Estabilidade de equações diferenciais impulsivas com atrasos infinitos

Teresa Faria, Marta C. Gadotti, and José J. Oliveira[a]

2 de Dezembro de 2015

(a)
Departamento de Matemática e Aplicações, CMAT,
Universidade do Minho

Equações diferenciais ordinárias com impulsos

- PVI de equações diferenciais ordinárias com impulsos:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & 0 \leq t \neq t_k \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), & k = 1, 2, \cdots, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

onde

- $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow +\infty$ quando $k \to +\infty$;
- $\Delta x(t_k) := x(t_k^+) - x(t_k^-)$;
- $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são funções contínuas.

Equações diferenciais ordinárias com impulsos

- PVI de equações diferenciais ordinárias com impulsos:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & 0 \leq t \neq t_k \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), & k = 1, 2, \cdots, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

onde

  - $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow +\infty$ quando $k \to +\infty$;
  - $\Delta x(t_k) := x(t_k^+) - x(t_k^-)$;
  - $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são funções contínuas.

- Uma função $x : [0, d] \to \mathbb{R}^n$ é uma **solução** de (1) se:
  - é derivável em $[0, d] \setminus \{t_k : k \in \mathbb{N}\}$;
  - $x(t_k^-)$ e $x(t_k^+)$ existem com $x(t_k^-) = x(t_k)$;
  - verifica o sistema (1).

Equações diferenciais retardadas com impulsos

- Sistema de equações diferenciais retardadas com impulsos:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t), & 0 \leq t \neq t_k \\ \Delta x(t_k) = I_k(x_{t_k}), & k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{2}$$

onde

- $x_t(s) = x(t+s)$, para $s \in (-\infty, 0]$;
- $f : [0, +\infty) \times \mathcal{PS} \to \mathbb{R}^n$ e $I_k : \mathcal{PS} \to \mathbb{R}^n$ são contínuas,

sendo $\mathcal{PS}$ um conveniente Espaço de Fase de funções $\phi : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$ a definir de seguida.

Equações diferenciais retardadas com impulsos

- Sistema de equações diferenciais retardadas com impulsos:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t), & 0 \leq t \neq t_k \\ \Delta x(t_k) = I_k(x_{t_k}), & k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{2}$$

onde

  - $x_t(s) = x(t+s)$, para $s \in (-\infty, 0]$;
  - $f : [0, +\infty) \times \mathcal{PS} \to \mathbb{R}^n$ e $I_k : \mathcal{PS} \to \mathbb{R}^n$ são contínuas,

sendo $\mathcal{PS}$ um conveniente Espaço de Fase de funções $\phi : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$ a definir de seguida.

- Consideramos condições iniciais limitados, isto é:

$$x_0 = \phi \in B\mathcal{PS}, \text{(funções de } \mathcal{PS} \text{ que são limitadas).} \tag{3}$$

*Espaço de Fase

- $[\gamma, \beta]$ intervalo compacto de $\mathbb{R}$, $PC([\gamma, \beta]; \mathbb{R}^n)$ espaço das funções $\phi : [\gamma, \beta] \to \mathbb{R}^n$ contínuas excepto para um número finito de pontos s, $\phi(s^-), \phi(s^+)$ existem e $\phi(s^-) = \phi(s)$;

*Espaço de Fase

- $[\gamma, \beta]$ intervalo compacto de $\mathbb{R}$, $PC([\gamma, \beta]; \mathbb{R}^n)$ espaço das funções $\phi : [\gamma, \beta] \to \mathbb{R}^n$ contínuas excepto para um número finito de pontos s, $\phi(s^-), \phi(s^+)$ existem e $\phi(s^-) = \phi(s)$;
- $R([\gamma, \beta]; \mathbb{R}^n) = \overline{PC([\gamma, \beta]; \mathbb{R}^n)}$ no espaço das funções limitadas com a norma do supremo;

*Espaço de Fase

- $[\gamma,\beta]$ intervalo compacto de $\mathbb{R}$, $PC([\gamma,\beta];\mathbb{R}^n)$ espaço das funções $\phi:[\gamma,\beta]\to\mathbb{R}^n$ contínuas excepto para um número finito de pontos s, $\phi(s^-),\phi(s^+)$ existem e $\phi(s^-)=\phi(s)$;
- $R([\gamma,\beta];\mathbb{R}^n)=\overline{PC([\gamma,\beta];\mathbb{R}^n)}$ no espaço das funções limitadas com a norma do supremo;
- $PC:=PC((-\infty,0];\mathbb{R}^n)=$
$\left\{\phi:(-\infty,0]\to\mathbb{R}^n;\phi_{|_{[\gamma,\beta]}}\in R([\gamma,\beta];\mathbb{R}^n),\forall[\gamma,\beta]\subseteq(-\infty,0]\right\}$;

*Espaço de Fase

- $[\gamma,\beta]$ intervalo compacto de $\mathbb{R}$, $PC([\gamma,\beta];\mathbb{R}^n)$ espaço das funções $\phi:[\gamma,\beta]\to\mathbb{R}^n$ contínuas excepto para um número finito de pontos s, $\phi(s^-),\phi(s^+)$ existem e $\phi(s^-)=\phi(s)$;
- $R([\gamma,\beta];\mathbb{R}^n)=\overline{PC([\gamma,\beta];\mathbb{R}^n)}$ no espaço das funções limitadas com a norma do supremo;
- $PC := PC((-\infty,0];\mathbb{R}^n) = \left\{\phi:(-\infty,0]\to\mathbb{R}^n; \phi_{|_{[\gamma,\beta]}}\in R([\gamma,\beta];\mathbb{R}^n), \forall[\gamma,\beta]\subseteq(-\infty,0]\right\}$;
- Para $\alpha>0$,

$$PC_\alpha := \left\{\phi\in PC : \sup_{s\leq 0}|\phi(s)|e^{\alpha s}<\infty\right\}$$

$$\|\phi\|_\alpha = \sup_{s\leq 0}|\phi(s)|e^{\alpha s},\ \text{com } |x| = |(x_1,\ldots,x_n)| = \max_{1\leq i\leq n}|x_i|$$

*Espaço de Fase

- $[\gamma, \beta]$ intervalo compacto de $\mathbb{R}$, $PC([\gamma, \beta]; \mathbb{R}^n)$ espaço das funções $\phi : [\gamma, \beta] \to \mathbb{R}^n$ contínuas excepto para um número finito de pontos s, $\phi(s^-), \phi(s^+)$ existem e $\phi(s^-) = \phi(s)$;
- $R([\gamma, \beta]; \mathbb{R}^n) = \overline{PC([\gamma, \beta]; \mathbb{R}^n)}$ no espaço das funções limitadas com a norma do supremo;
- $PC := PC((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n) = \left\{\phi : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n; \phi_{|_{[\gamma,\beta]}} \in R([\gamma, \beta]; \mathbb{R}^n), \forall [\gamma, \beta] \subseteq (-\infty, 0]\right\}$;
- Para $\alpha > 0$,

$$PC_\alpha := \left\{\phi \in PC : \sup_{s \leq 0} |\phi(s)| e^{\alpha s} < \infty\right\}$$

$$\|\phi\|_\alpha = \sup_{s \leq 0} |\phi(s)| e^{\alpha s}, \text{ com } |x| = |(x_1, \dots, x_n)| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

- $\mathcal{PS} = PC_\alpha$

$$\mathcal{BPS} = BPC_\alpha = \{\phi \in PC_\alpha : \phi \text{ limitada } \}.$$

***Teorema** (Existência de soluções globais)

Assuma-se que

- $t \to f(t, x_t)$ é mensurável em $[0, +\infty)$, para $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ limitada;
- Existem $p, q : [0, +\infty) \to [0, \infty)$ contínuas com q crescente e $\int_0^\infty \frac{1}{q} = \infty$ tais que

$$|f(t, \psi)| \leq p(t)q(\|\psi\|), \qquad t \geq 0, \psi \in BPC_\alpha;$$

- $I_k(X)$ é limitado para qualquer $X \subseteq BPC_\alpha$ limitado.

Então, o PVI (2)-(3) possui uma solução $x(t)$ definida em $[0, +\infty)$.

- *Dem.* (ideia) Fixa-se $b > 0$ e define-se $N : X \to X$ por

$$(Nx)(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \leq 0 \\ \phi(0) + \displaystyle\int_0^t f(s, x_s)ds + \sum_{k:0<t_k<t} I_k(x_{t_k}), & 0 \leq t \leq b \end{cases}$$

onde $X = \Big\{ x : (-\infty, b] \to \mathbb{R}^n | x_0 = \phi, x(0^+) = \phi(0),$

$$x_{|_{[0,b]}} \in PC([0, b]; \mathbb{R}^n) \Big\}.$$

- *Dem.* (ideia) Fixa-se $b > 0$ e define-se $N : X \to X$ por

$$(Nx)(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \leq 0 \\ \phi(0) + \displaystyle\int_0^t f(s, x_s)ds + \sum_{k:0<t_k<t} I_k(x_{t_k}), & 0 \leq t \leq b \end{cases}$$

onde $X = \Big\{ x : (-\infty, b] \to \mathbb{R}^n | x_0 = \phi, x(0^+) = \phi(0),$

$$x_{|_{[0,b]}} \in PC([0, b]; \mathbb{R}^n) \Big\}.$$

- Sem perda de generalidade, assume-se $\phi \equiv 0$ e prova-se
  - N é completamente contínua;
  - $X \simeq \{\varphi \in PC([0, b]; \mathbb{R}^n) : \varphi(0^+) = 0\}$ é convexo;
  - $\{x \in X : x = \lambda Nx \text{ para algum } \lambda \in (0, 1)\}$ é limitado.
- Conclui-se que N possui um ponto fixo, donde se conclui a existência de solução em $(-\infty, b]$, logo em $\mathbb{R}$.

*Modelo geral para redes neurais impulsivas com atrasos infinitos

$$\begin{cases} x_i'(t) = -a_i(x_i(t))[b_i(x_i(t)) + f_i(t, x_t)], & 0 \le t \neq t_k, \\ \Delta(x_i(t_k)) = I_{ik}(x_i(t_k)), \; i = 1, \cdots, n, & k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{4}$$

***Modelo geral para redes neurais impulsivas com atrasos infinitos**

$$\begin{cases} x_i'(t) = -a_i(x_i(t))[b_i(x_i(t)) + f_i(t, x_t)], & 0 \leq t \neq t_k, \\ \\ \Delta(x_i(t_k)) = I_{ik}(x_i(t_k)), \;\; i = 1, \cdots, n, & k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{4}$$

(A1) $a_i : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, contínua e $a_i(u) \geq \underline{a_i} > 0$, $\forall u$;

***Modelo geral para redes neurais impulsivas com atrasos infinitos**

$$\begin{cases} x_i'(t) = -a_i(x_i(t))[b_i(x_i(t)) + f_i(t, x_t)], & 0 \leq t \neq t_k, \\ \Delta(x_i(t_k)) = I_{ik}(x_i(t_k)), \ i = 1, \cdots, n, & k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{4}$$

(A1) $a_i : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, contínua e $a_i(u) \geq \underline{a_i} > 0$, $\forall u$;

(A2) $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua verificando

$$\frac{b_i(u) - b_i(v)}{u - v} \geq \beta_i > 0, \qquad \forall u \neq v;$$

*Modelo geral para redes neurais impulsivas com atrasos infinitos

$$\begin{cases} x_i'(t) = -a_i(x_i(t))[b_i(x_i(t)) + f_i(t, x_t)], & 0 \le t \ne t_k, \\ \Delta(x_i(t_k)) = I_{ik}(x_i(t_k)), \ i = 1, \cdots, n, & k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{4}$$

(A1) $a_i : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, contínua e $a_i(u) \ge \underline{a_i} > 0, \ \forall u$;

(A2) $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua verificando

$$\frac{b_i(u) - b_i(v)}{u - v} \ge \beta_i > 0, \qquad \forall u \ne v;$$

(A3) $|f_i(t, \varphi) - f_i(t, \phi)| \le l_i \|\varphi - \phi\|_\alpha, \ \forall t \ge 0, \ \forall \varphi, \phi \in PC_\alpha$;

*Modelo geral para redes neurais impulsivas com atrasos infinitos

$$\begin{cases} x_i'(t) = -a_i(x_i(t))[b_i(x_i(t)) + f_i(t, x_t)], & 0 \leq t \neq t_k, \\ \Delta(x_i(t_k)) = I_{ik}(x_i(t_k)), \ i = 1, \cdots, n, & k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{4}$$

(A1) $a_i : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, contínua e $a_i(u) \geq \underline{a_i} > 0$, $\forall u$;

(A2) $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua verificando

$$\frac{b_i(u) - b_i(v)}{u - v} \geq \beta_i > 0, \qquad \forall u \neq v;$$

(A3) $|f_i(t, \varphi) - f_i(t, \phi)| \leq l_i \|\varphi - \phi\|_\alpha$, $\forall t \geq 0$, $\forall \varphi, \phi \in PC_\alpha$;

(A4) $\beta_i > l_i$, $\forall i$;

*Modelo geral para redes neurais impulsivas com atrasos infinitos

$$\begin{cases} x_i'(t) = -a_i(x_i(t))[b_i(x_i(t)) + f_i(t, x_t)], & 0 \le t \ne t_k, \\ \Delta(x_i(t_k)) = I_{ik}(x_i(t_k)), \ i = 1, \cdots, n, & k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{4}$$

(A1) $a_i : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, contínua e $a_i(u) \ge \underline{a_i} > 0$, $\forall u$;

(A2) $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua verificando

$$\frac{b_i(u) - b_i(v)}{u - v} \ge \beta_i > 0, \qquad \forall u \ne v;$$

(A3) $|f_i(t, \varphi) - f_i(t, \phi)| \le l_i \|\varphi - \phi\|_\alpha$, $\forall t \ge 0$, $\forall \varphi, \phi \in PC_\alpha$;

(A4) $\beta_i > l_i$, $\forall i$;

(A5) $|\hat{I}_{ik}(u) - \hat{I}_{ik}(v)| \le \hat{\gamma}_{ik}|u - v|$ com $\hat{I}_{ik}(u) = u + I_{ik}(u)$.

* **Proposição:** Suponha-se que (A2), (A3) e (A4) verificam-se. Se $t \to f_i(t, x)$ são constantes, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, então $\exists^1 x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ ponto de equilíbrio do modelo (4) não impulsivo.

* **Proposição:** Suponha-se que (A2), (A3) e (A4) verificam-se. Se $t \to f_i(t, x)$ são constantes, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, então $\exists^1 x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ ponto de equilíbrio do modelo (4) não impulsivo.
* **Hipótese:** Assumindo que

$$I_{ik}(x_i^*) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \ \ \forall k.$$

o ponto x^* diz-se ponto de equilíbrio de (4).

* **Proposição:** Suponha-se que (A2), (A3) e (A4) verificam-se. Se $t \to f_i(t,x)$ são constantes, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, então $\exists^1 x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ ponto de equilíbrio do modelo (4) não impulsivo.
* **Hipótese:** Assumindo que

$$I_{ik}(x_i^*) = 0, \qquad i = 1, \dots, n, \ \forall k.$$

o ponto x^* diz-se ponto de equilíbrio de (4).
* **Proposição:** Suponham-se (A2), (A3), (A4) e x^* é equilíbrio. Então o sistema (4), com condição inicial limitada

$$x_0 = \phi \in BPC_\alpha, \tag{5}$$

tem solução $x(t)$ definida em $\mathbb{R}$.

* **Proposição:** Suponha-se que (A2), (A3) e (A4) verificam-se. Se $t \to f_i(t,x)$ são constantes, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, então $\exists^1 x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ ponto de equilíbrio do modelo (4) não impulsivo.
* **Hipótese:** Assumindo que

$$I_{ik}(x_i^*) = 0, \qquad i = 1, \dots, n, \;\; \forall k.$$

o ponto x^* diz-se ponto de equilíbrio de (4).
* **Proposição:** Suponham-se (A2), (A3), (A4) e x^* é equilíbrio. Então o sistema (4), com condição inicial limitada

$$x_0 = \phi \in BPC_\alpha, \tag{5}$$

tem solução $x(t)$ definida em $\mathbb{R}$.
* **Definição:** O ponto de equilíbrio $x^* \in \mathbb{R}^n$ diz-se *globalmente exponencialmente estável* se existem $M, \epsilon > 0$ tais que

$$|x(t,0,\phi) - x^*| \leq Me^{-\epsilon t}\|\phi - x^*\|_\alpha, \qquad \forall t \geq 0, \phi \in BPC_\alpha.$$

- **Lema:**
  Assuma-se (A1), (A2), (A3) e que $x^* = (0, \dots, 0)$ é ponto de equilíbrio de (4).
  Seja $x : (-\infty, b] \to \mathbb{R}^n$, $b > a > -\infty$, uma solução da equação não impulsiva (4) em $[a, b]$, com $x_a \in PC_\alpha$.
  Se existem $c > 0$ e $\epsilon \in (0, \alpha]$, com $\epsilon < \min_i \{\underline{a_i}(\beta_i - l_i)\}$, tais que
  $$|x(t)| \leq ce^{-\epsilon(t-a)}, \quad \text{para} \quad t \leq a,$$
  então
  $$|x(t)| \leq ce^{-\epsilon(t-a)}, \quad \text{para} \quad t \leq b. \tag{6}$$

- *Dem.* (ideia)
  Por contradição, assume-se que (6) não se verifica.
  Então existem $\delta > 0$, $m \in \{1, \dots, n\}$, $t^* \in (a, b]$:

$$|x_m(t^*)| = (c+\delta)e^{-\epsilon(t^*-a)} \quad \text{e} \quad |x_i(t)| < (c+\delta)e^{-\epsilon(t-a)},$$

  para todo $t < t^*$ e $i = 1, \dots, n$.

- *Dem.* (ideia)
  Por contradição, assume-se que (6) não se verifica.
  Então existem $\delta > 0$, $m \in \{1, \dots, n\}$, $t^* \in (a, b]$:
  $$|x_m(t^*)| = (c + \delta)e^{-\epsilon(t^* - a)} \quad \text{e} \quad |x_i(t)| < (c + \delta)e^{-\epsilon(t-a)},$$
  para todo $t < t^*$ e $i = 1, \dots, n$.
- Considere-se a função $y(t) := (c + \delta)e^{-\epsilon(t-a)}$, $t \in [a, b]$.
  Supondo que $x_m(t^*) > 0$ (análogo se $x_m(t^*) < 0$), tem-se
  $$x'_m(t^*) \geq y'(t^*).$$

- *Dem.* (ideia)
  Por contradição, assume-se que (6) não se verifica.
  Então existem $\delta > 0$, $m \in \{1, \dots, n\}$, $t^* \in (a, b]$:
  $$|x_m(t^*)| = (c+\delta)e^{-\epsilon(t^*-a)} \quad \text{e} \quad |x_i(t)| < (c+\delta)e^{-\epsilon(t-a)},$$
  para todo $t < t^*$ e $i = 1, \dots, n$.
- Considere-se a função $y(t) := (c+\delta)e^{-\epsilon(t-a)}$, $t \in [a, b]$.
  Supondo que $x_m(t^*) > 0$ (análogo se $x_m(t^*) < 0$), tem-se
  $$x_m'(t^*) \geq y'(t^*).$$
- Mas, pelas hipóteses, obtem-se
  $$\begin{array}{rcl} x_m'(t^*) & = & -a_m(x_m(t^*))[b_m(x_m(t^*)) + f_m(t^*, y_{t^*})] \\ & \leq & -\underline{a_m}[\beta_m x_m(t^*) - l_m \|x_{t^*}\|_\alpha] \\ & \leq & -\underline{a_m}[\beta_m y(t^*) - l_m \sup_{s\leq 0}(c+\delta)e^{-\epsilon(t^*+s-a)+\alpha s}] \\ & \leq & -\underline{a_m}(\beta_m - l_m)y(t^*) < -\epsilon y(t^*) = y'(t^*) \end{array}$$

Teorema

- Assumam-se as hipóteses (A1)-(A5) e
  (A6) para algum $k_0 \in \mathbb{N}$ e $\hat{\gamma}_k := \max_i \hat{\gamma}_{ik}$,

$$\eta := \sup_{k \geq k_0} \left(\frac{\log(\max\{1, \hat{\gamma}_k\})}{t_k - t_{k-1}} \right) < \alpha < \min_i \{\underline{a_i}(\beta_i - l_i)\}. \qquad (7)$$

  Se x^* é um ponto de equilíbrio de (4), então ele é globalmente exponencialmente estável.

Teorema

- Assumam-se as hipóteses (A1)-(A5) e

  (A6) para algum $k_0 \in \mathbb{N}$ e $\hat{\gamma}_k := \max_i \hat{\gamma}_{ik}$,

  $$\eta := \sup_{k \geq k_0} \left(\frac{\log(\max\{1, \hat{\gamma}_k\})}{t_k - t_{k-1}} \right) < \alpha < \min_i \{\underline{a_i}(\beta_i - l_i)\}. \qquad (7)$$

  Se x^* é um ponto de equilíbrio de (4), então ele é globalmente exponencialmente estável.
- **Observações:**
  - Permitir situações em que $\hat{\gamma}_k > 1$, para k grande, é especialmente relevante.
  - Na literatura, é frequente assumir-se:

    $$I_{ik}(u) = -\alpha_{ik}(u - x_i^*), \qquad \text{com } 0 < \alpha_{ik} < 2,$$

    o que implica

    $$|x_i(t_k^+) - x_i^*| < |x_i(t_k) - x_i^*|.$$

- *Dem.* (ideia)
  Suponha-se que $x^* = (0, \dots, 0)$ e denote-se $\eta_k := \max\{1, \hat{\gamma}_k\}$.
  Seja $x(t)$ solução de (4) definida em $\mathbb{R}$, com $x_0 \in PC_\alpha$.

- *Dem.* (ideia)
  Suponha-se que $x^* = (0, \dots, 0)$ e denote-se $\eta_k := \max\{1, \hat{\gamma}_k\}$.
  Seja $x(t)$ solução de (4) definida em $\mathbb{R}$, com $x_0 \in PC_\alpha$.
- Consequentemente, obtem-se

$$|x(t)| \leq \|x_0\|_\alpha e^{-\alpha t}, \quad \text{para} \quad t \in (-\infty, 0],$$

e, por aplicação do Lema, conclui-se que

$$|x(t)| \leq \|x_0\|_\alpha e^{-\alpha t}, \quad \text{para} \quad t \in (-\infty, t_1].$$

- *Dem.* (ideia)
  Suponha-se que $x^* = (0, \dots, 0)$ e denote-se $\eta_k := \max\{1, \hat{\gamma}_k\}$.
  Seja $x(t)$ solução de (4) definida em $\mathbb{R}$, com $x_0 \in PC_\alpha$.
- Consequentemente, obtem-se

$$|x(t)| \leq \|x_0\|_\alpha e^{-\alpha t}, \quad \text{para} \quad t \in (-\infty, 0],$$

e, por aplicação do Lema, conclui-se que

$$|x(t)| \leq \|x_0\|_\alpha e^{-\alpha t}, \quad \text{para} \quad t \in (-\infty, t_1].$$

- Para algum i,

$$|x(t_1^+)| = |x_i(t_1^+)| = |\hat{I}_{i1}(x_i(t_1))| \leq \hat{\gamma}_{i1}|x_i(t_1)| \leq \eta_1 \|x_0\|_\alpha e^{-\alpha t_1}.$$

Assim

$$|x(t)| \leq \eta_1 \|x_0\|_\alpha e^{-\alpha t_1} e^{-\alpha(t-t_1)}, \quad \text{para} \quad t \in (-\infty, t_1^+],$$

e, novamente pelo Lema,

$$|x(t)| \leq \eta_1 \|x_0\|_\alpha e^{-\alpha t}, \quad \text{para} \quad t \in (-\infty, t_2].$$

- Por um processo iterativo, $(t_0 = 0)$ conclui-se

$$|x(t)| \leq \eta_1\eta_2 \dots \eta_{k-1} \|x_0\|_\alpha e^{-\alpha t}, \text{ para } t \in (t_{k-1}, t_k],\ k = 1, 2, \cdots .$$

De (A6) tem-se $\eta_k \leq e^{\eta(t_k - t_{k-1})}$, para qualquer $k \geq k_0$. Consequentemente, para $t \in (t_{k-1}, t_k]$ e $k > k_0$,

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \eta_1\eta_2 \dots \eta_{k_0-1} \|x_0\|_\alpha e^{\eta t_{k-1}} e^{-\alpha t} \\ &\leq \eta_1\eta_2 \dots \eta_{k_0-1} \|x_0\|_\alpha e^{-(\alpha-\eta)t}, \end{aligned}$$

donde

$$|x(t) - x^*| \leq \eta_1\eta_2 \dots \eta_{k_0-1} \|x_0 - x^*\|_\alpha e^{-(\alpha-\eta)t}, \qquad t \geq 0.$$

Rede neuronal tipo Cohen-Grossberg com impulsos

$$x_i'(t) = -a_i(x_i(t))\Bigg[b_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{P}\Bigg(h_{ij}^{(p)}(x_j(t-\tau_{ij}^{(p)}(t)))$$
$$+f_{ij}^{(p)}\left(\int_{-\infty}^{0} g_{ij}^{(p)}(x_j(t+s))d\eta_{ij}^{(p)}(s)\right)\Bigg)\Bigg],\ 0 \geq t \neq t_k,$$
$$\Delta(x_i(t_k)) = I_{ik}(x_i(t_k^-)),\ i=1,\dots n,\ k\in\mathbb{N}, \qquad (8)$$

- $a_i : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$, são contínuas verificando (A1);

Rede neuronal tipo Cohen-Grossberg com impulsos

$$x_i'(t) = -a_i(x_i(t))\Bigg[b_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{P}\Bigg(h_{ij}^{(p)}(x_j(t-\tau_{ij}^{(p)}(t))) + f_{ij}^{(p)}\Bigg(\int_{-\infty}^{0} g_{ij}^{(p)}(x_j(t+s))d\eta_{ij}^{(p)}(s)\Bigg)\Bigg)\Bigg],\ 0 \geq t \neq t_k,$$

$$\Delta(x_i(t_k)) = I_{ik}(x_i(t_k^-)),\ i = 1,\dots n,\ k \in \mathbb{N}, \qquad (8)$$

- $a_i : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, são contínuas verificando (A1);
- $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas verificando (A2);

Rede neuronal tipo Cohen-Grossberg com impulsos

$$
\begin{aligned}
x_i'(t) = -a_i(x_i(t))\Bigg[b_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{P}\Bigg(h_{ij}^{(p)}(x_j(t-\tau_{ij}^{(p)}(t))) \\
+f_{ij}^{(p)}\left(\int_{-\infty}^{0} g_{ij}^{(p)}(x_j(t+s))d\eta_{ij}^{(p)}(s)\right)\Bigg)\Bigg],\ 0 \geq t \neq t_k, \\
\Delta(x_i(t_k)) = I_{ik}(x_i(t_k^-)),\ i=1,\dots n,\ k\in\mathbb{N},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

- $a_i : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, são contínuas verificando (A1);
- $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas verificando (A2);
- $h_{ij}^{(p)}, f_{ij}^{(p)}, g_{ij}^{(p)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são Lipschitz com constante de Lipschtiz $\zeta_{ij}^{(p)}$, $\mu_{ij}^{(p)}$, $\sigma_{ij}^{(p)}$ respectivamente;

Rede neuronal tipo Cohen-Grossberg com impulsos

$$\begin{aligned} x_i'(t) = -a_i(x_i(t))\Bigg[b_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{P}\Bigg(h_{ij}^{(p)}(x_j(t-\tau_{ij}^{(p)}(t))) \\ + f_{ij}^{(p)}\left(\int_{-\infty}^{0} g_{ij}^{(p)}(x_j(t+s))d\eta_{ij}^{(p)}(s)\right)\Bigg)\Bigg], \; 0 \geq t \neq t_k, \\ \Delta(x_i(t_k)) = I_{ik}(x_i(t_k^-)), \; i = 1,\dots n, \; k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{8}$$

- $a_i : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, são contínuas verificando (A1);
- $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas verificando (A2);
- $h_{ij}^{(p)}, f_{ij}^{(p)}, g_{ij}^{(p)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são Lipschitz com constante de Lipschtiz $\zeta_{ij}^{(p)}$, $\mu_{ij}^{(p)}$, $\sigma_{ij}^{(p)}$ respectivamente;
- $\tau_{ij}^{(p)} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ são contínuas com $\tau_{ij}^{(p)}(t) \leq \tau_{ij} \leq \tau$;

Rede neuronal tipo Cohen-Grossberg com impulsos

$$
\begin{aligned}
x_i'(t) = -a_i(x_i(t))\Bigg[b_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{P}\Bigg(&h_{ij}^{(p)}(x_j(t-\tau_{ij}^{(p)}(t))) \\
&+ f_{ij}^{(p)}\left(\int_{-\infty}^{0} g_{ij}^{(p)}(x_j(t+s))d\eta_{ij}^{(p)}(s)\right)\Bigg)\Bigg], \; 0 \geq t \neq t_k, \\
\Delta(x_i(t_k)) = I_{ik}(x_i(t_k^-)), \; i = 1, \dots n, \; k \in \mathbb{N}, \qquad (8)
\end{aligned}
$$

- $a_i : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, são contínuas verificando (A1);
- $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas verificando (A2);
- $h_{ij}^{(p)}, f_{ij}^{(p)}, g_{ij}^{(p)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são Lipschitz com constante de Lipschtiz $\zeta_{ij}^{(p)}$, $\mu_{ij}^{(p)}$, $\sigma_{ij}^{(p)}$ respectivamente;
- $\tau_{ij}^{(p)} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ são contínuas com $\tau_{ij}^{(p)}(t) \leq \tau_{ij} \leq \tau$;
- $I_{ik} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificam (A5).

- **Corolário**
  Considere-se (8) verificando as hipóteses descritas.
  Mais, suponha-se que $\eta_{ij}^{(p)} : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ são funções crescentes e limitadas tais que

$$\eta_{ij}^{(p)}(0) - \eta_{ij}^{(p)}(-\infty) = 1, \text{ e } \int_{-\infty}^{0} e^{-\varepsilon s} d\eta_{ij}^{(p)} < \infty,$$

  para algum $\varepsilon > \eta := \sup_{k \geq k_0} \left(\frac{\log(\max\{1, \hat{\gamma}_k\})}{t_k - t_{k-1}} \right)$ e $\hat{\gamma}_k = \max_i \hat{\gamma}_{ik}$.
  Se

$$M = diag\left(\beta_1 - \frac{\eta}{\underline{a}_1}, \dots, \beta_n - \frac{\eta}{\underline{a}_n}\right) - [n_{ij}(\eta)]$$

  é uma M-matriz invertível, então existe um equilíbrio da equação não impulsiva que, sendo equilíbrio de (8), é globalmente exponencialmente estável.

- **Corolário**
  Considere-se (8) verificando as hipóteses descritas.
  Mais, suponha-se que $\eta_{ij}^{(p)} : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ são funções crescentes e limitadas tais que

$$\eta_{ij}^{(p)}(0) - \eta_{ij}^{(p)}(-\infty) = 1, \text{ e } \int_{-\infty}^{0} e^{-\varepsilon s} d\eta_{ij}^{(p)} < \infty,$$

  para algum $\varepsilon > \eta := \sup_{k \geq k_0} \left(\frac{\log(\max\{1, \hat{\gamma}_k\})}{t_k - t_{k-1}} \right)$ e $\hat{\gamma}_k = \max_i \hat{\gamma}_{ik}$.
  Se

$$M = diag\left(\beta_1 - \frac{\eta}{\underline{a_1}}, \dots, \beta_n - \frac{\eta}{\underline{a_n}} \right) - [n_{ij}(\eta)]$$

  é uma M-matriz invertível, então existe um equilíbrio da equação não impulsiva que, sendo equilíbrio de (8), é globalmente exponencialmente estável.
- $n_{ij}(\eta) = \sum_{p=1}^{P} \left(\zeta_{ij}^{(p)} e^{\eta \tau_{ij}^{(p)}} + \mu_{ij}^{(p)} \sigma_{ij}^{(p)} \int_{-\infty}^{0} e^{-\eta s} d\eta_{ij}^{(p)}(s) \right)$

- *Dem.* (ideia)
  M é M-matriz invertível $\Rightarrow \exists d=(d_1,\dots,d_n)>0$:

$$\left(\beta_i-\frac{\eta}{\underline{a_i}}\right)d_i-\sum_{j=1}^{n}d_jn_{ij}(\eta)>0,\qquad i=1,\dots,n;$$

  isto é

$$C_i(\eta):=\eta-\underline{a_i}\left(\beta_i-d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}d_jn_{ij}(\eta)\right)<0,\qquad i=1,\dots,n,$$

  com $z\mapsto C_i(z)$ contínuas e crescentes em $[\eta,\varepsilon]$.

- *Dem.* (ideia)
  M é M-matriz invertível $\Rightarrow \exists d = (d_1, \dots, d_n) > 0$:
$$\left(\beta_i - \frac{\eta}{\underline{a_i}}\right) d_i - \sum_{j=1}^{n} d_j n_{ij}(\eta) > 0, \qquad i = 1, \dots, n;$$
  isto é
$$C_i(\eta) := \eta - \underline{a_i}\left(\beta_i - d_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} d_j n_{ij}(\eta)\right) < 0, \qquad i = 1, \dots, n,$$
  com $z \mapsto C_i(z)$ contínuas e crescentes em $[\eta, \varepsilon]$.
- Logo existe $\alpha \in (\eta, \varepsilon]$ tal que $C_i(\alpha) < 0$ para todo i, donde
$$\eta < \alpha < \min_i \left\{\underline{a_i}\,(\beta_i - l_i)\right\} \tag{9}$$
$$l_i = d_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} d_j \sum_{p=1}^{P} \left(\zeta_{ij}^{(p)} e^{\alpha \tau_{ij}^{(p)}} + \mu_{ij}^{(p)} \sigma_{ij}^{(p)} \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha s} d\eta_{ij}^{(p)}(s)\right)$$

A mudança de variável $y_i(t) = d_i^{-1} x_i(t)$ transforma o sistema (8) no sistema

$$\begin{cases} y_i'(t) = -\bar{a}_i(y_i(t))[\bar{b}_i(y_i(t)) + \bar{f}_i(t, y_t)], & 0 \leq t \neq t_k, \\ \Delta(y_i(t_k)) = \bar{I}_{ik}(y_i(t_k)), \ i = 1, \cdots, n, & k = 1, 2, \cdots \end{cases} \qquad (10)$$

no espaço de fase PC_α, onde para $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}$, e $\phi \in PC_\alpha$,

$$\bar{f}_i(t, \phi) = d_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} \sum_{p=1}^{P} \left[h_{ij}^{(p)}(d_j \phi_j(-\tau_{ij}^{(p)}(t))) + \right.$$
$$\left. + f_{ij}^{(p)} \left(\int_{-\infty}^{0} g_{ij}^{(p)}(d_j \phi_j(s)) d\eta_{ij}^{(p)}(s) \right) \right],$$

$$\bar{a}_i = a_i(d_i(u)), \qquad \bar{b}_i(u) = d_i^{-1} b_i(d_i(u)), \qquad \bar{I}_{ik}(u) = d_i^{-1} I_{ik}(d_i(u)).$$

- Claramente, $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$ e $\bar{I}_{ik}$ verificam (A1), (A2) e (A5) se e só se a_i, b_i e I_{ik} verificam (A1), (A2) e (A5) com as mesmas constantes $\underline{a_i}$, β_i e $\hat{\gamma}_{ik}$ respectivamente.

- Claramente, $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$ e $\bar{I}_{ik}$ verificam (A1), (A2) e (A5) se e só se a_i, b_i e I_{ik} verificam (A1), (A2) e (A5) com as mesmas constantes $\underline{a_i}$, β_i e $\hat{\gamma}_{ik}$ respectivamente.
- Mais, tem-se

$$|\bar{f}_i(t,\phi) - \bar{f}_i(t,\varphi)| \leq l_i \|\phi - \varphi\|_\alpha,$$

com l_i definido anteriormente, ou seja, cada $\bar{f}_i$ verifica (A3).

- Claramente, $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$ e $\bar{I}_{ik}$ verificam (A1), (A2) e (A5) se e só se a_i, b_i e I_{ik} verificam (A1), (A2) e (A5) com as mesmas constantes $\underline{a_i}$, β_i e $\hat{\gamma}_{ik}$ respectivamente.
- Mais, tem-se

$$|\bar{f}_i(t,\phi) - \bar{f}_i(t,\varphi)| \leq l_i \|\phi - \varphi\|_\alpha,$$

com l_i definido anteriormente, ou seja, cada $\bar{f}_i$ verifica (A3).
- Finalmente, a condição (9) corresponde à hipótese (A6) e o resultado sai com consequência do resultado principal.

Obrigado

T. Faria, M.C. Gadotti, J.J. Oliveira, Nonlinear Analysis 75(2012) 6570-6587.