Estabilidade global assimptótica para sistemas de equações diferenciais retardadas com aplicação a modelos de redes neuronais

José J. Oliveira
Universidade do Minho (CMAT)

Referências importantes

[1] T. Faria, Asymptotic stability for delayed logistic type equations, *Math. Comput. Modelling*, **43** (2006), 433-445

[2] T. Faria, José J. Oliveira, Local and global stability for n-species Lotka-Volterra systems with distributed delays and instantaneous feedbacks, pre-print

[3] Y. Chen, Global asymptotic stability of delayed Cohen-Grossberg neural networks, *IEEE Trans. Circuits Syst.* vol.53, no.2, (2006), 351-357

[4] M. Wang, L. Wang, Global asymptotic robust stability of static neural network models with S-type distributed delays, *Math. Comput. Modelling*, **44** (2006), 218-222

[5] L. Wang, X. Zou, Stability and bifurcation of bidirectional associative memory neural networks with delayed self-feedback, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol.15, no.7, (2005), 2145-2159

Notação

- $n \in \mathbb{N}$, $N(1,n) := \{1,\ldots,n\}$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|x|_\infty = \max\{|x_i| : i \in N(1,n)\};$$

- $\tau \in \mathbb{R}^+$, $C_n := C([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$

$$\|\varphi\| = \sup_{\theta\in[-\tau,0]} |\varphi(\theta)|_\infty;$$

- EDF no espaço de fase C_n

$$x'(t) = \dot{x}(t) = f(t,x_t)$$

$x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-\tau,0]$

- Um ponto de equilíbrio $x^* \in \mathbb{R}^n$ diz-se globalmente assimptoticamente estável se é estável e uma qualquer outra solução $x(t)$ verifica

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = x^*;$$

- $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diz-se uma **M-matriz invertível** se $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$ e Re $\sigma(A) > 0$.

Modelos para redes neuronais

Hopfield com atrasos

$$\dot{x}_i(t) = -b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t-\tau_{ij})) + J_i, \quad (1)$$

$i \in N(1,n)$

Cohen-Grossberg com atrasos

$$\dot{x}_i(t) = -k_i(x_i(t)) \left[b_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{p=1}^{P} a_{ij}^{(p)} f_j(x_j(t-\tau_{ij}^{(p)})) + J_i \right], \quad (2)$$

$i \in N(1,n)$

De memória associativa bidireccional com atrasos

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + c_{ii} g_i(x_i(t-d_{ii})) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(y_j(t-\tau_{ij})) + I_i \\ \\ \dot{y}_i(t) = -y_i(t) + l_{ii} f_i(y_i(t-m_{ii})) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_j(x_j(t-\sigma_{ij})) + J_i \end{cases} \quad (3)$$

$i \in N(1,n)$.

Modelo estático com atrasos distribuidos do tipo S

$$\dot{x}_i(t) = -b_i x_i(t) + f_i \left(\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \int_{-\tau}^{0} x_j(t+\theta) d\eta_{ij}(\theta) + J_i \right) \quad (4)$$

$i \in N(1,n)$

Situação geral

$$\dot{x}_i(t) = -k_i(x_i(t)) \left[b_i(x_i(t)) + f_i(x_t) \right], \quad i = 1, \dots, n$$

$$\dot{x}_i(t) = -k_i(x_i(t))\left[b_i(x_i(t)) + f_i(x_t)\right], \quad (5)$$

$k_i : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas,

(A1) $\exists \beta_i > 0, \forall u, v \in \mathbb{R}, u \neq v$:

$$(b_i(u) - b_i(v))/(u - v) \geq \beta_i;$$

[Por exemplo, $b_i(u) = \beta_i u$.]

(A2) $f_i : C_n \to \mathbb{R}$ são funções de Lipschitz com constantes de Lipschitz l_i.

$$\dot{x}_i(t) = -k_i(x_i(t))\left[b_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_{j,t})\right] \quad (6)$$

$$\dot{x}_i(t) = -k_i(x_i(t))\left[b_i(x_i(t)) + f_i\left(\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \int_{-\tau}^{0} x_i(t+\theta) d\eta_{ij}(\theta)\right)\right] \quad (7)$$

Principal Objectivo

Obter condições suficientes para a existência e estabilidade global assimptótica de um ponto de equilíbrio do sistema (5).

1. Resultado principal

Considere-se o sistema de equações diferenciais na forma geral

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_t), \quad t \geq 0, \tag{8}$$

$i \in N(1,n) = \{1, \ldots, n\}$,
$C_n := C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$
$f_i : C_n \to \mathbb{R}$ são contínuas.

Hypotheses:
(H1) f_i limitada nos limitados de C_n;
(H2) $\forall \varphi \in C_n, \forall i \in N(1,n)$,

$$\|\varphi\| = |\varphi(0)|_\infty = |\varphi_i(0)| > 0 \Rightarrow \varphi_i(0) f_i(\varphi) < 0.$$

(H2)$\Rightarrow$ $x \equiv 0$ é o único equilíbrio

Teorema 1
Assuma-se **(H1)** e **(H2)**.
Então $x \equiv 0$ é globalmente assimptoticamente estável.

Lema
Assuma-se **(H2)**.
Então todas as soluções de (8) estão definidas e são limitadas em $[-\tau, +\infty)$.

Dem.
Seja $x(t)$ solução de (8) em $[-\tau, a)$, $a \geq 0$ verificando $|x(t)|_\infty \leq K$, $t \in [-\tau, 0]$.
Suponha-se que existe $t_1 \in [0, a)$ tal que $|x(t_1)| > K$.

$$T := \min \left\{ t \in [0, t_1] : \max_{s \in [0, t_1]} |x(s)|_\infty = |x(t)|_\infty \right\}$$

$\|x_T\| = |x_T(0)|_\infty > 0$
Seja $i \in N(1, n)$ tal que $|x(T)|_\infty = |x_i(T)|$.
Suponha-se que $x_i(T) > 0$.

$\dot{x}_i(T) \geq 0$

Por**(H2)**,
$x_i(T) f_i(T) < 0 \Rightarrow \dot{x}_i(T) = f_i(x_T) < 0$

Pelo teorema de continuação de soluções, $a = +\infty$ e $x(t)$ é limitada.$\square$

Dem. (Teorema 1)
Seja $x(t)$ uma solução de (8)

•**(H2)** $\Rightarrow x(t)$ está definida e é limitada em $[-\tau, +\infty)$

$$-v_i = \liminf_{t\to+\infty} x_i(t), \quad u_i = \limsup_{t\to+\infty} x_i(t)$$

$$v = \max_i\{v_i\}, \quad u = \max_i\{u_i\},$$

$u, v \in \mathbb{R}$, $-v \leq u$.
É necessário provar que $\max(u, v) = 0$.
Suponha-se que $|v| \leq u$ ($|u| \leq v$ é análogo).
Seja $i \in N(1, n)$ tal que $u_i = u$.

$\epsilon > 0, \exists T > 0 : \|x_t\| < u + \epsilon$, $t \geq T$

•Prove-se que existe $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$t_k \nearrow +\infty, \quad x_i(t_k) \to u, \quad \text{and} \quad f_i(x_{t_k}) \to 0$$

Caso 1
Se $x_i(t)$ é monótona para $t \geq T_0 \geq T$. Tem-se

$$\lim_{t\to+\infty} x_i(t) = u$$

e, para $t \geq T_0$, $\dot{x}_i(t) \leq 0$ ou $\dot{x}_i(t) \geq 0$.
Se $\dot{x}_i(t) \leq 0$, isto é, $f_i(x_t) \leq 0$ para $t \geq T_0$, então

$$\limsup_{t \to +\infty} f_i(x_t) = c \leq 0.$$

Se $c < 0$, então existe $t_0 > 0$ tal que $f_i(x_t) < c/2$, $t \geq t_0$, donde

$$x_i(t) \leq x_i(t_0) + \frac{c}{2}(t - t_0) \to -\infty,$$

quando $t \to +\infty$. Consequentemente $c = 0$.
Caso 2
O caso contrário é imediato.

•**(H1)** $\Rightarrow \dot{x}(t)$ é limitada $\Rightarrow \{x_{t_k}\}$ é limitado e equicontínuo $\Rightarrow \exists \varphi \in C_n$

$$x_{t_k} \to \varphi \text{ em } C_n$$

com $\|\varphi\| \leq u$, $\varphi_i(0) = u$ e $f_i(\varphi) = 0$

(H2) $\Rightarrow u = 0.\square$

2. Situação Geral

$$\dot{x}_i(t) = -k_i(x_i(t))\left[b_i(x_i(t)) + f_i(x_t)\right], \qquad (9)$$

Teorema 2
Assuma-se **(A1)**, **(A2)**, e $k_i : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas.
Se $\beta_i > l_i, \forall i$, então (9) possui um ponto de equilíbrio $x^* \in \mathbb{R}^n$, que é globalmente assimptoticamente estável.

Dem. (ideia)
•Existência de ponto de equilíbrio

$$\begin{array}{rccl} H: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & (b_1(x_1) + f_1(x), \ldots, b_n(x_n) + f_n(x)) \end{array}$$

Prova-se que H é um homeomorfismo e consequentemente existe $x^* \in \mathbb{R}^n$, $H(x^*) = 0$, i.e. x^* é ponto de equilíbrio.

•Por translação, pode assumir-se $x^* = 0$, $b_i(0) + f_i(0) = 0, \forall i$.

• $\beta_i > l_i, \forall i \Rightarrow$**(H1)** e **(H2)**

(H1) é imediato porque as funções são contínuas.

Seja $\varphi \in C_n$ tal que $\|\varphi\| = |\varphi(0)| > 0$ e considere-se $i \in N(1,n)$ tal que $|\varphi_i(0)| = \|\varphi\|$.
Se $\varphi_i(0) > 0$, então

$$-k_i(\varphi_i(0))(b_i(\varphi_i(0)) + f_i(\varphi))$$

$$= -k_i(\varphi_i(0))[(b_i(\varphi_i(0)) - b_i(0)) + (f_i(\varphi) - f_i(0))]$$

$$\leq -k_i(\varphi_i(0))(\beta_i \varphi_i(0) - l_i\|\varphi\|)$$

$$= -k_i(\varphi_i(0))(\beta_i - l_i)\|\varphi\| < 0.$$

Análogo para $\varphi_i(0) < 0$. Consequentemente, (9) verifica **(H2)**.

Pelo Teorema 1, tem-se o resultado.$\square$

3. Modelo de Cohen Grossberg

$$\dot{x}_i(t) = -k_i(x_i(t)) \left[b_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_{j,t}) \right] \qquad (10)$$

- $k_i : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas
- Assume-se **(A1)**
- $f_{ij} : C_1 \to \mathbb{R}$ Lipchitz com constante de Lipchitz l_{ij}

$$B = diag(\beta_1, \ldots, \beta_n), \quad A = [l_{ij}], \quad N = B - A$$

Teorema 3
Se N é uma M-matriz invertível, então existe um único ponto de equilíbrio de (10), que é globalmente assimptoticamente estável.

Dem. (ideia)
- N M-matriz invertível $\Rightarrow$

existe $d = (d_1, \ldots, d_n) > 0$ tal que $Nd > 0$,

$$\beta_i d_i - \sum_{j=1}^{n} l_{ij} d_j > 0, \quad \forall i \in N(1, n). \qquad (11)$$

- Com a mudança de variável

$$y_i(t) = d_i^{-1} x_i(t)$$

o sistema (10) vem na forma

$$\dot{y}_i(t) = -\bar{k}_i(y_i(t))[\bar{b}_i(y_i(t)) + \bar{f}_i(y_t)],$$

onde

$$\bar{f}_i(\varphi) = d_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(d_j\varphi_j), \quad \varphi \in C_n$$

$$\bar{b}_i(u) = d_i^{-1} b_i(d_i u), \quad \bar{k}_i = k_i(d_i u), \quad u \in \mathbb{R}$$

• $\bar{f}_i$ verifica **(A2)**, $i \in N(1, n)$:

$$|\bar{f}_i(\varphi) - \bar{f}_i(\psi)| \leq \left(d_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} l_{ij} d_j \right) \|\varphi - \psi\|$$

e $\bar{b}_i$ verifica **(A1)** com (ver (11)),

$$\bar{\beta}_i = \beta_i > l_i := d_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} l_{ij} d_j.$$

O resultado é consequência do Teorema 2.$\square$

Exemplo 1.

$$\dot{x}_i(t) = -k_i(x_i(t)) \left[b_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{p=1}^{P} a_{ij}^{(p)} f_j(x_j(t - \tau_{ij}^{(p)})) + J_i \right] \quad (12)$$

• $J_i, a_{ij}^{(p)}, \tau \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau_{ij}^{(p)} \leq \tau$, $i, j \in N(1, n)$, $p \in N(1, P)$
• $k_i : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas
• Assume-se **(A1)**
• $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz com constante de Lipschitz l_i

$$N := diag(\beta_1, \ldots, \beta_n) - [l_{ij}], \text{ with } l_{ij} = \sum_{p=1}^{P} |a_{ij}^{(p)}| l_j$$

Corolário

Se N é uma M-matriz invertível, então existe um único ponto de equilíbrio de (12) que é globalmente assimptoticamente estável.

Nota

Em [Y. Chen, 2005], o mesmo resultado foi obtido com as seguintes hipóteses adicionais:

(i) $\exists \underline{k}_i, \bar{k}_i > 0 : \underline{k}_i \leq k_i(u) \leq \bar{k}_i, \quad \forall u, \forall i;$

(ii) $\underline{N} := diag(\beta_1, \cdots, \beta_n)\underline{K} - [l_{ij}]\overline{K}$ M-matriz invertível, para
$\underline{K} = diag(\underline{k}_1, \ldots, \underline{k}_n)$, $\overline{K} = diag(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n)$.

(ii) $\Rightarrow N$ M-matriz invertível

4. Modelos de redes neuronais com atrasos discretos dependentes do tempo

$$\dot{x}_i(t) = -k_i(x_i(t)) \left[b_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{p=1}^{P} h_{ij}^{(p)}(x_j(t - \tau_{ij}^{(p)}(t))) \right] \quad (13)$$

- $\tau_{ij}^{(p)} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ limitadas e contínuas;
- $k_i : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas;
- Assume-se **(A1)**
- $h_{ij}^{(p)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz com constante de Lipschitz l_{ij}^p

$$N := B - [l_{ij}], \text{ with } l_{ij} = \sum_{p=1}^{P} l_{ij}^{(p)}$$

Teorema 4

Se N é uma M-matriz invertível, então existe um único ponto de equilíbrio de (13) que é globalmente assimptoticamente estável.

Exemplo 2.

Modelo para redes neuronais com memória associativa bidireccional

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + g_i(x_i(t - d_i(t))) + \sum_{j=1}^{m} f_{ij}(y_j(t - \tau_{ij}(t))) \\ \\ \dot{y}_j(t) = -y_j(t) + f_j(y_j(t - m_j(t))) + \sum_{i=1}^{n} g_{ji}(x_i(t - \sigma_{ji}(t))) \end{cases} \tag{14}$$

$i \in N(1, n), j \in N(1, m)$
τ_{ij}, σ_{ji} : $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ continuas
$g_i, f_j, f_{ij}, g_{ji} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz com constante de Lipschit G_i, F_j, F_{ij} e G_{ij}, respectivamente

$$N := \begin{bmatrix} I_n - G_d & -F \\ \\ -G & I_m - F_d \end{bmatrix}_{(n+m)\times(n+m)}$$

$$G_d = diag(G_1, \ldots, G_n), \quad F_d = diag(F_1, \ldots, F_m),$$

$$G = [G_{ji}]_{m\times n}, \quad F = [F_{ij}]_{n\times m}$$

Corolário

Se N é uma M-matriz invertível, então existe um único equilíbrio de (14) que é globalmente assimptoticamente estável.

Nota
O modelo (3), estudado em [L.Wang and X.Zou, 2005], é uma subclass de (14).

5. Modela estático para redes neuronais com atrasos distribuídos do tipo S

$$\dot{x}_i(t) = -k_i(x_i(t))\left[b_i(x_i(t)) + f_i\left(\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\int_{-\tau}^{0}x_j(t+\theta)d\eta_{ij}(\theta) + J_i\right)\right] \quad (15)$$

•$\tau > 0, J_i, \omega_{ij} \in \mathbb{R}$

•$k_i : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas

•Assume-se **(A1)**

•$f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz com constante de Lipschitz l_i

•$\eta_{ij} : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}$ são funções de variação limitada normalizadas

$$M = diag(\beta_1, \ldots, \beta_n) - [l_i|\omega_{ij}|]$$

Teorema 5

Se M é uma M-matriz invertível, então existe um único ponto de equilíbrio de (15) que é globalmente assimptoticamente estável.

Exemplo 3.

$$\dot{x}_i(t) = -b_i x_i(t) + f_i\left(\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \int_{-\tau}^{0} x_j(t+\theta)d\eta_{ij}(\theta) + J_i\right) \qquad (16)$$

- $b_i > 0$, $J_i, \omega_{ij} \in \mathbb{R}$
- $\eta_{ij} : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}$ são funções de variação limitada normalizadas
- $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz com constante Lipschitz l_i

$$N = diag(b_1, \ldots, b_n) - [l_i|\omega_{ij}|]$$

Corolário

Se N é uma M-matriz invertível, então existe um único ponto de equilíbrio de (16) que é globalmente assimptoticamente estável.

Nota

Em [M. Wang and L. Wang, 2006], a mesma conclusão foi obtida com η_{ij} funções de variação limitada <u>não</u> <u>decrescentes</u> em $[-\tau, 0]$.