Equações Diferenciais Funcionais Retardadas Lineares Autónomas

José Joaquim Martins Oliveira
Universidade do Minho

C_0-Semigrupos

Definição (C_0-Semigrupo)
X espaço de Banach, $(T(t))_{t\geq 0}$ família de operadores lineares contínuos em X.
$(T(t))_{t\geq 0}$ diz-se C_0-semigrupo em X se

(S_1) $T(0) = I$;

(S_2) $T(t+r) = T(t)T(r),\ \forall t, r \geq 0$;

(S_3) $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x,\ \forall x \in X$.

Definição (Gerador Infinitesimal)

$$\begin{array}{rccc} A: & D(A) & \to & X \\ & x & \mapsto & \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t} \end{array},$$

onde $D(A) = \left\{ x \in X : \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$

Propriedades

- $\exists M \geq 1, \omega \geq 0: \ \|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ t \geq 0;$

- $\forall x \in D(A), \forall t \geq 0$

  $T(t)x \in D(A)$ e $\dfrac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax;$

- A é operador linear fechado;

- $D(A)$ é denso em X.

Teorema

$$e^{\sigma_P(A)t} \subseteq \sigma_P(T(t)) \subseteq e^{\sigma_P(A)t} \cup \{0\}, \forall t \geq 0$$

Lema
Sejam $w > 0$ e ρ o raio espectral de $T(w)$.
Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é tal que $\rho \leq e^{\alpha w}$, então
$\forall \gamma > 0, \exists K \geq 1:$

$$\|T(t)\phi\| \leq Ke^{(\alpha+\gamma)t}\|\phi\|, \forall t \geq 0, \forall \phi \in X$$

Teorema 1
Sejam $t > 0$, $\lambda_0 \in \sigma_P(A)$ tais que $\mu_0 = e^{\lambda_0 t}$ é pólo de ordem m da resolvente de $T(t)$.
Então λ_0 é um pólo da resolvente de A de ordem $k \leq m$.

Teorema 2
X espaço de Banach e $T : X \to X$ compacto.
Então qualquer $\lambda_0 \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ é pólo da resolvente de T de ordem

$$\delta(\lambda_0 I - T) = \alpha(\lambda_0 I - T).$$

Teorema 3
X espaço de Banach e $T : X \to X$ operador linear fechado.
Se λ_0 é pólo da resolvente de T de ordem m, então $\lambda_0 \in \sigma_P(T)$ e

$$X = N(\lambda_0 I - T)^m \oplus Im(\lambda_0 I - T)^m,$$

onde $m = \alpha(\lambda_0 I - T) = \delta(\lambda_0 I - T)$.

Equações Diferenciais Funcionais Retardadas (EDFR)

Notações:

- $r \in \mathbb{R}^+$

- $C := C([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$

- $\sigma \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}_0^+,\ x \in C([\sigma - r, \sigma + A]; \mathbb{R}^n)$
  $t \in [\sigma, \sigma + A],\ x_t(\theta) := x(t + \theta),\ \theta \in [-r, 0]$
  $$x_t \in C$$

- $\mathbb{R}^{n^*} := \{[x_1 \dots x_n] : x_i \in \mathbb{R}\}$

- $C^* := C([0, r]; \mathbb{R}^{n^*})$

- $y \in C([\sigma - A, \sigma + r]; \mathbb{R}^{n^*})$
  $\tau \in [\sigma - A, \sigma],\ y^\tau(s) := y(s + \tau),\ s \in [0, r]$
  $$y^\tau \in C^*$$

Definição (EDFR)

$D \subseteq \mathbb{R} \times C$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ aplicação

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{1}$$

Definição (Solução)

$\sigma \in \mathbb{R}$, $A > 0$ ou $A = +\infty$, $\phi \in C$

$x \in C([\sigma - r, \sigma + A); \mathbb{R}^n)$ é solução de (1) em $[\sigma - r, \sigma + A)$ se

$$\begin{cases} (t, x_t) \in D \\ \dot{x}(t) = f(t, x_t) \end{cases}, \quad \forall t \in [\sigma, \sigma + A)$$

Representa-se por $x(\sigma, \phi, f)$ uma solução do PVI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t) \\ x_\sigma = \phi \in C \quad \leftarrow \text{condição inicial em } t = \sigma \end{cases} \tag{2}$$

Teoremas Básicos da Teoria de EDFR

Teorema (Existência de Solução)
$\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ aberto, $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$
Para qualquer $(\sigma, \phi) \in \Omega$, o PVI (2) tem solução.

Teorema (Unicidade de Solução)
$\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ aberto, $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$
$(s, \psi) \mapsto f(s, \psi)$ contínua
Se f é localmente lipschitziana em ψ, então existe uma única solução do PVI (2) em $[\sigma - r, \sigma + A)$, para algum $A > 0$.

EDFR Lineares Autónomas

Definição

$L \in \mathcal{L}(C; \mathbb{R}^n)$

$$\dot{x}(t) = L(x_t) \tag{3}$$

Exemplo

$$\dot{x}(t) = -\frac{\pi}{2} \underbrace{x(t-1)}_{x_t(-1)}$$

$r = 1$; $C = C([-1, 0]; \mathbb{R})$;
$L(\phi) = -\frac{\pi}{2}\phi(-1)$

Pela representação de Riesz, existe

$$\begin{array}{rccl} \eta: & [-r, 0] & \to & M_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ & \theta & \mapsto & \Big[\eta_{ij}(\theta)\Big]_{i,j} \end{array},$$

tal que

$$L(\phi) = \int_{-r}^{0} \phi(\theta) d\eta(\theta) := \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\, \phi(\theta).$$

- Como a equação (3) é autónoma, pode-se fixar condições iniciais dadas em $\sigma = 0$

- L linear $\Rightarrow$ L lipschitziana $\Rightarrow$ $\exists^1$ solução de (3) em $[-r, \alpha)$ que passa em $(0, \phi)$, com $\phi \in C$

$$x(\phi) := x(0, \phi, L)$$

- $x(\phi)$ é extensível a $[-r, +\infty)$

Definição (Operadores Solução)
$t \in \mathbb{R}_0^+$

$$\begin{array}{rccc} T(t): & C & \to & C \\ & \phi & \mapsto & x_t(\phi) \end{array}$$

Propriedades

1. $(T(t))_{t\geq 0}$ é C_0-semigrupo em C

2. $T(t)$ é compacto para $t \geq r$

Dem.

- $\begin{cases} T(0) = I \\ T(t+r) = T(t)T(r), \quad \forall t, s \geq 0 \end{cases}$

- $$\begin{cases} \text{(a) Se } t+\theta \leq 0, \\ \qquad \begin{aligned} T(t)\phi(\theta) &= x_t(\phi)(\theta) = x(\phi)(t+\theta) \\ &= \phi(t+\theta); \end{aligned} \\ \\ \text{(b) Se } t+\theta \geq 0, \\ \qquad \begin{aligned} T(t)\phi(\theta) &= x_t(\phi)(\theta) = x(\phi)(t+\theta) \\ &= \phi(0) + \int_0^{t+\theta} L(x_s(\phi))ds \\ &= \phi(0) + \int_0^{t+\theta} L(T(s)\phi)ds. \end{aligned} \end{cases}$$

$$\|T(t)\phi\| \leq \|\phi\| + \int_0^t l\|T(s)\phi\|ds$$

$$\|T(t)\phi\| \leq \|\phi\|e^{tl}, \forall \phi \in C, \forall t \geq 0$$

- (S_3) $\lim_{t\to 0^+} T(t)\phi = \phi, \ \forall \phi \in C$

- $\left.\begin{array}{l} S \subseteq C \text{ limitado} \\ t \geq r \end{array}\right\} \Rightarrow T(t)S$ equi-contínuo

$$\begin{array}{rccl} A: & D(A) \subseteq C & \to & C \\ & \phi & \mapsto & \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{T(t)\phi - \phi}{t} \end{array}$$

$$D(A) = \{\phi \in C : \text{existe } \dot{\phi} \in C \text{ e } \dot{\phi}(0) = L(\phi)\}$$

$$A\phi(\theta) = \begin{cases} \dfrac{d\phi}{d\theta}(\theta), & -r \leq \theta < 0 \\ \\ L(\phi), & \theta = 0 \end{cases}$$

$\theta \in [-r, 0)$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} (T(t)\phi(\theta) - \phi(\theta)) =$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} (\phi(t + \theta) - \phi(\theta)) = \frac{d\phi}{d\theta}(\theta^+)$$

$\theta = 0$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} (T(t)\phi(0) - \phi(0)) =$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t L(T(s)\phi) ds$$

$$= L\left(\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)\phi ds \right)$$

$$= L(T(0)\phi) = L(\phi).$$

Teorema

$$\sigma(A) = \sigma_P(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\Delta(\lambda)) = 0\}$$

onde

$$\Delta(\lambda) = \lambda I_n - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta}[d\eta(\theta)]$$

Dem.

$$\lambda \in \sigma_P(A) \Leftrightarrow \exists \phi \in D(A)\backslash\{0\} : A\phi = \lambda\phi$$

$$\Leftrightarrow \exists \phi \in C^1\backslash\{0\} : \begin{cases} \dot{\phi}(\theta) = \lambda\phi(\theta) \\ \\ \dot{\phi}(0) = L(\phi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\} : \begin{cases} \phi(\theta) = e^{\lambda\theta} b \\ \\ \lambda b = \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)] e^{\lambda\theta} b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\} : \underbrace{\left(\lambda I_n - \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)] e^{\lambda\theta}\right)}_{\Delta(\lambda)} b = 0$$

$$\Leftrightarrow \det(\Delta(\lambda)) = 0$$

$$\lambda \notin \sigma_P(A) \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} \exists(\lambda I - A)^{-1} \\ (\lambda I - A)^{-1} \text{ é fechado} \\ Im(\lambda I - A) = C \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda I - A)^{-1}\text{é contínua}$$

logo $\lambda \in \rho(A)$

Para demonstrar que $Im(\lambda I - A) = C$
$\psi \in C$

$$(\lambda I - A)\phi = \psi$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda\phi - \dot{\phi} = \psi, \text{ com } \phi \in D(A)$$

$$\Updownarrow$$

$$\Delta(\lambda)b = -\psi(0) + \int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta} e^{\lambda(\theta-\xi)}[d\eta(\theta)]\psi(\xi)d\xi,$$

com $b = \phi(0)$

Teorema

$\lambda \in \sigma(A)$

$$C = \overbrace{N(\lambda I - A)^k}^{M_\lambda(A):=} \oplus Im(\lambda I - A)^k$$

onde $k = \alpha(\lambda I - A) = \delta(\lambda I - A)$

Dem. $t \geq r$

$\lambda \in \sigma_P(A) \Rightarrow e^{\lambda t} \in \sigma_P(T(t))$

$T(t)$ compacto $\Rightarrow e^{\lambda t}$ é pólo da resolvente de $T(t)$ de ordem $m \Rightarrow \lambda$ é pólo da resolvente de A de ordem $k \leq m$

O resultado sai do facto de A ser fechado.

Propriedades

- $AM_\lambda(A) \subseteq M_\lambda(A)$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \{\lambda \in \sigma(A) : \text{Re}\lambda \geq \alpha\}$ é finito

- $\dim(M_\lambda(A)) < +\infty$, $\forall \lambda \in \sigma(A)$

$\lambda \in \sigma(A)$

$$C = M_\lambda(A) \oplus Im(\lambda I - A)^k$$

$\Phi_\lambda := (\phi_1^\lambda, \cdots, \phi_{d_\lambda}^\lambda)$ base de $M_\lambda(A)$

Existe $B_\lambda = \left[b_{i,j}\right] \in \mathbb{C}^{d_\lambda \times d_\lambda}$ tal que

$$A\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda$$

ou seja

$$\boxed{\dot{\Phi}_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda}$$

$$\Phi_\lambda(\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda \theta}, \ \ -r \le \theta \le 0$$

Pelas propriedades dos C_0-semigrupos

$$\frac{d}{dt}\Big(T(t)\Phi_\lambda\Big) = AT(t)\Phi_\lambda = \Big(T(t)\Phi_\lambda\Big)B_\lambda, \quad t \ge 0$$

$$\boxed{T(t)\Phi_\lambda = \Phi_\lambda e^{B_\lambda t}, \ t \in \mathbb{R}}$$

Consequentemente

$$T(t)\Phi_\lambda(\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda(\theta+t)}, \ \ -r \le \theta \le 0$$

- B_λ tem λ como único valor próprio

- $Im(\lambda I - A)^k$ é invariante para $T(t)$

Generalizando para $\Lambda = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\} \subseteq \sigma(A)$

Teorema
$\Phi_\Lambda = (\Phi_{\lambda_1}, \cdots, \Phi_{\lambda_p})$, Φ_{λ_i} base de $M_{\lambda_i}(A)$
$B_\Lambda = \mathrm{diag}(B_{\lambda_1}, \cdots, B_{\lambda_p})$, onde $A\Phi_{\lambda_i} = \Phi_{\lambda_i} B_{\lambda_i}$

Então existe $Q_\Lambda \subseteq C$ invariante para $T(t)$ tal que

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$$

sendo

$$P_\Lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda(A).$$

Em P_Λ:

$$x_t(\Phi_\Lambda a)(\theta) = T(t)\Phi_\Lambda a(\theta) = \Phi_\Lambda(0) e^{B_\Lambda (t+\theta)}$$

$-r \leq \theta \leq 0$, a vector

Decomposição do espaço de fase através da equação adjunta

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)] \underbrace{x(t+\theta)}_{x_t(\theta)}$$

Definição (Eq. Dif. Adjunta Formal)

$$\dot{y}(\tau) = -\int_{-r}^{0} \underbrace{y(\tau-\theta)}_{y^\tau(-\theta)} [d\eta(\theta)] \qquad (4)$$

Definição (Operador Solução)

$\tau \in \mathbb{R}_0^-$, $\varphi \in C^*$

$$\begin{array}{rccc} T^*(\tau): & C^* & \to & C^* \\ & \varphi & \mapsto & y^\tau(\varphi) \end{array}$$

$y(\varphi)$ é a única solução de (4) que passa em $(0, \varphi)$

Considerando $S(\tau) := T^*(-\tau)$, $\tau \geq 0$

$(S(\tau))_{\tau \leq 0}$ é C_0-semigrupo em C^*

O gerador infinitesimal de $(S(\tau))_{\tau \geq 0}$ é

$$\begin{array}{rccl} A^*: & D(A^*) \subseteq C^* & \to & C^* \\ & \alpha & \mapsto & A^*\alpha \end{array},$$

$D(A^*) =$

$$\left\{\varphi \in C^* : \exists \dot{\varphi} \in C^* \text{ e } \dot{\varphi}(0) = \int_{-r}^{0} \alpha(-\theta)\,[d\eta(\theta)]\right\}$$

$$A^*\alpha(s) = \begin{cases} -\frac{d\alpha}{ds}(s), & 0 < s \leq r \\ \\ \int_{-r}^{0} \alpha(-\theta)[d\eta(\theta)], & s = 0 \end{cases}$$

$\therefore A^*\alpha = -\dot{\alpha}$

Propriedades

- $\forall \lambda \in \sigma(A^*),\ A^*M_\lambda(A^*) \subseteq M_\lambda(A^*)$

- $\forall \lambda \in \sigma(A^*),\ \text{dim}(M_\lambda(A^*)) < +\infty$

- $\sigma(A) = \sigma_P(A^*) = \sigma(A^*)$

$\lambda \in \sigma_P(A^*) \Leftrightarrow \text{det}\Delta(\lambda)^T = 0 \Leftrightarrow \text{det}\Delta(\lambda) = 0$

Definição (Dualidade Formal Adjunta)

$$(\cdot,\cdot) : C^* \times C \to \mathbb{R}$$

$$(\alpha,\phi) := \alpha(0)\phi(0) - \int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta} \alpha(\xi-\theta)[d\eta(\theta)]\phi(\xi)d\xi$$

Propriedades

- $(\cdot,\cdot)$ é aplicação bilinear contínua
- $(A^*\alpha,\phi) = (\alpha, A\phi), \forall \alpha \in D(A^*), \forall \phi \in D(A)$

Teorema

$\lambda \in \sigma(A),\ k \in \mathbb{N}$

$\psi \in Im(A-\lambda I)^k$
se e só se $(\alpha,\psi) = 0, \forall \alpha \in N(A^* - \lambda I)^k$

Dem.

$$(A-\lambda I)^k \varphi = \psi \Leftrightarrow \left(\frac{d}{dt} - \lambda I\right)^k \varphi = \psi$$

$$A_k = \begin{bmatrix} \Delta(\lambda) & \Delta'(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(k-1)!}\Delta^{(k-1)}(\lambda) \\ 0 & \Delta(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(k-2)!}\Delta^{(k-2)}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta(\lambda) \end{bmatrix}_{kn\times kn}$$

Da demonstração sai ainda que

$$N(A-\lambda I)^k = \left\{ \phi(\theta) = \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_{j+1} \frac{\theta^j}{j!} e^{\lambda\theta} : \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{bmatrix}, A_k\gamma = 0 \right\};$$

$$N(A^*-\lambda I)^k = \left\{ \psi(s) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \frac{(-s)^{k-j}}{(k-j)!} e^{\lambda s} : \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}^T, \beta A_k = 0 \right\}$$

Consequentemente

$$\boxed{\dim(M_\lambda(A)) = \dim(M_\lambda(A^*))}$$

$\lambda \in \sigma(A)$
$\Phi_\lambda = \left[\phi_1, \cdots, \phi_{\lambda_d}\right]$ base de $M_\lambda(A)$
$\Psi_\lambda = \left[\psi_1, \cdots, \psi_{\lambda_d}\right]^T$ base de $M_\lambda(A^*)$
Definindo a matriz

$$(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda) = \left[(\psi_i, \phi_j)\right]_{i,j}$$

demonstra-se que é invertível.
Sejam Ψ_λ, Φ_λ tais que $(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda) = I$

$$C = P_\lambda \oplus Q_\lambda$$

onde

$$P_\lambda = N(A - \lambda I)^k = \{\Phi_\lambda a : \ a \ d_\lambda - \text{vector}\}$$

$$Q_\lambda = Im(A - \lambda I)^k = \{\phi \in C : (\Psi_\lambda, \phi) = 0\}.$$

Além disso
Se $\phi = \phi^{P_\lambda} + \phi^{Q_\lambda}$, então $\phi^{P_\lambda} = \Phi_\lambda b$, com $b = (\Psi_\lambda, \phi)$.

Proposição

$\lambda, \mu \in \sigma(A),\ \mu \neq \lambda$

$$\left.\begin{array}{l} \psi \in M_\mu(A^*) \\ \phi \in M_\lambda(A) \end{array}\right\} \Rightarrow (\psi, \phi) = 0$$

Teorema

$\Lambda = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\} \subseteq \sigma(A)$

$$P_\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{p} M_{\lambda_i}(A);\ \ P_\Lambda^* = \bigoplus_{i=1}^{p} M_{\lambda_i}(A^*)$$

Φ, Ψ bases de P_Λ e de P_Λ^* respectivamente tais que

$$(\Psi, \Phi) = I$$

Então

$$\begin{array}{rcl} C & = & P_\Lambda \oplus Q_\Lambda \\ P_\Lambda & = & \{\phi \in C : \phi = \Phi b,\ b \text{ vector}\} \\ Q_\Lambda & = & \{\phi \in C : (\Psi, \phi) = 0\} \end{array}$$

onde Q_Λ é fechado

Além disso

$\forall \phi \in C$, $\phi = \phi^{P_\Lambda} + \phi^{Q_\Lambda}$, com $\phi^{P_\Lambda} = \Phi(\Psi, \phi)$

Estimativas e Estabilidade

$\beta \in \mathbb{R}$
$\Lambda(\beta) := \{\lambda \in \sigma(A) : \text{Re}\lambda \geq \beta\} \neq \emptyset$
$\Lambda = \Lambda(\beta)$ é finito

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$$

Teorema
Existem $k, \gamma > 0$ tais que

(i) $\|T(t)\phi^{P_\Lambda}\| \leq ke^{(\beta-\gamma)t}\|\phi^{P_\Lambda}\|,\ t \leq 0,\ \phi^{P_\Lambda} \in P_\Lambda$

(ii) $\|T(t)\phi^{Q_\Lambda}\| \leq ke^{(\beta-\gamma)t}\|\phi^{Q_\Lambda}\|,\ t \geq 0,\ \phi^{Q_\Lambda} \in Q_\Lambda$

Dem.
(i) $t \leq 0$; $p = \text{dim}P_\Lambda$

$$P_\Lambda \equiv \mathbb{C}^p$$

A EDFR (3) em $P_\Lambda \equiv \mathbb{C}^p$ é

$$\dot{x} = B_\Lambda x,$$

com $\sigma(B_\Lambda) = \Lambda \subseteq \Lambda(\beta)$.

O resultado é consequência da teoria de EDO's.

(ii) Q_Λ é subespaço de Banach invariante para $T(t)$

$$\left(T(t)_{|_{Q_\Lambda}}\right)_{t\geq 0} \text{ é } C_0\text{-semigrupo em } Q_\Lambda$$

Para $t = r$

$$\begin{aligned}\sigma_P\left(T(r)_{|_{Q_\Lambda}}\right) &\subseteq e^{(\sigma_P(A)\setminus\Lambda)r} \cup \{0\} \\ &\subseteq \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < e^{\beta r}\}\end{aligned}$$

$T(r)$ é compacto, logo $\sigma_P(T(r))$ não tem pontos de acumulação excepto eventualmente o zero.

$\exists \gamma > 0$:

$$\sigma\left(T(r)_{|_{Q_\Lambda}}\right) \subseteq \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq e^{(\beta-2\gamma)r}\}$$

$$r_\sigma\left(T(r)_{|_{Q_\Lambda}}\right) \leq e^{(\beta-2\gamma)r}$$

$\alpha = \beta - 2\gamma;\ w = r;\ \gamma$

$\exists K \geq 1 : \|T(t)\phi\| \leq Ke^{(\beta-\gamma)t}\|\phi\|, \forall t \geq 0, \forall \phi \in Q_\Lambda$

Exemplo

$$\dot{x}(t) = -\frac{\pi}{2}x(t-1) := \int_{-1}^{0} [d\eta(\theta)]x(t+\theta)$$

$$L(\phi) = -\frac{\pi}{2}\phi(-1); \qquad \eta(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta = -1 \\ -\frac{\pi}{2}, & -1 < \theta \leq 0 \end{cases}$$

Forma bilinear:

$$(\psi, \phi) = \psi(0)\phi(0) - \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{0} \psi(\xi + 1)\phi(\xi)d\xi$$

Equação característica:

$$\det\Delta(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\lambda I_1 - \int_{-1}^{0} e^{\lambda\theta}[d\eta(\theta)]\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda - L(e^{\lambda\cdot}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda + \frac{\pi}{2}e^{-\lambda} = 0$$

- $\frac{\pi}{2}i$; $-\frac{\pi}{2}i$ são as raízes com parte real nula

- Não tem raízes com parte real positiva

Considere-se o complexificado: $C = C([-1,0];\mathbb{C})$

$$\Lambda = \Lambda(0) = \{-\frac{\pi}{2}i, \frac{\pi}{2}i\}$$

$$M_{\frac{\pi}{2}i}(A) = N(A - \tfrac{\pi}{2}iI) = \{e^{\frac{\pi}{2}i\theta}a : a \in \mathbb{C}\}$$

$$M_{-\frac{\pi}{2}i}(A) = N(A + \tfrac{\pi}{2}iI) = \{e^{-\frac{\pi}{2}i\theta}a : a \in \mathbb{C}\}$$

$$P_\Lambda = M_{\frac{\pi}{2}i}(A) \oplus M_{-\frac{\pi}{2}i}(A) = \left\{\Phi_\Lambda a : a \in \mathbb{C}^2\right\}$$

com,

$$\Phi_\Lambda(\theta) = \left[\begin{array}{cc} e^{\frac{\pi}{2}i\theta} & e^{-\frac{\pi}{2}i\theta} \end{array}\right], \qquad -1 \leq \theta \leq 0$$

Analogamente

$$P^*_\Lambda = M_{\frac{\pi}{2}i}(A^*) \oplus M_{-\frac{\pi}{2}i}(A^*)$$

$$\Psi^*_\Lambda(s) = \left[\begin{array}{c} e^{\frac{\pi}{2}is} \\ e^{-\frac{\pi}{2}is} \end{array}\right], \qquad 0 \leq s \leq 1$$

$$\Psi_\Lambda = (\Psi^*_\Lambda, \Phi_\Lambda)^{-1}\Psi^*_\Lambda$$

$$(\Psi_\Lambda, \Phi_\Lambda) = I$$

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$$

Em P_Λ:

$$A\Phi_\Lambda = \Phi_\Lambda B, \text{ com, } B = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{2}i \end{bmatrix}$$

$$T(t)\Phi_\Lambda \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \Phi_\Lambda e^{Bt} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Em $\mathbb{C}$,

$$z(t) = e^{\frac{\pi}{2}it}b_1 + e^{-\frac{\pi}{2}it}b_2$$

Em $\mathbb{R}$,

$$x(t) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)c_1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)c_2, \text{ com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Em Q_Λ :

$$\|T(t)\phi^{Q_\Lambda}\| \leq ke^{-\gamma t}\|\phi^{Q_\Lambda}\|, \quad t \geq 0, \forall \phi^{Q_\Lambda} \in Q_\Lambda.$$

Em C:

$$\|\underbrace{T(t)\phi}_{x_t(\phi)} - T(t)\phi^{P_\Lambda}\| = \|T(t)\phi^{Q_\Lambda}\| \leq ke^{-\gamma t}\|\phi - \phi^{P_\Lambda}\|$$

$$\therefore \|T(t)\phi - \phi^{P_\Lambda}\| \to 0, \quad \text{quando } t \to +\infty$$