



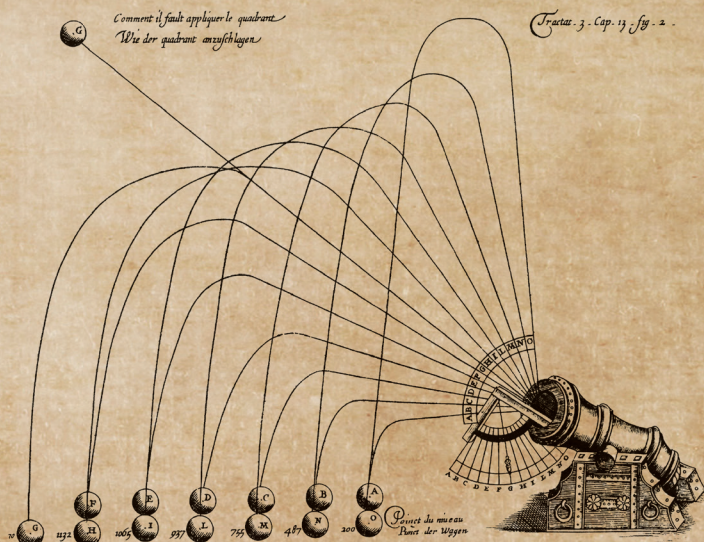
ESTUDOS DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, DA MÚSICA E MILITAR

Maria Antónia Forjaz
Maria Elfrida Ralha

Ed., Braga 2024

Necessidades. March. 3. 1780.

*Copy of a paper given to Luther Almeida
on his leaving of me a problem of Mathematics
for his Academy to propose to **all the learned World**..*



Ficha Técnica:

Título: Estudos de História da Matemática, da Música e Militar

Autores: Vários

Organização: Ângela Cerdeira Lopes, António Leal Duarte, Catarina Mota,
Maria Antónia Forjaz, Maria Elfrida Ralha,
Maria Fernanda Estrada, Ricardo Bernardes

Editores: Maria Antónia Forjaz, Maria Elfrida Ralha

Composição gráfica: Pedro Gonçalves

Execução gráfica: Gráfica Diário do Minho

ISBN: 978-989-8561-12-1

Depósito Legal: 528566/24

Tiragem: 100 exemplares

A edição deste volume, de estudos científicos sujeitos a um processo de revisão por pares (peer review), foi parcialmente financiada pelo Centro de Matemática da Universidade do Minho (CMAT), através da FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia) por fundos nacionais portugueses, no âmbito dos projetos UIDB/00013/2020 e UIDP/00013/2020.



CMAT
Centro de Matemática
UNIVERSIDADE DO MINHO



Fundação
para a Ciência
e a Tecnologia

CMUC
Centro de Matemática
Universidade de Coimbra



ICM
CASA DE MATEUS

ESTUDOS

de História da Matemática, da Música e Militar

Maria Antónia Forjaz
Maria Elfrida Ralha

Ed., Braga 2024



Desenho a carvão

alunos da FAUP, da Prof.^a Ana Sofia Silva. Casa de Mateus, 2017

Diálogos com o futuro: comentários sobre Matemática Digital

José Carlos Espírito Santo^{i,ii}

Centro de Matemática
Universidade do Minho

Resumo

Neste artigo procura-se explicar como o Séc. XVIII dialoga com a matemática de hoje, também ela sob o efeito da revolução digital. Um fio condutor é a preocupação com o rigor, que está por trás da investigação dos fundamentos da matemática, nos Sécs. XIX e XX, ou das recentes verificações por computador de teoremas difíceis, já no Séc. XXI. O nosso diálogo com o futuro surge carregado da ameaça da substituição do intelecto humano pela máquina, a que nem a matemática será imune. Entraremos um pouco nesse debate. Certos resultados sobre os fundamentos da matemática são por vezes interpretados como limitadores do alcance da inteligência artificial. Recordaremos o que Turing escreveu sobre tais “objecções matemáticas”.

Palavras-chave

fundamentos da matemática
demonstração automatizada de teoremas
inteligência artificial
máquina de Turing

ⁱ Investigação parcialmente financiada por fundos nacionais portugueses através da FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia) no âmbito dos projectos UIDB/00013/2020 e UIDP/00013/2020.

ⁱⁱ O autor não segue o Acordo Ortográfico de Língua Portuguesa de 1990.

Abstract

In this article we try to explain how the 18th century dialogues with today's mathematics, insofar as it is under the digital revolution. A link is the concern with rigor, which is behind the investigation of the foundations of mathematics, in the 19th and 20th centuries, or the recent computer verifications of difficult theorems, already in the 21st century. Our dialogue with the future comes with the threat of the replacement of human's intellect by the machine, to which not even mathematics seems to be immune. We will enter briefly in that debate. Some results in the foundations of mathematics are sometimes interpreted as putting limits to the scope of artificial intelligence. We will recall what Turing wrote about such "mathematical objections".

Keywords

foundations of mathematics
automated theorem proving
artificial intelligence
Turing machine

Este texto resume e actualiza a intervenção que fiz no debate “Diálogos com o futuro”, realizado a 13 de Outubro de 2017, no qual tive o gosto de participar por amável convite dos colegas da organização do Encontro Internacional 3M+1: História da Matemática, da Música e Militar. A minha interpretação do convite foi a de que os organizadores desejariam ver a perspectiva de um colega da área da lógica sobre o diálogo entre a matemática do Séc. XVIII e um presente marcado pela revolução digital. Para isso teremos de atravessar os séculos do rigor (XIX) e do computador (XX).

Um fio condutor

Comecemos por José Anastácio da Cunha, não foram “Anastácianos convictos” os meus estimados colegas organizadores do Encontro 3M+1, e não se tivera o matemático setecentista distinguido como “*um dos percursores dos géometras que no Séc. XIX realizaram essa obra considerável da organização lógica dos novos domínios que se tinham aberto no mundo dos números*” [Teixeira 1925], e como “*(...) um pioneiro do esforço para colocar a Matemática, e especialmente a Análise, sobre bases logicamente sólidas*” por causa do “*rigor e originalidade das suas abordagens às séries, às potências e ao cálculo diferencial*”. [Queiró 1994]

Ora a preocupação com o rigor e com a organização e a fundamentação lógica da matemática são um fio condutor que nos permite esta-

belecer uma ligação entre os dias de Anastácio da Cunha e os dias de hoje. A reforma do cálculo infinitesimal operada no Séc. XIX, com a sua clarificação dos conceitos de limite, convergência, número real e função, produziu a chamada aritmetização da análise [Boyer 1974], ou seja, uma redução da análise matemática à aritmética dos números naturais e à lógica, esta última compreendendo a nascente teoria dos conjuntos de Cantor ou a lógica de ordem superior de Frege. Este desenvolvimento é contemporâneo do revolucionário renascimento da lógica operado por Boole a partir de 1847 e a sua *Mathematical Analysis of Logic*. Porém, o derradeiro esforço de redução de Frege, da aritmética dos números naturais à lógica, fracassou por causa da descoberta do Paradoxo de Russell em 1902. Como Frege reconhece, as fundações do seu edifício foram abaladas; e um novo capítulo na lógica matemática e na investigação dos fundamentos da matemática começou, ao findar o século do rigor [Boyer 1974].

O debate que se seguiu dividiu os matemáticos e lógicos em três escolas: formalistas, logicistas e intuicionistas [Pierpont 1928]. À frente da escola formalista estava Hilbert. Desde a palestra no Congresso Internacional dos Matemáticos em 1900, onde propôs como segundo problema a consistência dos axiomas da aritmética dos números naturais, até à publicação dos *Principles of Mathematical Lo-*

gic, com W. Ackermann, em 1928, Hilbert amadureceu um programa que consistiu numa visão da matemática enquanto sistema formal e num conjunto de desafios (meta) matemáticos sobre esse sistema formal: a demonstração da sua consistência, completude e decidibilidade [Ferreira 2019]. Gödel, num primeiro momento (1930) mostrou que existe um sistema formal completo para a lógica de primeira ordem, para logo depois (1931) mostrar que o mesmo não acontece com a aritmética, e que uma demonstração metamatemática da consistência da aritmética como pretendida por Hilbert é impossível. Finalmente, em 1936, e de forma simultânea e independente, Church e Turing mostraram que a lógica de primeira ordem não é decidível, ou seja: não existe um algoritmo que, dada uma proposição dessa lógica, decida se ela é ou não um teorema. Dos trabalhos de Church e Turing segue também que a aritmética formal não é decidível.

Se o projecto de Frege fracassou por causa do Paradoxo de Russell, o programa de Hilbert falhou por causa dos resultados negativos de Gödel, Church e Turing. Mas estes resultados negativos tinham as sementes de uma nova era prestes a começar. Isso é particularmente evidente no trabalho de Turing e no seu conceito de máquina universal, o qual pode ser visto como uma definição matemática de computador programável. Essa definição não deixou de inspirar a construção dos

primeiros computadores, ainda não tinham passado dez anos desde de 1936, quer nos EUA por via participação de von Neumann, quer em Inglaterra por via do envolvimento do próprio Turing [Hodges 1992].

Matemática Digital

A aceleração tecnológica, porventura iniciada com a invenção do transistor, produziu a era digital. A computação escapou-se dos círculos académicos e militares e democraticamente alojou-se nos computadores pessoais. Depois, todo esse poder computacional distribuído pelo mundo inteiro foi ligado em rede, constituindo a internet. Ao mesmo tempo, a informação textual, visual e sonora foi desmaterializada. Finalmente, o dispositivo físico universal para processar informação foi miniaturizado na forma de *smartphone*, para passar a estar agarrado à pele e como que a constituir um apêndice do corpo humano que evoluiu de forma artificial.

A matemática não podia ficar imune a toda esta acelerada revolução. Não só foram criadas novas sub-disciplinas (computação científica, várias declinações da matemática computacional), mas também e sobretudo mudou e está em mudança a forma de comunicar, arquivar e fazer a matemática.

Detenhamo-nos num aspecto essencial do fazer da matemática, que é o processo de demonstração. O resultado negativo de Church

e Turing deixa, ainda assim, um campo vasto de investigação e experimentação no que se refere ao uso de computadores nesse processo. Por um lado, há teorias de grande interesse que se revelaram decidíveis, como a teoria elementar (i.e. de primeira ordem) do corpo dos números reais – um resultado de Tarski publicado em 1951; por outro lado, o computador pode ser usado como um assistente, em vez do decisor que substituiu em absoluto o trabalho do matemático. A arquitectura dessa assistência é variada: desde a automação completa de certas sub-tarefas, ao uso da máquina como mero verificador. Assim, na primeira demonstração do Teorema das Quatro Cores [Appel 1976], o computador foi usado para a verificação de alguns casos particulares, demasiado numerosos para uma averiguação com papel e lápis – mas a redução da prova à verificação desses casos foi trabalho puramente humano; numa segunda demonstração, também assistida por computador, toda a demonstração foi desenvolvida e verificada, passo a passo, no computador [Gonthier 2008].

O computador não está, todavia, limitado a ser usado como assistente. Em 1996 o programa EQP provou a conjectura de Robbins, que tinha permanecido em aberto durante décadas, nascendo assim o primeiro teorema a ser provado exclusivamente pela máquina [Beeson 2004]. Isto aconteceu na véspera de outro marco na história

do enfrentamento entre humanos e máquinas: em 1997, o computador *Deep Blue* venceu Kasparov, o campeão do mundo de xadrez. Em 2004 o número de teoremas novos obtidos pelas máquinas aproximava-se de 100 [Beeson 2004], em 2018 o algoritmo AlphaGo Zero atingiu desempenho sobre-humano em xadrez e go treinando-se a si próprio [Silver 2018]. A demonstração automatizada de teoremas esteve na génese da inteligência artificial (IA) nos anos 1950, mas as duas disciplinas tornaram-se áreas autónomas. Porém, a aplicação da IA na demonstração automática é um tópico “quente” – veja-se a recentemente criada *Conference on Artificial Intelligence and Theorem Proving*.

W. T. Gowers, um matemático galardoado com a Medalha Fields, disse: “*I believe that computers will probably surpass humans at finding proofs within a small number of decades*” [Gowers 2017]. Note-se o cuidado na formulação: seremos ultrapassados na procura de demonstrações. Não fomos já? Para certo tipo de demonstração, como a da conjectura de Robbins, que consiste na resolução de um puzzle muito específico mas combinatorialmente explosivo, certamente que sim. A profecia de Gowers aponta para um futuro onde a tarefa de demonstrar, tão no centro da natureza da matemática, será em grande medida da responsabilidade das máquinas. Esta será uma faceta surpreendente da matemática digi-

tal. Apesar de tudo, esta visão parece ainda bastante contida, se comparada com a previsão de que um algoritmo de aprendizagem universal deduzirá por si próprio todo o conhecimento, passado, presente e futuro [Domingos 2017].

Objecção matemática

O debate filosófico sobre a IA sempre levantou a questão de haver na inteligência humana um reduto essencial que não pode ser capturado de forma artificial e/ou computacional. Uma tentativa de responder afirmativamente à questão baseia-se nas limitações teóricas ao poder dos algoritmos que os lógicos da primeira metade do Séc. XX estabeleceram em resultado da resposta ao programa de Hilbert.

Turing deu uma definição matemática do conceito de algoritmo (a máquina de Turing); em consequência do teorema da completude de Gödel, o conceito de prova usado em matemática é algorítmico (as provas podem ser formalizadas como sendo objectos matemáticos de certo tipo e existe um algoritmo que decide se um dado objecto desse tipo é uma prova), donde o conceito de provabilidade determinado por esse conceito de prova é semi-algorítmico (porque existe uma enumeração algorítmica de todas as provas, a qual vai encontrar a prova de qualquer proposição demonstrável, mas poderá deixar o observador sem resposta para sempre, caso ele esteja interessado

numa proposição que afinal não tem demonstração); por fim, em consequência do teorema da indecidibilidade de Church e Turing, o referido conceito de provabilidade não é algorítmico (pelo que nenhum algoritmo “mais inteligente” pode melhorar qualitativamente aquilo que a referida enumeração algorítmica já consegue). A tarefa de decidir sobre a existência de prova matemática não pode ser reduzida a uma rotina executável por uma máquina.

Manifestamente, estas e outras limitações teóricas não constituem entrave ao desenvolvimento da inteligência artificial. Apesar de responsável por alguns dos referidos resultados limitativos, terá sido o próprio Turing o primeiro a perguntar se a máquina poderia jogar xadrez e pensar, e a IA terá sido inaugurada com o seu artigo que abre com as palavras “*I propose to consider the question ‘Can the machine think?’*” [Turing 1950].

Nesse artigo Turing propõe o famoso Jogo da Imitação como teste que uma máquina tem de passar para poder ser considerada uma máquina que pensa; e faz a previsão de que, 50 anos depois (ou seja, em 2000), as máquinas terão 30% de probabilidade de passar o Jogo da Imitação, e de que a “opinião educada” terá mudado tanto que se poderá falar naturalmente de máquinas pensantes. Turing também discute várias objecções à sua previsão e ao uso do Jogo da Imitação como critério para a inte-

ligência, entre as quais a “objecção matemática”. Esta parte das limitações teóricas referidas acima para distinguir as máquinas do intelecto humano, pois este último supostamente não estaria sujeito às mesmas limitações.

Em resposta, Turing começa por observar que essa suposta isenção do intelecto humano carece de prova, para depois se concentrar noutro tipo de argumento, apresentado de forma condensada em [Turing 1950], mas já antes exposto de forma mais alargada [Turing 1947]: segue das referidas limitações teóricas que o interrogador do Jogo da Imitação pode colocar uma pergunta (por exemplo, sobre a existência de prova de uma proposição matemática) a que a máquina responderá erradamente. Mas Turing chama a isto um “*petty triumph*”. Provavelmente, o outro interlocutor do jogo, o interlocutor humano, também responderia erradamente – ou então iria “*search around and find new methods of proof*” [Turing 1947], para finalmente responder, talvez passados alguns anos. A máquina não tem esta liberdade de movimentos, deve infalivelmente seguir o seu algoritmo e dar uma resposta. Turing conclui: “*if a machine is expected to be infallible, it cannot also be intelligent*”; e sugere: “*fair play must be given to the machine*”, dando a possibilidade à máquina de ser treinada e de aprender com os erros [Turing 1947]. Em [Turing 1950] há uma brevíssima sugestão de que a máquina, após a detecção

de uma resposta errada, seja substituída (ou reprogramada) para que outra mais inteligente tome o seu lugar no Jogo da Imitação. Turing foi o primeiro a acreditar que a objecção matemática não é um travão à inteligência artificial.

Perigo iminente vagueando em Marte no mesmo barco

Enquanto o Congresso 3M+1 decorria, dois *rovers* percorriam a superfície marciana: *Curiosity* e *Opportunity*. Este último, tendo “aterrado” em Janeiro de 2004, bateu recordes de longevidade até enviar o seu último sinal em Junho de 2018. O primeiro pisou solo marciano em Agosto de 2012 e mantinha-se operacional em Fevereiro de 2023 [Wikipedia 2023]. Estas duas adoráveis criaturas suscitam a pergunta, enquanto vão vagueando em Marte: será que as máquinas chegaram a Marte antes dos humanos? De um certo ponto de vista, é claro que não. Os humanos fizeram pousar e passear em Marte duas máquinas. Dizer que as máquinas chegaram a Marte é uma figura de estilo, um abuso de personificação, uma *Toy Story*. Tal como os *rovers* não chegaram a Marte, o *Deep Blue* não jogou xadrez nem bateu Kasparov. O grande campeão disse algo de parecido, dez anos depois da sua derrota: quem venceu o *match* em 1997 foram os programadores do *Deep Blue* [Kasparov 2017].

Nem o *Deep Blue*, nem nenhum dos outros programas muito mais

fortes que entretanto surgiram acabaram com o jogo do xadrez – porque podemos sempre jogar por prazer, ou competir sem o recurso a máquinas. Mas talvez a variante peculiar que é o xadrez por correspondência, onde o jogador escolhe o lance a pôr no correio com toda a ajuda que quiser, computacional ou não, pudesse ter sido extinta. Porém, isso não aconteceu. O 32º campeão do mundo dessa modalidade, Jon Edwards, recentemente coroado, disse numa entrevista que, ao contrário da opinião generalizada, os melhores jogadores de xadrez por correspondência não acreditam que a modalidade esteja a morrer [NYT 2022]. Ron Langeveld, 26º campeão do mundo nessa modalidade, disse em 2015: *“Ideas need to be created behind the board and then have them refuted by the computer until you find an idea that sticks and makes the difference”* [Langeveld 2015]. Leonardo Ljubicic, 28º campeão do mundo disse em 2016: *“you should not let the engine do all the work (...). You will do much better if you watch the thinking process, to try to recognise and understand the strengths and weaknesses of the machine and to guide the analysis”* [Ljubicic 2016]. Kasparov também concluiu: *“Don’t fear intelligent machines, work with them”* [Kasparov 2017].

Nesta fase de colaboração com as máquinas, não há, portanto, o perigo iminente de que robots conscientes da sua mortalidade venham ajustar contas com os seus

criadores, ou, mais prosaicamente, o de que exércitos de robots marchem sobre a Terra para subjugar os humanos. Estas são visões ficcionais de algo que, contudo, é real embora distante: a ameaça existencial de uma inteligência sobre-humana fora do nosso controlo. Riscos mais realistas e imediatos são: *deepfakes*, armas letais autónomas e falta de transparências nos algoritmos de aprendizagem automática [Ford 2022]. Ou simplesmente o perigo, já retratado no filme *2001: Odisseia no Espaço*, de deixar um sistema crítico sob o controlo de uma “inteligência” deficientemente programada.

Em filosofia da mente, é útil a analogia que diz que a mente está para o cérebro como o *software* está para o *hardware* [Miguens 2019]. A mente seria o programa que o *hardware* cerebral estaria condenado a executar. Outra tese não muito diferente é a de que o cérebro humano é equivalente a uma máquina de Turing [Oliveira 2017]. Aparentemente, é possível objectar candidamente a este tipo de convicção dizendo que os organismos vivos, os corpos, os cérebros não são linhas de código [Damásio 2017].

Turing destilou o seu conceito de máquina como uma abstracção do menino da Escola Primária, aplicando o algoritmo da adição com a ajuda do seu caderno quadriculado [Turing 1936]. Os alunos de Ciências da Computação, na aula de Computabilidade, também poderiam servir de inspiração para

o conceito de máquina de Turing universal, quando esforçada e pacientemente simulam a execução daquela máquina de Turing que o professor definiu no quadro de giz. Se a vida mental desses alunos se limitasse à aplicação de um algoritmo (por exemplo, o algoritmo simulador), essa vida mental estaria no mesmo barco que a máquina de Turing, amarrada pelas ferozes limitações que os lógicos identificaram. Felizmente, esses alunos cansam-se depressa de ser uma máquina de Turing; e, com a permissão do professor, soltam amarras e vão à sua vida.

Agradecimentos:

O autor agradece a João Caramalho, Luís Cruz-Filipe e Maria Antónia Forjaz pelos comentários a uma versão anterior deste texto.

Bibliografia

- [ATP 2023] AITP – Conference on Artificial Intelligence and Theorem Proving, <http://aitp-conference.org/>, página consultada a 16 de Abril 2023.
- [Appel 1976] K. Appel, W. Haken, *Every Planar Map Is Four Colorable*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 82 (5), 1976.
- [Beeson 2004] M. J. Beeson, *The Mechanization of Mathematics*, em C. Teuscher (ed.) *Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker*, Springer, 2004.
- [Boyer 1974] C. B. Boyer, *História da Matemática*, Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.
- [Damásio 2017] A. Damásio, *A Estranha Ordem das Coisas*, Temas e Debates – Círculo de Leitores, 2017.
- [Domingos 2017] P. Domingos, *A revolução do Algoritmo Mestre*, Manuscrito, 2017.
- [Espírito Santo 2019] J. C. Espírito Santo (ed.), *Alan Turing: Cientista Universal*, UMinho Editora, 2019.
- [Ferreira 2019] F. Ferreira, *O problema da decisão e a máquina universal de Turing*, em [Espírito Santo 2019].
- [Ford 2022] M. Ford, *O Futuro da Inteligência Artificial*, Bertrand Editora, 2022.
- [Gonthier 2008] G. Gonthier, *Formal Proof – The Four-Color Theorem*, Notices of the AMS, 55(11), 2008.
- [Gowers 2017] W. T. Gowers, *How do human mathematicians avoid big searches*, Palestra, 28 Julho 2017, Programme “Big Proof”, Isaac Newton Institute for Mathemati-

- cal Sciences, Disponível em <https://www.newton.ac.uk/seminar/22014>
- [Teixeira 1925] F. Gomes Teixeira, *Panegíricos e Conferências*, Imprensa da Universidade de Coimbra, 1925.
- [Hodges 1992] A. Hodges, *Alan Turing: The Enigma*, Vintage, 1992.
- [Kasparov 2017] G. Kasparov, *Don't fear intelligent machines, work with them*, TED Talk, 2017.
- [Ljubicic 2016] *Better than a machine: Leonardo Ljubicic*, entrevista à Chessbase, 21 de Fevereiro 2016, <https://en.chessbase.com>, página consultada a 5 de Dezembro de 2022.
- [Miguens 2019] S. Miguens 2019, *Alan Turing e a Filosofia da Mente*, em [Espírito Santo 2019].
- [NYT 2022] *Why correspondnece chess is still popular among elite players*, New York Times, 9 de Novembro 2022, www.nytimes.com, página consultada a 5 de Dezembro 2022.
- [Oliveira 2017] A. Oliveira, *Mentes Digitais: A Ciência Redefinindo a Humanidade*, IST Press, 2017.
- [Pierpont 1928] J. Pierpont, *Mathematical Rigor, Past and Present*, Bulletin of the American Mathematical Society, 34, pp 23-53, 1928.
- [Queiró 1994] J. F. Queiró, *José Anastácio da Cunha, Um Matemático a Recordar, 200 Anos Depois*, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, nº 29, pp 1-18, 1994.
- [Langeveld 2015] *Interview with ICCF 26th World Champion Ron Langeveld*, 2015, www.iccf.com, página consultada a 4 de Dezembro 2022.
- [Silver 2018] D. Silver, T. Hubert, J. Schrittwieser, I. Antonoglou, M. Lai, A. Guez, M. Lanctot, L. Sifre, D. Kumaran, T. Graepel, T. Lillicrap, K. Simonyan, D. Hassabis, *A general reinforcement learning algorithm that masters chess, shogi, and Go through self-play*, Science 362, pp. 1140 – 1144, 2018.
- [Turing 1936] A. M. Turing, *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*, Proceedings of the London Mathematical Society, 2, 42(1): 230 – 265, 1936-7.
- [Turing 1947] A. M. Turing, *Lecture to the London Mathematical Society on 20 February 1947*, in S. Barry Cooper, Jan van Leeuwen, *Alan Turing – His Work and Impact*, Elsevier, 2013.
- [Turing 1950] A. M. Turing, *Computing Machinery and Intelligence*, Mind, Vol LIX, Nº 236, 1950.
- [Wikipedia 2023] Wikipedia, *Mars rover*, página consultada a 14 de Abril 2023.

Nicopolis, March. 3. 1780.

Copy of a paper given to Father Almeida
on the leaving of me a problem of mathematics
for his Academy to propose to all the learned World.

Desenho a lápis
José João Almeida,
Casa de Mateus, 2017



**Palácio do
Governo de São
Paulo em 1827**

(antigo Colégio
dos Jesuítas
e posteriormente
Palácio do Governador
D. Luís António
de Sousa Botelho
Mourão),
por Jean-Baptiste
Debret (1768-1848)

em

"Sons militares"
nas celebrações
do poder real
na São Paulo
colonial sob
o governo
do 4.º Morgado
de Mateus

(Vd. RICARDO
BERNARDES,
p. 134)





**Alegoría de
la Compañía
de Guardias
Marinas**

*Tratado
de Maniobras
Navales...
Cádiz, 1766*

em

*Las Matemáticas
en las enseñanzas
en España
durante
el siglo XVIII*

(Vd. LUIS ESPAÑOL,
JUNCAL MANTEROLA
ZABALA; p. 8)





**Lansquenets,
Tambourine
in 1512**

(Autor
Desconhecido)

em

*Música com
matemática
na função
operacional
da música militar*

(Vd. PEDRO
MARQUÊS
DE SOUSA, p. 256)

**Tambor
de Infantaria
de linha
do século XIX**

em

*Música com
matemática
na função
operacional
da música militar*

(Vd. PEDRO
MARQUÊS
DE SOUSA, p. 267)





**Corneteiro-mor
do Batalhão
de Caçadores
n.º 3, em 1815.**

em

*Música com
matemática
na função
operacional
da música militar*

(Vd. PEDRO
MARQUÊS
DE SOUSA, p. 270)

**Estudante
da Universidade
de Coimbra,
séc. XVIII**

Autor
desconhecido.
Biblioteca Geral
da Universidade
de Coimbra

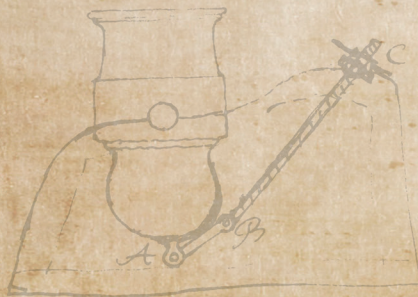
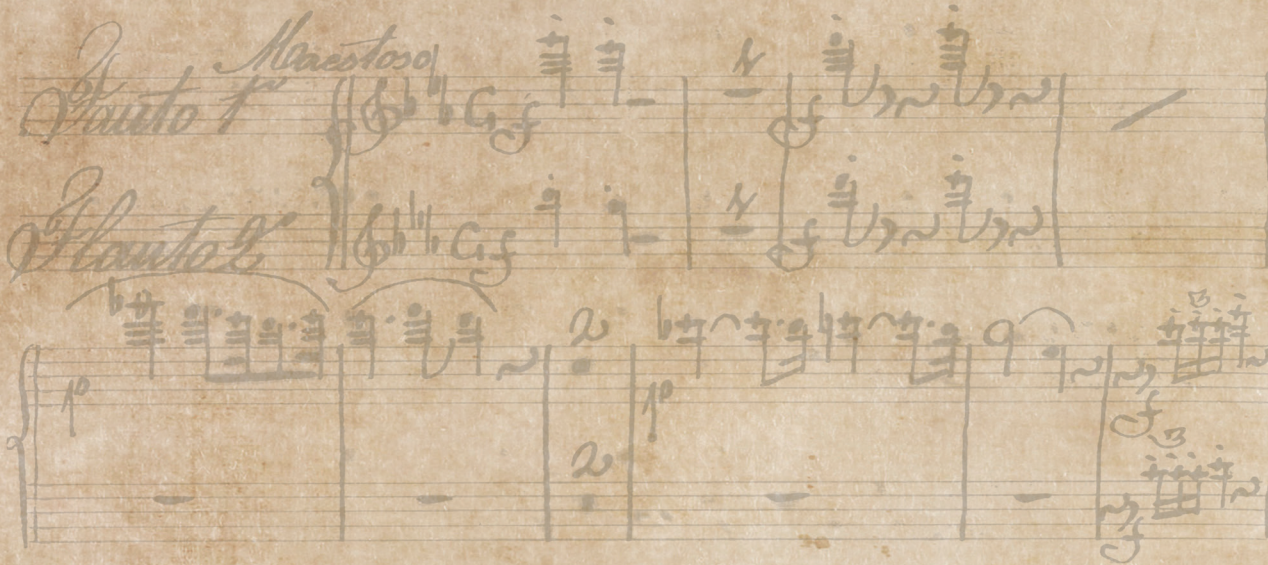
em

*José Anastácio
da Cunha:
da sua inscrição
da Faculdade
de Leis a algum
direito que há
na poesia*

(Vd. MARIA LUÍSA
MALATO, p. 328)



... de um triângulo. Mb , Cy , M tem os
 eq. equat.: $Ma \cdot bax : y :: -dx : ba =$
 $-\frac{ydx}{x}$; logo $b m = dy - \frac{ydx}{x} = xdy -$
 ydx . No triâng. bem tem os $b m$:
 $Cm :: \text{sen } be \cdot M : \text{sen } emb \text{ ou } \text{sen } Cbq \text{ ou } \text{sen } CMq$
 q.º fornece os valores, dá; $x dy - y dx : z :: d\phi : z$:
 logo $x dy - y dx = z^2 d\phi$. Por outro modo



APOIOS



CMAT
Centro de Matemática
UNIVERSIDADE DO MINHO



Fundação
para a Ciência
e a Tecnologia



CASA DE MATEUS