Estabilidade exponencial para modelos de redes neuronais não autónomos do tipo Cohen-Grossberg com atrasos distribuídos

José J. Oliveira

2 de Março de 2015

CMAT, Departamento de Matemática e Aplicações,
Universidade do Minho

Modelos de redes neuronais

*Primeiros modelos:

- Cohen-Grossberg (1983)

$$\dot{x}_i(t) = -a_i(x_i(t))\left(b_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^{n} c_{ij} f_j(x_j(t))\right), \quad i = 1, \dots, n. \qquad (1)$$

- Hopfield (1984)

$$\dot{x}_i(t) = -b_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} f_j(x_j(t)), \qquad i = 1, \dots, n. \qquad (2)$$

onde
a_i funções amplificadoras; b_i funções de auto-controlo;
f_j funções de activação; $C = [c_{ij}]$ "connection weights".

*Modelo não autónomo do tipo Cohen-Grossberg

$$x_i'(t) = -a_i(x_i(t))\left[b_i(t, x_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t, x_{j_t})\right], \qquad t \geq 0 \tag{3}$$

*Modelo não autónomo do tipo Cohen-Grossberg

$$x_i'(t) = -a_i(x_i(t))\left[b_i(t, x_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t, x_{j_t})\right], \qquad t \geq 0 \tag{3}$$

- $a_i : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ e $b_i : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas,

*Modelo não autónomo do tipo Cohen-Grossberg

$$x_i'(t) = -a_i(x_i(t))\left[b_i(t, x_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t, x_{j_t})\right], \qquad t \geq 0 \tag{3}$$

- $a_i : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ e $b_i : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas,

* **Espaço de fase:** Para um $\varepsilon > 0$ conveniente,

$$UC_\varepsilon^n = \left\{\phi \in C((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n) : \sup_{s \leq 0} \frac{|\phi(s)|}{e^{-\varepsilon s}} < \infty, \frac{\phi(s)}{e^{-\varepsilon s}} \text{ unif. cont.}\right\},$$

$$\|\phi\|_\varepsilon = \sup_{s \leq 0} \frac{|\phi(s)|}{e^{-\varepsilon s}} \text{ com } |x| = |(x_1, \ldots, x_n)| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

*Modelo não autónomo do tipo Cohen-Grossberg

$$x_i'(t) = -a_i(x_i(t))\left[b_i(t, x_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t, x_{j_t})\right], \qquad t \geq 0 \tag{3}$$

- $a_i : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ e $b_i : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas,

* **Espaço de fase:** Para um $\varepsilon > 0$ conveniente,

$$UC_\varepsilon^n = \left\{ \phi \in C((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n) : \sup_{s \leq 0} \frac{|\phi(s)|}{e^{-\varepsilon s}} < \infty, \frac{\phi(s)}{e^{-\varepsilon s}} \text{ unif. cont.} \right\},$$

$$\|\phi\|_\varepsilon = \sup_{s \leq 0} \frac{|\phi(s)|}{e^{-\varepsilon s}} \text{ com } |x| = |(x_1, \ldots, x_n)| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

- $f_{ij} : [0, +\infty) \times UC_\varepsilon^1 \to \mathbb{R}$ são funções contínuas.

* Condição Inicial

$$x_0 = \varphi, \qquad \varphi \in BC^n \tag{4}$$

onde

$$BC^n := \left\{ \varphi \in C((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_\infty := \sup_{s \leq 0} |\varphi(s)| < \infty \right\}.$$

Naturalmente $BC^n \leq UC^n_\varepsilon$.

* Condição Inicial

$$x_0 = \varphi, \qquad \varphi \in BC^n \tag{4}$$

onde

$$BC^n := \left\{ \varphi \in C((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_\infty := \sup_{s \le 0} |\varphi(s)| < \infty \right\}.$$

Naturalmente $BC^n \leq UC^n_\varepsilon$.

* Definição

O modelo (3) diz-se *globalmente exponencialmente estável* se existem $\delta > 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$|x(t, 0, \varphi_1) - x(t, 0, \varphi_2)| \leq Me^{-\delta t}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty,$$

para quaisquer $t \geq 0$, $\varphi_1, \varphi_2 \in BC^n$.

Para o modelo (3) assumem-se as seguintes hipóteses:
Para cada $i, j = 1, \ldots, n$

Para o modelo (3) assumem-se as seguintes hipóteses:
Para cada $i, j = 1, \ldots, n$

- **(A1)** $\exists \overline{\rho}_i, \underline{\rho}_i > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$:

$$\underline{\rho}_i \leq a_i(u) \leq \overline{\rho}_i;$$

Para o modelo (3) assumem-se as seguintes hipóteses:
Para cada $i, j = 1, \dots, n$

- **(A1)** $\exists \overline{\rho}_i, \underline{\rho}_i > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$:

$$\underline{\rho}_i \le a_i(u) \le \overline{\rho}_i;$$

- **(A2)** $\exists\ \beta_i : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\forall u, v \in \mathbb{R}$ $u \neq v$:

$$(b_i(t, u) - b_i(t, v))/(u - v) \ge \beta_i(t), \qquad \forall t \ge 0;$$

[Por exemplo, $b_i(t, u) = \beta_i(t) u$.]

Para o modelo (3) assumem-se as seguintes hipóteses:
Para cada $i, j = 1, \dots, n$

- **(A1)** $\exists \overline{\rho}_i, \underline{\rho}_i > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$:
$$\underline{\rho}_i \leq a_i(u) \leq \overline{\rho}_i;$$
- **(A2)** $\exists\ \beta_i : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\forall u, v \in \mathbb{R}\ u \neq v$:
$$(b_i(t,u) - b_i(t,v))/(u - v) \geq \beta_i(t), \qquad \forall t \geq 0;$$
[Por exemplo, $b_i(t,u) = \beta_i(t)u$.]
- **(A3)** $\exists \varepsilon > 0$, $\exists\ l_{ij} : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$
$$|f_{ij}(t,\varphi) - f_{ij}(t,\psi)| \leq l_{ij}(t)||\varphi - \psi||_\infty, \qquad \forall t \geq 0,\ \forall \varphi, \psi \in UC^1_\varepsilon;$$

Para o modelo (3) assumem-se as seguintes hipóteses:
Para cada $i, j = 1, \dots, n$

- **(A1)** $\exists \overline{\rho}_i, \underline{\rho}_i > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$:
$$\underline{\rho}_i \leq a_i(u) \leq \overline{\rho}_i;$$
- **(A2)** $\exists\ \beta_i : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\forall u, v \in \mathbb{R}\ u \neq v$:
$$(b_i(t, u) - b_i(t, v))/(u - v) \geq \beta_i(t), \qquad \forall t \geq 0;$$
[Por exemplo, $b_i(t, u) = \beta_i(t)u$.]
- **(A3)** $\exists \varepsilon > 0$, $\exists\ l_{ij} : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$
$$|f_{ij}(t, \varphi) - f_{ij}(t, \psi)| \leq l_{ij}(t)||\varphi - \psi||_\infty, \qquad \forall t \geq 0,\ \forall \varphi, \psi \in UC^1_\varepsilon;$$
- **(A4)** Existe uma função contínua $\lambda : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ tal que
$$\underline{\rho}_i \beta_i(t) - e^{\int_0^t \lambda(s)ds} \sum_{j=1}^{n} \overline{\rho}_j l_{ij}(t) > \lambda(t) \text{ e } \int_0^t \lambda(s)\, ds \geq \varepsilon t,\ \forall t \geq 0.$$

Lemma: Cada solução maximal $x(t) = x(t, 0, \varphi)$ de (3) está definida em $\mathbb{R}$.

Lemma: Cada solução maximal $x(t) = x(t, 0, \varphi)$ de (3) está definida em $\mathbb{R}$.

* Demostração (ideia)

Lemma: Cada solução maximal $x(t) = x(t, 0, \varphi)$ de (3) está definida em $\mathbb{R}$.

* Demostração (ideia)
- Seja $x(t) = x(t, 0, \varphi)$ uma solução maximal definida em $(-\infty, \alpha)$, com $\alpha \in (0, +\infty]$ e $\varphi \in BC^n$

Lemma: Cada solução maximal $x(t) = x(t, 0, \varphi)$ de (3) está definida em $\mathbb{R}$.

* Demostração (ideia)
- Seja $x(t) = x(t, 0, \varphi)$ uma solução maximal definida em $(-\infty, \alpha)$, com $\alpha \in (0, +\infty]$ e $\varphi \in BC^n$
- Assume-se $\alpha \in (0, +\infty)$.

Lemma: Cada solução maximal $x(t) = x(t, 0, \varphi)$ de (3) está definida em $\mathbb{R}$.

* Demostração (ideia)
- Seja $x(t) = x(t, 0, \varphi)$ uma solução maximal definida em $(-\infty, \alpha)$, com $\alpha \in (0, +\infty]$ e $\varphi \in BC^n$
- Assume-se $\alpha \in (0, +\infty)$.
- Para $z(t) = (z_1(t), \ldots, z_n(t)) := (\overline{\rho}_1^{-1}|x_1(t)|, \ldots, \overline{\rho}_n^{-1}|x_n(t)|)$, existem $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $(t_k)_k \nearrow \alpha$ tais que, $z_i(t_k) \nearrow +\infty$ e

$$z_i(t_k) \geq ||z_{t_k}||_\infty > 0, \quad \text{e} \quad z_i'(t_k) \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Lemma: Cada solução maximal $x(t) = x(t, 0, \varphi)$ de (3) está definida em $\mathbb{R}$.

* Demostração (ideia)
- Seja $x(t) = x(t, 0, \varphi)$ uma solução maximal definida em $(-\infty, \alpha)$, com $\alpha \in (0, +\infty]$ e $\varphi \in BC^n$
- Assume-se $\alpha \in (0, +\infty)$.
- Para $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t)) := (\overline{\rho}_1^{-1}|x_1(t)|, \dots, \overline{\rho}_n^{-1}|x_n(t)|)$, existem $i \in \{1, \dots, n\}$ e $(t_k)_k \nearrow \alpha$ tais que, $z_i(t_k) \nearrow +\infty$ e

$$z_i(t_k) \geq ||z_{t_k}||_\infty > 0, \quad \text{e} \quad z_i'(t_k) \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

- $z_i'(t_k) = \overline{\rho}_i^{-1}\mathrm{sign}(x_i(t_k))x_i'(t_k)$

$$= -\overline{\rho}_i^{-1}\mathrm{sign}(x_i(t_k))a_i(x_i(t_k))\Bigg[\Bigg(b_i(t_k, x_i(t_k)) - b_i(t_k, 0)\Bigg) + \sum_{j=1}^n \Bigg(f_{ij}(t_k, x_{j t_k}) - f_{ij}(t_k, 0)\Bigg) + \Bigg(b_i(t_k, 0) + \sum_{j=1}^n f_{ij}(t_k, 0)\Bigg)\Bigg]$$

- Por **(A2)** e **(A3)** tem-se

$$z_i'(t_k) \leq -a_i(x_i(t_k)) \left[\beta_i(t_k) z_i(t_k) - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{\rho}_j}{\overline{\rho}_i} l_{ij}(t_k) \right) \|z_{t_k}\|_\infty - K_i \right]$$

com $K_i := \max_{t \in [0,\alpha]} \overline{\rho}_i^{-1} \left| b_i(t,0) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t,0) \right| \in [0, +\infty)$.

Como $z_i(t_k) \geq \|z_{t_k}\|_\infty$ e $z_i(t_k) \nearrow +\infty$ então, por **(A4)**

$$\begin{aligned} z_i'(t_k) &\leq -a_i(x_i(t_k)) \left[\left(\beta_i(t_k) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{\rho}_j}{\overline{\rho}_i} l_{ij}(t_k) \right) z_i(t_k) - K_i \right] \\ &\leq -\underline{\rho}_i \left(\frac{\lambda(t_k)}{\overline{\rho}_i} z_i(t_k) - K_i \right) < 0, \text{ para } k \text{ grande.} \end{aligned}$$

- Por **(A2)** e **(A3)** tem-se

$$z_i'(t_k) \leq -a_i(x_i(t_k)) \left[\beta_i(t_k) z_i(t_k) - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{\rho}_j}{\overline{\rho}_i} l_{ij}(t_k) \right) \|z_{t_k}\|_\infty - K_i \right]$$

com $K_i := \max_{t\in[0,\alpha]} \overline{\rho}_i^{-1} \left| b_i(t,0) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t,0) \right| \in [0,+\infty).$

Como $z_i(t_k) \geq \|z_{t_k}\|_\infty$ e $z_i(t_k) \nearrow +\infty$ então, por **(A4)**

$$\begin{aligned} z_i'(t_k) &\leq -a_i(x_i(t_k)) \left[\left(\beta_i(t_k) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{\rho}_j}{\overline{\rho}_i} l_{ij}(t_k) \right) z_i(t_k) - K_i \right] \\ &\leq -\underline{\rho}_i \left(\frac{\lambda(t_k)}{\overline{\rho}_i} z_i(t_k) - K_i \right) < 0, \text{ para } k \text{ grande.} \end{aligned}$$

- Contradição, logo $\alpha = +\infty$.

Estabilidade global exponencial

- **Teorema 1:** Assuma-se **(A1)-(A4)**
  Então o modelo (3) é globalmente exponencialmente estável.

Estabilidade global exponencial

- **Teorema 1:** Assuma-se **(A1)-(A4)**
  Então o modelo (3) é globalmente exponencialmente estável.

* Demostração (ideia)
Sejam $x(t) = x(t, 0, \varphi)$ e $y(t) = y(t, 0, \psi)$ soluções, com $\varphi, \psi \in BC^n$.
Defina-se, para $t \geq 0$, $\mathcal{V}(t) = (\mathcal{V}_1(t), \dots, \mathcal{V}_n(t))$ por

$$\mathcal{V}_i(t) = e^{\int_0^t \lambda(s)ds} \operatorname{sign}(x_i(t) - y_i(t)) \int_{y_i(t)}^{x_i(t)} \frac{1}{a_i(s)} ds.$$

Estabilidade global exponencial

- **Teorema 1:** Assuma-se **(A1)-(A4)**
  Então o modelo (3) é globalmente exponencialmente estável.

* Demostração (ideia)
  Sejam $x(t) = x(t, 0, \varphi)$ e $y(t) = y(t, 0, \psi)$ soluções, com $\varphi, \psi \in BC^n$.
  Defina-se, para $t \geq 0$, $\mathcal{V}(t) = (\mathcal{V}_1(t), \dots, \mathcal{V}_n(t))$ por

$$\mathcal{V}_i(t) = e^{\int_0^t \lambda(s)ds} \mathrm{sign}(x_i(t) - y_i(t)) \int_{y_i(t)}^{x_i(t)} \frac{1}{a_i(s)} ds.$$

- Se $|\mathcal{V}(t)| \leq \max_j \left\{ \underline{\rho}_j^{-1} \right\} \|\varphi - \psi\|_\infty$, para todo $t \geq 0$, então

$$|x(t)-y(t)| \min_j \left\{ \overline{\rho}_j^{-1} \right\} e^{\int_0^t \lambda(s)ds} \leq |\mathcal{V}(t)| \leq \max_j \left\{ \underline{\rho}_j^{-1} \right\} \|\varphi-\psi\|_\infty,$$

$$|x(t)-y(t)| \leq \frac{\max_j \left\{\underline{\rho}_j^{-1}\right\}}{\min_j \left\{\overline{\rho}_j^{-1}\right\}} e^{-\int_0^t \lambda(s)ds} \|\varphi-\psi\|_\infty \leq M e^{-\varepsilon t} \|\varphi-\psi\|_\infty,$$

com $M := \frac{\max_j\left\{\overline{\rho}_j\right\}}{\min_j\left\{\underline{\rho}_j\right\}} = \frac{\max_j\left\{\underline{\rho}_j^{-1}\right\}}{\min_j\left\{\overline{\rho}_j^{-1}\right\}}$. $\left(\text{Notar que } \int_0^t \lambda(s)\,ds \geq \varepsilon t\right)$.

$$|x(t)-y(t)| \leq \frac{\max_j \left\{\underline{\rho}_j^{-1}\right\}}{\min_j \left\{\overline{\rho}_j^{-1}\right\}} e^{-\int_0^t \lambda(s)ds} \|\varphi-\psi\|_\infty \leq Me^{-\varepsilon t}\|\varphi-\psi\|_\infty,$$

com $M := \frac{\max_j\{\overline{\rho}_j\}}{\min_j\{\underline{\rho}_j\}} = \frac{\max_j\{\underline{\rho}_j^{-1}\}}{\min_j\{\overline{\rho}_j^{-1}\}}$. $\left(\text{Notar que } \int_0^t \lambda(s)\, ds \geq \varepsilon t\right)$.

- É necessário provar: $|\mathcal{V}(t)| \leq \max_j \left\{\underline{\rho}_j^{-1}\right\} \|\varphi - \psi\|_\infty, \forall t \geq 0.$
  Assumindo que não é verdade, como

$$\mathcal{V}_i(0) \leq \underline{\rho}_i^{-1}|x_i(0) - y_i(0)| \leq \max_j \left\{\underline{\rho}_j^{-1}\right\} \|\varphi - \psi\|_\infty, \quad \forall i$$

  conclui-se que existe $t_1 > 0$ tal que
  $|\mathcal{V}(t_1)| > \max_j \left\{\underline{\rho}_j^{-1}\right\} \|\varphi - \psi\|_\infty$.

- Definindo

$$T := \min\left\{t \in [0, t_1] : |\mathcal{V}(t)| = \max_{s\in[0,t_1]} |\mathcal{V}(s)|\right\}$$

e escolhendo $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\mathcal{V}_i(T) = |\mathcal{V}(T)|$, então

$$\mathcal{V}_i(T) > 0, \quad \mathcal{V}_i'(T) \geq 0, \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_i(T) > |\mathcal{V}(t)|, \quad \forall t < T.$$

- Definindo

$$T := \min\left\{t \in [0, t_1] : |\mathcal{V}(t)| = \max_{s\in[0,t_1]} |\mathcal{V}(s)|\right\}$$

e escolhendo $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\mathcal{V}_i(T) = |\mathcal{V}(T)|$, então

$$\mathcal{V}_i(T) > 0, \quad \mathcal{V}_i'(T) \geq 0, \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_i(T) > |\mathcal{V}(t)|, \quad \forall t < T.$$

- Mas, da definição de $\mathcal{V}(t)$ e do modelo (3) tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_i'(T) \quad = \quad & \lambda(T)\mathcal{V}_i(T) - e^{\int_0^T \lambda(s)ds}\operatorname{sign}(x_i(T) - y_i(T)) \cdot \\ & \left(\frac{1}{a_i(x_i(T))}x_i'(T) - \frac{1}{a_i(y_i(T))}y_i'(T)\right)\end{aligned}$$

- e das hipóteses **(A1)-(A3)**

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_i'(T) &\leq \lambda(T)\mathcal{V}_i(T) - e^{\int_0^T \lambda(s)ds}\beta_i(T)|x_i(T) - y_i(T)| + \\ & e^{\int_0^T \lambda(s)ds}\sum_{j=1}^{n} l_{ij}(T)\|x_{j\,T} - y_{j\,T}\|_\infty \\ &\leq \lambda(T)\mathcal{V}_i(T) - \underline{\rho}_i\beta_i(T)\mathcal{V}_i(T) + e^{\int_0^T \lambda(s)ds}\sum_{j=1}^{n} l_{ij}(T)\overline{\rho}_j \cdot \\ & \cdot \max\left\{\frac{\|\varphi - \psi\|_\infty}{\overline{\rho}_j}, \sup_{-T<s\leq 0}\mathcal{V}_j(T+s)\right\}\end{aligned}$$

$$\mathcal{V}_i'(T) \leq \left(\lambda(T) - \underline{\rho}_i\beta_i(T) + e^{\int_0^T \lambda(s)ds}\sum_{j=1}^{n}\overline{\rho}_j l_{ij}(T)\right)\mathcal{V}_i(T) < 0,$$

o que é uma contradição.

Atrasos finitos

Corolário 1: Assuma-se **(A1)**, **(A2)** e

- **(A$_f$3)** Para $f_{ij} : [0, +\infty) \times C_{ij} \to \mathbb{R}$, $\exists\, l_{ij} : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$

  $$|f_{ij}(t, \varphi) - f_{ij}(t, \psi)| \leq l_{ij}(t) \|\varphi - \psi\|_\infty, \qquad \forall t \geq 0, \ \forall \varphi, \psi \in C_{ij},$$

  onde $C_{ij} = C([-\tau_{ij}, 0]; \mathbb{R})$ com $\tau_{ij} > 0$, $\tau := \max_{i,j} \tau_{ij}$;

Atrasos finitos

Corolário 1: Assuma-se **(A1)**, **(A2)** e

- **(A$_f$3)** Para $f_{ij} : [0, +\infty) \times C_{ij} \to \mathbb{R}$, $\exists\, l_{ij} : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$

  $$|f_{ij}(t, \varphi) - f_{ij}(t, \psi)| \leq l_{ij}(t)\|\varphi - \psi\|_\infty, \qquad \forall t \geq 0,\ \forall \varphi, \psi \in C_{ij},$$

  onde $C_{ij} = C([-\tau_{ij}, 0]; \mathbb{R})$ com $\tau_{ij} > 0$, $\tau := \max_{i,j} \tau_{ij}$;
- **(A$_f$4)** Existe uma função contínua $\lambda : \mathbb{R} \to [-\tau, +\infty)$ tal que

  $$\underline{\rho}_i \beta_i(t) - \sum_{j=1}^{n} e^{\int_{t-\tau_{ij}}^{t} \lambda(s) ds} \overline{\rho}_j l_{ij}(t) > \lambda(t) \text{ e } \int_0^t \lambda(s)\, ds \geq \varepsilon t,\ \forall t \geq 0.$$

  então o modelo (3) é globalmente exponencialmente estável.

Corolário 2: Assuma-se **(A1)**, **(A2)** e **(A$_f$3)**.

- Se $l_{ij}(t)$ são funções limitadas e existe $\alpha > 0$:

$$\underline{\rho}_i \beta_i(t) - \sum_{j=1}^{n} \overline{\rho}_j l_{ij}(t) > \alpha, \ \forall t \geq 0, \tag{5}$$

então o modelo (3) é globalmente exponencialmente estável.

Corolário 2: Assuma-se **(A1)**, **(A2)** e **(A$_f$3)**.

- Se $l_{ij}(t)$ são funções limitadas e existe $\alpha > 0$:

$$\underline{\rho}_i \beta_i(t) - \sum_{j=1}^{n} \overline{\rho}_j l_{ij}(t) > \alpha, \ \forall t \geq 0, \tag{5}$$

então o modelo (3) é globalmente exponencialmente estável.

* (Demonstrção) Para $l_{ij}(t) < L_{ij}$, de (5) obtém-se

$$\underline{\rho}_i \beta_i(t) - \sum_{j=1}^{n} \overline{\rho}_j l_{ij}(t) \left(1 + \frac{\alpha}{2nL_{ij}\overline{\rho}_j}\right) > \frac{\alpha}{2}.$$

Tomando $\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{\tau_{ij}} \log\left(1 + \frac{\alpha}{2nL_{ij}\overline{\rho}_j}\right) > 0$ e $\varepsilon = \min_{i,j}\left\{\frac{\alpha}{2}, \varepsilon_{ij}^*\right\}$,

$$\underline{\rho}_i \beta_i(t) - \sum_{j=1}^{n} \overline{\rho}_j l_{ij}(t) e^{\varepsilon \tau_{ij}} > \varepsilon.$$

Com $\lambda(t) = \varepsilon$ a hipótese **(A$_f$4)** verifica-se.

No espaço de fase $C^n = C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$, assuma-se que o sistema

$$x_i'(t) = -a_i(x_i(t))\left[b_i(t, x_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t, x_{j_t})\right], \qquad t \geq 0 \qquad (3)$$

é ω-periódico, $\omega > 0$, isto é:

$$b_i(t, u) = b_i(t + \omega, u), \qquad \forall t \geq 0 \ \forall u \in \mathbb{R};$$
$$f_{ij}(t, \varphi) = f_{ij}(t + \omega, \varphi), \qquad \forall t \geq 0 \ \forall \varphi \in C_{ij}.$$

Teorema 2: Assuma-se **(A1)**, **(A2)**, **(A$_f$4)** e

$$\underline{\rho}_i \beta_i(t) - \sum_{j=1}^{n} \overline{\rho}_j l_{ij}(t) > 0, \qquad \forall t \in [0, \omega].$$

Então (3) possui uma solução ω-periódica que é globalmente exponencialmente estável.

* (Dem.) Mostrar a existência de uma solução periódica.
  Pelo resultado anterior

$$\|x_t(\varphi)-x_t(\psi)\|_\infty \leq e^{-\varepsilon(t-\tau)}\|\varphi-\psi\|_\infty, \quad \forall t \geq \tau,\ \forall \varphi,\psi \in C^n.$$

* (Dem.) Mostrar a existência de uma solução periódica. Pelo resultado anterior

$$\|x_t(\varphi)-x_t(\psi)\|_\infty \leq e^{-\varepsilon(t-\tau)}\|\varphi-\psi\|_\infty, \quad \forall t \geq \tau,\ \forall \varphi, \psi \in C^n.$$

- Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $e^{-\varepsilon(k\omega-\tau)} \leq \frac{1}{2}$ e defina-se $P : C^n \to C^n$ por $P(\varphi) = x_\omega(\varphi)$. Tem-se

$$P^K(\varphi) - P^k(\psi)\| = \|x_{k\omega}(\varphi) - x_{k\omega}(\psi)\| \leq \frac{1}{2}\|\varphi - \psi\|,$$

donde P^k é uma contracção no espaço de Banach C^n. Logo P^k possui um único ponto fixo $\varphi^* \in C^n$ i.e., $P^k(\varphi^*) = \varphi^*$.

* (Dem.) Mostrar a existência de uma solução periódica. Pelo resultado anterior

$$\|x_t(\varphi)-x_t(\psi)\|_\infty \leq e^{-\varepsilon(t-\tau)}\|\varphi-\psi\|_\infty, \quad \forall t \geq \tau,\ \forall \varphi,\psi \in C^n.$$

- Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $e^{-\varepsilon(k\omega-\tau)} \leq \frac{1}{2}$ e defina-se $P : C^n \to C^n$ por $P(\varphi) = x_\omega(\varphi)$. Tem-se

$$P^K(\varphi) - P^k(\psi)\| = \|x_{k\omega}(\varphi) - x_{k\omega}(\psi)\| \leq \frac{1}{2}\|\varphi - \psi\|,$$

donde P^k é uma contracção no espaço de Banach C^n. Logo P^k possui um único ponto fixo $\varphi^* \in C^n$ i.e., $P^k(\varphi^*) = \varphi^*$.

- Como $P^k(P(\varphi^*)) = P(P^k(\varphi^*)) = P(\varphi^*)$, então

$$P(\varphi^*) = \varphi^* \Leftrightarrow x_\omega(\varphi^*) = \varphi^*$$

e $x(t, 0, \varphi^*)$ é a solução periódica de (3).

Modelo de rede neuronal do tipo Hopfield [1]

$$x_i'(t) = -b_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)f_j(x_j(t-\tau_{ij}(t))) + I_i(t) \quad (6)$$

[1] Q. Zhang, X. Wei, J. Xu, *Chaos Solitons & Fractals* 39 (2009) 1152-1157.

Modelo de rede neuronal do tipo Hopfield [1]

$$x_i'(t) = -b_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)f_j(x_j(t-\tau_{ij}(t))) + I_i(t) \quad (6)$$

- $b_i, a_{ij}, b_{ij} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $\tau_{ij}(t) \geq 0$ são contínuas;
- $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de Lipschitz com constante l_j;

[1] Q. Zhang, X. Wei, J. Xu, *Chaos Solitons & Fractals* 39 (2009) 1152-1157.

Modelo de rede neuronal do tipo Hopfield [1]

$$x_i'(t) = -b_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)f_j(x_j(t-\tau_{ij}(t))) + I_i(t) \quad (6)$$

- $b_i, a_{ij}, b_{ij} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $\tau_{ij}(t) \geq 0$ são contínuas;
- $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de Lipschitz com constante l_j;
- $b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} l_j \left(|a_{ij}(t)| + |b_{ij}(t)| e^{\int_{t-\tau_{ij}}^{t} \lambda(s)ds} \right) > \lambda(t)$
  e $\int_0^t \lambda(s)ds \geq \varepsilon t$, para algum $\varepsilon > 0$ e alguma função $\lambda(t)$.
  Então o sistema (6) é globalmente exponencialmente estável.

[1] Q. Zhang, X. Wei, J. Xu, *Chaos Solitons & Fractals* 39 (2009) 1152-1157.

Modelo de rede neuronal do tipo Hopfield [1]

$$x_i'(t) = -b_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)f_j(x_j(t-\tau_{ij}(t))) + I_i(t) \quad (6)$$

- $b_i, a_{ij}, b_{ij} : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $\tau_{ij}(t) \geq 0$ são contínuas;
- $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de Lipschitz com constante l_j;
- $b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} l_j \left(|a_{ij}(t)| + |b_{ij}(t)| e^{\int_{t-\tau_{ij}}^{t} \lambda(s)ds} \right) > \lambda(t)$
  e $\int_0^t \lambda(s)ds \geq \varepsilon t$, para algum $\varepsilon > 0$ e alguma função $\lambda(t)$.
  Então o sistema (6) é globalmente exponencialmente estável.
- Em [1], assume-se um conjunto de hipóteses diferentes para se obter a mesma conclusão.

[1] Q. Zhang, X. Wei, J. Xu, *Chaos Solitons & Fractals* 39 (2009) 1152-1157.

No caso em que o modelo periódico:

$$x_i'(t) = -b_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)f_j(x_j(t-\tau_{ij}(t))) + I_i(t) \quad (7)$$

[2] M. Tan, Y. Tan, *Appl. Math. Model.* 33 (2009) 373-385.

No caso em que o modelo periódico:

$$x_i'(t) = -b_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)f_j(x_j(t-\tau_{ij}(t))) + I_i(t) \quad (7)$$

- $b_i, a_{ij}, b_{ij} : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $\tau_{ij}(t) \geq 0$ são contínuas e ω-periódicas;
- $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de Lipschitz com constante l_j;

[2] M. Tan, Y. Tan, *Appl. Math. Model.* 33 (2009) 373-385.

No caso em que o modelo periódico:

$$x_i'(t) = -b_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)f_j(x_j(t-\tau_{ij}(t))) + I_i(t) \quad (7)$$

- $b_i, a_{ij}, b_{ij} : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $\tau_{ij}(t) \geq 0$ são contínuas e ω-periódicas;
- $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de Lipschitz com constante l_j;
- $b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} l_j(|a_{ij}(t)| + |b_{ij}(t)|) > 0, \qquad \forall t \in [0,\omega].$

  Então (7) possui uma solução ω-periódica globalmente exponencialmente estável.

[2] M. Tan, Y. Tan, *Appl. Math. Model.* 33 (2009) 373-385.

No caso em que o modelo periódico:

$$x_i'(t) = -b_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)f_j(x_j(t-\tau_{ij}(t))) + I_i(t) \quad (7)$$

- $b_i, a_{ij}, b_{ij} : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $\tau_{ij}(t) \geq 0$ são contínuas e ω-periódicas;
- $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de Lipschitz com constante l_j;
- $b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} l_j(|a_{ij}(t)| + |b_{ij}(t)|) > 0, \quad \forall t \in [0,\omega].$

  Então (7) possui uma solução ω-periódica globalmente exponencialmente estável.
- Em [2] assume-se a hipótese adicional

$$b_i(t) - \sum_{i=1}^{n} l_j(|a_{ij}(t)| + |b_{ij}(t)|) > 0, \quad \forall t \in [0,\omega],$$

[2] M. Tan, Y. Tan, *Appl. Math. Model.* 33 (2009) 373-385.

Modelo tipo Cohen-Grossberg BAM [3]

$$\begin{aligned} x_i'(t) &= -a_i(x_i(t))\left[b_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t) f_j(y_j(t-\tau_{ij}(t))) - I_i(t)\right] \\ y_j'(t) &= -c_j(y_j(t))\left[d_j(y_j(t)) - \sum_{i=1}^{n} c_{ji}(t) g_i(x_i(t-\sigma_{ji}(t))) - I_j(t)\right] \end{aligned} \tag{8}$$

$i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

Modelo tipo Cohen-Grossberg BAM [3]

$$
\begin{aligned}
x_i'(t) &= -a_i(x_i(t))\left[b_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t) f_j(y_j(t-\tau_{ij}(t))) - I_i(t)\right] \\
y_j'(t) &= -c_j(y_j(t))\left[d_j(y_j(t)) - \sum_{i=1}^{n} c_{ji}(t) g_i(x_i(t-\sigma_{ji}(t))) - I_j(t)\right]
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

- $\exists \underline{a}_i, \overline{a}_i, \underline{c}_j, \overline{c}_j > 0$, $\forall t \in [0, +\infty)$:

$$0 < \underline{a}_i \leq a_i(t) \leq \overline{a}_i, \qquad 0 < \underline{c}_j \leq c_j(t) \leq \overline{c}_j;$$

Modelo tipo Cohen-Grossberg BAM [3]

$$
\begin{aligned}
x_i'(t) &= -a_i(x_i(t))\left[b_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t) f_j(y_j(t-\tau_{ij}(t))) - I_i(t)\right] \\
y_j'(t) &= -c_j(y_j(t))\left[d_j(y_j(t)) - \sum_{i=1}^{n} c_{ji}(t) g_i(x_i(t-\sigma_{ji}(t))) - I_j(t)\right]
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$.

- $\exists \underline{a}_i, \overline{a}_i, \underline{c}_j, \overline{c}_j > 0$, $\forall t \in [0, +\infty)$:

$$0 < \underline{a}_i \le a_i(t) \le \overline{a}_i, \qquad 0 < \underline{c}_j \le c_j(t) \le \overline{c}_j;$$

- $\exists \beta_i, \delta_j > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$:

$$\frac{b_i(u) - b_i(v)}{u - v} \ge \beta_i, \qquad \frac{d_j(u) - d_j(v)}{u - v} \ge \delta_j;$$

- $f_j, g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de Lipschitz com constante F_j e G_i respectivamente;

[3] K. Liu, Z. Zhang, L. Wang, *Abstract and Applied Analysis* ID805846 (2012).

- $f_j, g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de Lipschitz com constante F_j e G_i respectivamente;
- $\tau_{ij}(t) \geq 0$, $\sigma_{ji}(t) \geq 0$, $a_{ij}(t)$, $c_{ji}(t)$, são contínuas e ω-periódicas.

[3] K. Liu, Z. Zhang, L. Wang, *Abstract and Applied Analysis* ID805846 (2012).

- $f_j, g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de Lipschitz com constante F_j e G_i respectivamente;
- $\tau_{ij}(t) \geq 0$, $\sigma_{ji}(t) \geq 0$, $a_{ij}(t)$, $c_{ji}(t)$, são contínuas e ω-periódicas.
-

$$\begin{cases} \underline{a}_i\beta_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \overline{c}_j F_j |a_{ij}(t)| > 0, \\ \\ \underline{c}_j\delta_j - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i G_i |c_{ji}(t)| > 0, \end{cases} \qquad \forall t \in [0, \omega]. \tag{9}$$

Então (8) possui uma solução periódica que é globalmente exponencialmente estável.

[3] K. Liu, Z. Zhang, L. Wang, *Abstract and Applied Analysis* ID805846 (2012).

- $f_j, g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de Lipschitz com constante F_j e G_i respectivamente;
- $\tau_{ij}(t) \geq 0$, $\sigma_{ji}(t) \geq 0$, $a_{ij}(t)$, $c_{ji}(t)$, são contínuas e ω-periódicas.
-

$$\begin{cases} \underline{a}_i \beta_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \overline{c}_j F_j |a_{ij}(t)| > 0, \\ \\ \underline{c}_j \delta_j - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i G_i |c_{ji}(t)| > 0, \end{cases} \quad \forall t \in [0, \omega]. \tag{9}$$

Então (8) possui uma solução periódica que é globalmente exponencialmente estável.

- Em [3] assume-se uma hipótese mais forte do que (9) para se obter a mesma conclusão.

[3] K. Liu, Z. Zhang, L. Wang, *Abstract and Applied Analysis* ID805846 (2012).

Muito obrigado