Estabilidade Global em Equações Diferenciais Escalares com pequenos atrasos

José J. Oliveira
Universidade do Minho (CMAT)

Seminário no âmbito do Programa Doutoral da FCUL.
Orientação da Prof. Teresa Faria

Notações e Definições

- $\tau \in \mathbb{R}^+$;

- $C := C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$

$$\|\varphi\|_C = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\theta)\|;$$

- Sejam $\sigma \in \mathbb{R}$, $a \in (\sigma, +\infty]$, $t \in [\sigma, a]$
  e $x \in C([\sigma - \tau, a]; \mathbb{R}^n)$.
  $x_t(\theta) := x(t + \theta),\ \theta \in [-\tau, 0]$

$$x_t \in C.$$

Definição (EDFR)
$D \subseteq \mathbb{R} \times C$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ função

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

Sejam $\sigma \in \mathbb{R}$, $a > \sigma$ ou $a = +\infty$ e $\varphi \in C$.

Definição (Solução)
Diz-se que $x \in C([\sigma - \tau, a); \mathbb{R}^n)$ é solução de (1) em $[\sigma - \tau, a)$ se

$$\begin{cases} (t, x_t) \in D \\ \dot{x}(t) = f(t, x_t) \end{cases}, \ \forall t \in [\sigma, a).$$

•Uma solução $\bar{x} \in C([\sigma - \tau, b); \mathbb{R}^n)$ diz-se uma *extensão* de x se

$$b > a \text{ e } \bar{x}(t) = x(t), \ \forall t \in [\sigma, a).$$

•Uma solução x diz-se *maximal* se não admite uma extensão.

•PVI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t) \\ x_\sigma = \varphi \in C \quad \leftarrow \text{condição inicial em } t = \sigma \end{cases} \tag{2}$$

Teoremas Básicos da Teoria de EDFR

Teorema (Existência de Solução)
$\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ aberto, $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$
Para qualquer $(\sigma, \varphi) \in \Omega$, o PVI (2) tem solução.

Teorema (Unicidade de Solução)
$\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ aberto, $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$
$(s, \psi) \mapsto f(s, \psi)$ contínua
Se f é localmente lipschitziana em ψ, então existe uma única solução do PVI (2) em $[\sigma - \tau, a)$, para algum $a > \sigma$.

Teorema (Continuação de Soluções)
$\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ aberto, $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$
Se x é maximal em $[\sigma - \tau, a)$, $(a > \sigma)$, então para qualquer compacto $W \subseteq \Omega$,

$$\exists t_W \in (\sigma, a), \ \forall t \in [t_W, a) : \ (t, x_t) \notin W.$$

EDFR Escalares ($n = 1$)

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \in I := [0, +\infty) \quad (3)$$

$$x_0 = \varphi, \quad \varphi \in C_\gamma,$$

com $\gamma \in \mathbb{R}$, $C := C([-\tau, 0]; \mathbb{R})$,
$f : I \times C \to \mathbb{R}$ contínua e

$$f(t, 0) \equiv 0 \text{ (i.e., } x = 0 \text{ é equilíbrio).}$$

$$C_\gamma := \{\varphi \in C : \varphi(\theta) \geq \gamma, \theta \in [-\tau, 0), \text{ e } \varphi(0) > \gamma\}$$

Objectivo

Obter condições suficientes para que $x = 0$ seja globalmente atractivo, i.e.,

$$x(t) \to 0, \text{ quando } t \to +\infty,$$

para qualquer $x(t)$ solução de (3) admissível.

Equação Logística com Atraso

$$\dot{x}(t) = ax(t)\left(1 - \frac{1}{k}x(t-\tau)\right), \quad t \geq 0 (4)$$

$$x_0 = \varphi, \quad \varphi \in C_0,$$

onde $a, \tau, k \in \mathbb{R}^+$.

- $x(t) \equiv k$ é o único equilíbrio positivo.

- Com a mudança de variável

$$y(t) = \frac{x(t)}{k} - 1$$

(4) vem na forma

$$\dot{y}(t) = (1 + y(t))[-ay(t-\tau)], \quad t \geq 0$$

$$x_0 = \varphi, \quad \varphi \in C_{-1},$$

Teorema [E. M. Wright, 1955]
Se $a\tau \leq 3/2$, então qualquer solução $x(t)$ de (4) admissível verifica

$$x(t) \to k, \text{ quando } t \to +\infty.$$

J. A. Yorke [1970]

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

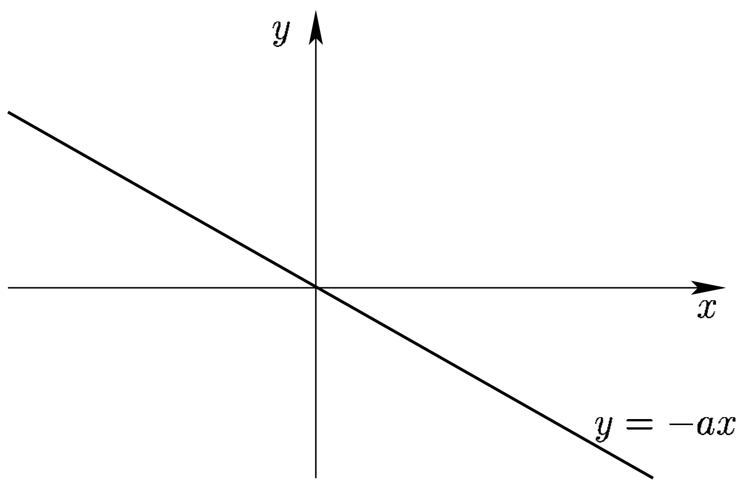
Hipóteses:

(Y1) $\forall t_n \to +\infty$, $\forall \varphi_n \in C$,
se $\varphi_n \to c \neq 0$, então $f(f_n, \varphi_n) \nrightarrow 0$;

(Y2) $\exists a > 0, \forall t \geq 0, \forall \varphi \in C$:

$$-a\mathcal{M}(\varphi) \leq f(t, \varphi) \leq a\mathcal{M}(-\varphi),$$

com $\mathcal{M}(\varphi) := \max\{0, \max_{\theta \in [-\tau, 0]} \varphi(\theta)\}$;



Teorema
Se $a\tau < 3/2$, então toda a solução $x(t)$ de (3) converge para zero quando $t \to +\infty$.

Condição de Yorke (Generalizações)

T. Yoneyama [1987]

$\lambda : [0, +\infty) \to [0, \infty)$ contínua,

$$-\lambda(t)\mathcal{M}(\varphi) \leq f(t, \varphi) \leq \lambda(t)\mathcal{M}(-\varphi). \qquad (5)$$

$$\sup_{t \geq T} \int_{t-\tau}^{t} \lambda(s)ds < \frac{3}{2}$$

X. Zhang & J. Yan [2004]

$\lambda_i : [0, +\infty) \to [0, \infty)$, $i = 1, 2$, contínuas,

$$-\lambda_1(t)\mathcal{M}(\varphi) \leq f(t, \varphi) \leq \lambda_2(t)\mathcal{M}(-\varphi). \qquad (6)$$

$$\alpha_i := \sup_{t \geq T} \int_{t-\tau}^{t} \lambda_i(s)ds, \;\; i = 1, 2$$

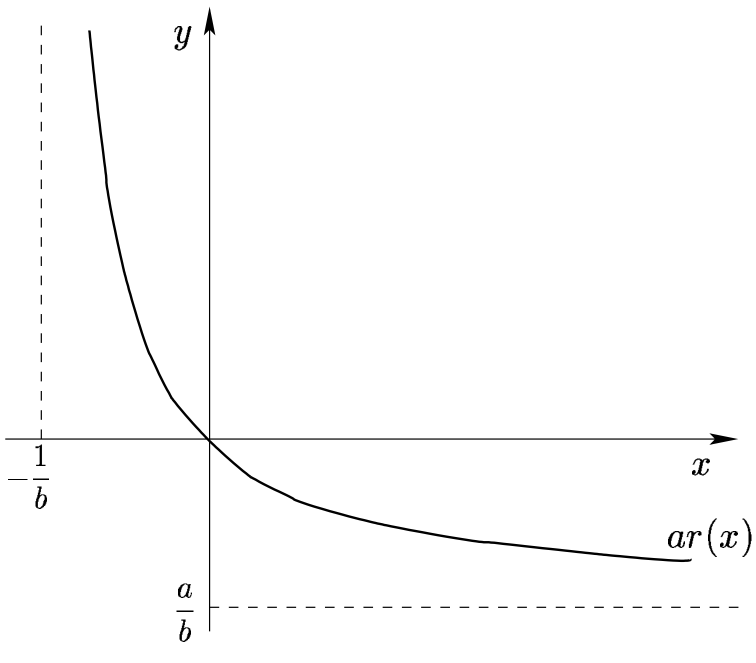
$$\min\{\alpha_1, \alpha_2\} \max\{\alpha_1^2, \alpha_2^2\} < (3/2)^3$$

E. Liz, V. Tkachenko & S. Trofimchuk [2003]

Existem $a < 0$ e $b \geq 0$:

$$ar(\mathcal{M}(\varphi)) \leq f(t,\varphi) \leq ar(-\mathcal{M}(-\varphi)),$$

onde $r(x) = \frac{-x}{1+bx}$, $x > -1/b$



Hipóteses (H):
(H1) Existe $\beta : I \to I$ seccionalmente contínua(S.C.) e

$$\sup_{t\geq\tau}\int_{t-\tau}^{t}\beta(s)ds < +\infty,$$

$\forall q \in \mathbb{R}, \exists\eta(q) \in \mathbb{R}$:

$$f(t,\varphi) \leq \beta(t)\eta(q),\ \forall t \in I, \varphi \geq q;$$

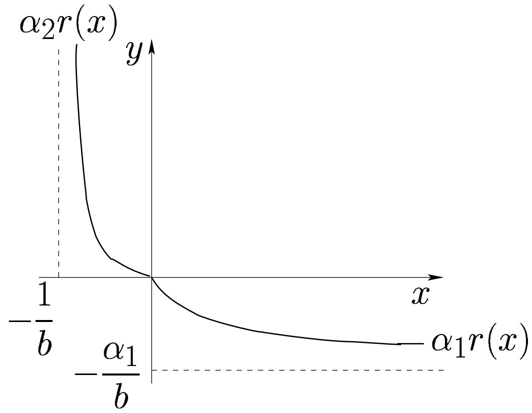
(H2) Para $w : [-\tau, +\infty) \to \mathbb{R}$ contínua com $\lim_{t\to+\infty} w(t) = w^* \neq 0$,

$$\int_0^{+\infty} f(s, w_s)ds \text{ é divergente;}$$

(H3) Existem $\lambda_1, \lambda_2 : I \to I$ S.C. e $b \geq 0$:

$$\lambda_1(t)r(\mathcal{M}(\varphi)) \leq f(t,\varphi) \leq \lambda_2(t)r(-\mathcal{M}(-\varphi)),$$

onde $r(x) = \frac{-x}{1+bx}$, $x > -1/b$;



(H4) Existe $T \geq \tau$ tal que, para

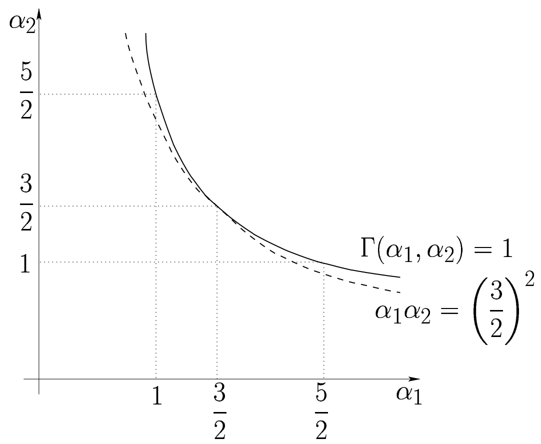
$$\alpha_i := \sup_{t \geq T} \int_{t-\tau}^{t} \lambda_i(s)ds, \ \ i = 1, 2,$$

se tem

$$\Gamma(\alpha_1, \alpha_2) \leq 1,$$

com Γ definida por

$$\Gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} (\alpha_1 - 1/2)\frac{\alpha_2^2}{2}, & \alpha_1 > \frac{5}{2} \\ (\alpha_1 - 1/2)(\alpha_2 - 1/2), & \alpha_1, \alpha_2 \leq \frac{5}{2} \\ (\alpha_2 - 1/2)\frac{\alpha_1^2}{2}, & \alpha_2 > \frac{5}{2} \end{cases}$$



• Caso $\lambda_1(t) = \lambda_2(t)$ ($\alpha := \alpha_1 = \alpha_2$), **(H4)** assume a forma

$$\sup_{t \geq T} \int_{t-\tau}^{t} \lambda(s)ds \leq \frac{3}{2}$$

• $\alpha_1\alpha_2 \leq (3/2)^2 \Rightarrow \Gamma(\alpha_1, \alpha_2) \leq 1.$

Caso $b = 0$ em **(H3)**: $r(x) = -x$

(H3') Existem $\lambda_1, \lambda_2 : I \to I$ S.C. e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não crescente

$$|h(x)| < |x|, \ x \neq 0,$$

$$\lambda_1(t) h(\mathcal{M}(\varphi)) \leq f(t, \varphi) \leq \lambda_2(t) h(-\mathcal{M}(-\varphi)),$$

(H3')+(H4)⇒(H1)

Teorema
Assuma-se **(H2)**, **(H3')** e **(H4)**.
Então qualquer solução $x(t)$ de (3) verifica

$$x(t) \to 0, \text{ quando } t \to +\infty.$$

Corolário
Assuma-se **(H2)**, **(H3)** com $b = 0$ e **(H4)** com $\Gamma(\alpha_1, \alpha_2) < 1$.
Então qualquer solução $x(t)$ de (3) verifica

$$x(t) \to 0, \text{ quando } t \to +\infty.$$

Em particular, tem-se a mesma conclusão com

$$\alpha_1 \alpha_2 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ e } (\alpha_1, \alpha_2) \neq (3/2, 3/2).$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

dem. $x(t)$ solução de (3)

(H3')$\Rightarrow x(t)$ limitada em $[-\tau, +\infty)$

$$u := \lim_{t\to+\infty} \sup x(t); \qquad -v := \lim_{t\to+\infty} \inf x(t).$$

• $x(t)$ não oscilatória

Se $x(t)$ é eventualmente positiva, de **(H3')** $\dot{x}(t) = f(t, x_t) \leq 0$, donde $x(t)$ é eventualmente decrescente, logo

$$u = -v \text{ e } x(t) \to u \geq 0, \text{ quando } t \to \infty.$$

Como

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s)ds, \; t \geq t_0$$

de **(H2)** conclui-se que $u = 0$.

Análogo se $x(t)$ é eventualmente negativa.

• $x(t)$ oscilatória $(u, v \geq 0)$

(I) $u \leq h(-v)\max\{\frac{1}{2}, \alpha_2 - \frac{1}{2}\}$; $u \leq h(-v)\frac{\alpha_2^2}{2}$

(II) $-v \geq h(u)\max\{\frac{1}{2}, \alpha_1 - \frac{1}{2}\}$; $-v \geq h(u)\frac{\alpha_1^2}{2}$

Considere-se

$$M(\alpha_1, \alpha_2) := \max\{\frac{1}{2}, \alpha_1 - \frac{1}{2}\}\max\{\frac{1}{2}, \alpha_2 - \frac{1}{2}\}.$$

Seja $u \geq v$ e suponha-se que $u > 0$.
Caso $\alpha_1, \alpha_2 \leq 5/2$ tem-se

$$M(\alpha_1, \alpha_2)\begin{cases} \leq 1, & \alpha_1 < 1 \text{ ou } \alpha_2 < 1 \\ = \Gamma(\alpha_1, \alpha_2) \leq 1, & 1 \leq \alpha_1, \alpha_2 < \frac{5}{2} \end{cases}$$

donde

$$u \leq -h(u)M(\alpha_1, \alpha_2) \leq -h(u) < u.$$

Logo $0 = u \geq v$.

Caso $\alpha_1 > 5/2$ ($\alpha_2 > 5/2$ análogo)

$$u \leq -h(u)\Gamma(\alpha_1, \alpha_2) \leq -h(u) < u.$$

Logo $0 = u \geq v$.

dem. de **(I)** (caso **(II)** é análogo)

Seja $\epsilon > 0$. Para $t \geq t_0$,

$$-v_\epsilon := -(v+\epsilon) \leq x_t \leq u + \epsilon := u_\epsilon.$$

De **(H3)** tem-se

$$\dot{x}(t) \leq \lambda_2(t) h(-v_\epsilon) \int_{t-\tau}^{\xi_n} \lambda_2(s) ds, \ t \in [\xi_n, t_n].$$

Para $\Lambda_n := \int_{\xi_n}^{t_n} \lambda_2(s) ds \leq \alpha_2$,

$$\begin{aligned} x(t_n) &= \int_{\xi_n}^{t_n} \dot{x}(t) dt \\ &\leq h(-v_\epsilon) \int_{\xi_n}^{t_n} \lambda_2(t) \left[\int_{t-\tau}^{t} \lambda_2(s) ds - \int_{\xi_n}^{t} \lambda_2(s) ds \right] dt \\ &\leq h(-v_\epsilon)[\alpha_2 \Lambda_n - \Lambda_n^2/2] \leq h(-v_\epsilon) \alpha_2^2/2. \end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ e $\epsilon \to 0^+$

$$u \leq h(-v) \alpha_2^2 / 2.$$

Argumentando como em
[J.W.-H. So, J.S. Yu, M.-P. Chen; 1996]

Se $\Lambda_n \leq 1$, então $\Lambda_n \leq \max\{1, \alpha_2\}$, donde

$$\begin{aligned} x(t_n) &\leq h(-v_\epsilon)(\max\{1, \alpha_2\}\Lambda_n - \Lambda_n^2/2) \\ &\leq h(-v_\epsilon)(\max\{1, \alpha_2\} - 1/2) \\ &= h(-v_\epsilon)\max\{1/2, \alpha_2 - 1/2\}. \end{aligned}$$

Se $\Lambda_n > 1$, existe $\eta_n \in (\xi_n, t_n)$ tal que $\int_{\eta_n}^{t_n} \lambda_2(s)ds = 1$.

$$\begin{aligned} & x(t_n) \leq \cdots \leq \\ & \leq h(-v_\epsilon) \int_{\eta_n}^{t_n} \lambda_2(t) \left[\int_{t-\tau}^{t} \lambda_2(s)ds - \int_{\eta_n}^{t} \lambda_2(s)ds \right] dt \\ & \leq h(-v_\epsilon) \left[\alpha_2 - \frac{1}{2} \left(\int_{\eta_n}^{t_n} \lambda_2(s)ds \right)^2 \right] \\ & = h(-v_\epsilon) \left(\alpha_2 - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ e $\epsilon \to 0^+$

$$u \leq h(-v)\max\{1/2, \alpha_2 - 1/2\}.$$

Caso $b > 0$ em **(H3)**: $r(x) = -\frac{x}{1+bx}$

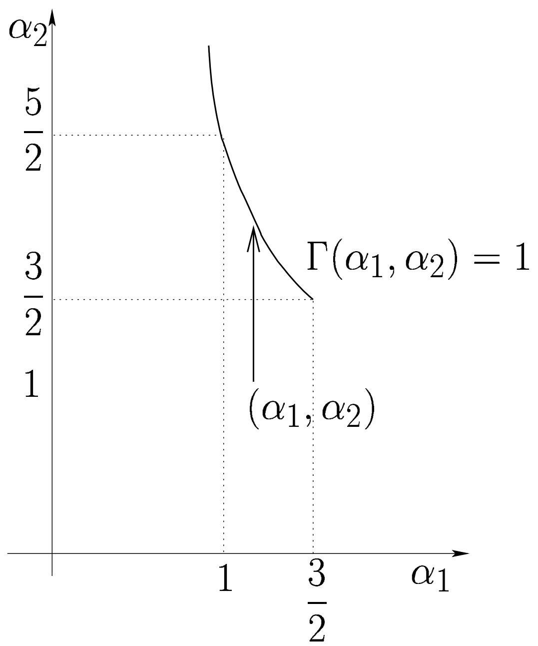
Teorema Assuma-se **(H1)-(H4)**, com $b > 0$ e $\lambda_i(t) > 0$ para t grande.
Se $\alpha_1 \leq \alpha_2$, então qualquer solução $x(t)$ de (3) verifica

$$x(t) \to 0, \text{ quando } t \to \infty.$$

Corolário Assuma-se **(H1)-(H4)**, com $b > 0$. Se $\alpha_1 \leq \alpha_2$ e $\Gamma(\alpha_1, \alpha_2) < 1$, então qualquer solução $x(t)$ de (3) verifica

$$x(t) \to 0, \text{ quando } t \to \infty.$$

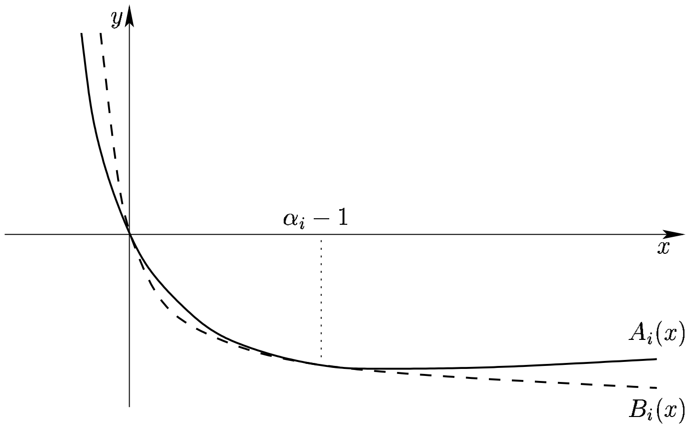
Não se perde generalidade ao supor $b = 1$, $\tau = 1$ e $\Gamma(\alpha_1, \alpha_2) = 1$.



E. Liz, V. Tkachenko & S. Trofimchuk [2003]
Para $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ definam-se A_i, B_i, D_1 e R_i,

$$A_i(x) = \begin{cases} x + \alpha_i r(x) + \dfrac{1}{r(x)} \displaystyle\int_x^0 r(t)dt, & x \neq 0 \\ \\ 0, & x = 0 \end{cases} ;$$

$$B_i(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{r(x)} \displaystyle\int_{-\alpha_i r(x)}^0 r(t)dt, & x \neq 0 \\ \\ 0, & x = 0 \end{cases} ;$$



$$D_1(x) = \begin{cases} A_1(x), & 0 \leq x < \alpha_1 - 1 \\ B_1(x), & x \geq \max\{0, \alpha_1 - 1\} \end{cases}$$

Para $\alpha_i > 1/2$, define-se a função racional

$$R_i(x) = A_i'(0) \frac{x}{1 - \frac{x}{\nu_i}}, \quad x > \nu_i,$$

com $\nu_i := \frac{2A'(0)}{A''(0)} = -\frac{6\alpha_i - 3}{6\alpha_i - 1} < 0$. $(i = 1, 2)$

Lema Para $\alpha_i > 1$ $(i = 1, 2)$, tem-se

$$A_i(x) < R_i(x), \quad \text{se } x \in (\nu_i, 0)$$

$$A_i(x) > R_i(x), \quad \text{se } x \in (0, \alpha_i - 1).$$

Lema Para $1 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ e $\Gamma(\alpha_1, \alpha_2) \leq 1$ tem-se $A_1(x) \geq B_1(x) > \nu_2$, para $x > 0$, e

$$R_2(A_1(x)) \leq x, \;\; 0 \leq x < \alpha_1 - 1.$$

Lema Para $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ e $\Gamma(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ tem-se

$$R_2(B_1(x)) \leq x, \;\; x \geq \max\{0, \alpha_1 - 1\}.$$

Assim, para $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ e $\Gamma(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ tem-se

$$D_1(x) > \nu_2, \;\; x \geq 0$$

e

$$R_2(D_1(x)) \leq x, \;\; x \geq 0.$$

dem. $x(t)$ solução de (3).

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{(H1)+(H3)}\\ \displaystyle\sup_{t\geq\tau}\int_{t-\tau}^{t}\lambda_1(s)ds<\infty\end{array}\right\}\Rightarrow x(t) \text{ limitada}$$

$$u:=\lim_{t\to+\infty}\sup x(t); \qquad -v:=\lim_{t\to+\infty}\inf x(t).$$

- $x(t)$ não oscilatória

(H3)+(H2) $\Rightarrow x(t)\to 0$ quando $t\to+\infty$

- $x(t)$ oscilatória

(I) $-v\geq B_1(u)$

(II) Se $\alpha_i>1$ e $\lambda_i(t)>0$ para t grande

$-v\geq A_1(u)$ se $u<\alpha_1-1$; $u\leq A_2(-v)$ se $v<1$.
Consequentemente $-v\geq D_1(u)>\nu_2$, donde

$$R_2(-v)\leq R_2(D_1(u))\leq u.$$

Se $v>0$, obtém-se a contradição

$$u\leq A_2(-v)<R_2(-v)\leq u.$$

Assim, $v=0$ e consequentemente $u=0$.

dem.**(I)**: Só 1ª desigualdade de **(H3)**

Seja $\epsilon > 0$. Para $t \geq t_0$,

$$-v_\epsilon := -(v+\epsilon) \leq x_t \leq u+\epsilon := u_\epsilon.$$

$$r(\mathcal{M}(x_t)) \geq r\left(r(u_\epsilon)\left(\int_{\eta_n}^{t}\lambda_1(s)ds - \alpha_1\right)\right),\ t \in [\eta_n, s_n)$$

$$\begin{aligned} x(s_n) &= \int_{\eta_n}^{s_n} f(t,x_t)dt \geq \int_{\eta_n}^{s_n}\lambda_1(t)r(\mathcal{M}(x_t))dt \\ &\geq \int_{\eta_n}^{s_n}\lambda_1(t)r\left(r(u_\epsilon)\left(\int_{\eta_n}^{t}\lambda_1(s)ds - \alpha_1\right)\right)dt \\ &\geq -\frac{1}{r(u_\epsilon)}\int_0^{-\alpha_1 r(u_\epsilon)} r(s)ds = B_1(u_\epsilon) \end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ e $\epsilon \to 0^+$ tem-se

$$-v \geq B_1(u).$$

dem. **(II)**: $-v \geq A_1(u)$ se $u < \alpha_1 - 1$

[E. Liz, V. Tkachenko & S. Trofimchuk, 2003]

Se $\lambda_1(t) > 0$ para $t \geq t_0$ grande, então a função $s_1 : [t_0, +\infty) \to [s_1(t_0), +\infty)$ definida por

$$s_1(t) = \frac{1}{\alpha_1} \int_0^t \lambda_1(s) ds$$

é bijectiva. Seja $t_1 = t_1(s)$ a inversa.

Fazendo $y(s) = x(t_1(s))$, $s \geq s_1(t_0)$ a equação (3) vem na forma

$$\dot{y}(s) = g_1(s, y_s)$$

com g_1 verificando

$$g_1(s, \varphi) \geq \alpha_1 r(\mathcal{M}(\varphi)), \quad s \geq s_1(t_0), \; \varphi \in C.$$

A estimativa

$$u \leq A_2(-v) \text{ se } v < 1$$

surge de forma dual.

Modelos Populacionais Escalares

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) f(t, x_t), \quad t \geq 0 \\ x_0 &= \varphi, \quad \varphi \in C_0, \end{aligned} \tag{7}$$

com $f : [0, +\infty) \times C \to \mathbb{R}$ contínua e

$C_0 := \{\varphi \in C : \varphi(\theta) \geq 0, \theta \in [-\tau, 0),\ \text{e}\ \varphi(0) > 0\}$.

Sendo $u(t)$ solução de (7), com a mudança de variável

$$\bar{x}(t) = \frac{x(t)}{u(t)} - 1$$

tem-se

$$\dot{x}(t) = (1 + x(t)) F(t, x_t), \quad t \geq 0 \tag{8}$$

$$x_0 = \varphi, \quad \varphi \in C_{-1}, \tag{9}$$

onde $F(t, \varphi) = f(t, u_t(1 + \varphi)) - f(t, u_t)$.

Para F assumem-se as hipóteses **(H)** com φ restrito a C_{-1}.

Nota: Se $b < 1$, então **(H3)**$\Rightarrow$**(H1)**.

Teorema $F : [0, +\infty) \times C_{-1} \to \mathbb{R}$ contínua, satisfazendo **(H1)-(H4)** com φ restrita a C_{-1}. Se $b \neq \frac{1}{2}$ assuma-se $\lambda_i(t) > 0$, para t grande, e

$$\begin{array}{ll} & \text{(i)} \quad b > \dfrac{1}{2} \text{ e } \alpha_1 \leq \alpha_2 \\ \text{ou} & \\ & \text{(ii)} \quad b < \dfrac{1}{2} \text{ e } \alpha_1 \geq \alpha_2. \end{array}$$

Então qualquer solução $x(t)$ do PVI (8)-(9) verifica

$$x(t) \to 0 \text{ quando } t \to +\infty.$$

dem.

• $b \geq \frac{1}{2}$

Fazendo $y(t) = \log(1 + x(t))$, obtém-se

$$\dot{y}(t) = f(t, y_t), \tag{10}$$

onde $f(t, \varphi) = F(t, e^{\varphi} - 1)$.
Para, $t \geq 0$ e, $\varphi \in C$,

$$\lambda_1(t) r(e^{\mathcal{M}(\varphi)} - 1) \leq f(t, \varphi) \leq \lambda_2(t) r(e^{-\mathcal{M}(-\varphi)} - 1)$$

Se $b = \frac{1}{2}$, f verifica **(H2)**, **(H4)** e **(H3')** com

$$h(x) = r(e^x - 1) = -2\left(1 - \frac{2}{e^x + 1}\right).$$

Se $b > \frac{1}{2}$ e $\alpha_1 \leq \alpha_2$, f verifica **(H1)**, **(H2)**, **(H4)** e **(H3)** com

$$r_1(x) = \frac{-x}{1 + (b - \frac{1}{2})x}.$$

Nota:

$$\begin{cases} r(e^x - 1) \geq r_1(x), & x \geq 0 \\ r(e^x - 1) \leq r_1(x), & -1/(b - 1/2) < x \leq 0 \end{cases}$$

- $0 < b < \frac{1}{2}$ e $\alpha_2 \leq \alpha_1$

Fazendo $z(t) = -\log(1 + x(t))$, obtém-se

$$\dot{z}(t) = g(t, z_t), \tag{11}$$

onde $g(t, \varphi) = -F(t, e^{-\varphi} - 1)$, verifica as hipóteses **(H)**.

Notar que **(H3)** vem da forma

$$\lambda_2(t) r_2(\mathcal{M}(\varphi)) \leq g(t, \varphi) \leq \lambda_1(t) r_2(-\mathcal{M}(-\varphi)),$$

com

$$r_2(x) = \frac{-x}{1 + (\frac{1}{2} - b)x}.$$

Exemplo

$$\dot{N}(t) = \rho(t)N(t)\left[\frac{k - aN(t-\tau)}{k + \lambda(t)N(t-\tau)}\right]^{\alpha}, \tag{12}$$

$$N_0 = \varphi, \quad \varphi \in C_0$$

$\rho, \lambda : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ contínuas, $a, k, \tau > 0$
$\alpha \geq 1$ razão dois ímpares.

$$N(t) \equiv \frac{k}{a} \text{ é o equilíbrio positivo.}$$

Fazendo $x(t) = \frac{aN(t)}{k} - 1$, (12) vem na forma

$$\dot{x}(t) = (1 + x(t))F(t, x_t)$$
$$x_0 = \varphi, \quad \varphi \in C_{-1},$$

com

$$F(t, x_t) = -\rho(t)\left[\frac{\varphi(-\tau)}{1 + \frac{\lambda(t)}{a}(1 + \varphi(-\tau))}\right]^{\alpha}.$$

Para $\underline{\lambda}(t) = \min\{a, \lambda(t)\}$ e $r(x) = \frac{-x}{1+\frac{1}{2}x}$,

$$\lambda_1(t)r(\mathcal{M}(\varphi)) \leq F(t, \varphi) \leq \lambda_2(t)r(-\mathcal{M}(-\varphi)),$$

com $\lambda_1(t) = \frac{a^{\alpha}\rho(t)}{2\underline{\lambda}(t)^{\alpha}}$ e $\lambda_2(t) = \frac{\rho(t)}{1+a\underline{\lambda}(t)}$

Teorema

Assume-se

$$\int_0^{+\infty} \frac{\rho(s)}{(1+\lambda(s))^\alpha} ds = \infty. \qquad (13)$$

e existe $T \geq \tau$ tal que $\Gamma(\alpha_1, \alpha_2) \leq 1$ onde

$$\alpha_i := \sup_{t \geq T} \int_{t-\tau}^{t} \lambda_i(s) ds, i = 1, 2.$$

Então a solução $N(t)$ de (12) verifica

$$N(t) \to \frac{k}{a}, \text{ quando } t \to +\infty.$$

Em particular,

$$a^\alpha \left(\int_{t-\tau}^{t} \frac{\rho(s)}{\underline{\lambda}(s)^\alpha} ds \right) \left(\int_{t-\tau}^{t} \frac{\rho(s)}{1 + a\underline{\lambda}(s)} ds \right) \leq \frac{9}{2}, \; t \text{ grande}$$

Y. Liu [2001] ($k = a = 1$)

- $\lambda(t) \geq 1$ $\qquad \lim_{t \to +\infty} \sup \int_{t-\tau}^{t} \rho(s) ds \leq 3$

- $0 \leq \lambda(t) \leq 1$ $\qquad \lim_{t \to +\infty} \sup \int_{t-\tau}^{t} \frac{\rho(s)}{\lambda(s)^\alpha} ds \leq 3$

- $\lambda(t) \geq a$

Seja $\sigma(t) := \frac{\lambda(t)}{a}$ e $\sigma_0 := \inf_{t\geq 0} \sigma(t) \geq 1$.
Para $r(x) = \frac{-x}{1+bx}$, $x \geq -1$, onde

$$b := \frac{\sigma_0}{1+\sigma_0} \geq \frac{1}{2},$$

F verifica **(H3)** restrita a C_1, com

$$\lambda_1(t) = \frac{\rho(t)}{(1+\sigma(t))\sigma(t)^{\alpha-1}}, \quad \lambda_2(t) = \frac{\rho(t)}{1+\sigma_0}.$$

Tem-se $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t)$, logo $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

Teorema
Assuma-se (13).
Se $\lambda(t) \geq a$, $\forall t \geq 0$, e $\Gamma(\alpha_1, \alpha_2) \leq 1$, com

$$\alpha_1 = a^{\alpha-1} \sup_{t\geq T} \int_{t-\tau}^{t} \frac{\rho(s)}{(1+a^{-1}\lambda(s))\lambda(s)^{\alpha-1}} ds,$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{1+\sigma_0} \sup_{t\geq T} \int_{t-\tau}^{t} \rho(s) ds,$$

então a solução $N(t)$ de (12) verifica

$$N(t) \to \frac{k}{a}, \text{ quando } t \to +\infty.$$

• $0 \leq \lambda(t) \leq a$

Seja $\sigma(t) := \frac{\lambda(t)}{a}$ e $\sigma^0 := \sup_{t \geq 0} \sigma(t) \leq 1$.
Para $r(x) = \frac{-x}{1+bx}$, $x \geq -1$, onde

$$b := \frac{\sigma^0}{1+\sigma^0} \leq \frac{1}{2},$$

F verifica **(H3)** restrita a C_1, com

$$\lambda_1(t) = \frac{\sigma^0}{1+\sigma^0} \frac{\rho(t)}{\sigma(t)^\alpha}, \quad \lambda_2(t) = \frac{\rho(t)}{1+\sigma(t)}.$$

Tem-se $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t)$, logo $\alpha_1 \geq \alpha_2$.

Teorema
Assuma-se (13).
Se $\lambda(t) \leq a$, $\forall t \geq 0$, e $\Gamma(\alpha_1, \alpha_2) \leq 1$, com

$$\alpha_1 = a^\alpha \frac{\sigma^0}{1+\sigma^0} \sup_{t \geq T} \int_{t-\tau}^{t} \frac{\rho(s)}{\lambda(s)^\alpha} ds,$$

$$\alpha_2 = \sup_{t \geq T} \int_{t-\tau}^{t} \frac{\rho(s)}{1+a^{-1}\lambda(s)} ds,$$

então a solução $N(t)$ de (12) verifica

$$N(t) \to \frac{k}{a}, \text{ quando } t \to +\infty.$$