) entre o eixo polar e o segmento  $\overline{OP}$ , fica estabelecido um novo sistema de coordenadas no plano em que, à excepção do ponto  $O$ , cada ponto  $P$  se identifica biunivocamente com um par  $(r, \theta)$ , onde  $r > 0$  e  $0 \leq \theta < 2\pi$ . O ponto  $O$  é o único ponto com  $r = 0$ .

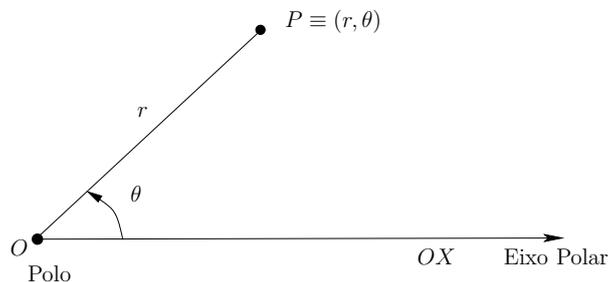


Figura 3.5: Coordenadas polares

Às coordenadas  $P \equiv (r, \theta)$ , com  $r \in [0, +\infty[$  e  $\theta \in [0, 2\pi[$ , aqui apresentadas chamam-se *coordenadas polares*. Notar que, apesar de aqui se convencionar que o intervalo de valores

admitido para  $\theta$  é  $[0, 2\pi[$ , este poderá ser um outro, desde que este contemple todas as amplitudes desde  $0^\circ$  até  $360^\circ$ , como por exemplo  $[-\pi, \pi[$ .

Sobrepondo os referenciais das coordenadas polares sobre o sistema de eixos  $Oxy$  das coordenadas cartesianas, onde o pólo  $O$  coincide com a intersecção dos eixos cartesianos e o eixo polar coincide com o semi-eixo positivo  $Ox$  (ver figura 3.6), é possível estabelecer equações que relacionam as coordenadas cartesianas  $(x, y)$  com as coordenadas polares  $(r, \theta)$  de um mesmo ponto  $P$  do plano.

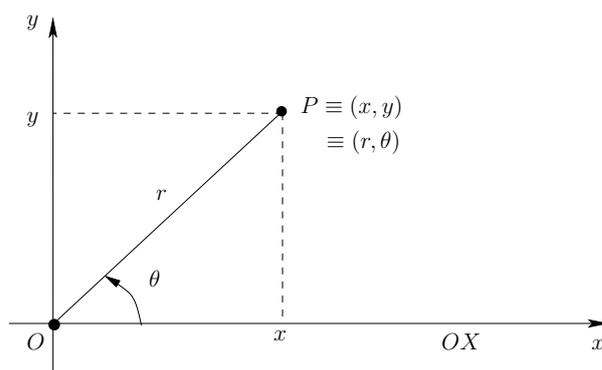


Figura 3.6: Coordenadas polares

Pelas propriedades das relações trigonométricas tem-se

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \sin \theta,$$

ou seja

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (3.7)$$

No sistema de coordenadas polares alguns objectos geométricos, nomeadamente as circunferências, são descrito por equação “mais simples” (no sentido do esforço computacional envolvido). Por exemplo, a circunferência de centro na origem e de raio 1 é descrita, em coordenadas cartesianas, pela equação  $x^2 + y^2 = 1$  e, escrevendo-a em coordenadas polares:

$$(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1.$$

Finalmente, de referir que a função

$$\begin{aligned} \Phi : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

é bijectiva de classe  $C^1$  com

$$\Phi'(r, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix},$$

donde o Jacobiano é  $\frac{\partial(r \cos \theta, r \sin \theta)}{\partial(r, \theta)} = \det(\Phi'(r, \theta)) = r$ .

### 3.5 Mudança de variável em integrais duplos

Por vezes, o cálculo de um integral duplo,  $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) d(x, y)$ , simplifica-se consideravelmente quando se muda de coordenadas cartesianas,  $(x, y)$ , para coordenadas polares  $(r, \theta)$ . A simplificação pode ocorrer porque a função a primitivar adquire uma expressão mais simples ou porque o domínio de integração, escrito em coordenadas polares, é computacionalmente mais simples. Isto acontece essencialmente quando a função integranda envolve a expressão  $x^2 + y^2$  ou quando o domínio de integração envolve partes de círculos ou de cardióides.

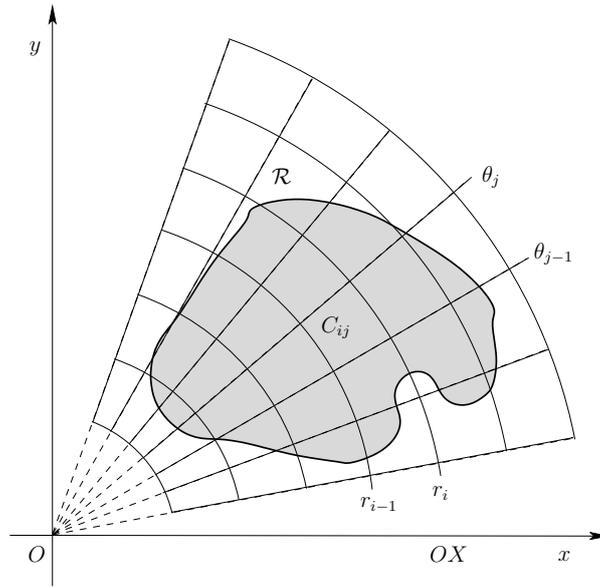


Figura 3.7: Divisão da região de integração em secções polares

Para escrever um integral duplo  $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) d(x, y)$  em coordenadas polares, é necessário efectuar uma partição polar da região  $\mathcal{R}$  isto é, dividir a região de integração em secções polares da forma

$$C_{ij} = \{(r, \theta) : r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\},$$

com  $r_i \in [0, +\infty[$  e  $\theta_j \in [0, 2\pi[$  (ver Figura 3.7). A área de cada secção  $C_{ij}$  é dada por

$$\text{Área}(C_{ij}) = \frac{1}{2} (r_i^2 - r_{i-1}^2) (\theta_j - \theta_{j-1}) = \frac{1}{2} (r_i + r_{i-1}) (r_i - r_{i-1}) (\theta_j - \theta_{j-1})$$

e, considerando em cada secção  $C_{ij}$  o ponto

$$(\tilde{r}_i, \tilde{\theta}_j) = \left( \frac{1}{2} (r_i + r_{i-1}), \frac{1}{2} (\theta_j + \theta_{j-1}) \right)$$

cujas suas coordenadas cartesianas são  $(x_i^*, y_j^*) = (\tilde{r}_i \cos \tilde{\theta}_j, \tilde{r}_i \sin \tilde{\theta}_j)$ , tem-se, da igualdade

(3.5),

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) d(x, y) &= \lim_{\delta_P \rightarrow 0^+} \sum_i \sum_j f(x_i^*, y_j^*) \text{Área}(C_{ij}) \\
&= \lim_{\delta_P \rightarrow 0^+} \sum_i \sum_j f(\tilde{r}_i \cos \tilde{\theta}_j, \tilde{r}_i \sin \tilde{\theta}_j) \tilde{r}_i (r_i - r_{i-1}) (\theta_j - \theta_{j-1}) \\
&= \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d(r, \theta),
\end{aligned}$$

sendo  $S$  a região  $\mathcal{R}$  representada em coordenadas polares. Concluindo, a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares no integral duplo é traduzida pela igualdade

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) d(x, y) = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d(r, \theta), \quad (3.8)$$

onde, naturalmente, para colocar os limites de integração no segundo integral duplo, a região  $\mathcal{R}$  terá que ser interpretada em coordenadas polares,  $S$ .

**Exemplo 3.5** Calcule o integral  $\iint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2) d(x, y)$ , onde  $\mathcal{R}$  é o círculo de centro  $(0, 0)$  e raio 2 isto é,  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

Em coordenadas polares, a região  $\mathcal{R}$  define-se por  $S = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . De (3.8) tem-se

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2) d(x, y) &= \iint_S ((r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2) r d(r, \theta) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 4 d\theta = 8\pi
\end{aligned} \quad (3.9)$$

Efectivamente, a relação (3.8) é uma consequência imediata de um teorema geral de mudança de variáveis em integrais múltiplos, neste caso em integrais duplos.

Recorde que, em análise unidimensional (em  $\mathbb{R}$ ), certamente estudou um teorema de mudança de variáveis em integrais simples que estabelece a fórmula

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad (3.10)$$

onde  $f$  é uma função contínua e  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  é uma função bijectiva de classe  $C^1$  tal que  $\varphi(\alpha) = a$  e  $\varphi(\beta) = b$ . Observe que a mudança de variável no integral simples, (3.10), introduz o factor de mudança de variável  $\varphi'(t)$ . O mesmo se passa com o integral duplo

$$\iint_R f(x, y) d(x, y),$$

quando se passa de variáveis cartesianas  $(x, y)$  para as novas variáveis  $(u, v)$  relacionadas pelo sistema

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in U,$$

com  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aberto, respeitando certas propriedades. O teorema é o seguinte.

**Teorema 3.6** (Teorema de mudança de variáveis). *Sejam  $R$  e  $S$  regiões nos planos  $xy$  e  $uv$  respectivamente e  $\Phi : S \rightarrow R$  uma função bijectiva de classe  $C^1$  definida por  $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ .*

*Se  $f$  é contínua em  $R$  e  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \Phi'(u, v) \neq 0$  para todo  $(u, v) \in S$ , então*

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| d(u, v).$$

*Demonstração.* Ver Teorema 14.5 de [5] □

De referir que o teorema de mudança de variáveis pode ser generalizado, de forma natural, para integrais múltiplos.

## 3.6 Integral triplo

Apesar de ter chamado este capítulo de “Integrais Múltiplos”, efectivamente a construção do integral de Riemann foi feita para funções reais de duas variáveis, dando origem ao integral duplo, e, quer a análise geométrica quer os processos de cálculo apresentados (teorema de Fubini e técnica de mudança de variáveis) foram efectuados apenas para o integral duplo. Tal como inicialmente referido, os processos de construção e análise para o integral duplo podem ser replicados, com as devidas adaptações, para o integral de uma função real de três variáveis, integral triplo. Assim sendo, a construção do integral triplo que se segue é feita sem o detalhe apresentado a quando da apresentação do integral duplo, mas sem descuidar o rigor científico.

Considere-se  $f : P \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e definida no paralelepípedo  $P$  definido por

$$P = [a, b] \times [c, d] \times [r, s],$$

e uma decomposição  $\mathcal{P}$  de  $P = \bigcup_{i,j,k} P_{ijk}$  em  $nml$  sub-paralelepípedos da forma

$$P_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k],$$

com  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, l$ , isto é  $\mathcal{P} = \{P_{ijk}\}$ . Define-se o *diâmetro* de  $\mathcal{P}$ ,  $\delta_{\mathcal{P}}$ , como sendo a maior diagonal dos sub-paralelepípedos,  $P_{ijk}$ , que compõem a decomposição  $\mathcal{P}$ . Escolhendo arbitrariamente um ponto  $(x_i^*, y_j^*, z_k^*)$  em cada  $P_{ijk}$ , define-se

soma tripla de Riemann para a decomposição  $\mathcal{P}$ , como sendo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \text{Volume}(P_{ijk}) &= \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}). \end{aligned}$$

**Definição 3.7** (Integral triplo). *Seja  $f : P \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e  $P$  um paralelepípedo.*

*Define-se integral triplo de  $f$  sobre  $P$  como sendo o limite da soma tripla de Riemann quando o diâmetro  $\delta_{\mathcal{P}}$  tende para zero, isto é*

$$\iiint_P f(x, y, z) d(x, y, z) = \lim_{\delta_{\mathcal{P}} \rightarrow 0} \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}),$$

*desde que este existe, seja finito e independente da escolha dos pontos  $(x_i^*, y_j^*, z_k^*)$ . Neste caso diz-se que  $f$  é integrável em  $P$ .*

Tal como acontece com o integral duplo, sempre que  $f$  é uma função contínua em  $P$ , então  $f$  é integrável em  $P$  e o processo de cálculo por integração sucessiva, Teorema de Fubini, continua válido.

**Exemplo 3.6** Cálculo do integral  $\iiint_P (3xy^2 + 2z) d(x, y, z)$ , sendo  $P = [-1, 2] \times [1, 2] \times [0, 2]$ .

Tem-se

$$\begin{aligned} \iiint_P (3xy^2 + 2z) d(x, y, z) &= \int_{-1}^2 \int_1^2 \int_0^2 (3xy^2 + 2z) dz dy dx \\ &= \int_{-1}^2 \int_1^2 [3xy^2 z + z^2]_{z=0}^2 dy dx \\ &= \int_{-1}^2 \int_1^2 (6xy^2 + 4) dy dx \\ &= \int_{-1}^2 [2xy^3 + 4y]_{y=1}^{y=2} dy dx \\ &= \int_{-1}^2 (14x + 4) dx = [7x^2 + 4x]_{-1}^2 = 33. \end{aligned}$$

Desta forma, nas condições do Teorema de Fubini, é lícito dizer que o valor de um integral triplo obtém-se pela resolução sucessiva de três integrais simples.

### 3.7 Aplicações do integral triplo

Uma vez que o conjunto das possíveis aplicações do integral triplo é demasiado vasto, aqui só se apresentam algumas das mais comuns. Pela forma como a definição de integral foi introduzida, a mais natural das aplicações é o cálculo do volume de sólidos em  $\mathbb{R}^3$ . Recuperando

a condição (3.6) e o sólido

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A \text{ e } g(x, y) \leq z \leq f(x, y)\},$$

facilmente se verifica que

$$\text{Volume}(\Gamma) = \iint_A \left( f(x, y) - g(x, y) \right) d(x, y) = \iint_A \int_{g(x, y)}^{f(x, y)} 1 \, dz d(x, y) = \iiint_{\Gamma} 1 \, d(x, y, z),$$

dando sentido à seguinte definição geral do volume de um sólido  $\mathcal{V}$  em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 3.8** (Volume). *Seja  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^3$  limitado.*

*Define-se volume de  $\mathcal{V}$  como sendo o valor de*

$$\iiint_{\mathcal{V}} 1 \, d(x, y, z),$$

*quando a função constante igual a 1 é integrável em  $\mathcal{V}$ .*

**Exemplo 3.7** Cálculo do volume do cilindro

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Volume}(\mathcal{C}) &= \iiint_{\mathcal{C}} 1 \, d(x, y, z) = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{-1}^1 1 \, dx dz dy = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 2 \, dz dy \\ &= \int_{-1}^1 4\sqrt{1-y^2} dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t \, dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Outra das aplicações, prende-se com o cálculo da densidade de massa de sólidos tridimensionais. Dada uma função densidade de massa numa certa região limitada no espaço, é possível obter a densidade total fazendo uso de um integral de triplo. Mais concretamente, se  $S$  é um sólido cuja densidade de massa, em cada ponto  $(x, y, z)$  de  $S$ , é dada pela função  $m(x, y, z)$ , então a massa total de  $S$  é dada por

$$\text{Massa total}(S) = \iiint_S m(x, y, z) \, d(x, y, z).$$

Para obter a densidade média, basta dividir a massa total pelo volume do sólido, isto é

$$\text{Densidade média} = \frac{\iiint_S m(x, y, z) \, d(x, y, z)}{\iiint_S 1 \, d(x, y, z)}.$$

O centro de massa do sólido  $S$  é o ponto  $(x_m, y_m, z_m)$  do espaço  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$x_m = \frac{\iiint_S x m(x, y, z) \, d(x, y, z)}{\iiint_S 1 \, d(x, y, z)},$$

$$y_m = \frac{\iiint_S y m(x, y, z) \, d(x, y, z)}{\iiint_S 1 \, d(x, y, z)},$$

$$z_m = \frac{\iiint_S z m(x, y, z) \, d(x, y, z)}{\iiint_S 1 \, d(x, y, z)}$$

### 3.8 Coordenadas cilíndricas

À semelhança do que acontece com a integração dupla, certos integrais triplos são de difícil resolução quando a região de integração está expressa em coordenadas cartesianas. Os sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas (as coordenadas esféricas são apresentadas na secção seguinte) permitem, em diversas situações, exprimir de forma mais simples as regiões de integração.

O sistema de coordenadas cilíndricas é uma extensão natural das coordenadas polares do plano para o espaço tridimensional na medida em que as componentes  $x$ ,  $y$ , de um ponto  $P$  do espaço escrito em coordenadas cartesianas  $P = (x, y, z)$ , se exprimem no sistema polar e a componente  $z$  fica inalterável. Mais concretamente, o sistema de coordenadas cilíndricas identifica o ponto  $P$  do espaço pelo terno ordenado  $(r, \theta, z)$  definido pela relação

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases},$$

onde  $\theta \in [0, 2\pi[$ ,  $r \in [0, +\infty[$  e  $z \in \mathbb{R}$ . Na prática, as coordenadas cilíndricas obtêm-

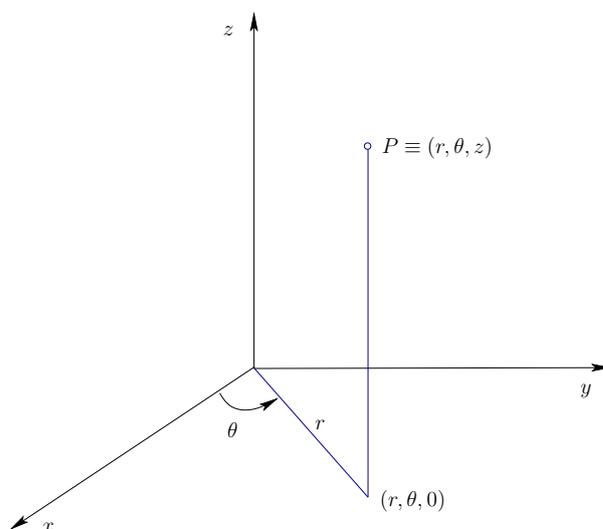


Figura 3.8: Coordenadas cilíndricas

se fazendo uma leitura das coordenadas  $(x, y)$  em coordenadas polares e mantendo igual a coordenada  $z$  (ver Figura 3.8). Neste sistema de coordenadas, alguns sólidos, nomeadamente cilindros, são descritos por equações “mais simples” (no sentido do esforço computacional envolvido). Por exemplo, o cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$$

escrito em coordenadas cilíndricas assume a forma

$$\tilde{C} = \{(r, \theta, z) \in [0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R} : r \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}.$$

Finalmente, a função

$$\begin{aligned} \Phi : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \\ (r, \theta, z) &\mapsto (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z) \end{aligned}$$

é bijectiva de classe  $C^1$  com

$$\Phi'(r, \theta, z) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde o Jacobiano é

$$\frac{\partial(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \det(\Phi'(r, \theta, z)) = r. \quad (3.11)$$

### 3.9 Coordenadas esféricas

Considere-se o espaço  $e$  constituído por pontos no qual se escolhe, como referenciais, um ponto  $\mathcal{O}$  (designado por *origem*) e dois semi-eixos ortogonais de origem  $\mathcal{O}$  (semi-eixos positivos  $\mathcal{O}x$  e  $\mathcal{O}z$  - ver figura 3.9). O *sistema de coordenadas esféricas* identifica cada ponto,  $P$ , do espaço por um terno ordenado  $(\rho, \theta, \varphi)$ , no qual a primeira coordenada  $\rho$  é a distância de  $P$  à origem  $\mathcal{O}$  ( $\rho \geq 0$ ), a segunda coordenada  $\theta$  é o ângulo definido nas coordenadas cilíndricas ( $\theta \in [0, 2\pi[$ ), ou seja  $\theta$  representa o ângulo, no plano  $X\mathcal{O}Y$ , definido pelo semi-eixo positivo  $\mathcal{O}x$  e o segmento de recta que liga a origem  $\mathcal{O}$  à projecção de  $P$  no plano  $X\mathcal{O}Y$ , e a terceira coordenada  $\varphi$  é o ângulo definido pelo semi-eixo positivo  $\mathcal{O}z$  com o segmento de recta  $\overline{\mathcal{O}P}$  ( $\varphi \in [0, \pi]$ ) (ver figura 3.9).

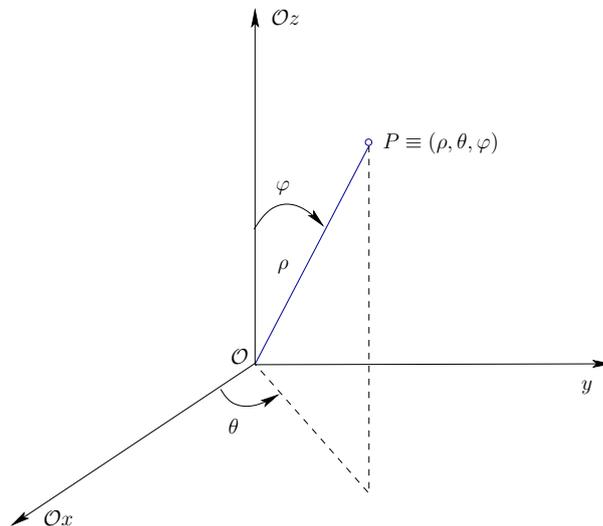


Figura 3.9: Coordenadas esféricas

Das propriedades elementares da geometria analítica, nomeadamente das relações trigonométricas e do teorema de Pitágoras, facilmente se obtém a relação entre os sistemas de

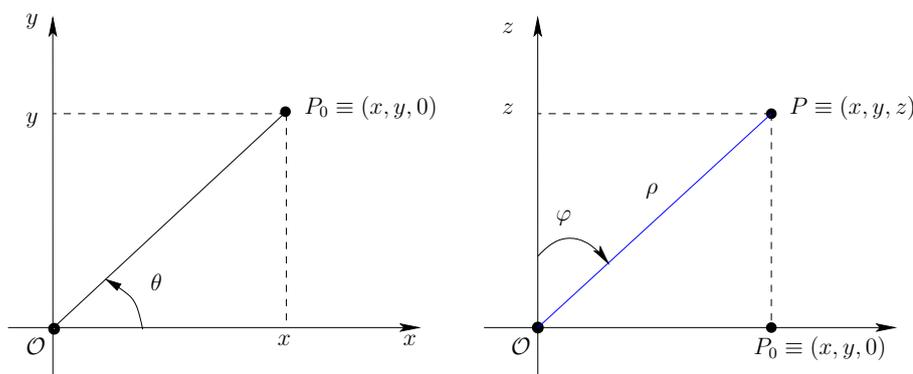


Figura 3.10:

coordenadas cartesianas e esféricas. Com efeito, da figura 3.10 concluem-se as seguintes igualdades,

$$x = \|\overline{OP_0}\| \cos \theta, \quad y = \|\overline{OP_0}\| \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi, \quad \text{e} \quad \|\overline{OP_0}\| = \rho \sin \varphi,$$

sendo  $P_0$  a projecção no plano  $XOY$  do ponto  $P$ , donde se obtém

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

Consequentemente, a função mudança de variáveis cartesianas para esféricas é definida por

$$\begin{aligned} \Psi : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[ &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ (\rho, \theta, \varphi) &\longmapsto (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \end{aligned}$$

sendo bijectiva de classe  $C^1$  com

$$\Psi'(\rho, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{bmatrix},$$

donde o Jacobiano é

$$\frac{\partial \Psi}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \det(\Psi'(\rho, \theta, \varphi)) = \rho^2 \sin \varphi. \quad (3.12)$$

### 3.10 Mudança de variável em integrais triplos

Como generalização do Teorema 3.6, pode enunciar-se o seguinte teorema de mudança de variáveis para integrais triplos.

**Teorema 3.7** (Teorema de mudança de variáveis). *Sejam  $R$  e  $S$  regiões nos espaços  $xyz$  e  $uvw$  respectivamente e  $\Phi : S \rightarrow R$  uma função bijectiva de classe  $C^1$  definida por  $\Phi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ .*

Se  $f$  é contínua em  $R$  e  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \Phi'(u, v, w) \neq 0$  para todo  $(u, v, w) \in S$ , então

$$\iiint_R f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| d(u, v, w).$$

Nas duas secções anteriores, foram abordados dois novos sistemas de coordenadas no espaço  $\mathbb{R}^3$ : o sistemas de coordenadas cilíndricas e o sistema de coordenadas esféricas.

Uma vez que  $\frac{\partial(r \cos \theta, r \sin \theta, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r$ , do Teorema 3.7 obtém-se a seguinte fórmula de mudança de variáveis cartesianas para variáveis cilíndricas em integrais tripos

$$\iiint_R f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r d(r, \theta, z),$$

onde, para colocar os limites de integração no segundo integral triplo, a região  $R$  terá que ser interpretada em coordenadas cilíndricas,  $S$ .

**Exemplo 3.8** Escreva, em coordenadas cilíndricas, o integral triplo

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} x^2 + y^2 + z dz dy dx.$$

Em coordenadas cartesianas, a região de integração é

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$$

que, escrita em coordenadas cilíndricas, assume a forma

$$S = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq r^2\}.$$

Da fórmula de mudança de variáveis conclui-se que

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} x^2 + y^2 + z dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r^2} (r^2 + z) r dz d\theta dr.$$

Para as coordenadas esféricas, tem-se  $\frac{\partial \Psi}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin \varphi$  donde, pelo Teorema 3.7, se obtém a seguinte fórmula de mudança de variáveis cartesianas para variáveis esféricas em integrais tripos

$$\iiint_R f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_S f(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d(\rho, \varphi, \theta),$$

onde, para colocar os limites de integração no segundo integral triplo, a região  $R$  terá que ser interpretada em coordenadas esféricas,  $S$ .

**Exemplo 3.9** Escreva, em coordenadas esféricas, o integral triplo

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} x^2 + y^2 + z^2 dz dy dx.$$

Em coordenadas cartesianas, a região de integração é

$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2} \right\}$$

que, escrita em coordenadas esféricas, assume a forma

$$S = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Da fórmula de mudança de variáveis conclui-se que

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} x^2 + y^2 + z^2 dz dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}} (\rho^2) \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

### 3.11 Exercícios

1. Calcule o valor do integral  $\iint_{\mathcal{A}} f$ , onde:

(a)  $f(x, y) = yx^3$  e  $\mathcal{A} = [1, 2] \times [0, 1]$ ;

(b)  $f(x, y) = e^{x+y}$  e  $\mathcal{A} = [-1, 0] \times [0, 2]$ ;

(c)  $f(x, y) = x + y$  e  $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq -x^2 + 4x\}$ ;

(d)  $f(x, y) = e^{x+y}$  e  $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x \leq y \leq -x + 2\}$ ;

(e)  $f(x, y) = x + y$  e  $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x \leq y \leq -x + 2\}$ .

2. Calcule o valor do integral  $\iiint_{\mathcal{A}} f$ , onde:

(a)  $f(x, y, z) = xy^2 - 2z$  e  $\mathcal{A} = [-1, 1] \times [0, 2] \times [2, 3]$ ;

(b)  $f(x, y, z) = \frac{x}{y} - 3zx^2$  e  $\mathcal{A} = [-1, 1] \times [1, e] \times [2, 3]$ ;

(c)  $f(x, y, z) = xy^2 - 2z$  e  $\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$ .

3. Identifique o domínio de integração e inverta a ordem de integração nos seguintes integrais:

(a)  $\int_0^1 \int_y^{y+3} f(x, y) dx dy$ ;

(b)  $\int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} f(x, y) dy dx$ ;

(c)  $\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x, y) dx dy$ ;

(d)  $\int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} f(x, y) dy dx$ ;

(e)  $\int_1^2 \int_{x^2}^{x^3} f(x, y) dy dx$ ;

(f)  $\int_0^2 \int_x^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx$ .

4. Invertendo a ordem de integração, calcule:

$$(a) \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2} dy dx; \quad (b) \int_1^{e^3} \int_{\log y}^3 dx dy;$$

$$(c) \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dx dy; \quad (d) \int_1^e \int_{\log y}^1 \frac{(x^2+1)^{13}}{y} dx dy.$$

5. Usando integrais duplos, calcule a área de cada uma das regiões planas  $R$  que se seguem:

$$(a) R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, e^{-x} \leq y \leq e^x\};$$

$$(b) R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y \leq -2x^2 - x + 3, y \leq -x + 1\};$$

$$(c) R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, y \leq 4 - x^2\};$$

6. Usando integrais duplos, calcule o volume de cada um dos sólidos  $S$  que se seguem:

$$(a) R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, e^{-x} \leq y \leq e^x, 0 \leq z \leq x + y\};$$

$$(b) R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, y \leq x^2 - 2x, x - y \leq z \leq x + y\};$$

$$(c) R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0, x \geq y^2 - y, x \leq z + y, y \leq -x - z\}.$$

7. Determine as coordenadas polares dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A = (3, \sqrt{3}), \quad B = (0, 2), \quad C = (0, -2), \quad D = (-4, -4), \quad E = (1, 1).$$

8. Determine as coordenadas cartesianas dos pontos cuja representação polar é

$$A = \left(1, \frac{\pi}{4}\right), \quad B = \left(2, \frac{3\pi}{2}\right), \quad C = (5, 0), \quad D = \left(5, \frac{\pi}{2}\right), \quad E = \left(3, \frac{11\pi}{6}\right).$$

9. Passando para coordenadas polares, calcule  $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) d(x, y)$ , onde:

$$(a) f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 5\};$$

$$(b) f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1} \log(x^2 + y^2) \quad \text{e} \quad \mathcal{D} \text{ é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências de equações } x^2 + y^2 = 4 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 9;$$

$$(c) f(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \sqrt{3}y \geq x, \sqrt{3}x \geq y\};$$

$$(d) f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\};$$

$$(e) f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x, y \geq x^2, x \geq 0\}.$$

10. Usando integrais duplos, calcule a área de cada uma das regiões planas  $R$  que se seguem:

$$(a) R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x, y \leq x, x^2 + y^2 \leq 9\};$$

- (b)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \leq x, x \geq 0\}$ ;  
 (c)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16, (x+2)^2 + y^2 \geq 4, y \geq 0\}$ .

11. Usando integrais duplos, calcule o volume dos seguintes sólidos:

- (a)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$ ;  
 (b)  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, z \geq 0, y + z \leq 2\}$ ;  
 (c)  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, y + z \leq 3\}$ .

12. Determine as coordenadas cilíndricas dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A = (1, \sqrt{3}, -1), \quad B = (2, 0, 0), \quad C = (0, -5, 3) \quad \text{e} \quad D = (3, -3, 2).$$

13. Usando coordenadas cilíndricas, calcule  $\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) d(x, y, z)$ , para

- (a)  $f(x, y, z) = x$  e  $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 3, x^2 + y^2 \leq z\}$ ;  
 (b)  $f(x, y, z) = ze^{x^2+y^2}$  e  $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq z \leq 3, x^2 + y^2 \leq 4\}$ ;  
 (c)  $f(x, y, z) = z\sqrt{x^2+y^2}$  e  $\mathcal{R}$  a região do primeiro octante limitada pelas superfícies cilíndricas de equações  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 9$  e pelos planos de equações  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $x = 0$  e  $x = y$ .

14. Determine as coordenadas esféricas dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A = (1, -1, 0), \quad B = (1, 1, \sqrt{2}), \quad C = (-1, -1, \sqrt{2}) \quad \text{e} \quad D = (0, 1, -1).$$

15. Calcule o volume da esfera de centro na origem e raio 2.

16. Usando coordenadas esféricas, calcule o valor do integral

$$\iiint_S \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} d(x, y, z),$$

$$\text{onde } S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4\}.$$

17. Calcule o volume do sólido que é:

- (a) definido pelas condições  $3z \geq x^2 + y^2$  e  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ;  
 (b) definido pelas condições  $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  
 (c) limitado pela superfície esférica de equação  $\rho = 1$  e pela superfície cônica de equação  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

18. Calcule o volume do sólido  $S$ , onde  $S$  é descrito por

- (a)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{16 - x^2 - y^2}\}$ ;  
 (b)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$ .

# Capítulo 4

## Análise Vectorial

No capítulo 1 estudaram-se funções vectoriais de variável real que permitem descrever movimentos de objectos quer no plano quer no espaço. Neste capítulo estuda-se a classe das funções vectoriais de variável vectorial que permitem modelar campos de forças quer no plano quer no espaço, mais concretamente forças actuantes nos espaços vectoriais  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

Por simplicidade da exposição, neste capítulo as definições e os resultados estão apresentados para campos de forças a actuar em todo o espaço ( $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ). Contudo, é possível reescrever-los considerando campos de forças actuando em domínios abertos  $D$  ( $D$  subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$ ).

### 4.1 Campos de forças

**Definição 4.1** (Campo de forças). *Chama-se campo de forças a qualquer função  $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Se  $n = 2$ , diz-se que  $\vec{F}$  é um campo de forças no plano e, se  $n = 3$ , diz-se que  $\vec{F}$  é um campo de forças no espaço.*

Um campo de forças no plano

$$\begin{aligned} \vec{F} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (M(x, y), N(x, y)) \end{aligned}$$

denota-se simplesmente por  $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\hat{i} + N(x, y)\hat{j}$  e um campo de forças no espaço

$$\begin{aligned} \vec{G} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z)) \end{aligned}$$

denota-se por  $\vec{G}(x, y, z) = M(x, y, z)\hat{i} + N(x, y, z)\hat{j} + P(x, y, z)\hat{k}$ . Naturalmente, um campo de forças diz-se *contínuo* se cada uma das funções  $M$ ,  $N$  e  $P$  forem contínuas.

Observe que o gradiente de uma função real constitui um campo de forças, por exemplo, a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x, y) = xy$ , possui o gradiente  $\nabla f(x, y) = y\hat{i} + x\hat{j}$ , sendo este um campo de forças no plano. Neste sentido apresenta-se a definição que se segue.

**Definição 4.2** (Campo de gradientes). *Um campo de forças  $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínuo diz-se campo de gradientes, ou campo conservativo, se existe  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tal que*

$$\vec{F} = \nabla f.$$

*Neste caso a função  $f$  chama-se função potencial de  $\vec{F}$ .*

**Proposição 4.1.** *Seja  $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\hat{i} + N(x, y)\hat{j}$  um campo de forças de classe  $C^1$ . Se  $\vec{F}$  é um campo de gradientes, então  $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .*

*Demonstração.* Suponha-se que  $\vec{F}$  é um campo de gradientes. Por definição existe uma função potencial  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\vec{F}$  ou seja, uma função  $f$  verificando  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$ . Sendo  $\vec{F}$  de classe  $C^1$ , ou seja sendo  $M$  e  $N$  funções de classe  $C^1$ , conclui-se que

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \end{cases},$$

donde, pelo Teorema de Schwarz 2.4, se conclui que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y).$$

□

**Nota 4.1** Efectivamente, o recíproco da proposição anterior também é válida pelo que se vislumbra um critério, de fácil verificação, para identificar os campos de gradientes em  $\mathbb{R}^2$ . Contudo a condição necessária será provada após a apresentação do Teorema de Green.

**Exemplo 4.1** Para cada um dos campos de forças que se segue identifique os campos de gradientes:

1.  $\vec{F}_1(x, y) = x^2\hat{i} + xy\hat{j}$ ;
2.  $\vec{F}_2(x, y) = y\hat{i} + (x + 1)\hat{j}$ .

O campo  $\vec{F}_1$  não é campo de gradientes porque  $\frac{\partial[x^2]}{\partial y} = 0 \neq y = \frac{\partial[xy]}{\partial x}$ .

O campo  $\vec{F}_2$  é um campo de gradientes porque  $\frac{\partial[y]}{\partial y} = 1 = \frac{\partial[x + 1]}{\partial x}$ . Uma função potencial de  $\vec{F}_2$  é  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que verifica

$$\nabla f(x, y) = (y, x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 1 \end{cases}.$$

Consequentemente, da primeira igualdade obtém-se

$$f(x, y) = \int y dx = xy + g(y) \quad (4.1)$$

que, conjuntamente com a segunda igualdade,

$$\frac{\partial[xy + g(y)]}{\partial y} = x + 1 \Leftrightarrow x + g'(y) = x + 1 \Leftrightarrow g'(y) = 1 \Leftrightarrow g(y) = y,$$

donde, substituindo em (4.1), se obtém a função pontecial

$$f(x, y) = xy + y.$$

Usando os mesmos argumentos da prova da Proposição 4.1, obtém-se o seguinte resultado para campos de forças no espaço. À semelhança do que se passa no plano, este também é uma equivalência e a prova é análoga à prova do recíproco da Proposição 4.1, usando o Teorema de Stokes no lugar do Teorema de Green.

**Proposição 4.2.** *Seja  $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\hat{i} + N(x, y, z)\hat{j} + P(x, y, z)\hat{k}$  um campo de forças de classe  $C^1$ .*

*Se  $\vec{F}$  é um campo de gradientes, então*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z} \quad e \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (4.2)$$

*Demonstração.* Análoga à prova apresentada na Proposição 4.1.  $\square$

De notar que uma função  $\vec{F}$  verifica as igualdades (4.2) se e só se a sua matriz Jacobiana

$$\mathcal{M}(\vec{F}'(x, y, z)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial x} & \frac{\partial M}{\partial y} & \frac{\partial M}{\partial z} \\ \frac{\partial N}{\partial x} & \frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial N}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \end{bmatrix}$$

é simétrica.

Uma outra forma de simplificar a apresentação do teste estabelecido pelo resultado anterior é através da definição de *rotacional*.

**Definição 4.3** (Rotacional). *Define-se rotacional de um campo de forças,  $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ , no espaço como sendo o vector*

$$\text{rot}\vec{F} = \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \hat{i} - \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \hat{k}.$$

Na prática, o rotacional de  $\vec{F}$  obtém-se fazendo o produto externo entre o operador diferencial  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$  e o campo de forças  $\vec{F}$  ou seja, através do cálculo formal

do seguinte “determinante”

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}.$$

**Nota 4.2** Observe-se que o teste estabelecido pela Proposição 4.2 pode agora ser escrito na seguinte forma:

Se  $\vec{F}$  é um campo de gradientes no espaço, então o seu rotacional é o vector nulo.

Sendo o recíproco da Proposição 4.2 também uma condição verdadeira, o critério de identificação dos campos de gradientes no espaço é o seguinte:

Um campo de forças no espaço é um campo de gradientes se e só se o seu rotacional é o vector nulo.

Como consequência da definição, o rotacional de um campo de forças no espaço é também um campo de forças no espaço. A definição que se segue apresenta o *divergente* de um campo de forças (quer no plano quer no espaço) que é uma função escalar.

**Definição 4.4** (Divergente). *Define-se divergente de um campo de forças,  $\vec{F}$ , como o produto interno entre o operador diferencial  $\nabla$  e o campo  $\vec{F}$ , ou seja:*

Para  $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\hat{i} + N(x, y)\hat{j}$  no plano define-se divergente por

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y) = \nabla \cdot \vec{F}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y};$$

Para  $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\hat{i} + N(x, y, z)\hat{j} + P(x, y, z)\hat{k}$  no espaço define-se divergente por

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}.$$

## 4.2 Integral de linha

**Definição 4.5** (Integral de linha). *Seja  $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  (ou  $\mathbb{R}^2$ ) uma parametrização de uma curva  $C$  regular no espaço (ou no plano).*

*Se  $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (ou  $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) é um campo de forças contínuo, então define-se integral de linha, também chamado de integral curvilíneo, por*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt. \quad (4.3)$$

É possível provar que, para qualquer curva orientada (isto é, considerando apenas parametrizações de  $C$  que determinam um mesmo sentido pré-estabelecido segundo o qual os pontos da curva são percorridos), a definição de integral de linha não depende da parametrização escolhida. Contudo, o integral de linha depende do sentido em que a curva  $C$  é

percorrida, uma vez que, designando por  $-C$  a curva orientada em sentido oposto ao de  $C$ , facilmente se verifica a igualdade

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (4.4)$$

Fica como exercício a prova da igualdade (4.4).

Atendendo à definição de integral simples, da definição de integral de linha apresentada verifica-se que

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \lim_{\delta_P \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \underbrace{\vec{F}(\vec{r}(t_i^*))}_{\text{força}} \cdot \underbrace{\vec{r}'(t_i^*)(t_i - t_{i-1})}_{\text{deslocamento}}, \end{aligned}$$

onde  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$  é uma partição de  $[a, b]$ ,  $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ , e  $\delta_P = \max_i \{t_i - t_{i-1}\}$ .

Consequentemente, o integral de linha  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  fornece o *trabalho* realizado pela força  $\vec{F}$  sobre uma partícula que se desloca ao longo da curva  $C$  através da parametrização  $\vec{r}(t)$ .

Sendo o integral de linha definido como um integral simples, as propriedades apresentadas na proposição que se segue são uma consequência óbvia das propriedades conhecidas para o integral simples.

**Proposição 4.3** (Propriedades do integral de linha). *Sejam  $\vec{F}, \vec{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2$ ) campos de forças contínuos,  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $C$  uma curva regular em  $\mathbb{R}^n$ . Tem-se que:*

1.  $\int_C (\vec{F} + \vec{G}) \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$ ;
2.  $\int_C (\alpha \vec{F}) \cdot d\vec{r} = \alpha \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ;
3.  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  onde  $C = C_1 \cup C_2$ .

Como consequência do ponto 3. da proposição anterior, de forma natural a definição de integral de linha pode ser estendida para curvas seccionalmente regulares. Daqui em diante, a menos que algo seja referido em contrário, sempre que me referir a uma curva, assumo que esta é seccionalmente regular.

Para um campo de forças contínuo  $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\hat{i} + N(x, y, z)\hat{j} + P(x, y, z)\hat{k}$  e uma curva  $C$  em  $\mathbb{R}^3$ , parametrizada por  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , tem-se

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b M(x(t), y(t), z(t))x'(t) + N(x(t), y(t), z(t))y'(t) + P(x(t), y(t), z(t))z'(t) dt, \end{aligned}$$

donde faz sentido estabelecer a seguinte notação para o integral de linha

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M(x, y, z) dx + \int_C N(x, y, z) dy + \int_C P(x, y, z) dz,$$

ou simplesmente

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + P(x, y, z) dz.$$

De forma análoga se estabelece a seguinte notação para o integral de linha de um campo de forças,  $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j}$ , no plano

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy.$$

**Exemplo 4.2** Cálculo do integral  $\int_C y^2 dx + 1 dy$ , sendo  $C$  o segmento de recta que une o ponto  $(0, 0)$  ao ponto  $(1, 2)$ .

Uma parametrização para  $C$  é  $\vec{r}(t) = t\hat{i} + 2t\hat{j}$ ,  $t \in [0, 1]$ , donde  $\vec{r}'(t) = (1, 2)$  e

$$\int_C y^2 dx + 1 dy = \int_0^1 (2t)^2 + 2 dt = \frac{10}{3}.$$

**Teorema 4.4** (Teorema fundamental do cálculo para integrais de linha). *Seja  $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de gradientes e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma sua função potencial. Então*

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = f(B) - f(A),$$

onde  $C$  é uma qualquer curva regular em  $\mathbb{R}^n$  parametrizada do ponto  $A$  para o ponto  $B$ .

*Demonstração.* Seja  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma parametrização de uma curva regular  $C$  do ponto  $A$  para o ponto  $B$  isto é,  $\vec{r}(a) = A$  e  $\vec{r}(b) = B$ . Tem-se

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}.d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)).\vec{r}'(t) dt = \int_a^b \nabla f(\vec{r}(t)).\vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b (f \circ \vec{r})'(t) dt = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)) = f(B) - f(A). \end{aligned}$$

□

Pelo Teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, fica claro que, em campos conservativos, o valor do integral de linha depende apenas do ponto inicial e do ponto final. Esta propriedade motiva a seguinte definição.

**Definição 4.6.** *Seja  $\vec{F}$  um campo de forças. O integral de linha  $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$  diz-se que é independente da curva simples se  $\int_{C_1} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F}.d\vec{r}$ , para quaisquer duas curvas simples,  $C_1$  e  $C_2$ , em que o ponto inicial de  $C_1$  e  $C_2$  coincide, assim como o ponto final de  $C_1$  e de  $C_2$ .*

Ainda pelo Teorema 4.4, facilmente se constata que se a curva  $C$  for uma curva seccionalmente regular e fechada, então o valor do integral de linha de um campo de gradientes ao longo de  $C$  é zero. Neste sentido, é de fácil verificação o resultado que se segue:

**Proposição 4.5.** *Seja  $\vec{F}$  um campo de forças. O integral de linha  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  é independente da curva simples se e só se  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ , para qualquer curva  $C$  simples e fechada.*

*Demonstração.* Ver Teorema 8.10 de [3]. □

**Proposição 4.6.** *Seja  $\vec{F}$  um campo de forças. Se o integral de linha  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  é independente da curva simples, então  $\vec{F}$  é um campo de gradientes.*

*Demonstração.* A prova será feita para o espaço  $\mathbb{R}^2$ , mas esta pode ser generalizada para o espaço  $\mathbb{R}^3$ .

Sejam  $(a, b), (x_1, y_1)$  dois pontos fixos em  $\mathbb{R}^2$  e  $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\hat{i} + N(x, y)\hat{j}$  um campo de forças tal que o integral de linha  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  é independente da curva simples.

Denotando por  $C_{(x,y)}$  o segmento de recta unindo o ponto  $(a, b)$  a um ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , defina-se a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x, y) = \int_{C_{(x,y)}} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (4.5)$$

De notar que a função  $f$  está bem definida porque, sendo o integral de linha independente da curva simples, o valor de  $\int_{C_{(x,y)}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  só depende do ponto  $(x, y)$ .

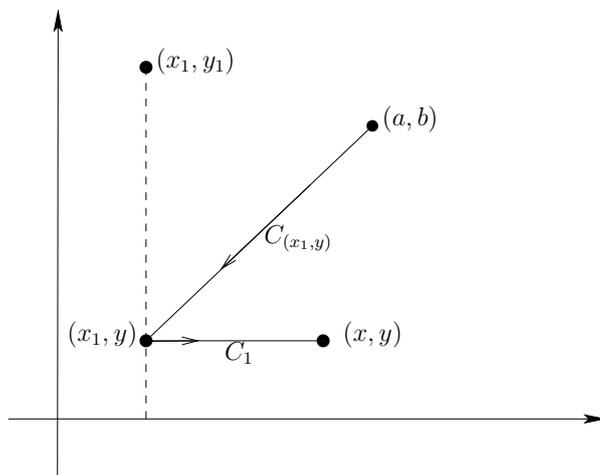


Figura 4.1: Curva de  $C_{(x_1,y)} + C_1$

Do ponto 3. da Proposição 4.3, tem-se que (ver figura 4.1)

$$f(x, y) = \int_{C_{(x,y)}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_{(x_1,y)}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

sendo  $C_1$  o segmento de recta que une o ponto  $(x_1, y)$  ao ponto  $(x, y)$ . Como  $\int_{C_{(x_1, y)}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  não depende da variável  $x$ , tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{C_{(x_1, y)}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right).$$

Uma parametrização para  $C_1$  é  $\vec{r}(t) = (t, y)$ ,  $t \in [x_1, x]$ , tendo-se  $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^x M(t, y) dt$ , donde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{x_1}^x M(t, y) dt \right) = M(x, y). \quad (4.6)$$

Por outro lado, ainda pelo ponto 3. da Proposição 4.3, tem-se que

$$f(x, y) = \int_{C_{(x, y_1)}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

sendo  $C_2$  o segmento de recta que une o ponto  $(x, y_1)$  ao ponto  $(x, y)$ .

De forma análoga ao que anteriormente foi feito, obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = N(x, y), \quad (4.7)$$

pelo que, de (4.6) e (4.7), se conclui que

$$\vec{F}(x, y) = M(x, y)\hat{i} + N(x, y)\hat{j} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\hat{j} = \nabla f(x, y),$$

ou seja, a função  $f$  definida por (4.5) é uma função potencial de  $\vec{F}$  e  $\vec{F}$  é um campo de gradientes.  $\square$

### 4.3 Teorema de Green

O Teorema de Green estabelece uma relação entre o integral de linha e o integral duplo. Antes de o enunciar, é necessário introduzir as noções de conjunto “simplesmente conexo” (ver figura 4.2)

**Definição 4.7** (Conjunto simplesmente conexo). *Um subconjunto  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  diz-se simplesmente conexo se a sua fronteira é constituída por uma única curva simples e fechada.*

**Teorema 4.7** (Teorema de Green). *Seja  $R$  uma região de  $\mathbb{R}^2$  simplesmente conexa e delimitada por uma curva  $C$  seccionalmente regular, fechada e orientada no sentido directo (sentido anti-horário).*

*Se o campo de forças  $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\hat{i} + N(x, y)\hat{j}$ , é de classe  $C^1$ , então*

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) d(x, y). \quad (4.8)$$

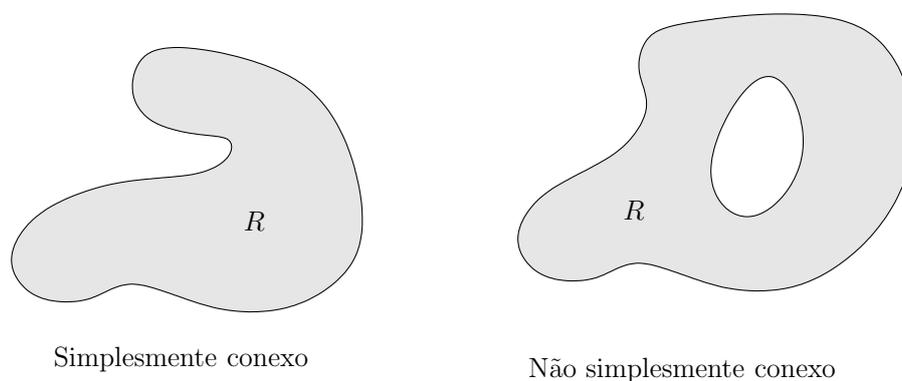


Figura 4.2:

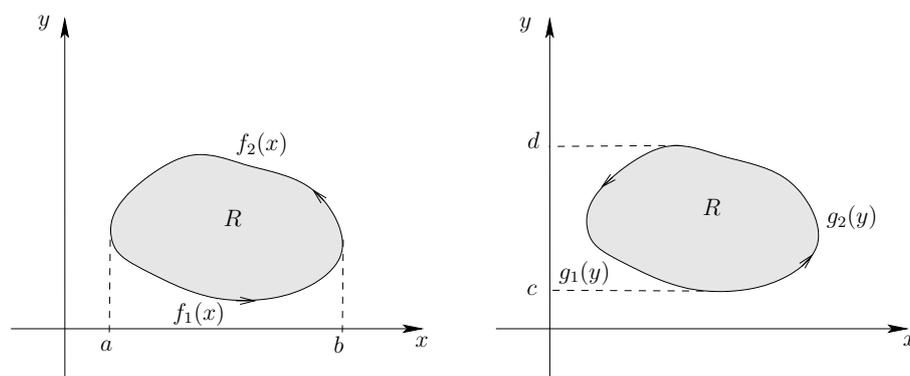


Figura 4.3: Região verticalmente e horizontalmente simples

*Demonstração.* Por uma questão de simplicidade, a demonstração será feita apenas para uma região,  $R$ , verticalmente e horizontalmente simples (ver figura 4.3).

Sendo  $C_1$  a curva definida por  $t \mapsto (t, f_1(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , e  $C_2$  a curva definida por  $t \mapsto (t, f_2(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , tem-se que a fronteira é descrita pela curva  $C = C_1 - C_2$  orientada no sentido directo. Por um lado, da definição de integral de linha, tem-se

$$\begin{aligned}
 \int_C M(x, y) dx &= \int_{C_1} M(x, y) dx + \int_{-C_2} M(x, y) dx \\
 &= \int_a^b M(t, f_1(t)) dt + \int_b^a M(t, f_2(t)) dt \\
 &= \int_a^b (M(t, f_1(t)) - M(t, f_2(t))) dt.
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) d(x, y) &= \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dy dx \\ &= \int_a^b [M(x, y)]_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} dx \\ &= \int_a^b (M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))) dx. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int_C M(x, y) dx = - \iint_R \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) d(x, y) = \iint_R -\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) d(x, y). \quad (4.9)$$

Usando o facto da região  $R$  ser horizontalmente simples, de forma análoga se conclui que

$$\int_C N(x, y) dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) d(x, y). \quad (4.10)$$

Finalmente, de (4.9) e de (4.10) conclui-se que

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) d(x, y).$$

□

Uma consequência imediata do Teorema de Green, é a possibilidade de calcular a área de uma região plana através de um integral de linha.

**Corolário 4.8.** *Se  $R$  é uma região plana delimitada pela curva fechada simples  $C$ , orientada no sentido directo, então*

$$\text{Área}(R) = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy.$$

*Demonstração.* Fica como exercício. □

Está-se agora em condições de demonstrar o recíproco da Proposição 4.1.

**Proposição 4.9.** *Seja  $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\hat{i} + N(x, y)\hat{j}$  um campo de forças de classe  $C^1$ . Se  $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , então  $\vec{F}$  é um campo de gradientes.*

*Demonstração.* Seja  $C$  uma curva simples fechada no plano, orientada no sentido directo, e  $R$  a região delimitada por  $C$ . Pelo Teorema de Green e pela hipótese  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  conclui-se que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M dx + N dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) d(x, y) = 0,$$

ou seja,  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  para qualquer curva simples fechada  $C$ .

Pela Proposição 4.5 obtém-se que  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  é independente da curva simples e, pela Proposição 4.6, finalmente se conclui que  $\vec{F}$  é campo de gradientes. □

O Teorema de Green, sendo válido para conjuntos simplesmente conexos, pode também ser aplicado a outras regiões desde que estas sejam decomponíveis em regiões simplesmente conexas. O exemplo que se segue exemplifica como isto pode ser feito.

**Exemplo 4.3** Cálculo do integral de linha

$$\int_C \frac{y^2}{2} dx + (xy + x) dy,$$

onde  $C = C_1 \cup C_2$  é a fronteira de

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$

com a orientação apresentada na figura 4.4.

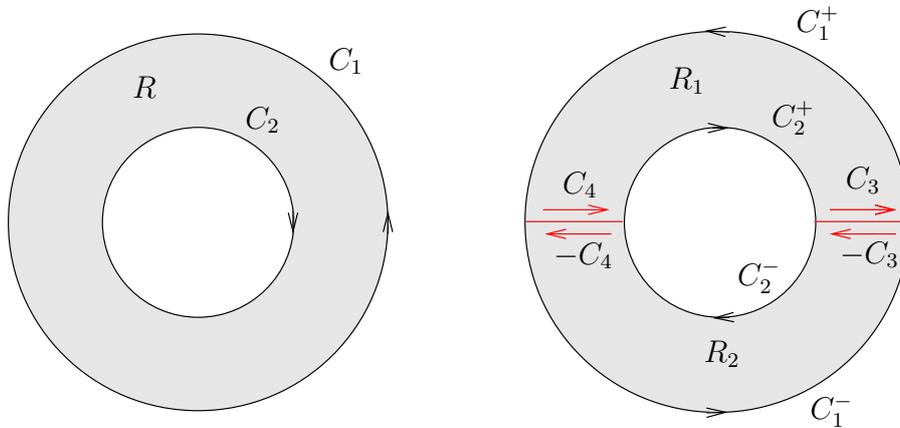


Figura 4.4: Região  $R$  do Exemplo 4.3

Introduzindo os segmentos de recta  $C_3$  e  $C_4$  e escrevendo  $C_1 = C_1^+ \cup C_1^-$ ,  $C_2 = C_2^+ \cup C_2^-$ , tal como se ilustra na figura 4.4, obtém-se

$$C = (C_1^+ \cup C_4 \cup C_2^+ \cup C_3) \cup (C_1^- \cup (-C_3) \cup C_2^- \cup (-C_4)) \quad \text{e} \quad R = R_1 \cup R_2,$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \int_C \frac{y^2}{2} dx + (xy + x) dy &= \int_{(C_1^+ \cup C_4 \cup C_2^+ \cup C_3)} \frac{y^2}{2} dx + (xy + x) dy + \\ &+ \int_{(C_1^- \cup (-C_3) \cup C_2^- \cup (-C_4))} \frac{y^2}{2} dx + (xy + x) dy, \end{aligned}$$

com  $R_1$  e  $R_2$  regiões simplesmente conexas. Aplicando o Teorema de Green a cada um dos integrais de linha obtém-se

$$\begin{aligned} \int_C \frac{y^2}{2} dx + (xy + x) dy &= \iint_{R_1} \frac{\partial[xy + x]}{\partial x} - \frac{\partial[\frac{y^2}{2}]}{\partial y} d(x, y) + \iint_{R_2} \frac{\partial[xy + x]}{\partial x} - \frac{\partial[\frac{y^2}{2}]}{\partial y} d(x, y) \\ &= \iint_{R_1 \cup R_2} (y + 1 - y) d(x, y) = \text{Área}(R) = 3\pi. \end{aligned}$$

## 4.4 Superfícies parametrizadas

**Definição 4.8** (Superfície). *Chama-se parametrização de uma superfície a uma função de classe  $C^1$*

$$s : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k} \text{ ,}$$

onde  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  é simplesmente conexo.

Ao contradomínio de  $s$ ,

$$S = \{s(u, v) : (u, v) \in U\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

chama-se superfície e as equações

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

chamam-se equações paramétricas da superfície  $S$ .

**Definição 4.9** (Superfície simples). *Uma superfície  $S$  diz-se simples se admite uma parametrização injectiva.*

**Exemplo 4.4** A função

$$c : [0, 2\pi[ \times [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto \cos(u)\hat{i} + \sin(u)\hat{j} + v\hat{k} \text{ ,}$$

é uma parametrização do cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } 0 \leq z \leq 2\}.$$

Dada uma superfície  $S$ , parametrizada por  $s(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}$ , as derivadas parciais

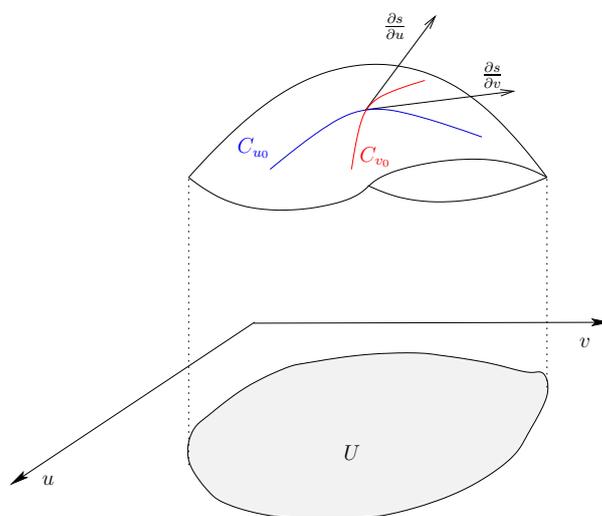
$$\frac{\partial s}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\hat{k}$$

e

$$\frac{\partial s}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\hat{k}$$

podem ser interpretadas, do ponto de vista geométrico, como sendo vectores tangentes à superfície  $S$ . Efectivamente, dado  $(u_0, v_0) \in U$ , a função  $\vec{r}(u) = s(u, v_0)$  é uma parametrização de uma curva  $C_{v_0}$  que se encontra na superfície  $S$  e o vector  $\vec{r}'(u) = \frac{\partial s}{\partial u}(u, v_0)$ , sendo tangente à curva  $C_{v_0}$ , é tangente à superfície  $S$ . De forma análoga, o mesmo raciocínio pode ser feito quando se considera a função  $\vec{p}(v) = s(u_0, v)$ . Observe a figura 4.5.

Sendo  $\frac{\partial s}{\partial u}$  e  $\frac{\partial s}{\partial v}$  dois vectores no espaço, tangentes à superfície  $S$ , de forma natural se pode pensar no vector ortogonal (caso exista) por forma a obter uma base no espaço  $\mathbb{R}^3$ , isto é pensar no produto externo.

Figura 4.5: Superfície parametrizada por  $s(u, v)$ 

**Definição 4.10** (Produto vectorial fundamental). *Define-se produto vectorial fundamental de uma superfície parametrizada por  $s(u, v)$  como sendo o produto externo*

$$\frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v}.$$

**Definição 4.11** (Superfície regular). *Seja  $S$  uma superfície parametrizada por  $s(u, v)$ .*

*Um ponto  $A \in S$ ,  $A = s(a_1, a_2)$ , diz-se regular se o produto externo*

$$\frac{\partial s}{\partial u}(a_1, a_2) \times \frac{\partial s}{\partial v}(a_1, a_2)$$

*não é o vector nulo.*

*A superfície  $S$  diz-se regular se todos os seus pontos forem pontos regulares.*

Para uma superfície regular simples,  $S$ , parametrizada por  $s(u, v)$ , com  $(u, v) \in U$  simplesmente conexo, os vectores  $\frac{\partial s}{\partial u}$  e  $\frac{\partial s}{\partial v}$  são linearmente independentes e o paralelogramo de lados  $\frac{\partial s}{\partial u}$  e  $\frac{\partial s}{\partial v}$  é tangente à superfície  $S$ . Assim, considerando uma partição de  $U$  em rectângulos  $\mathcal{P} = \{U_{ij}\}$ , com  $U_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$ , a parametrização  $s(u, v)$  determina uma partição  $\mathcal{S} = \{S_{ij}\}$  da superfície  $S$ , onde  $S_{ij} = s(U_{ij})$ . Tomando, para cada ponto  $(u_i, v_j)$  o paralelogramo  $P_{ij}$ , de lados  $(u_i - u_{i-1}) \cdot \frac{\partial s}{\partial u}(u_i, v_j)$  e  $(v_j - v_{j-1}) \cdot \frac{\partial s}{\partial v}(u_i, v_j)$ , tangente à superfície  $S$  em  $s(u_i, v_j)$ , a área de cada porção de superfície  $S_{ij}$  pode ser aproximada pela área de  $P_{ij}$  e consequentemente a área total da superfície  $S$  é aproximada por  $\text{Área}(S) = \sum \text{área}(S_{ij}) \approx \sum \text{área}(P_{ij})$ . Como a área( $P_{ij}$ ) é dada por

$$\begin{aligned} & \left\| (u_i - u_{i-1}) \cdot \frac{\partial s}{\partial u}(u_i, v_j) \times (v_j - v_{j-1}) \cdot \frac{\partial s}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| = \\ & = \left\| \frac{\partial s}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial s}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}), \end{aligned}$$

faz sentido apresentar a seguinte definição para área de uma superfície.

**Definição 4.12** (Área de uma superfície). *Seja  $S$  uma superfície simples e  $s(u, v)$ , com  $(u, v) \in U$ , uma sua parametrização. Define-se área da superfície  $S$  como sendo*

$$\text{Área}(S) = \iint_U \left\| \frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right\| d(u, v).$$

**Exemplo 4.5** Calcule a área da superfície cilíndrica,  $C$ , apresentada no Exemplo 4.4.

Como  $s(u, v) = \cos(u)\hat{i} + \sin(u)\hat{j} + v\hat{k}$ , com  $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2]$ , tem-se

$$\frac{\partial s}{\partial u} = -\sin(u)\hat{i} + \cos(u)\hat{j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial s}{\partial v} = \hat{k},$$

donde o produto externo

$$\frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos(u)\hat{i} + \sin(u)\hat{j}$$

e conseqüentemente

$$\left\| \frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right\| = \sqrt{\cos^2(u) + \sin^2(u)} = 1.$$

Finalmente, por definição, obtém-se

$$\text{Área}(C) = \iint_U \left\| \frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right\| d(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 1 \, dvdu = 4\pi.$$

## 4.5 Integral de superfície

**Definição 4.13** (Integral de superfície). *Seja  $S$  uma superfície simples e regular com  $s : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma sua parametrização.*

*Se  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é um campo escalar contínuo e limitado, então define-se integral de superfície por:*

$$\iint_S f \, dS = \iint_U f(s(u, v)) \left\| \frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right\| d(u, v).$$

No que se segue, apresentam-se algumas aplicações do integral de superfície. Da definição, imediatamente se observa que se  $f(x, y, z) = 1$ , então o integral de superfície  $\iint_S 1 \, dS$  corresponde à área da superfície  $S$ . No caso em que a função escalar  $f(x, y, z)$  descreve a densidade de massa sobre uma superfície  $S$ , então o valor da massa total da superfície  $S$  obtém-se por

$$\text{massa} = \iint_S f \, dS.$$

O centro de massa é o ponto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  do espaço  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$\bar{x} = \frac{\iint_S x f(x, y, z) \, dS}{\iint_S f \, dS}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_S y f(x, y, z) \, dS}{\iint_S f \, dS}, \quad \bar{z} = \frac{\iint_S z f(x, y, z) \, dS}{\iint_S f \, dS}.$$

Contudo, uma das principais aplicações do integral de superfície é a possibilidade de cálculo da quantidade de um fluxo, dado por um campo de forças  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que atravessa uma dada superfície  $S$ . Para isso é necessário definir superfície orientada.

**Definição 4.14** (Superfície orientada). *Uma superfície simples e regular  $S$ , com  $s(u, v)$  uma sua parametrização, diz-se orientada se existe uma função vectorial contínua  $\vec{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que, para qualquer  $\sigma \in S$ ,  $\|\vec{N}(\sigma)\| = 1$  e  $\vec{N}(\sigma)$  é normal à superfície, isto é*

$$\frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \cdot \vec{N}(s(u, v)) = \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) \cdot \vec{N}(s(u, v)) = 0, \quad \forall (u, v) \in U.$$

Para uma superfície regular simples,  $S$ , de parametrização  $s(u, v)$ , o vector  $\frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v}$  é normal à superfície  $S$  em cada ponto, donde  $S$  é orientada por  $\vec{N} = \frac{\frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right\|}$ . Note que, imediatamente da definição, se pode igualmente considerar que  $S$  está orientada pelo vector  $-\vec{N}$ .

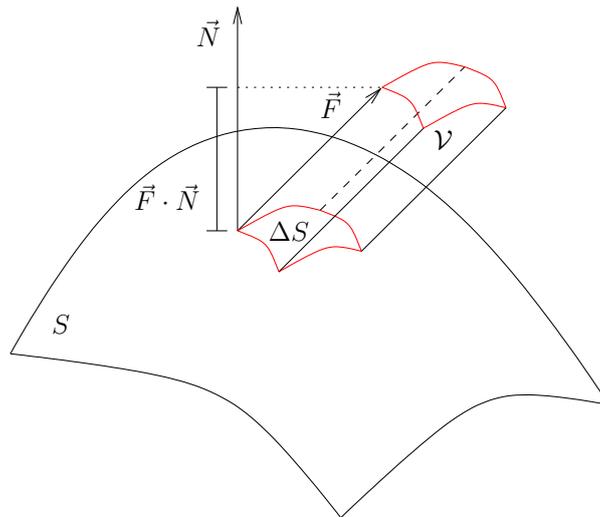


Figura 4.6: Fluxo sobre uma superfície  $S$

Considerando  $\Delta S$  uma pequena porção da superfície  $S$  sobre a qual a força  $\vec{F}$  actua, aproximadamente, de forma constante, a quantidade de fluxo que atravessa a porção  $\Delta S$ , por unidade de tempo, pode ser aproximada pelo volume do sólido  $\mathcal{V}$  (ver figura 4.6). Das propriedades do produto interno facilmente se verifica que

$$\text{volume}(\mathcal{V}) = (\vec{F} \cdot \vec{N}) \cdot \text{área}(\Delta S).$$

Formalmente, a definição que se segue apresenta a noção de fluxo.

**Definição 4.15** (Fluxo). *Sejam  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo de forças contínuo e  $S$  uma superfície orientada pelo vector unitário normal  $\vec{N}$ .*

Define-se fluxo de  $\vec{F}$  através de  $S$  por

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS.$$

**Exemplo 4.6** Cálculo do fluxo da força  $\vec{F}(x, y, z) = y\hat{i} - x\hat{j} + \hat{k}$  sobre a superfície  $S$ , definida por

$$z = x^2 + y^2 - 1 \quad \text{e} \quad z \leq 0,$$

com vector unitário normal apontando para cima.

A superfície  $S$  admite a parametrização

$$s(u, v) = u\hat{i} + v\hat{j} + (u^2 + v^2 - 1)\hat{k}, \quad (u, v) \in R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\},$$

sendo o vector unitário normal que aponta para cima  $\vec{N}(x, y, z) = \frac{-2x\hat{i} - 2y\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$ . Da definição, obtém-se que o fluxo é dado por

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS &= \iint_R \vec{F}(s(u, v)) \cdot \vec{N}(s(u, v)) \left\| \frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right\| d(u, v) \\ &= \iint_R (v, -u, 1) \cdot (-2u, -2v, 1) d(u, v) \\ &= \iint_R -2uv + 2uv + 1 d(u, v) \\ &= \iint_R 1 d(u, v) = \pi. \end{aligned}$$

Para um campo de forças contínuo  $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\hat{i} + N(x, y, z)\hat{j} + P(x, y, z)\hat{k}$  e uma superfície  $S$ , orientada pelo vector  $\vec{N}$  e parametrizada por  $s(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}$ ,  $(u, v) \in U$ , tem-se

$$\frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\hat{i} - \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\hat{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\hat{k},$$

donde

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS &= \iint_U (\vec{F}(s(u, v)) \cdot \vec{N}) \left\| \frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right\| d(u, v) \\ &= \iint_U \vec{F}(s(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right) d(u, v) \\ &= \iint_U M(s(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} d(u, v) + \iint_U N(s(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} d(u, v) + \\ &\quad + \iint_U P(s(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} d(u, v) \end{aligned}$$

fazendo sentido estabelecer a seguinte notação para o integral de superfície

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS := \iint_S M \, dy \wedge dz + \iint_S N \, dz \wedge dx + \iint_S P \, dx \wedge dy.$$

## 4.6 Teorema de Stokes

Como se viu na secção 4.3, o Teorema de Green estabelece uma relação entre o integral duplo sobre uma região plana  $R$  e um integral de linha ao longo da fronteira de  $R$ . O Teorema de Stokes estabelece uma relação entre o integral de superfície sobre uma superfície  $S$  e um integral de linha ao longo da curva no espaço de delimita a superfície  $S$ .

**Teorema 4.10** (Teorema de Stokes). *Seja  $S$  uma superfície, orientada pelo vector unitário  $\vec{N}$ , delimitada por uma curva no espaço,  $C$ , fechada, simples e regular, com orientação directa induzida pela orientação de  $S$  (ver figura 4.7).*

*Se  $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\hat{i} + N(x, y, z)\hat{j} + P(x, y, z)\hat{k}$  é um campo de forças de classe  $C^1$ , então*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\text{rot}\vec{F}) \cdot \vec{N} \, dS.$$

*Demonstração.* Por simplicidade, a demonstração será feita apenas para o caso em que a superfície  $S$  assume a parametrização

$$s(u, v) = u\hat{i} + v\hat{j} + z(u, v)\hat{k}, \quad (u, v) \in U,$$

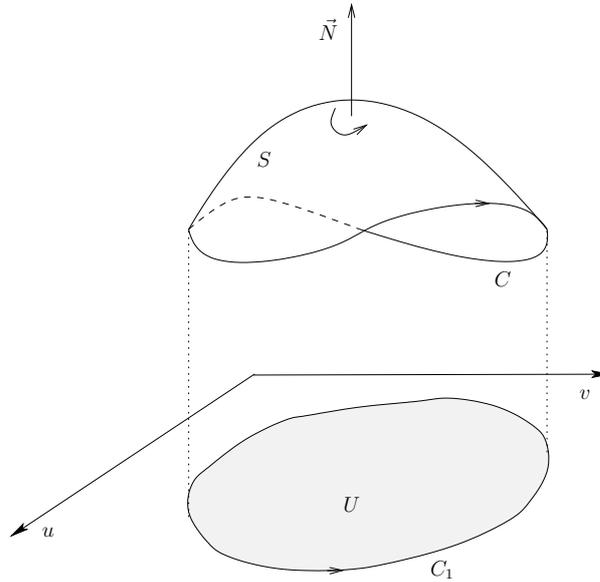
sendo  $U$  uma região simplesmente conexa, delimitada por uma curva plana,  $C_1$ , regular, simples e fechada, e  $z : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  (ver figura 4.7). Consequentemente, a superfície está orientada por

$$\vec{N} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right\|} \left( -\frac{\partial z}{\partial u} \hat{i} - \frac{\partial z}{\partial v} \hat{j} + \hat{k} \right)$$

e, das definições de rotacional e de integral de superfície, obtém-se

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{rot}\vec{F}) \cdot \vec{N} \, dS &= \iint_U \left( \text{rot}\vec{F}(s(u, v)) \cdot \vec{N} \right) \left\| \frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right\| d(u, v) \\ &= \iint_U \text{rot}\vec{F}(s(u, v)) \cdot \left( -\frac{\partial z}{\partial u} \hat{i} - \frac{\partial z}{\partial v} \hat{j} + \hat{k} \right) d(u, v) \\ &= \iint_U \left( \frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial u} + \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial v} + \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) d(u, v). \end{aligned}$$

Sendo  $\vec{r}(t) = u(t)\hat{i} + v(t)\hat{j}$ ,  $t \in [a, b]$ , uma parametrização de  $C_1$ , então  $\vec{s}(t) = u(t)\hat{i} + v(t)\hat{j} + z(u(t), v(t))\hat{k}$ ,  $t \in [a, b]$ , é uma parametrização da curva  $C$  e, como consequência

Figura 4.7: Superfície  $S$ 

da definição de integral de linha e da regra da cadeia, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_a^b Mu'(t) + Nv'(t) + P \left( \frac{\partial z}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial z}{\partial v} v'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \left( M + P \frac{\partial z}{\partial u} \right) u'(t) + \left( N + P \frac{\partial z}{\partial v} \right) v'(t) dt \\ &= \int_{C_1} \left( M + P \frac{\partial z}{\partial u} \right) du + \left( N + P \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Green tem-se

$$\int_{C_1} \left( M + P \frac{\partial z}{\partial u} \right) du + \left( N + P \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv = \iint_U \frac{\partial}{\partial u} \left( N + P \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( M + P \frac{\partial z}{\partial u} \right) d(u, v),$$

ou seja

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_U \frac{\partial}{\partial u} \left( N + P \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( M + P \frac{\partial z}{\partial u} \right) d(u, v). \quad (4.11)$$

Pela regra da cadeia obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( N + P \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} + \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial z}{\partial v} + P \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( M + P \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} + \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial z}{\partial u} + P \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$$

donde, pelo Teorema de Schwarz, a equação (4.11) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \iint_U \left[ \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} + \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial z}{\partial v} + P \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} - \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial z}{\partial u} - P \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \right] d(u, v) \\ &= \iint_U \left[ \left( \frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial u} + \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial v} + \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \right] d(u, v) \\ &= \iint_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot \vec{N} \, dS, \end{aligned}$$

concluindo assim a prova.  $\square$

## 4.7 Teorema da Divergência

O Teorema da Divergência, também conhecido por Teorema de Gauss, estabelece uma relação entre um integral triplo sobre um sólido,  $Q$ , no espaço  $\mathbb{R}^3$  e um integral de superfície sobre a superfície  $S$  que delimita  $Q$ . Antes de o enunciar, é necessário introduzir as noções de “sólido simples”.

**Definição 4.16** (Sólido simples). *Um conjunto  $Q \subseteq \mathbb{R}^3$  limitado e fechado chama-se um sólido simples se*

$$\{tA + (1-t)B : t \in [0, 1]\} \subseteq Q, \quad \forall A, B \in \text{fr}(Q).$$

Como consequência da definição anterior, dado um sólido simples  $Q$  existem  $U, V, W \subseteq \mathbb{R}^2$  fechados e  $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_1, g_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h_1, h_2 : W \rightarrow \mathbb{R}$  funções tais que

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U \text{ e } f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\};$$

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in V \text{ e } g_1(y, z) \leq x \leq g_2(y, z)\};$$

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in W \text{ e } h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z)\}.$$

**Teorema 4.11** (Teorema da Divergência). *Seja  $Q$  uma região sólida simples cuja fronteira é uma superfície  $S$  orientada pelo vector normal unitário  $\vec{N}$  que aponta para o exterior de  $Q$ .*

*Se  $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\hat{i} + N(x, y, z)\hat{j} + P(x, y, z)\hat{k}$  é um campo de forças de classe  $C^1$ , então*

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = \iiint_Q \text{div} \vec{F} \, d(x, y, z).$$

*Demonstração.* Da definição de divergente de um campo de forças conclui-se que

$$\iiint_Q \text{div} \vec{F} \, d(x, y, z) = \iiint_Q \frac{\partial M}{\partial x} \, d(x, y, z) + \iiint_Q \frac{\partial N}{\partial y} \, d(x, y, z) + \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z} \, d(x, y, z).$$

Como

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = \iint_S M \hat{i} \cdot \vec{N} \, dS + \iint_S N \hat{j} \cdot \vec{N} \, dS + \iint_S P \hat{k} \cdot \vec{N} \, dS,$$

o teorema fica demonstrado provando cada uma das igualdades que se segue:

$$\iint_S M \hat{i} \cdot \vec{N} \, dS = \iiint_Q \frac{\partial M}{\partial x} \, d(x, y, z); \quad (4.12)$$

$$\iint_S N \hat{j} \cdot \vec{N} \, dS = \iiint_Q \frac{\partial N}{\partial y} \, d(x, y, z); \quad (4.13)$$

$$\iint_S P \hat{k} \cdot \vec{N} \, dS = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z} \, d(x, y, z). \quad (4.14)$$

Como a prova de cada uma das igualdades é feita usando os mesmos argumentos, aqui apenas é feita a prova de (4.14).

Seja  $Q$  um sólido simples cuja fronteira é uma superfície  $S$ , existem  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  simplesmente conexo e  $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tais que

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U \text{ e } f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\},$$

tendo-se  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ , (ver figura 4.8) podendo  $S_3$  não existir.

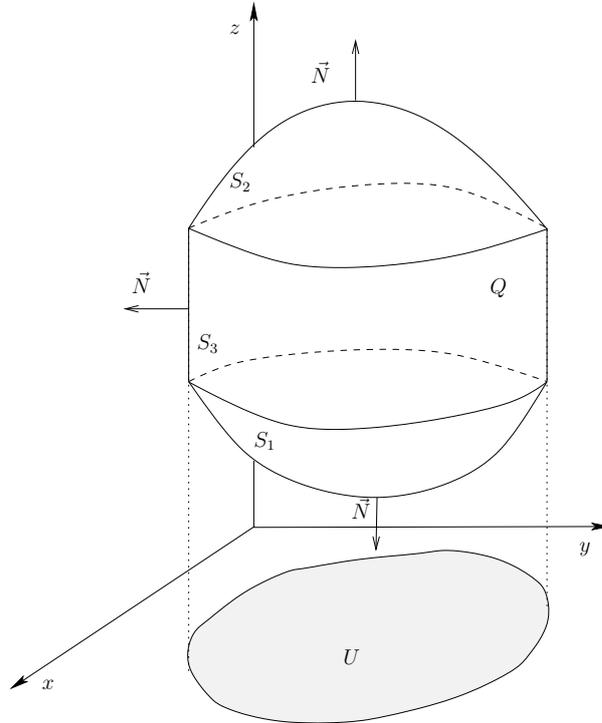


Figura 4.8: Sólido  $Q$

Se existir a superfície  $S_3$ , então o vector  $\vec{N}$  é horizontal isto é,  $\hat{k} \cdot \vec{N} = 0$ , e consequentemente

$$\iint_S P \hat{k} \cdot \vec{N} dS = \iint_{S_1} P \hat{k} \cdot \vec{N} dS_1 + \iint_{S_2} P \hat{k} \cdot \vec{N} dS_2 + 0. \quad (4.15)$$

Por um lado, a superfície  $S_1$  admite a parametrização

$$s_1(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j} + f_1(x, y)\hat{k}$$

e está orientada pelo vector unitário normal que aponta para baixo, isto é,

$$\vec{N} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial s_1}{\partial x} \times \frac{\partial s_1}{\partial y} \right\|} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \hat{j} - \hat{k} \right).$$

Assim, da definição de integral de superfície, obtém-se

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} P \hat{k} \cdot \vec{N} dS_1 &= \iint_U P(x, y, f_1(x, y)) \hat{k} \cdot \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \hat{j} - \hat{k} \right) d(x, y) \\ &= - \iint_U P(x, y, f_1(x, y)) d(x, y). \end{aligned}$$

Por outro lado, a superfície  $S_2$  admite a parametrização

$$s_2(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j} + f_2(x, y)\hat{k}$$

e está orientada pelo vector unitário normal que aponta para cima, isto é,

$$\vec{N} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial s_2}{\partial x} \times \frac{\partial s_2}{\partial y} \right\|} \left( -\frac{\partial f_2}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \hat{j} + \hat{k} \right).$$

Assim, da definição de integral de superfície, obtém-se

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} P \hat{k} \cdot \vec{N} dS_2 &= \iint_U P(x, y, f_2(x, y)) \hat{k} \cdot \left( -\frac{\partial f_2}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \hat{j} + \hat{k} \right) d(x, y) \\ &= \iint_U P(x, y, f_2(x, y)) d(x, y). \end{aligned}$$

Finalmente, somando estas igualdades na equação (4.15), conclui-se que

$$\begin{aligned} \iint_S P \hat{k} \cdot \vec{N} dS &= - \iint_U P(x, y, f_1(x, y)) d(x, y) + \iint_U P(x, y, f_2(x, y)) d(x, y) \\ &= \iint_U [P(x, y, f_2(x, y)) - P(x, y, f_1(x, y))] d(x, y) \\ &= \iint_U \left( \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) dz \right) d(x, y) \\ &= \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z} d(x, y, z). \end{aligned}$$

□

**Exemplo 4.7** Cálculo do fluxo do campo de forças  $\vec{F}(x, y, z) = (y + x^3)\hat{i} + (xz + y^3)\hat{j} + z^3\hat{k}$  através da superfície esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  orientada pelo vector normal unitário “apontado para fora da esfera”.

O fluxo é obtido pelo seguinte integral de superfície

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS,$$

sendo  $S$  a superfície esférica e  $\vec{N}$  o vector normal unitário apontando para o exterior da esfera. Considerando o sólido  $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ , pelo Teorema da Divergência obtém-se

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS &= \iiint_Q \operatorname{div} \vec{F} \, d(x, y, z) \\ &= \iiint_Q 3(x^2 + y^2 + z^2) \, d(x, y, z) \\ &= 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho^4 \sin \varphi \, d\varphi d\theta d\rho \quad (\text{coordenadas esféricas}) \\ &= \frac{384}{5} \pi. \end{aligned}$$

## 4.8 Exercícios

1. Para cada um dos campos de vectores que se segue, identifique os que são campos de gradientes:

(a)  $\vec{F}(x, y) = x\hat{i} + xy\hat{j}$ ;

(b)  $\vec{F}(x, y) = y \cos(xy)\hat{i} + (x \cos(xy) + 1)\hat{j}$ ;

(c)  $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 + zy + x^2)\hat{i} + (2xy + xz)\hat{j} + (xy + z)\hat{k}$ ;

(d)  $\vec{F}(x, y, z) = xy^2\hat{i} + zxy^3\hat{j} + (x + 2xy)\hat{k}$ .

2. Encontre uma função potencial para cada um dos campos de gradientes identificados no exercício anterior.
3. Mostre que se  $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\hat{i} + N(x, y, z)\hat{j} + P(x, y, z)\hat{k}$  é um campo de forças de classe  $C^2$ , então

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0.$$

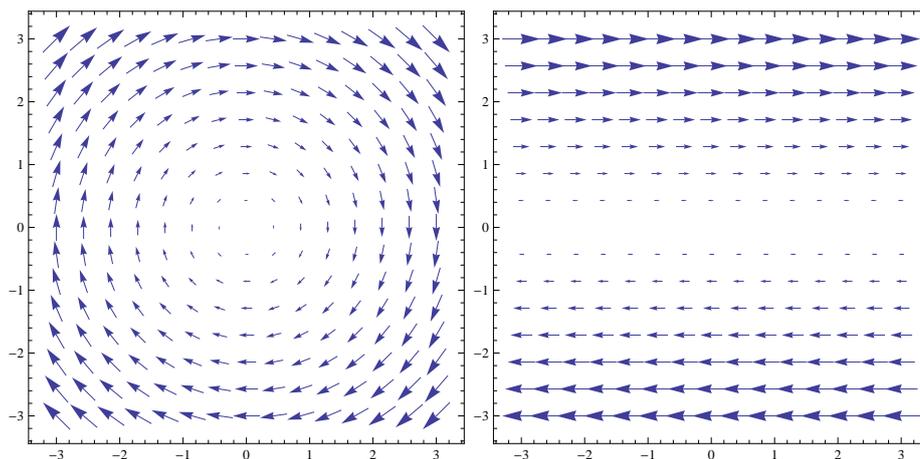
4. Verifique a igualdade (4.4).

Sugestão: Fazer uma mudança de variável conveniente.

5. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças no plano  $\vec{F}(x, y) = xy\hat{i} + y\hat{j}$  sobre uma partícula que se move de  $(0, 0)$  para  $(1, 1)$  ao longo de cada uma das trajectórias que se seguem:
- $y = x$ ;
  - $y = x^2$ ;
  - $y = x^3$ .
6. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças no plano  $\vec{F}(x, y) = xy\hat{i} + \frac{x^2}{2}\hat{j}$  sobre uma partícula que se move de  $(0, 0)$  para  $(1, 1)$  ao longo de cada uma das trajectórias que se seguem:
- $y = x$ ;
  - $y = x^2$ ;
  - $y = x^3$ ;
  - qualquer uma trajectória.
7. Determine os integrais de linha  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , quando:
- $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  e  $C$  é o segmento de recta do ponto  $(0, 0)$  até ao ponto  $(3, 3)$ ;
  - $\vec{F}(x, y) = -y\sin x\vec{i} + \cos x\vec{j}$  e  $C$  é a parábola  $y = x^2$  desde o ponto  $(0, 0)$  até ao ponto  $(2, 4)$ ;
  - $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + (x + 2z^2)\vec{j} + 4yz\vec{k}$  e  $C = C_1 + C_2$  onde  $C_1$  é o segmento de recta do ponto  $(1, 1, 0)$  até ao ponto  $(0, 0, 0)$  e  $C_2$  é o segmento de recta do ponto  $(0, 0, 0)$  até ao ponto  $(0, 0, \sqrt{2})$ ;
  - $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + (x + 2z^2)\vec{j} + 4yz\vec{k}$  e  $C$  é um arco de circunferência, no plano  $y = x$ , desde o ponto  $(1, 1, 0)$  até ao ponto  $(0, 0, \sqrt{2})$ ;
  - $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i} + xy\vec{j}$  e  $C$  é a curva que percorre a parábola  $y = x^2$  desde o ponto  $(0, 0)$  até ao ponto  $(1, 1)$  e, depois, percorre o segmento de recta desde o ponto  $(1, 1)$  até ao ponto  $(0, 0)$ ;
  - $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + (xz - y)\vec{k}$  e  $C$  é o segmento de recta que une o ponto  $(0, 0, 0)$  ao ponto  $(1, 2, 4)$ .

8. Para cada um dos campos de vetores que se segue, represente uma curva orientada cujo integral de linha ao longo dessa curva seja:

- (a) positiva;  
 (b) negativa;  
 (c) zero.



9. Considere a função real  $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} z + yx$ .

(a) Determine  $\vec{F} = \nabla f$ ;

(b) Determine  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $\vec{r}(t) = \left( \operatorname{sen}^2(t), \frac{4t}{\pi}, \cos^2 t \right)$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

10. Calcule o trabalho realizado pela força planar  $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$ , sobre uma partícula que se desloca, em sentido horário, ao longo da circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio 1. O campo de forças  $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$  é conservativo? Justifique.
11. Utilize o Teorema de Green para calcular  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  em que  $\vec{F}(x, y) = y^2\vec{i} + x\vec{j}$  e a curva  $C$ , parametrizada no sentido direto, delimita:
- (a) o quadrado cujos vértices são:  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(0, 2)$ ;  
 (b) o quadrado cujos vértices são:  $(2, 0)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(0, -2)$ ,  $(0, 2)$ ;  
 (c) o círculo de raio 2 e centro na origem.
12. Usando o Teorema de Green, calcule o integral de linha  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $C$  é o caminho de  $(0, 1)$  para  $(1, 1)$  ao longo do gráfico de  $y = x^3$  e de  $(1, 1)$  para  $(0, 0)$  ao longo do gráfico de  $y = x$ , e o campo de forças dado por  $\vec{F}(x, y) = xy\vec{i} + y^2\vec{j}$ .
13. Sem usando o Teorema de Green, calcule o integral de linha referido na alínea anterior.
14. Use o Teorema de Green para determinar a área de uma circunferência de raio  $R > 0$ .
15. Usando o integral de linha, obtenha uma fórmula para o cálculo da área de regiões planas.

16. Calcule o integral de linha  $\int_C (\arctan x + y^2)dx + (e^y - x^2)dy$ , onde  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$  com  $C_1$  de  $(3, 0)$  para  $(-3, 0)$  pelo arco  $y = \sqrt{9 - x^2}$ ,  $C_2$  de  $(-3, 0)$  para  $(-1, 0)$  pela recta  $y = 0$ ,  $C_3$  de  $(-1, 0)$  para  $(1, 0)$  pelo arco  $y = \sqrt{1 - x^2}$  e  $C_4$  de  $(1, 0)$  para  $(3, 0)$  pela recta  $y = 0$ .
17. Identifique as superfícies  $S$  com as seguintes parametrizações:
- $s(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ , com  $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2]$ ;
  - $s(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$ , com  $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ ;
  - $s(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ , com  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ;
  - $s(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$ , com  $(u, v) \in [0, +\infty] \times [0, 2\pi]$ ;
  - $s(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$ , com  $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .
18. Determine as áreas das superfícies (a), (b) e (e) do exercício anterior.
19. Encontre uma parametrização para cada uma das seguintes superfícies:
- Cone de vértice em  $(0, 0, 0)$  e eixo de rotação  $Oz^+$ ;
  - Plano de equação cartesiana  $2x - y + z = 2$ ;
  - Cone de vértice em  $(0, 0, 0)$  e eixo de rotação  $Oy^+$ .
20. Seja  $S$  a semi-esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$  e  $f(x, y, z) = x$ . Calcule o valor do integral de superfície  $\iint_S f dS$ , utilizando
- a parametrização apresentada no exercício 17.(e);
  - a parametrização  $s(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$  com  $(u, v) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$ .
21. Determine o centro de massa da superfície da semi-esfera homogénea (densidade de massa constante)  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .
22. Calcule a área da porção do parabolóide  $x^2 + z^2 = 2y$  cortado pelo plano  $y = 1$ .
23. Em cada uma das alíneas seguintes, use o teorema de Stokes para provar que os integrais de linha têm os valores apresentados. Explique qual o sentido em que a curva  $C$  deve ser percorrida.
- $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi\sqrt{3}$ , onde  $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x)$  e  $C$  a curva de intersecção da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e o plano  $x + y + z = 0$ ;
  - $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ , onde  $\vec{F}(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$  e  $C$  a curva de intersecção do cilindro  $x^2 + y^2 = 2y$  e o plano  $y = z$ ;
  - $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ , onde  $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, xy, xz)$  e  $C$  a curva de intersecção do cilindro  $x^2 + y^2 = 2y$  e o plano  $y = z$ .



# Bibliografia

- [1] A. Azevedo, *Equações Diferenciais e Integração Múltipla*, sebenta nº5, Departamento de Matemática da Universidade do Minho 2004.
- [2] A. Azevedo, *Funções de várias variáveis*, sebenta nº6, Departamento de Matemática da Universidade do Minho 2003.
- [3] A.A. Breda & J.N. Costa, *Cálculo com funções de várias variáveis*, McGraw-Hill 1996.
- [4] D. Hughes-Hallett, A. Gleason, W. McCallum & et al., *Calculus, single and multivariable* Third Edition, Wiley 2002.
- [5] R. Larson, R.Hostetler & B. Edwards, *Cálculo 2*, 8ª Edição, Vol.2, McGraw-Hill 2006.
- [6] E.L. Lima, *Curso de Análise*, Vol.2, 4ª Edição, Projecto Euclides 1995.
- [7] A.J. Soares, *Apontamentos de Análise*, textos de apoio à unidade curricular “Análise” do curso LCC da Universidade do Minho no ano lectivo 2006-2007.