Thèse

présentée à

l'Université de Paris 6

par

José Carlos Cruz da Costa

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Paris 6

Spécialité

Informatique

Sujet de la thèse :

Quelques Intersections de Variétés de Semigroupes Finis et de Variétés de Langages, Opérations Implicites

Soutenue le 30 Novembre 1998
devant le jury composé de Messieurs

Assis Azevedo	*Rapporteur*
Philippe Chrétienne	*Examinateur*
Jean-Éric Pin	*Examinateur*
Mikhail Volkov	*Rapporteur*
Pascal Weil	*Directeur*
Marc Zeitoun	*Examinateur*

À
SUSANA *et à*
SOFIA

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Pascal Weil d'avoir accepté de diriger mes recherches, ce qu'il a su faire avec compétence et enthousiasme. Je lui suis aussi reconnaissant pour ses encouragements constants, et pour me faire profiter de ses connaissances et de sa critique toujours constructive, en particulier lors de l'écriture de cette thèse.

Je remercie Jean-Éric Pin de m'avoir accueilli comme doctorant au LITP, actuel LIAFA, ainsi que Daniel Krob qui lui a succédé.

Je remercie les rapporteurs, Assis Azevedo et Mikhail Volkov, d'avoir accepté de relire ce long document, ainsi que Philippe Chrétienne, Jean-Éric Pin et Marc Zeitoun d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à remercier tout en particulier à Assis Azevedo, à qui je dois ma formation initiale et qui m'a introduit dans l'univers des semigroupes, des opérations implicites et des langages. Je lui remercie l'amitié, la constante bonne humeur et l'intérêt qu'il a dispensé a mon travail, bien comme sa disponibilité permanente pour le discuter.

Je remercie Jorge Almeida, qui a aussi participé à ma formation initiale avec ses beaux exposés. Son travail sur les opérations implicites,— avec la coopération d'Assis Azevedo et de Pascal Weil en quelques moments,— est à la base de la plupart des résultats de cette thèse.

Je suis très reconnaissant à tous ceux qui ont manifesté leur solidarité depuis la découverte du grave problème de santé de ma femme. Moi et ma femme, nous voulons exprimer notre gratitude pour leur soutien inestimable. Je remercie tout particulièrement ma famille et mes collègues du département de mathématique de l'Université du Minho. Leur disponibilité permanente et leur aide ont été fondamentales.

Merci à Marc Zeitoun pour son soutien. Je lui suis reconnaissant en particulier pour son aide au niveau administratif durant mes absences de Paris.

Fernando Miranda m'a aidé souvent au niveau de l'informatique (pratique), notamment dans l'installation de programmes dans mon PC. Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie mes collègues de bureau, pour leur sympathie et disponibilité.

Je remercie les équipes administrative et technique du LIAFA : N. Delgado, N. Godard, J. Ohayon, S. Vibert, L. Ahmadi, C. Précetti et Z. Sami.

Je remercie enfin mes copains et compagnons sportifs de la Maison du Portugal, pour les bons moments. Merci à Mafalda qui m'a initié au piano. Merci à Paulo, Roberto, Ana, Paulo Isabel, Frederico et Carlos. Mes derniers remerciements vont à mon cher ami Mário sans qui mon séjour à Paris n'aurait pas été si agréable ce qu'il fut.

Je dédie cette thèse à ma fille Sofia, pour la joie qu'elle a portée à ma vie, et à ma femme Susana, pour sa présence constante et pour partager de mes succès et frustrations.

Cette thèse a été financée par Centro de Matemática da Universidade do Minho et par INVOTAN, bourse 4/A/94/PO. J'ai reçu aussi le support du projet PRC-GdR AMI, et des projets portugais SAL, contrat PBIC/C/CEN/1021/92, et AGC, contrat Praxis/2/2.1/Mat/63/94. Je les remercie à tous.

Résumé

Cette thèse est une contribution à l'étude de la structure du treillis des pseudo-variétés de semigroupes, et de la correspondance d'Eilenberg, qui, rappelons-le, associe bijectivement à chaque pseudo-variété de semigroupes une variété de langages.

Dans un premier moment (partie II), nous fixons notre attention sur des sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DS}$ et de $\mathbf{LDG}$. À l'aide de la théorie des opérations implicites, nous calculons *tous* les suprema de la forme $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ où $\mathbf{V}$ est l'une des pseudo-variétés $\mathbf{LI}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$ ou $\mathbf{N}$ et où $\mathbf{W}$ est une sous-pseudo-variété de la pseudo-variété $\mathbf{CR} \textcircled{m} \mathbf{N}$. De plus, nous donnons une description de la structure des semigroupes d'opérations implicites sur diverses pseudo-variétés, plus précisément, $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LDG}$, $\mathbf{R} \cap \mathbf{LDG}$, $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ et $\mathbf{DH} \cap \mathbf{W} \cap \mathbf{ECom}$ — avec $\mathbf{V} = \mathbf{DOH}$, $\mathbf{DRH}$ ou $\mathbf{DH}$, et $\mathbf{W} = \mathbf{LECom}$, $\mathbf{LZE}$, $\mathbf{L}(\mathbf{ZE} \cap \mathbf{CR})$ ou $\mathbf{Com} * \mathbf{D}$. Comme application nous calculons plusieurs suprema impliquant ces dernières pseudo-variétés.

Dans une deuxième phase (partie III), nous nous sommes intéressé aux classes de langages associées. Nous profitons de l'étude précédente, conduite sur les semigroupes d'opérations implicites sur diverses sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DS} \cap \mathbf{LDG}$ pour donner des descriptions combinatoires des classes de langages reconnus par chacune de ces pseudo-variétés. Dans tous les cas, il s'agit de familles définies par des produits de langages très simples, soumis à diverses contraintes. Nous étudions, en outre, quelques classes de langages définies à partir de la notion de langage localement testable par l'introduction de "petites" variations sur cette notion, notamment l'introduction de compteurs et de latéralisation.

On termine ce travail en retournant aux opérations implicites, dans la partie IV. Cette fois on étudie les semigroupes d'opérations implicites sur $\mathbf{LJ}_1$. Il est bien connu que les sous-pseudo-variétés $\mathbf{V}$ de $\mathbf{DS}$ jouissent de bonnes propriétés de factorisation de leurs opérations implicites : chaque opération implicite sur $\mathbf{V}$ peut être écrite comme un produit fini d'opérations explicites et d'opérations implicites regulières sur $\mathbf{V}$. La pseudo-variété $\mathbf{LJ}_1$ n'est pas une sous-pseudo-variété de $\mathbf{DS}$, et elle ne satisfait pas cette propriété de factorisation. Notre étude représente donc une tentative de sortir du cadre des sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DS}$. À partir d'un résultat d'Almeida et Weil nous obtenons une caractérisation qui constitue un progrès mais qui n'est pas encore satisfaisante. Cependant elle permet de déduire quelques propriétés intéressantes et non triviales des semigroupes localement idempotents et localement commutatifs.

Abstract

This thesis is a contribution to the study of the structure of the lattice of pseudovarieties of semigroups, and of Eilenberg's correspondance, which, as one recalls, associates with each pseudovariety of semigroups a unique variety of languages.

We begin (Part II) by fixing our attention on subpseudovarieties of $\mathbf{DS}$ and $\mathbf{LDG}$. We use the theory of implicit operations to compute *all* the joins of the form $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ where $\mathbf{V}$ is one of the pseudovarieties $\mathbf{LI}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$ and $\mathbf{N}$, and $\mathbf{W}$ is a subpseudovariety of $\mathbf{CR} \textcircled{m} \mathbf{N}$. Furthermore, we give a description of the structure of the semigroups of implicit operations on several pseudovarieties, namely, $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LDG}$, $\mathbf{R} \cap \mathbf{LDG}$, $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ and $\mathbf{DH} \cap \mathbf{W} \cap \mathbf{ECom}$ — with $\mathbf{V} = \mathbf{DOH}$, $\mathbf{DRH}$ or $\mathbf{DH}$, and $\mathbf{W} = \mathbf{LECom}$, $\mathbf{LZE}$, $\mathbf{L}(\mathbf{ZE} \cap \mathbf{CR})$ or $\mathbf{Com} * \mathbf{D}$. As an application we derive several join decompositions of pseudovarieties involving these last ones.

Secondly, in Part III we focus on the associated classes of languages. We use the study, mentioned above, conducted on the semigroups of implicit operations on several subpseudovarieties of $\mathbf{DS} \cap \mathbf{LDG}$ to give combinatorial descriptions of the classes of languages recognized by each of these pseudovarieties. In each case, the description is in terms of products of very simple languages, subject to various constraints. We study, moreover, some classes of languages which are obtained by the consideration of several variations around the notion of locally testable language, notably the introduction of counters.

We complete our study by returning to implicit operations, in Part IV. This time we study the semigroups of implicit operations on $\mathbf{LJ}_1$. It is well known that the subpseudovarieties $\mathbf{V}$ of $\mathbf{DS}$ enjoy good properties of factorization of their implicit operations : each implicit operation on $\mathbf{V}$ can be factorized as a finite product of component projections and regular elements. The pseudovariety $\mathbf{LJ}_1$ is not a subpseudovariety of $\mathbf{DS}$, and it does not satisfy this last property of factorization. Our study constitutes therefore an attempt to get out of the lattice of subpseudovarieties of $\mathbf{DS}$. We use a result of Almeida and Weil to obtain a characterization which constitutes a progress but is not entirely satisfactory. Nevertheless it allows us to derive some interesting and non-trivial properties of locally idempotent and locally commutative semigroups.

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

La notion de langage *rationnel* est fondamentale en informatique. Un langage rationnel est obtenu à partir de l'ensemble vide et des lettres d'un alphabet en utilisant un nombre fini de fois trois opérations : l'*union*, le *produit* et le *passage au sous-semigroupe engendré*. L'importance des langages rationnels est révélée dans le fait qu'ils permettent, par exemple, de décrire des algorithmes itératifs et en particulier d'exprimer le fonctionnement des programmes. Ces langages forment la classe la plus élémentaire d'une hiérarchie de langages *naturels* introduite par le linguiste Chomsky [31]. Les divers niveaux de cette hiérarchie sont obtenus par des règles de plus en plus complexes. Elle encloue de plus les langages *"context-free"*, les langages *recursifs* et les langages *recursivement énumérables*.

Une autre notion fondamentale est celle d'*automate fini*, qui constitue le modèle le plus élémentaire qui soit de *machine de Turing*. Ces machines ont été définies par Turing [86] dans les années 1930,— lors de recherches sur la décidabilité,— cherchant à obtenir une formalisation de la notion d'algorithme. On associe à chaque machine de Turing un langage, que l'on dit *reconnu* par la machine. Tous les langages de la hiérarchie de Chomsky sont reconnus par machine de Turing : même les langages recursivement énumérables, ce qui est même leur définition.

Bien que les concepts de langage rationnel et d'automate fini eussent été considérés indépendamment, le théorème de Kleene [47], daté de 1956, a montré les liens très étroits qui existent entre les deux notions. Ce résultat est considéré comme le fondateur de la théorie des langages rationnels et des automates finis, et dit que les langages rationnels sont précisément les langages reconnus par les automates finis.

Il existe une caractérisation algébrique des langages rationnels qui ne fait pas référence aux automates. En fait, on associe à chaque langage L sur un alphabet A un semigroupe appelé le *semigroupe syntaxique* de L. Il s'agit du quotient de A^+, le semigroupe libre sur A, par la congruence la plus grossière qui sature L. On montre qu'un langage est rationnel si et seulement si son semigroupe syntaxique est fini. On peut aussi associer d'une façon assez naturelle à chaque automate fini un semigroupe fini et inversement. Donc, les trois notions d'*automate fini*, de *langage rationnel* et de *semigroupe fini* sont étroitement reliées.

Cette approche algébrique a permis peu à peu de caractériser diverses classes de langages rationnels par des propriétés de leurs semigroupes syntaxiques. On cite trois exemples remarquables qui sont les premiers résultats sur ce sujet. Le premier, obtenu par Schützenberger [66] en 1965, montre que les langages *sans étoile* sont ceux dont le semigroupe syntaxique est fini et *apériodique*. Le second, prouvé par Simon [71] en 1972, dit qu'un langage est *testable par morceaux* si et seulement si son semigroupe syntaxique est fini et $\mathcal{J}$*-trivial*. Finalement, Brzozowski et Simon [30] en 1973, et McNaughton [50] en 1974, ont démontré indépendamment que les langages *localement testables* sont ceux dont le semigroupe syntaxique est fini, *localement idempotent et localement commutatif*.

C'est en 1976 que Eilenberg [34] publie son "théorème des variétés" dont les résultats antérieurs constituent des exemples particuliers. En fait, Eilenberg explicite une correspondance bijective qui existe entre certaines classes de langages rationnels, nommées *variétés de langages*, et certaines classes de semigroupes finis, nommées *pseudo-variétés de semigroupes*. Ainsi, dans le troisième exemple ci-dessus, la classe des langages localement testables constitue une variété de langages, et la pseudo-variété de semigroupes qui lui correspond, notée $\mathbf{LJ}_1$, est la classe des semigroupes finis localement idempotents et localement commutatifs. Dès lors divers autres exemples ont été explicités par des chercheurs comme Branco, Eilenberg, Knast, Perrin, Pin, Schützenberger, Selmi, Straubing, Thérien, Weil et Zalcstein parmi d'autres [19, 29, 34, 48, 54, 58, 63, 67, 68, 73, 74, 75, 79, 89, 91, 94]. On peut trouver beaucoup de ces résultats dans le chapitre de synthèse de Pin [60]. Ce chapitre présente aussi des problèmes ouverts sur les semigroupes syntaxiques et la classification des langages rationnels, tels que des problèmes sur diverses hiérarchies de langages rationnels, notamment la *hiérarchie "star-height"*, la *hiérarchie "dot-depth"*, la *hiérarchie de Straubing* et la *hiérarchie de groupe*.

Un résultat bien connu de Birkhoff montre que les variétés (de semigroupes quelconques) sont définies par des identités. Pour les pseudo-variétés on dispose d'un résultat analogue dû à Reiterman [65], qui a montré qu'elles sont définies par des *pseudo-identités*, c'est-à-dire des égalités formelles entre *opérations implicites*. Une opération implicite sur une pseudo-variété $\mathbf{V}$ est un élément d'un certain semigroupe topologique, dit profini libre et noté $\hat{F}_A(\mathbf{V})$, qui joue le rôle de l'objet $\mathbf{V}$-libre sur l'alphabet A. La théorie des opérations implicites s'est donc révélé d'être un outil très important pour l'étude des pseudo-variétés de semigroupes. Elle a connu un développement assez rapide ces dernières années surtout par les travaux d'Almeida [5, 8, 9, etc], mais elle a gagné beaucoup d'autres adeptes comme Azevedo, Selmi, Trotter, Volkov, Weil et Zeitoun entre autres [14, 15, 16, 17, 21, 23, 69, 84, 85, 87, 90, 96, etc]. La théorie des opérations implicites offre aussi des outils pour trouver une caractérisation combinatoire de la variété de langages associée à une pseudo-variété $\mathbf{V}$ donnée : les langages de cette variété sur un alphabet A peuvent être caractérisés en utilisant les ouverts-fermés de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$.

◇ ◇ ◇

Cette thèse s'inscrit dans ce contexte général. Nous utilisons les développements les plus récents de la théorie des opérations implicites sur trois problèmes distincts. Dans le premier, il s'agit de contribuir à l'étude de la théorie en donnant la description de la structure des semigroupes d'opérations implicites $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ pour plusieurs pseudo-variétés $\mathbf{V}$. Deuxièmement, en nous appuyant sur l'étude antérieure, nous calculons divers exemples de *borne supérieure* (ou *supremum*) de deux pseudo-variétés. Finalement, pour chaque pseudo-variété $\mathbf{V}$ ci-dessus, nous utilisons la description des semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ pour donner une description combinatoire de la variété de langages associée à $\mathbf{V}$.

◇

Dans la description de la structure des semigroupes de la forme $\hat{F}_A(\mathbf{V})$, nous divisons notre travail en deux phases. D'une part nous fixons notre attention sur des sous-pseudo-variétés $\mathbf{V}$ de $\mathbf{DS}$ et de $\mathbf{LDG}$. D'autre part nous étudions les opérations implicites sur $\mathbf{LJ}_1$. La première de ces études est d'une certaine façon la plus facile, puisque les sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DS}$ sont les plus agréables pour la description de leurs opérations implicites. En effet, il est bien connu que chaque opération implicite sur une sous-pseudo-variété $\mathbf{V}$ de $\mathbf{DS}$ peut être écrite comme un produit fini d'opérations explicites et d'opérations implicites regulières sur $\mathbf{V}$. Par contre, la pseudo-variété $\mathbf{LJ}_1$ ne jouit pas de cette propriété. De plus, comme nous le montrerons, $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ admet une chaîne croissante non dénombrable de $\mathcal{J}$-classes, ce qui s'avère être une difficulté supplémentaire pour décrire $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ en termes de propriétés de factorisation de ses éléments.

Dans le premier cas nous nous restreindrons même aux sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DO}$, ce qui facilite encore notre tâche grâce à un résultat d'Azevedo [21] qui caractérise leurs opérations implicites régulières. Nous profitons du résultat d'Azevedo pour donner une caractérisation très agréable des opérations implicites régulières sur des sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}$. Nous montrons que, en particulier, si une telle pseudo-variété $\mathbf{V}$ contient $\mathbf{J}_1$ et $\mathbf{LI}$, alors ses opérations implicites régulières sont caractérisées par leur restriction à $\mathbf{J}_1$, à $\mathbf{LI}$ et à $\mathbf{V} \cap \mathbf{G}$. On remarque que les pseudo-variétés dans l'intervalle $[\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{LI}, \mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}]$ ont une relation intéressante avec les pseudo-variétés de bandes. En effet, Trotter et Weil [85] ont prouvé que la plus grande sous-pseudo-variété $\mathbf{V}$ de $\mathbf{DA}$ telle que $\mathbf{V} \cap \mathbf{B} = \mathbf{NB}$ est $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ} (= \mathbf{DA} \cap \mathbf{LDG})$. En utilisant leurs résultats on peut montrer que $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}$ est la plus grande sous-pseudo-variété de $\mathbf{DO}$ dont l'intersection avec $\mathbf{B}$ est $\mathbf{NB}$. Par conséquent, les pseudo-variétés $\mathbf{V}$ dans l'intervalle $[\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{LI}, \mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}]$ sont précisément les sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DO}$ telles que $\mathbf{V} \cap \mathbf{B} = \mathbf{NB}$.

En dehors des semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$, nous décrivons dans cette thèse les semigroupes d'opérations implicites suivants : $\hat{F}_A(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$, $\hat{F}_A(\mathbf{R} \cap \mathbf{LJ})$, $\hat{F}_A(\mathbf{V} \cap \mathbf{W})$ et $\hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap \mathbf{W} \cap \mathbf{ECom})$ — avec $\mathbf{V} = \mathbf{DOH}$, $\mathbf{DRH}$ ou $\mathbf{DH}$, et $\mathbf{W} = \mathbf{LECom}$, $\mathbf{LZE}$, $\mathbf{L}(\mathbf{ZE} \cap \mathbf{CR})$ ou $\mathbf{Com} * \mathbf{D}$. Les techniques utilisées dans cette étude sont inspirées d'une étude analogue conduite par Almeida et Weil [14, 15] sur les pseudo-variétés $\mathbf{DH} \cap \mathbf{ECom}$. Comme on peut le vérifier, l'opérateur $\mathbf{L}\_$ joue un rôle très important dans ce travail. En fait nous rencontrons dans cette thèse diverses pseudo-variétés localisées : $\mathbf{LDG}$, $\mathbf{LJ}$, $\mathbf{LECom}$, $\mathbf{LZE}$, $\mathbf{L}(\mathbf{ZE} \cap \mathbf{CR})$, $\mathbf{LJ}_1$ et $\mathbf{LI}$. Nous prouvons que tout élément de chacun des semigroupes ci-dessus admet une écriture unique comme produit fini d'opérations explicites et d'opérations implicites regulières. Ces résultats allongent la liste (encore assez courte) des pseudo-variétés dont on connaît des factorisations uniques pour les opérations implicites. Les autres exemples les plus connus sont les pseudo-variétés $\mathbf{J}$ (Almeida [8]), $\mathbf{DH} \cap \mathbf{ECom}$, $\mathbf{DRH}$ (Almeida et Weil [14, 17]) et $\mathbf{J} \cap \mathbf{LJ}_1$ (Selmi [69]).

La pseudo-variété $\mathbf{LJ}_1$ est la pseudo-variété associée par la correspondence d'Eilenberg à la classe des langages localement testables. Un résultat de Medvedev [51] dit que tout langage rationnel est image homomorphe d'un langage localement testable. En outre, un résultat de Chomsky et Schützenberger [32] montre que tout langage context-free peut être caractérisé en utilisant les langages *locaux* (qui forment une sous-classe des langages localement testables). Du fait de leur importance, les langages localement testables, et la pseudo-variété $\mathbf{LJ}_1$, ont été très étudiés. On citera par exemple les travaux de Brzozowski, Kim, McCloskey, McNaughton, Simon, Trahtman et Zalcstein [30, 45, 46, 50, 82, 83, 94, 95]. Notre étude des semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ tente de jeter une lumière nouvelle sur ce sujet. Malheureusement elle n'a pas eu le même succès que l'étude conduite sur les sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}$. Cependant, à partir d'un résultat d'Almeida et Weil sur les opérations implicites sur des produits semi-directs de la forme $\mathbf{J}_1 * \mathbf{V}$, nous avons obtenu une nouvelle caractérisation des semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ qui permet une visualisation (graphique) de leurs éléments. On montre, en particulier, qu'on peut décider effectivement l'égalité entre deux opérations implicites *de type* $(2,1)$: si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est un alphabet, on dit qu'un élément x de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ est une *opération implicite de type* $(2,1)$ si on peut construire x à partir des projections $a_1, \ldots, a_n$ en utilisant un nombre fini de fois deux opérations : l'opération binaire de multiplication et l'opération unaire $y \mapsto y^\omega$. Ces éléments constituent une partie infime de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ mais ils sont utiles, par exemple, pour la construction d'exemples.

◇

Notre deuxième sujet d'étude est le calcul du supremum $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ de deux pseudo-variétés, c'est-à-dire est le calcul de la plus petite pseudo-variété qui contient à la fois $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$. Malgré la simplicité de leur définition, le calcul de pseudo-variétés de la forme $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ est normalement très difficile. Par exemple, Albert, Baldinger et Rhodes [1] ont exhibé de façon surprenante deux pseudo-variétés décidables dont le supremum ne l'est pas. Avant le développement de la théorie des opérations implicites par Almeida, relativement peu de résultats sur ce sujet étaient connus. Grâce à l'utilisation des opérations implicites, cette situation a changé significativement. Les premiers succès sont dûs à Almeida (le calcul de $\mathbf{Com} \vee \mathbf{G}$, par exemple) et Almeida et Azevedo (le calcul de $\mathbf{R} \vee \mathbf{L}$, par exemple), mais plus récemment beaucoup d'autres calculs ont été obtenus par les mêmes auteurs et par Weil et Zeitoun [2, 4, 5, 11, 13, 14, 15, 17, 22, 23, 96, 97].

Cette fois encore, notre travail est divisé en deux phases. D'une part, nous donnons une description de toutes les pseudo-variétés du type $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ où $\mathbf{V}$ est l'une des pseudo-variétés $\mathbf{LI}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$ ou $\mathbf{N}$ et où $\mathbf{W}$ est une sous-pseudo-variété de la pseudo-variété $\mathbf{CR} ⓜ \mathbf{N}$. Le résultat obtenu généralise un bon nombre de résultats déjà connus, notamment le calcul de $\mathbf{V} \vee \mathbf{B}$, $\mathbf{V} \vee \mathbf{J}_1$, $\mathbf{V} \vee \mathbf{G}$, $\mathbf{V} \vee \mathbf{Ab}$ et $\mathbf{N} \vee \mathbf{CR}$. De plus, ce résultat est extrêmement naturel : nous montrons que si $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{CR} ⓜ \mathbf{N}$ est définie par un ensemble de pseudo-identités Σ et si a, b sont des symboles n'apparaissant pas dans Σ, alors $\mathbf{LI} \vee \mathbf{W}$ est la sous-pseudo-variété de $\mathbf{CR} \circledcirc \mathbf{N}$ définie par les pseudo-identités de la forme $a^\omega u b^\omega = a^\omega v b^\omega$ où $u = v \in \Sigma$. Ainsi sont préservées les propriétés de rang fini et de base finie. On peut espérer que les techniques utilisées seront réutilisables pour d'autres calculs.

D'autre part, nous profitons de l'étude conduite sur les semigroupes d'opérations implicites de certaines sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}$ pour obtenir diverses décompositions du type $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ où $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ sont des pseudo-variétés impliquées dans cette étude. Nous montrons, par exemple, que $(\mathbf{DRG} \cap \mathbf{LZE}) \vee (\mathbf{DLG} \cap \mathbf{LZE}) = (\mathbf{DRG} \vee \mathbf{DLG}) \cap \mathbf{LZE} = \mathbf{DO} \cap \mathbf{LZE}$.

◇

Le troisième sujet de notre étude est la classification des langages rationnels. Dans un premier temps, nous donnons des descriptions combinatoires des variétés de langages associées aux sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}$ considérées dans l'étude conduite sur les semigroupes d'opérations implicites. Plus précisément, pour chaqu'une de ces pseudo-variétés $\mathbf{V}$, et pour chaque alphabet A, nous exhibons un ensemble de langages de A^+ qui engendre (comme algèbre de Boole) la classe $\mathcal{V}(A^+)$ des langages de A^+ reconnus par $\mathbf{V}$. À part les cas $\mathbf{V} = \mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}$ et $\mathbf{V} = \mathbf{R} \cap \mathbf{LJ}$, les générateurs sont des langages assez simples. Selon la pseudo-variété $\mathbf{V}$ considérée, ils sont du type $u_0 A_1^* \cdots A_{l-1}^* u_{l-1} L_l u_l A_{l+1}^* \cdots A_n^* u_n$ ou du type $u_0 A_1^+ \cdots A_{l-1}^+ u_{l-1} L_l u_l A_{l+1}^+ \cdots A_n^+ u_n$, où $n \in \mathbb{N}_0$, les u_i sont des mots de A^*, L_l est un langage de groupe sur A_l (si $\mathbf{V}$ est apériodique, alors $L_l = A_l^*$ ou $L_l = A_l^+$, respectivement) et les A_i sont des sous-alphabets non vides de A. Les classes $\mathcal{V}(A^+)$ sont décrites, de plus, par l'imposition de certaines contraintes sur les u_i et les A_i. Notons qu'on rencontre dans la litérature de nombreuses variétés de langages décrites comme combinaisons booléenes de langages d'une des formes ci-dessus. Par exemple, les langages testables par morceaux (Simon [72]), les langages $\mathcal{R}$-triviaux (Eilenberg [34]) et les langages de niveau 2 dans la hiérarchie de Straubing (Pin et Straubing [61]). Ces résultats ainsi que les cas apériodiques de notre étude sont résumés dans trois tableaux comparatifs dans l'annexe B.

Ensuite nous étudions des classes définies à partir de la notion de langage localement testable par l'introduction de certaines variations sur cette notion. Rapellons qu'un langage L est localement testable si on peut décider l'appartenance d'un mot u à L en considérant les facteurs de u d'une longueur fixée k et ses préfixes et suffixes de longueur $< k$. Beauquier et Pin [26] et Pin [59] ont étudié les classes de langages obtenues par l'introduction des trois modifications suivantes : suppression des conditions sur les préfixes et les suffixes ; considération des facteurs de u d'une longueur fixée k, mais en tenant compte de leur nombre d'occurrences jusqu'à un certain seuil $t \in \mathbb{N}_0$; suppression des conditions sur les préfixes et les suffixes dans cette dernière définition. Dans ce travail nous introduisons autres modifications. D'une part, nous considérons une version "latéralisée" du travail de Beauquier et Pin, en supprimant juste la condition sur les suffixes (resp. sur les préfixes). D'autre part, on considére les facteurs d'un mot u d'une longueur fixée k, mais en comptant leur multiplicité modulo n (pour un certain entier

$n \in \mathbb{N}$) au seuil t (pour un $t \in \mathbb{N}_0$). Sur cette dernière définition on considère encore la suppression des conditions sur les préfixes et/ou les suffixes. Les résultats obtenus sont naturels, après ceux de Beauquier et Pin, et les techniques utilisées sont les mêmes que celles de ces auteurs. Certaines des classes de langages considérées ne constituent pas des variétés de langages. Notre dernier travail consiste dans le calcul de la plus petite (resp. grande) variété de langages qui contient (resp. qui est contenue dans) ces classes de langages.

◇ ◇ ◇

Après ce chapitre introductif, la thèse est constituée de neuf chapitres et deux annexes, divisés en cinq parties. La première partie est destinée à introduire les notions et notations de base, ainsi que les résultats non originaux dont nous aurons besoin. La suite de la thèse est constituée pour l'essentiel de résultats originaux. Dans la deuxième partie nous étudions les opérations implicites sur des sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}$, et effectuons diverses calculs de pseudo-variétés de la forme $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$. La troisième partie est entièrement consacrée aux langages. Dans la quatrième partie nous étudions les opérations implicites sur $\mathbf{LJ}_1$. Finalement, dans la cinquième partie nous présentons deux annexes récapitulatives. Le contenu des chapitres est le suivant.

Chapitre 1. Contient les notions et notations de base utilisées dans cette thèse, ainsi que les résultats les plus élémentaires des théories des semigroupes, des langages et des automates.

Chapitre 2. Contient les définitions et les principaux résultats sur les variétés de semigroupes, pseudo-variétés de semigroupes et variétés de langages.

Chapitre 3. Présente une synthèse de résultats généraux sur la théorie des opérations implicites et semigroupes profinis libres. La présentation suit de près l'exposé d'Almeida et Weil [15] sur ce sujet.

Chapitre 4. Nous y calculons une pseudo-variété quelconque de la forme $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ où $\mathbf{V}$ est l'une de $\mathbf{LI}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$ ou $\mathbf{N}$ et où $\mathbf{W}$ est une sous-pseudo-variété de la pseudo-variété $\mathbf{CR} \textcircled{m} \mathbf{N} = [\![ab^\omega c = (ab^\omega c)^{\omega+1}]\!]$.

Chapitre 5. Nous y donnons une description de la structure des semigroupes d'opérations implicites sur les pseudo-variétés $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LDG}$, $\mathbf{R} \cap \mathbf{LDG}$, $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ et $\mathbf{DH} \cap \mathbf{W} \cap \mathbf{ECom}$ — avec $\mathbf{V} = \mathbf{DOH}$, $\mathbf{DRH}$ ou $\mathbf{DH}$, et $\mathbf{W} = \mathbf{LECom}$, $\mathbf{LZE}$, $\mathbf{L}(\mathbf{ZE} \cap \mathbf{CR})$ ou $\mathbf{Com} * \mathbf{D}$. Comme application nous calculons plusieurs suprema de pseudo-variétés, impliquant ces dernières pseudo-variétés.

Chapitre 6. Contient les descriptions combinatoires des classes de langages associées à chacune des pseudo-variétés étudiées dans le chapitre 5.

Chapitre 7. On y étudie diverses variations sur la notion de langage localement testable.

Chapitre 8. On y montre qu'on peut décider effectivement l'égalité entre deux opérations implicites de type $(2,1)$ sur la pseudo-variété $\mathbf{LJ}_1$.

Chapitre 9. Nous y étudions les opérations implicites (quelconques) sur $\mathbf{LJ}_1$.

Annexe A. Nous y évoquons quelques prolongements possibles de ce travail.

Annexe B. On y présente trois tableaux comparatifs, contenant quelques-unes des caractérisations syntaxiques de variétés de langages (nous nous restreindrons aux langages apériodiques) obtenues dans ce travail ainsi que d'autres déjà connues.

Première partie

Préliminaires

Chapitre 1

Semigroupes, Langages et Automates

Ce chapitre est destiné à introduire les notions et notations qui serviront de base à ce travail. Dans une première partie nous rappelons quelques définitions sur les algèbres en général. Ensuite, nous rappelons aussi les résultats introductifs des théories des semigroupes, des automates et des langages, et exposons quelques connexions qui existent entre les trois théories. Du fait de leur importance les relations de Green seront exposées dans une section propre. Les résultats sur les mots seront aussi détachés dans une section, où outre les mots finis nous définissons aussi les mots infinis unilatères (à gauche et à droite) et les mots biinfinis. Les mots infinis unilatères nous accompagneront dans toute la suite, tandis que les mots biinfinis seront utilisés seulement aux chapitres 8 et 9.

En général nous ne présentons pas les preuves. On pourra se reporter à [57] ou [44] en ce qui concerne les semigroupes et les relations de Green, à [49] ou [55] en ce qui concerne les mots et à [57] ou [34] pour les langages.

1.1 Notations générales

Les notations et conventions de base que nous embrassons dans cette thèse sont, en général, bien connues et les plus usuelles. Cependant, il est convenable de préciser certaines notations que nous utiliserons pendant ce travail.

L'ensemble des entiers relatifs (resp. strictement positifs, strictement négatifs) sera noté $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{N}$, $-\mathbb{N}$) et on pose $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Nous utiliserons normalement les lettres A, B et C pour noter les ensembles et $a, b, c, d, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ pour noter les éléments d'un ensemble (et, en particulier, les variables). Les lettres x, y, z désigneront normalement des éléments d'une algèbre.

La cardinalité d'un ensemble A sera notée $|A|$.

Le complément d'un sous-ensemble A d'un ensemble B est noté $B \backslash A$.

On dira que deux ensembles A et B sont $\subseteq$-comparables si $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.

Une *relation* sur un ensemble A est une partie de $A \times A$. Si R est une relation sur A, on dit que deux éléments x et y de A sont R-*équivalents* si $(x, y) \in R$, ce qu'on notera d'habitude $x \, R \, y$. La relation R est dite

- *réflexive* si, pour tout $a \in A$, $a \, R \, a$;
- *symétrique* si, pour tous $a, b \in A$, $a \, R \, b$ entraîne $b \, R \, a$;
- *antisymétrique* si, pour tous $a, b \in A$, $a \, R \, b$ et $b \, R \, a$ entraînent $a = b$;
- *transitive* si, pour tous $a, b, c \in A$, $a \, R \, b$ et $b \, R \, c$ entraînent $a \, R \, c$;
- *relation de préordre* (on dit aussi *préordre* ou *préordre partiel*) si elle est réflexive et transitive ;
- *relation d'ordre* (on dit aussi *ordre* ou *ordre partiel*) si elle est réflexive, antisymétrique et transitive ;
- *relation d'équivalence* (ou simplement une *équivalence*) si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Si R est une relation de préordre sur un ensemble A, la relation $\sim$ sur A définie par

$$a \sim b \qquad \text{si et seulement si} \qquad a \, R \, b \ \text{ et } \ b \, R \, a$$

est une relation d'équivalence, appelée la *relation d'équivalence associée* à R.

Si R est une relation d'équivalence sur un ensemble A et $a \in A$, la *classe d'équivalence* de a modulo R est l'ensemble

$$a/R = \{b \in A \mid a \, R \, b\}.$$

On note A/R l'ensemble des R-classes d'équivalence, c'est-à-dire,

$$A/R = \{a/R \mid a \in A\}.$$

L'*indice* d'une relation d'équivalence est son nombre de classes d'équivalence.

Nous adoptons la convention de noter les applications à gauche. Ainsi, si $f : A \to B$ est une application entre deux ensembles, l'image de $a \in A$ par f est notée $f(a)$ et, si $g : B \to C$ est une autre application, alors la composition de f et g est l'application $g \circ f : A \to C$ telle que $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ pour tout $a \in A$. En général on notera les morphismes par des lettres grecques.

1.2 Rudiments d'algèbre universelle

Le but de cette section est d'introduire la notion d'algèbre, d'un point de vue le plus global possible, et ensuite de présenter les classes d'algèbres qui nous rencontrerons dans la suite (telles que semigroupes, monoïdes, treillis, etc). On introduit aussi les concepts (tels que morphisme, congruence, produit direct, etc) qui sont définis d'une façon similaire pour toutes ces classes. Les définitions qui suivent sont tirés de [9].

1.2.1 Algèbres

Un *type d'algèbres* est une paire $\tau = (\mathcal{O}, \alpha)$ où $\mathcal{O}$ est un ensemble de *symboles d'opération* et $\alpha : \mathcal{O} \to \mathbb{N}_0$ est une application qui associe à chaque symbole d'opération son *arité*. Un symbole d'arité n est dit n-aire. En particulier, les symboles d'arité 0, 1 et 2 seront dits, respectivement, *constants, unaires* et *binaires*. L'ensemble de tous les symboles n-aires de $\mathcal{O}$ sera noté $\mathcal{O}_n$.

Une *algèbre de type* τ est un couple $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F})$ où A est un ensemble non vide, appelé l'*univers* de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{F}$ est une fonction qui associe à chaque symbole d'opération n-aire f de $\mathcal{O}$, une application $f^{\mathcal{A}}$ de A^n dans A. Si l'algèbre est sous-entendue on notera simplement f au lieu de $f^{\mathcal{A}}$. Si l'ensemble $\mathcal{O} = \{f_1, \ldots, f_k\}$ est fini on notera simplement $\mathcal{A} = (A, f_1, \ldots, f_k)$ et on dira que $\mathcal{A}$ est une algèbre de type $(n_1, \ldots, n_k)$ où n_i est l'arité de f_i. Si l'arité de chaque symbole est sous-entendue on omettra même cette dernière information.

Une algèbre sera dite *triviale, finie* ou *infinie* selon que son univers est un ensemble, respectivement, à un élément, fini ou infini. On confondra souvent une algèbre et son univers. Voyons maintenant quelques exemples qui nous utiliserons dans la suite.

• Semigroupes

Un *semigroupe* est une algèbre $(S, \cdot)$ de type (2) (c'est-à-dire que $\cdot$ est une opération binaire sur S) dans laquelle

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \tag{1.1}$$

pour tous $x, y, z \in S$. Autrement dit, $(S, \cdot)$ est une algèbre de type (2) dont l'opération $\cdot$ est associative.

• Monoïdes

Un *monoïde* est un semigroupe $(M, \cdot)$ possédant un élément *neutre*, c'est-à-dire, un élément $1 \in M$ tel que

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x \tag{1.2}$$

pour tout $x \in M$. Or, dans un semigroupe donné il y a au plus un élément neutre. On peut donc interpréter un monoïde comme étant une algèbre $(M, \cdot, 1)$ de type $(2, 0)$ qui satisfait les égalités (1.1) et (1.2) pour tous $x, y, z \in M$.

• Groupes

Pour des raisons similaires à celles présentées pour les monoïdes, on définit un *groupe* comme étant une algèbre $(G, \cdot, 1, {}^{-1})$ de type $(2, 0, 1)$ qui satisfait (1.1), (1.2) et

$$x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$$

pour tous $x, y, z \in G$. Dans un groupe, les éléments x et x^{-1} sont dits *inverses* l'un de l'autre.

Notation : En général, dans un semigroupe S (qui, en particulier, peut être un monoïde ou un groupe), on notera

– l'élément neutre éventuel par 1 ou par 1_S ;
– xy au lieu de $x \cdot y$;
– x^n ($x \in S, n \in \mathbb{N}$) le produit $x \cdot \ldots \cdot x$ de n éléments tous égaux à x. ■

• **Treillis**

Un *treillis* est une algèbre $(T, \vee, \wedge)$ de type $(2, 2)$ dont les opérations vérifient les lois : associative, commutative, d'idempotence et de d'absorbtion ; i.e.,

$$\begin{aligned} x \vee (y \vee z) &= (x \vee y) \vee z, & x \wedge (y \wedge z) &= (x \wedge y) \wedge z \\ x \vee y &= y \vee x, & x \wedge y &= y \wedge x \\ x \vee x &= x, & x \wedge x &= x \\ x \vee (x \wedge y) &= x, & x \wedge (x \vee y) &= x \end{aligned}$$

pour tous $x, y, z \in T$. Il est bien connu qu'un treillis induit un ordre partiel sur son univers tel que deux éléments quelconques admettent une borne supérieure et une borne inférieure, et inversement un ordre partiel qui satisfait ces conditions définit un treillis.

• **Algèbres de Boole**

Une *algèbre de Boole* est une algèbre $(B, \vee, \wedge, \ ', 0, 1)$ de type $(2, 2, 1, 0, 0)$ telle que $(B, \vee, \wedge)$ est un treillis *distributif*, i.e., qui satisfait les égalités

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{aligned}$$

pour tous $x, y, z \in B$, et telle que les restantes opérations satisfont

$$\begin{aligned} x \vee 1 &= 1, & x \vee x' &= 1 \\ x \wedge 0 &= 0, & x \wedge x' &= 0 \end{aligned}$$

pour tout $x \in B$. Comme exemple d'une algèbre de Boole fondamental on peut citer l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des parties d'un ensemble A, muni des opérations binaires d'union et d'intersection, de l'opération unaire de complémentation et de deux constantes qui sont l'ensemble vide et le propre A.

1.2.2 Sous-algèbres, morphismes, congruences, produits directs

Maintenant, nous introduisons quelques concepts qui peuvent être définis d'une façon similaire pour toutes les classes d'algèbres d'un même type. Nous ne prétendons pas être exhaustifs puisque nous travaillerons plutôt avec des semigoupes et, donc, nous laisserons pour les prochaines sections la plupart des notions spécifiques aux semigroupes dont nous aurons besoin.

• **Sous-algèbres**

Soient $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F})$ et $\mathcal{B} = (B, \mathcal{G})$ deux algèbres de type $\tau = (\mathcal{O}, \alpha)$. Nous disons que $\mathcal{B}$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{A}$ si B est un sous-ensemble de A et si toute opération de $\mathcal{B}$ est la restriction de l'opération correspondante de $\mathcal{A}$, autrement dit, si pour tous $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in \mathcal{O}_n$ et $a_1, \ldots, a_n \in B$, on a

$$f^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n).$$

Notons que toute intersection d'univers de sous-algèbres de $\mathcal{A}$ est encore l'univers d'une sous-algèbre de $\mathcal{A}$. On peut donc définir la sous-algèbre de $\mathcal{A}$ *engendrée* par un ensemble $B \subseteq A$, tel que $B \cup \mathcal{O}_0 \neq \emptyset$, comme étant la sous-algèbre de $\mathcal{A}$ dont l'univers est le plus petit qui contient B. Dans ce cas, l'ensemble B est appelé l'ensemble *générateur* (on dit aussi que B est un ensemble de générateurs). Une algèbre est dite *finiment engendrée* si elle admet un ensemble fini de générateurs.

• Morphismes

Soient $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F})$ et $\mathcal{B} = (B, \mathcal{G})$ deux algèbres de type $\tau = (\mathcal{O}, \alpha)$. Un *morphisme* de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ est une application $\varphi : A \to B$ telle que, pour tous $f \in \mathcal{O}_n$ et $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$\varphi(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)).$$

En outre, nous disons que :

– $\mathcal{A}$ est *isomorphe* à $\mathcal{B}$, et on note $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, s'il existe un morphisme bijectif φ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$. Dans ce cas, on dit que φ est un *isomorphisme* ;
– $\mathcal{B}$ est un *quotient* de $\mathcal{A}$ s'il existe un morphisme surjectif de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$;
– $\mathcal{B}$ *divise* $\mathcal{A}$, et on note $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$, si $\mathcal{B}$ est un quotient d'une sous-algèbre de $\mathcal{A}$.

On montre facilement que la relation $\prec$ est transitive. En général nous identifierons deux algèbres isomorphes.

• Congruences

Une *congruence* sur une algèbre $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F})$ est une relation d'équivalence R sur son univers A telle que, pour tout $f \in \mathcal{O}_n$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$, on a

$$a_1 \, R \, b_1, \ldots, a_n \, R \, b_n \Longrightarrow f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \, R \, f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Si R est une congruence sur une algèbre $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F})$ de type τ, l'ensemble A/R muni des opérations

$$f^{\mathcal{A}/R}(a_1/R, \ldots, a_n/R) = f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)/R$$

où $f \in \mathcal{O}_n$ et $a_1, \ldots, a_n \in A$, est bien une algèbre de type τ, appelée l'*algèbre quotient* de $\mathcal{A}$ par R et notée $\mathcal{A}/R$.

L'application naturelle

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A}/R \\ & a & \mapsto & a/R \end{array}$$

est bien sûr un morphisme surjectif, et est appelée la *projection canonique* de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}/R$.

Comme exemple classique de congruence, on peut présenter la congruence nucléaire : si φ est un morphisme entre deux algèbres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, alors la relation sur A

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid \varphi(a_1) = \varphi(a_2)\}$$

est une congruence, appelée la *congruence nucléaire* sur $\mathcal{A}$ associée à φ.

On peut maintenant énoncer un résultat classique.

Proposition 1.2.1 (théorème du morphisme) *Soit $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphisme et soit $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\operatorname{Ker}\varphi$ la projection canonique. Alors, il existe un unique morphisme $\psi : \mathcal{A}/\operatorname{Ker}\varphi \to \mathcal{B}$ tel que $\varphi = \psi \circ \pi$. De plus, ψ est un isomorphisme de $\mathcal{A}/\operatorname{Ker}\varphi$ sur $\varphi(\mathcal{A})$.* $\square$

Nous utiliserons aussi le résultat suivant.

Proposition 1.2.2 *Soient $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ deux morphismes avec φ surjectif. Alors, il existe un unique morphisme $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ tel que $\pi = \psi \circ \varphi$ si et seulement si $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\pi$.* $\square$

• Produit direct

Étant donnée une famille $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ d'algèbres de type τ, leur *produit direct* est l'algèbre $\mathcal{B} = \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$ de type τ, dont l'univers est le produit cartésien $\prod_{i\in I} A_i$ des univers des algèbres $\mathcal{A}_i$, pour laquelle on définit, pour $f \in \mathcal{O}_n$, $b_1, \ldots, b_n \in \prod_{i\in I} A_i$ et $j \in I$,

$$f^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n)(j) = f^{\mathcal{A}_j}(b_1(j), \ldots, b_n(j)).$$

Pour chaque $j \in I$, la *projection sur la composante d'index j* est le morphisme

$$\begin{array}{rccc} p_j : & \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i & \to & \mathcal{A}_j \\ & b & \mapsto & b(j). \end{array}$$

Dans le cas où $I = \{1, \ldots, n\}$ avec $n \in \mathbb{N}$, on notera en général $\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$ au lieu de $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

1.2.3 Algèbres libres, termes

Nous introduisons maintenant les notions d'algèbre libre et de terme, en commençant par cette dernière.

• Termes

Soit $\tau = (\mathcal{O}, \alpha)$ un type d'algèbres et soit A un ensemble tel que $A \cup \mathcal{O}_0 \neq \emptyset$, dont les éléments sont appelés *variables*. L'ensemble $T(A)$ des *termes* de type τ est le plus petit ensemble tel que

– $A \cup \mathcal{O}_0 \subseteq T(A)$;
– si $t_1, \ldots, t_n \in T(A)$ et $f \in \mathcal{O}_n$, alors $f(t_1, \ldots, t_n) \in T(A)$.

La notation $t = t(a_1, \ldots, a_n)$ sera utilisée pour indiquer que dans le terme t occurent, au plus, les variables $a_1, \ldots, a_n$.

L'ensemble $T(A)$ est muni naturellement d'une structure $\mathcal{T}(A)$ d'algèbre de type τ en posant, pour tout $f \in \mathcal{O}_n$ et $t_1, \ldots, t_n \in T(A)$,

$$f^{\mathcal{T}(A)}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n).$$

L'algèbre $\mathcal{T}(A)$ est appelée *l'algèbre des termes de type τ sur A.*

• Algèbres libres

À partir d'ici on utilise la même notation pour une algèbre et son univers.

Soit $\mathcal{C}$ une classe d'algèbres de type τ et soit F une algèbre de type τ engendrée par un ensemble A. On dit que F satisfait la *propriété universelle pour $\mathcal{C}$ sur A* si pour tout $C \in \mathcal{C}$ et pour toute application $\varphi : A \to C$ il existe un (unique) morphisme $\bar{\varphi} : F \to C$ qui prolonge φ, autrement dit, tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota"'] & & C \\ & F \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif, où ι est l'application d'inclusion de A sur F. L'algèbre F est ditte *librement engendrée par A* et A est appelé un ensemble de *générateurs libres de F*.

Il est bien connu que, si F_1 et F_2 sont deux algèbres qui satisfont la propriété universelle pour $\mathcal{C}$ sur A telles que $F_1, F_2 \in \mathcal{C}$, alors F_1 et F_2 sont isomorphes.

À partir d'ici on assume que $A \cup \mathcal{O}_0 \neq \emptyset$.

Théorème 1.2.3 *Soit $\mathcal{C}$ la classe de toutes les algèbres de type τ sur A. L'algèbre des termes de type τ sur A satisfait la propriété universelle pour $\mathcal{C}$ sur A.* □

On définit une congruence sur $T(A)$ associée à la classe $\mathcal{C}$ en posant

$$\begin{aligned} \theta_{\mathcal{C}}(A) &= \bigcap\{\rho \mid \rho \text{ est une congruence sur } T(A) \text{ telle que } T(A)/\rho \\ &\qquad \text{est isomorphe à une sous-algèbre d'une algèbre de } \mathcal{C}\} \\ &= \bigcap\{\operatorname{Ker}\varphi \mid \varphi \text{ est un morphisme de } T(A) \text{ sur } C \in \mathcal{C}\}. \end{aligned}$$

On note $\bar{A} = A/\theta_{\mathcal{C}}(A)$ et $F_{\bar{A}}(\mathcal{C}) = T(A)/\theta_{\mathcal{C}}(A)$. L'algèbre $F_{\bar{A}}(\mathcal{C})$ est appelée l'*algèbre $\mathcal{C}$-libre sur $\bar{A}$.*

Théorème 1.2.4 (Birkhoff) *L'algèbre $F_{\bar{A}}(\mathcal{C})$ satisfait la propriété universelle pour $\mathcal{C}$ sur $\bar{A}$.* □

Notons que, lorsque $\mathcal{C}$ n'est pas triviale, les ensembles A et $\bar{A}$ sont en bijection d'après le théorème 1.2.3. Dans ce cas nous identifierons A et $\bar{A}$.

1.3 Semigroupes

Dans cette section nous introduisons les définitions et notations de base concernant les semigroupes dont nous aurons besoin dans la suite.

Définitions

Dans un semigroupe donné il y a au plus un élément neutre. Si S est un semigroupe sans tel élément, si on ajoute à l'ensemble S un élément 1 et on définit, pour tout $s \in S$,

$$s1 = 1s = s \qquad \text{et} \qquad 11 = 1$$

alors, $S \cup \{1\}$ est un monoïde. Nous utiliserons la notation S^1 avec la signification suivante :

$$S^1 = \begin{cases} S & \text{si } S \text{ a élément neutre} \\ S \cup \{1\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous disons qu'un élément z d'un semigroupe S est un *zéro à gauche* si, pour tout $x \in S$,

$$zx = z.$$

La notion de *zéro à droite* est définie dualement. Le *zéro* (habituellement noté 0) d'un semigroupe, s'il existe, est l'unique élément qui est à la fois zéro à gauche et zéro à droite.

Un élément e d'un semigroupe S est *idempotent* si $e^2 = e$. Notons que l'élément neutre et le zéro d'un semigroupe, s'ils existent, sont idempotents. On notera $E(S)$ l'ensemble des idempotents de S.

Un semigroupe qui possède un seul idempotent, cet idempotent étant un zéro, est dit *nilpotent*. Un semigroupe S est dit *commutatif* si, pour tous $x, y \in S$, $xy = yx$. Un semigroupe dans lequel tout élément est idempotent est dit *idempotent* ou une *bande*. Une bande commutative est dite un *demi-treillis*.

L'exemple fondamental d'un demi-treillis est le monoïde $U_1 = \{0, 1\}$ à deux éléments muni du produit $00 = 01 = 10 = 0$ et $11 = 1$.

Si A et B sont des sous-ensembles d'un semigroupe S, on note

$$AB = \{ab \in S \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Pour un élément $b \in S$, on écrira simplement Ab (resp. bA) au lieu de $A\{b\}$ (resp. $\{b\}A$). L'ensemble $\mathcal{P}(S)$ des parties de S muni de la multiplication ci-dessus est un semigroupe, que l'on appelle *semigroupe des parties* de S.

Rappelons qu'un sous-ensemble non vide T d'un semigroupe S est dit un *sous-semigroupe* de S, si $T^2 \subseteq T$. Par abus de langage, un sous-semigroupe de S qui est un groupe sera dit un *sous-groupe* de S. Cet abus est toutefois inoffensif puisque, si un sous-semigroupe d'un groupe est un groupe, alors il est aussi un sous-semigroupe au sens de la section antérieure.

Si A est un ensemble non vide on note $\mathcal{T}_A$ le semigroupe des applications de A dans A, muni de la composition des applications. Un semigroupe est dit un *semigroupe d'applications* s'il est un sous-semigroupe de $\mathcal{T}_A$, pour un ensemble A. Le résultat suivant, qui est l'analogue du théorème de Cayley pour les groupes, montre que tout semigroupe est un semigroupe d'applications.

Théorème 1.3.1 *Si S est un semigroupe et $A = S^1$, alors S est un sous-semigroupe de $\mathcal{T}_A$.* □

Soit S un semigroupe et soit A une partie non vide de S. Le sous-semigroupe de S engendré par A consiste de tous les éléments de S qui peuvent être écrits dans la forme $x_1 x_2 \cdots x_n$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$. D'intérêt particulier est le cas dans lequel l'ensemble de générateurs est un singleton.

Proposition 1.3.2 *Soit S un semigroupe* monogène, *i.e., S est engendré par un élément x. Alors, ou bien S est isomorphe au semigroupe additif $\mathbb{N}$, ou bien S est fini. Dans ce dernier cas, il existe des entiers uniques $i \in \mathbb{N}_0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que*

$$S = \{x, x^2, \ldots, x^i, \ldots, x^{i+p-1}\},$$

$x^{i+p} = x^i$ et $x^k \neq x^m$ pour tous $1 \leq k < m \leq i + p - 1$.

En outre, $K_x = \{x^i, \ldots, x^{i+p-1}\}$ est un groupe dont l'élément neutre, que l'on note x^ω, est l'unique idempotent de S. □

Les nombres i et p de la proposition antérieure sont dits, respectivement, *l'indice* et *la période* de x. Le semigroupe $\{x, \ldots, x^{i+p-1}\}$ sera noté $\mathbb{Z}_{p,i}$.

Corollaire 1.3.3 *Tout semigroupe fini contient au moins un idempotent.* □

On dira qu'un semigroupe fini S est *apériodique* si, pour tout $s \in S$,

$$s^\omega = s^{\omega+1}$$

où $s^{\omega+1} = s^\omega s = s s^\omega$. Notons que, d'après la proposition 1.3.2, cela revient à dire que tous les sous-groupes de S sont triviaux.

La proposition 1.3.2 montre aussi que tout semigroupe fini S admet un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que s^k est idempotent pour tout $s \in S$. En effet, d'après la proposition, tout élément $s \in S$ a une puissance s^{n_s} idempotente. Alors, si on prend pour k un multiple commun de tous les n_s ($s \in S$), on vérifie que s^k est idempotent pour tout $s \in S$. Un entier qui vérifie cette propriété est appelé un *exposant* de S.

Le résultat suivant donne une idée de l'abondance d'idempotents dans un semigroupe fini.

Proposition 1.3.4 *Soit S un semigroupe fini et soit $n \geq |S|$. Alors, $S^n = SE(S)S$.* □

Idéaux

Soit S un semigroupe. Un sous-ensemble non vide I de S est un *idéal (*resp. *idéal à gauche, idéal à droite)* de S, si

$$S^1IS^1 = I \text{ (resp. } S^1I = I,\ IS^1 = I).$$

Comme on peut le vérifier, une partie non vide I de S est un idéal si et seulement si c'est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite.

Un idéal I d'un semigroupe S est appelé *minimal* si, pour tout idéal J de S,

$$J \subseteq I \Rightarrow J = I,$$

autrement dit, si I est un idéal minimal pour la relation d'inclusion. Notons qu'un idéal minimal, s'il existe, est unique. En effet, si I et J sont deux idéaux minimaux de S, alors IJ est un idéal de S qui est contenu à la fois dans I et dans J, d'où $I = IJ = J$.

L'existence d'un idéal minimal est assurée dans deux cas importants.

Exemples 1.3.5
(1) *Si S est un semigroupe fini, alors S admet un idéal minimal (dont on montre facilement qu'il est le produit de tous les idéaux de S).*
(2) *Si S est un semigroupe avec zéro, alors $\{0\}$ est l'idéal minimal de S.* ■

Congruences

Outre la congruence nucléaire, il faut connaître deux autres types de congruences qui sont beaucoup utilisées dans les théories de langages et de semigroupes.

• Congruence de Rees

Si I est un idéal d'un semigroupe S, l'équivalence $\equiv_I$ définie sur S par

$$x \equiv_I y \qquad \text{si et seulement si} \qquad \text{soit } x = y \text{ soit } x, y \in I$$

est une congruence, appelée la *congruence de Rees* sur S associée à I. Le semigroupe quotient $S/{\equiv_I}$ est noté habituellement S/I.

• Congruence syntaxique

Soit P une partie de S. La *congruence syntaxique* de S associée à P est la congruence $\sim_P$ sur S donnée par

$$x \sim_P y \qquad \text{si et seulement si} \qquad \forall r, s \in S^1, (rxs \in P \Leftrightarrow rys \in P).$$

De plus, $\sim_P$ est la congruence sur S la plus grande (pour l'inclusion) qui *sature* P, c'est-à-dire, pour laquelle P est union de classes modulo $\sim_P$. Le semigroupe quotient $S/{\sim_P}$ sera noté $S(P)$ et est appelé le *semigroupe syntaxique* de P. On remarque qu'on utilisera toujours la lettre "S" pour noter un semigroupe syntaxique même si le semigroupe de départ est notée différemment. La projection canonique

$$\eta_P : S \longrightarrow S(P)$$

est appelée le *morphisme syntaxique* de P. Notons que d'après la définition de $\sim_P$, on a $P = \eta_P^{-1}(\eta_P(P))$.

1.4 Relations de Green

Cette section sert pour donner les définitions des relations de Green et pour présenter quelques proprietés sur les semigroupes à l'aide de ces relations. Les relations de Green doivent son nom à Green qui les a introduit en 1951 [42] et elles se sont montrées indispensables pour l'étude des semigroupes. Leur importance est manifestée, de plus, dans le fait que la plus grande partie des classes de semigroupes finis que nous considerons dans ce travail sont (ou peuvent être) définis à son aide.

Soit S un semigroupe. Il y a cinq relations d'équivalence sur S (notées $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{J}, \mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$) qui sont designées de *relations de Green*. Commençons pour définir trois d'elles. Pour $x, y \in S$,

$$\begin{aligned} x \,\mathcal{R}\, y &\Leftrightarrow xS^1 = yS^1 \\ x \,\mathcal{L}\, y &\Leftrightarrow S^1x = S^1y \\ x \,\mathcal{J}\, y &\Leftrightarrow S^1xS^1 = S^1yS^1. \end{aligned}$$

Également importantes sont les trois relations de préordre sur S, définies par

$$\begin{aligned} x \leq_{\mathcal{R}} y &\Leftrightarrow xS^1 \subseteq yS^1 \\ x \leq_{\mathcal{L}} y &\Leftrightarrow S^1x \subseteq S^1y \\ x \leq_{\mathcal{J}} y &\Leftrightarrow S^1xS^1 \subseteq S^1yS^1. \end{aligned}$$

Autrement dit, $x \leq_{\mathcal{R}} y$ si et seulement si l'idéal à droite engendré par x est contenu dans l'idéal à droite engendré par y. Notons de plus qu'on a

$$\begin{aligned} xS^1 \subseteq yS^1 &\Leftrightarrow x \in yS^1 \\ &\Leftrightarrow \exists u \in S^1,\ x = yu. \end{aligned}$$

Des remarques similaires sont valides pour les préordres $\leq_{\mathcal{L}}$ et $\leq_{\mathcal{J}}$.

Comme il est évident, si $\mathcal{K} \in \{\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{J}\}$, on a $x \,\mathcal{K}\, y$ si et seulement si $x \leq_{\mathcal{K}} y$ et $y \leq_{\mathcal{K}} x$. Notons de plus que

$$xu \leq_{\mathcal{R}} x, \qquad ux \leq_{\mathcal{L}} x \qquad \text{et} \qquad uxv \leq_{\mathcal{J}} x$$

pour tout $x \in S$ et tous $u, v \in S^1$.

Une relation R sur un semigroupe S est dite *compatible à gauche* (resp. *à droite*) *avec la multiplication* si, pour tous $a, x, y \in S$,

$$x\,R\,y \Rightarrow ax\,R\,ay \text{ (resp. } x\,R\,y \Rightarrow xa\,R\,ya).$$

Pour les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ on déduit facilement le suivant.

Lemme 1.4.1 *Dans tout semigroupe, les relations $\mathcal{R}$ et $\leq_{\mathcal{R}}$ sont compatibles à gauche avec la multiplication et les relations $\mathcal{L}$ et $\leq_{\mathcal{L}}$ sont compatibles à droite avec la multiplication.* $\square$

Les deux autres relations de Green sont obtenues à partir de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D} = \mathcal{R} \vee \mathcal{L}$$

où $\mathcal{R} \vee \mathcal{L}$ est l'équivalence sur S engendrée par la relation $\mathcal{R} \cup \mathcal{L}$. Cette dernière définition est peut amiable mais le fait de la composition

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \{(x, y) \in S \times S : \ \exists z \in S, \ x\,\mathcal{R}\,z \ \text{ et } \ z\,\mathcal{L}\,y\}$$

être égale à $\mathcal{L} \circ \mathcal{R}$, permet de décrire la relation $\mathcal{D}$ d'une forme plus simple :

$$\mathcal{D} = \mathcal{R} \vee \mathcal{L} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}.$$

On définit de plus la relation de préordre $\leq_{\mathcal{H}}$ sur S, donnée par

$$x \leq_{\mathcal{H}} y \qquad \Leftrightarrow \qquad x \leq_{\mathcal{R}} y \text{ et } x \leq_{\mathcal{L}} y.$$

Le résultat qui suit est d'une grande importance pour l'étude des semigroupes finis. Comme nous le verrons, il peut être étendu aux semigroupes topologiques compacts.

Proposition 1.4.2 *Dans un semigroupe fini, $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.* $\square$

Si $\mathcal{K}$ est une des relations de Green sur un semigroupe S et $x \in S$, on note K_x la $\mathcal{K}$-classe qui contient x. Chaque $\mathcal{D}$-classe est à la fois une union de $\mathcal{R}$-classes et une union de $\mathcal{L}$-classes. De plus, l'intersection non vide d'une $\mathcal{R}$-classe et d'une $\mathcal{L}$-classe est une $\mathcal{H}$-classe. Pour ces raisons, chaque $\mathcal{D}$-classe peut être représentée comme une "boîte à oeufs",

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|}
 & \mathcal{L}\text{-classe} & & & \mathcal{L}\text{-classe} \\
 & \downarrow & & & \downarrow \\
\cline{2-5}
\mathcal{R}\text{-classe} \rightarrow & & & \cdots & \\
\cline{2-5}
 & & & \cdots & \\
\cline{2-5}
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\cline{2-5}
\mathcal{R}\text{-classe} \rightarrow & & & \cdots & \\
\cline{2-5}
\end{array}$$

où chaque cellule représente une $\mathcal{H}$-classe, chaque ligne une $\mathcal{R}$-classe et chaque colonne une $\mathcal{L}$-classe. Pour indiquer qu'une certaine $\mathcal{H}$-classe contient un idempotent, il est habituel de dessiner une étoile sur la cellule qui représente cette $\mathcal{H}$-classe.

Par exemple, si on considére le semigroupe de Brandt B_2 donné par

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix} \right\},$$

avec le produit de matrices, et on pose

$$x = \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad y = \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix}$$

on peut représenter l'organisation des éléments du monoïde B_2^1 en utilisant les relations de Green comme suit

$$\begin{array}{|c|}\hline {}^{*}1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline {}^{*}xy & x \\ \hline y & {}^{*}yx \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline {}^{*}0 \\ \hline \end{array}$$

Nous groupons dans les résultats suivants quelques propriétés intéréssantes sur la structure des $\mathcal{D}$-classes d'un semigroupe et qui seront très utiles dans la suite.

Lemme 1.4.3 (Green) *Soient x et y deux éléments $\mathcal{D}$-équivalents d'un semigroupe S et soient $u, v \in S^1$ tels que*

$$xu = y \qquad \text{et} \qquad yv = x.$$

Alors, les translations à droite ρ_u et ρ_v définies par

$$\rho_u(s) = su \qquad \text{et} \qquad \rho_v(s) = sv$$

induisent des bijections réciproques de L_x sur L_y et de L_y sur L_x, respectivement, qui préservent les $\mathcal{H}$-classes. □

Le lemme de Green admet bien sûr un analogue pour les $\mathcal{R}$-classes.

Proposition 1.4.4 *Soit S un semigroupe.*

(1) *Pour $x, y \in S$, $xy \in R_x \cap L_y$ si et seulement si $R_y \cap L_x$ contient un idempotent.*

(2) *Si e est un idempotent de S, alors H_e est un sous-groupe maximal de S.*

(3) *Deux sous-groupes maximaux de S contenus dans la même $\mathcal{D}$-classe sont isomorphes.* □

Un élément x d'un semigroupe S est *régulier* s'il existe $y \in S$ tel que $xyx = x$. On dit que $x' \in S$ est un *inverse* de x si

$$xx'x = x \qquad \text{et} \qquad x'xx' = x'.$$

Notons qu'un élément qui admet un inverse est régulier. Moins évident c'est que tout élément régulier a un inverse : si $x, y \in S$ sont tels que $xyx = x$, alors $x' = yxy$ est un inverse de x. Un élément peut avoir plusieurs inverses.

Un sous-ensemble de S est dit *régulier* si tous ses éléments sont réguliers. En particulier, si tous les éléments de S sont réguliers, S est appelé un *semigroupe régulier*. On énonce maintenant une proposition qui donne diverses caractérisations des $\mathcal{D}$-classes régulières d'un semigroupe.

Proposition 1.4.5 *Soit D une $\mathcal{D}$-classe d'un semigroupe S. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *D est régulière ;*

(2) *D contient un élément régulier ;*

(3) *chaque $\mathcal{R}$-classe de D contient un idempotent ;*

(4) *chaque $\mathcal{L}$-classe de D contient un idempotent ;*

(5) *il existe $x, y \in D$ tels que $xy \in D$.* □

Les relations de Green sont fréquemment utilisés pour définir classes de semigroupes. Nous présentons de suite quelques exemples bien connus.

Définition 1.4.6 *Un semigroupe S est appelé :*

(1) *un* groupe *si $\mathcal{H}$ est la relation universelle sur S ;*

(2) apériodique *si $\mathcal{H}$ est la relation triviale sur S ;*

(3) simple*, si $\mathcal{J}$ est la relation universelle sur S ;*

(4) complètement simple *si est simple et si tout l'ensemble non vide de $\mathcal{L}$-classes ou de $\mathcal{R}$-classes de S contient un élément minimal ;*

(5) complètement régulier *si toute $\mathcal{H}$-classe de S est un groupe ;*

(6) inversif *si est régulier et les idempotents de S commutent ;*

(7) orthodoxe *si est régulier et les idempotents de S forment un sous-semigroupe.* □

Pour les semigroupes finis les notions de semigroupe simple et de semigroupe complètement simple coïncident.

Par définition, et comme dans les semigroupes finis les relations $\mathcal{D}$ et $\mathcal{J}$ coïncident, il est facile à vérifier qu'un semigroupe fini simple possède une seule $\mathcal{D}$-classe (son idéal minimal) dont toutes les $\mathcal{H}$-classes sont des groupes. Réciproquement, on peut vérifier que si une $\mathcal{D}$-classe régulière d'un semigroupe est un sous-semigroupe, alors c'est un semigroupe simple.

Comme exemples de semigroupes simples on a les *bandes rectangulaires*. Ce sont les semigroupes dont l'ensemble sous-jacent est de la forme $I \times J$, où I et J sont des ensembles, et dont la multiplication est donnée par

$$(i, j)(i', j') = (i, j').$$

Comme il est clair ces semigroupes sont idempotents (ou bandes) et, donc, sont exactement les semigroupes simples dont les groupes sont triviaux.

1.5 Mots

Nous empruntons la plupart des notions qui suivent à [49] en ce qui concerne les mots finis et à [55] en ce qui concerne les mots infinis et biinfinis.

1.5.1 Mots finis

Soit A un ensemble non vide, que l'on appellera *alphabet*. Les éléments de A sont appelés de *lettres*. Un *mot fini* (ou simplement un *mot*) sur A est une suite finie $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de lettres de A, que l'on notera simplement

$$a_1 a_2 \cdots a_n.$$

La suite vide sera notée 1 (ou ε dans certains cas particuliers) et sera dite le *mot vide*. L'ensemble de tous les mots sur A est noté A^*, et A^+ denote l'ensemble $A^* \setminus \{1\}$. L'ensemble A^+ (resp. A^*) muni du *produit de concaténation* (ou simplement *produit*), qui associe à deux mots $u = a_1 a_2 \cdots a_n$ et $v = b_1 b_2 \cdots b_m$ le mot

$$uv = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m,$$

est un semigroupe (resp. monoïde). Le semigroupe A^+ (resp. A^*) est clairement engendré par A et est dit *le semigroupe libre* (resp. *le monoïde libre*) sur A. Cette terminologie est justifiée par la propriété universelle de A^+ suivante.

Proposition 1.5.1 *Soit $\varphi : A \to S$ une application quelconque dans un semigroupe S. Alors, il existe un unique morphisme $\bar{\varphi} : A^+ \to S$ qui rend commutatif le diagramme suivant,*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota"'] & & S \\ & A^+ \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

où ι est l'application d'inclusion de A sur F. □

Le monoïde A^* satisfait bien sûr une propriété analogue.

Le morphisme $\bar{\varphi}$ de la proposition antérieure est définit par

$$\bar{\varphi}(a_1 \cdots a_n) = \varphi(a_1) \cdots \varphi(a_n),$$

et est appelé *l'extension naturelle* de φ à A^+. Notons encore que ce résultat dit que tout élément de A^+ admet une factorisation unique de la forme $a_1 \cdots a_n$ avec $a_i \in A$ ($i = 1, \ldots, n$).

Si $u = a_1 \cdots a_n$ ($a_i \in A$) est un mot de A^+, le nombre n est dit la *longueur* de u qui est notée $|u|$. La *longueur* du mot vide est 0. De plus, si a est une lettre de A, on note $|u|_a$ le nombre d'occurrences de a dans u. Notons que

$$|u| = \sum_{a \in A} |u|_a.$$

L'ensemble de toutes les lettres intervenant dans un mot $u \in A^*$ est noté $c(u)$ et est appelé le *contenu* de u.

Un mot $u \in A^*$ est un *préfixe* (resp. *suffixe*, *facteur*) d'un mot $w \in A^*$ s'il existe des mots $y, z \in A^*$ tels que $w = uy$ (resp. $w = yu$, $w = yuz$). Un préfixe (resp. suffixe, facteur) u de w est dit *propre* si $u \neq w$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour chaque mot $u \in A^*$ de longueur $\geq k$, on note $p_k(u)$ (resp. $s_k(u)$) le préfixe (resp. suffixe) de u de longueur k. Si $u \in A^*$ est un mot quelconque, on note $i_k(u)$ et $t_k(u)$ les mots définis, respectivement, par

$$i_k(u) = \begin{cases} u & \text{si } |u| \leq k \\ p_k(u) & \text{si } |u| > k \end{cases}$$

et

$$t_k(u) = \begin{cases} u & \text{si } |u| \leq k \\ s_k(u) & \text{si } |u| > k. \end{cases}$$

Un mot $u \in A^+$ est dit *primitif* s'il n'est pas puissance d'un autre mot, i.e., si

$$u = v^n, \ n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 1.$$

On dit que deux mots u et v sont *conjugués* s'il existe $x, y \in A^*$ tels que

$$u = xy, \qquad v = yx.$$

Le résultat suivant est presque immédiat.

Lemme 1.5.2 *Si u est un mot primitif et v est un mot conjugué de u, alors v est aussi primitif.*

Preuve. Supposons que $u = rs$ et $v = sr = z^k$ pour des $r, s, z \in A^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors, il existe $x, y \in A^*$ et $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ tels que $z = xy, s = z^{k_1}x, r = yz^{k_2}$ et $k_1 + k_2 + 1 = k$. Donc, $u = rs = yz^{k_2}z^{k_1}x = (yx)^k$ et comme u est primitif, $k = 1$, c'est-à-dire, $v = z$. Par conséquent v est primitif. $\square$

Ce résultat admet le raffinement suivant (proposition 1.3.5 de [49]).

Proposition 1.5.3 *Soient $u, v \in A^*$. Si deux puissances u^k et v^n de u et de v ont le même préfixe (ou suffixe) de longueur au moins égale à $|u| + |v| - pgcd(|u|, |v|)$, alors u et v sont puissances d'un même mot.* □

Corollaire 1.5.4 *Soient $u, v \in A^+$ deux mots et soit $a \in A$ tel que $s_1(u) \neq a$ (resp. $p_1(u) \neq a$). Si k est un entier tel que $|u^k| \geq |u| + |v| - pgcd(|u|, |v|)$, alors au^k (resp. $u^k a$) n'est pas facteur de v^p, quel que soit $p \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Soit $n = |u| + |v| - pgcd(|u|, |v|)$ et supposons que le lemme est faux. Alors,

$$au^k = (aw)^m w'$$

avec aw conjugué de v, $w' \in A^*$ préfixe propre de aw et $m \geq 1$. En particulier,

$$u^k = (wa)^{m'} w''$$

où

- $aw'' = w'$ et $m' = m$ si $w' \neq 1$,
- $aw'' = w$ et $m' = m - 1$ sinon.

Alors, u et wa ont des puissances avec le même préfixe de longueur au moins égale à n et, donc, d'après la proposition 1.5.3, u et wa sont puissances d'un même mot, disons r. Ainsi, il existe $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $u = r^i$ et $wa = r^j$. En particulier $s_1(u) = s_1(wa) = a$ ce qui est absurde parce que, par hypothèse, la dernière lettre de u est différente de a. Donc l'énoncé est vrai. □

Étant fixé un ordre total sur l'alphabet A on étend cet ordre en un ordre total $<_{lex}$ sur A^+, appelé *ordre lexicographique*, par

$$u <_{lex} v \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{soit } v \in uA^+, \\ \text{soit } u = ras \text{ et } v = rbt, \text{ avec } a, b \in A,\ r, s, t \in A^* \text{ et } a <_{lex} b. \end{array}$$

Dans la suite, quand il n'y aura pas risque de confusion, on notera l'ordre lexicographique simplement par $<$. Notons que l'ordre lexicographique a les deux propriétés immédiates suivantes.

- $\forall w \in A^*,\ u < v \Leftrightarrow wu < wv$.
- $\forall w, z \in A^*,\ v \notin uA^*$ et $u < v \Rightarrow uw < vz$.

Fixons un ordre lexicographique sur A^+. Un *mot de Lyndon* est un mot primitif qui est minimal dans sa classe de conjugaison. On notera l'ensemble des mots de Lyndon par Lyn. Autrement dit,

$$x \in Lyn \qquad \text{si et seulement si} \qquad \forall u, v \in A^+,\ x = uv \Rightarrow x < vu.$$

Par exemple, pour $A = \{a, b\}$ et $a < b$, la liste des mots de Lyndon de plus petite longueur est

$$Lyn = \{a, b, ab, aab, abb, aaab, aabb, abbb, aaaab, aaabb, aabab, \ldots\}.$$

On introduit maintenant une congruence sur $\mathbb{N}_0$, qui sera cruciale au chapitre 7. Soient $x, y, t \in \mathbb{N}_0$ et $n \in \mathbb{N}$. Nous disons que x est *congru à y modulo n seuil t*, et nous notons

$$x \equiv_{n,t} y \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{array}{l} \text{ou bien } x = y, \\ \text{ou bien } x, y \geq t \text{ et } x \text{ est congru à } y \text{ modulo } n. \end{array}$$

Par exemple, les classes de $\equiv_{3,2}$ sont $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2, 5, 8, \ldots\}$, $\{3, 6, 9, \ldots\}$ et $\{4, 7, 10, \ldots\}$.

La congruence $\equiv_{n,t}$ a une relation évidente avec le monoïde $\mathbb{Z}^1_{n,t}$ où $\mathbb{Z}_{n,t}$ est le semigroupe monogène (disons engendré par x) d'indice t et période n : elle est la congruence nucléaire associée au morphisme de monoïdes

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & (\mathbb{N}_0, +) & \to & (\mathbb{Z}^1_{n,t}, \cdot) \\ & 0 & \mapsto & 1 \\ & k \neq 0 & \mapsto & x^k. \end{array}$$

Pour une paire de mots u et v, on dénote par $\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right]$ le nombre d'occurrences du facteur v dans u. Par exemple $\left[\begin{smallmatrix} abaabaaa \\ abaa \end{smallmatrix}\right] = 2$, puisque $abaa$ apparaît en deux places différentes dans $abaabaaa$: $\boldsymbol{abaa}baaa$, $aba\boldsymbol{abaa}a$.

Pour un mot $w \in A^+$ et des entiers $r, t \in \mathbb{N}_0$ et $n \in \mathbb{N}$ posons

$$L(w, r, n, t) = \{u \in A^+ \mid \left[\begin{smallmatrix} u \\ w \end{smallmatrix}\right] \equiv_{n,t} r\}.$$

Par exemple,

$$L(w, 1, 1, 1) = A^* w A^*, \qquad L(w, 0, 1, 1) = A^+ \setminus A^* w A^*$$

et si $A = \{a, b\}$, alors

$$L(a, 1, 2, 0) = b^* a b^* (a b^* a b^*)^*$$

est l'ensemble des mots dans A^+ qui contiennent un nombre impair d'occurrences de la lettre a.

1.5.2 Mots infinis

Un mot *infini à droite* sur l'alphabet A est une suite de lettres de A indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire, est une application de $\mathbb{N}$ dans A. On note $A^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de tous les mots infinis à droite sur A et on note un élément

$$\begin{array}{rrcl} u : & \mathbb{N} & \to & A \\ & n & \mapsto & u_n \end{array}$$

de $A^{\mathbb{N}}$ par

$$u = u_1 u_2 u_3 \cdots .$$

Le *facteur (fini)* $u_i u_{i+1} \cdots u_j$ $(i, j \in \mathbb{N}, i \leq j)$ de u sera noté $u_{[i,j]}$. Le facteur $u_{[1,j]}$ $(j \in \mathbb{N})$ est appelé un *préfixe (fini)* de u et est noté souvent par $p_j(u)$. Ces notations s'appliqueront aussi aux mots finis. En outre le mot infini à droite $u_iu_{i+1}\cdots$, sera noté $u_{[i,+\infty]}$ et sera appelé un *suffixe (infini)* de u.

Dualement, un mot *infini à gauche* sur l'alphabet A est une suite de lettres de A indexée par $-\mathbb{N}$, que l'on note par

$$u = \cdots u_{-3}u_{-2}u_{-1}.$$

On note $A^{-\mathbb{N}}$ l'ensemble de tous les mots infinis à gauche sur A. On notera aussi $u_{[i,j]}$ $(i, j \in -\mathbb{N}, i \leq j)$ le *facteur (fini)* $u_iu_{i+1}\cdots u_j$ de u (si $j = -1$ ce mot sera appelé un *suffixe (fini)* de u et il sera noté $s_{-i}(u)$). La notation $u_{[-\infty,j]}$ sera utilisée pour représenter le mot infini à gauche $\cdots u_{j-1}u_j$, qui sera appelé un *préfixe (infini)* de u.

Pour un mot u fini ou infini à droite (resp. à gauche) on notera $\mathrm{Pref}(u)$ (resp. $\mathrm{Suff}(u)$) l'ensemble des préfixes (resp. suffixes) de u.

Si $u \in A^+$ est un préfixe (resp. suffixe) d'un mot $w \in A^{\mathbb{N}}$ (resp. $w \in A^{-\mathbb{N}}$), on note $u^{-1}w$ (resp. wu^{-1}) l'unique mot x tel que $w = ux$ (resp. $w = xu$).

Le produit d'un mot fini $u = u_1u_2\cdots u_n$ de A^* par un mot infini à droite $v = v_1v_2\cdots$ de $A^{\mathbb{N}}$ est le mot infini à droite

$$uv = u_1u_2\cdots u_nv_1v_2\cdots .$$

Le produit d'un mot infini à gauche $v = \cdots v_{-2}v_{-1}$ de $A^{-\mathbb{N}}$ par un mot fini $u = u_1u_2\cdots u_n$ de A^* est le mot infini à gauche

$$vu = \cdots v_{-2}v_{-1}u_1u_2\cdots u_n.$$

Soit $u = u_1u_2\cdots u_n$ un mot de A^+. On note $u^{+\infty}$ (resp. $u^{-\infty}$) le mot infini à droite (resp. à gauche) obtenu par répétition infinie à droite (resp. à gauche) du mot u, c'est-à-dire,

$$u^{+\infty} = u_1u_2\cdots u_nu_1u_2\cdots u_nu_1u_2\cdots u_n\cdots$$

et

$$u^{-\infty} = \cdots u_1u_2\cdots u_nu_1u_2\cdots u_nu_1u_2\cdots u_n.$$

Un entier $p \in \mathbb{N}$ est une *période ultime* d'un mot infini à droite $w = w_1w_2\cdots$, s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq k$, on ait $w_n = w_{n+p}$. Un mot infini à droite qui possède une période ultime est dit *ultimement périodique*. Un mot $w \in A^{\mathbb{N}}$ ultimement périodique est donc de la forme

$$w = uv^{+\infty},$$

pour des mots $u \in A^*$ et $v \in A^+$. Un mot ultimement périodique qui peut être écrit sous la forme $w = v^{+\infty}$ $(v \in A^+)$ est dit *périodique*.

Si p et q sont deux périodes ultimes d'un mot w, leur pgcd est encore une période ultime de w. La plus petite période ultime d'un mot ultimement périodique w est appelée *la période ultime* de w. Si p_0 est la période ultime d'un mot ultimement périodique

$w = w_1 w_2 \cdots$, il existe un entier minimal $k_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq k_0$, on ait $w_n = w_{n+p_0}$. L'entier k_0 sera appelé l'*indice* de w. Le mot w peut donc être écrit sous la forme

$$w = w_1 w_2 \cdots w_{k_0-1}(w_{k_0} w_{k_0+1} \cdots w_{k_0+n-1})^{+\infty} \tag{1.3}$$

qui sera appelée *la forme canonique* de w. Les mots

$$w_1 w_2 \cdots w_{k_0-1} \in A^*$$

et

$$w_{k_0} w_{k_0+1} \cdots w_{k_0+n-1} \in A^+$$

seront aussi appelés, respectivement, l'*indice* de w et *la période ultime* de w. Notons que, par minimalité de k_0, la lettre w_{k_0-1} (si $k_0 \geq 2$) est différente de la lettre w_{k_0+n-1}. Notons aussi que, d'après le corollaire 1.5.4, w est périodique si et seulement si $k_0 = 1$. En effet, on n'a pas une égalité du type $uv^{+\infty} = w^{+\infty}$ avec $u, v, w \in A^+$ tels que $s_1(u) \neq s_1(v)$.

Exemple 1.5.5 *Considérons le mot ultimement périodique $w = ababab^2ab^2ab^2 \cdots$. La période ultime de w est 3,*

$$\begin{aligned} w &= abab(ab^2)^{+\infty} \\ &= aba(bab)^{+\infty} \end{aligned}$$

et $a \neq b = s_1(bab)$. Alors, cette dernière représentation de w est sa forme canonique. ■

Symétriquement, un mot $w \in A^{-\mathbb{N}}$ est *ultimement périodique* s'il existe des mots $u \in A^*$ et $v \in A^+$ tels que

$$w = v^{-\infty} u. \tag{1.4}$$

Si u et v sont choisis de longueur minimale, on dit que u est l'*indice* de w, que v est *sa période ultime* et que (1.4) est *la forme canonique* de w. Le mot w sera dit *périodique* si u est le mot vide.

1.5.3 Mots biinfinis

On appelle *mot biinfini pointé* sur l'alphabet A, une suite

$$u = \cdots u_{-2} u_{-1} u_0 u_1 u_2 \cdots$$

indexée par $\mathbb{Z}$. On note aussi $u = (u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. On notera $A^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble de tous les mots biinfinis pointés sur A. Un *facteur* de $u \in A^{\mathbb{Z}}$ est un mot du type $u_{[i,j]}$ où

$$u_{[i,j]} = u_i u_{i+1} \cdots u_j$$

avec $i, j \in \mathbb{Z}$ tels que $i \leq j$. Pour un mot w (fini, infini ou biinfini), on notera $\mathrm{Fact}(w)$ (resp. $\mathrm{Fact}_k(w)$) l'ensemble des facteurs de w (resp. de longueur k).

Quand on écrit un mot biinfini pointé particulier u, on a besoin d'indiquer quelle est la lettre u_0. On fait cela en séparant les u_i avec $i \geq 0$ des u_i avec $i < 0$ par un point décimal. Par exemple,

$$u = \cdots ba.bba \cdots$$

signifie que $u_{-2} = b$, $u_{-1} = a$, $u_0 = b$, $u_1 = b$ et $u_2 = a$.

Un mot biinfini pointé peut être construit naturellement à partir de deux mots infinis unilatères : si $u \in A^{-\mathbb{N}}$ et $v \in A^{\mathbb{N}}$ sont deux mots infinis, alors $u.v$ représente le mot biinfini pointé donné par

$$(u.v)_n = \begin{cases} u_n & \text{si } n \leq -1 \\ v_{n+1} & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

Autrement dit, $u.v = \cdots u_{-2}u_{-1}.v_1v_2\cdots$.

Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, on note $\sigma^n : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ l'opérateur de *décalage* sur $A^{\mathbb{Z}}$, définit ainsi :

$$\text{si } u = (u_i)_{i\in\mathbb{Z}}, \text{ alors } \sigma^n(u) = (u_{i+n})_{i\in\mathbb{Z}}.$$

Soient u et v deux mots biinfinis pointés. On dira que u et v sont *similaires*, et on notera $u \sim v$, si $v = \sigma^n(u)$, pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. Un mot *biinfini* sur A est une $\sim$-classe de $A^{\mathbb{Z}}$, et $A^{\tilde{\mathbb{Z}}}$ désigne l'ensemble des mots biinfinis sur A.

Pour deux mots infinis unilatères $u \in A^{-\mathbb{N}}$ et $v \in A^{\mathbb{N}}$ on note uv la $\sim$-classe du mot biinfini pointé $u.v$. Ainsi, par exemple

$$a^{-\infty}ba^{+\infty}$$

représente le mot biinfini sur l'alphabet $\{a, b\}$ ayant exactement une occurrence de la lettre b. Si $u \in A^+$ on notera le mot biinfini $u^{-\infty}u^{+\infty}$ simplement par u^∞. Un mot biinfini du type $w = u^\infty$ ($u \in A^+$) est dit *périodique* et u est dite une *période* de w.

Notons que si x est un mot biinfini pointé tel que $x = \sigma^n(x)$, pour un entier positif n, alors x est périodique. De plus, si u est un facteur de x de longueur n, alors u est une période de x. C'est-à-dire que x est determiné par chaqu'un de ses facteurs de longueur n.

Naturellement, un mot biinfini périodique peut être représenté de plusieurs façons. Par exemple, le mot biinfini associé au mot biinfini pointé $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ tel que $x_{2n} = a$ et $x_{2n+1} = b$, $n \in \mathbb{Z}$, peut être noté dans les formes suivantes

$$\begin{aligned} \cdots ababab \cdots &= \cdots abab(ab)^{+\infty} \\ &= \cdots baba(ba)^{+\infty} \\ &= (ab)^{-\infty}abab\cdots \\ &= (baba)^{-\infty}baba\cdots \\ &= (ab)^{-\infty}aba(ba)^{+\infty} \\ &= (bababa)^{\infty} \\ &= (ab)^{\infty} \\ &= \mathit{etc.} \end{aligned}$$

Soit $w \in A^{\tilde{\mathbb{Z}}}$ un mot périodique. Comme dans les cas infinis unilatères, il existe un mot $u \in A^+$ de longueur minimale tel que $w = u^\infty$. Évidemment on a aussi $w = v^\infty$

pour tout $v \in A^+$ conjugué de u, et si $w = x^\infty$ avec $x \in A^+$ de longueur minimale alors x est un conjugué de u. Parmi les conjugués de u il existe un unique mot de Lyndon y (en supposant un ordre lexicographique fixé). Alors

$$w = y^\infty \tag{1.5}$$

sera appelée *la forme canonique* de w et le mot y sera appelé *sa période.*

On dit qu'un mot biinfini $w \in A^{\tilde{\mathbb{Z}}}$ est *ultimement périodique* s'il existe des mots $x, z \in A^+$ et $y \in A^*$ tels que

$$w = x^{-\infty} y z^{+\infty}.$$

Il est facile à vérifier que, si w est ultimement périodique et non périodique alors il existe des mots $u \in A^+$, $a \in A$ et $t \in A^{\mathbb{N}}$ tels que $w = u^{-\infty}at$, u est de longueur minimale et la première lettre de u est distincte de a. Maintenant, si $t = rv^{+\infty}$ ($r \in A^*$, $v \in A^+$) est la forme canonique de t, on a

$$w = u^{-\infty} a r v^{+\infty} \tag{1.6}$$

et cette représentation sera appelée *la forme canonique* de w. Les mots u et v seront appelés, respectivement, *la période ultime à gauche* et *la période ultime à droite* de w.

Exemple 1.5.6 *Si* $w_1 = (baba^2baba^2)^{-\infty} baba^2b(a^2ba^2ba^2b)^{+\infty}$ *on peut déduire successivement*

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & ((\boldsymbol{baba^2})^2)^{-\infty} \boldsymbol{baba^2} b((a^2b)^3)^{+\infty} \\ & = & (baba^2)^{-\infty} b(a^2b)^{+\infty} \\ & = & (baba^2)^{-\infty} ba\boldsymbol{a}b(a^2b)^{+\infty} \\ & = & (ba^2ba)^{-\infty} \boldsymbol{a}(ba^2)^{+\infty}. \end{array}$$

Maintenant, si $w_2 = (b^2a)^{-\infty} b^2ab(babbab)^{+\infty}$ *on a*

$$\begin{array}{rcl} w_2 & = & (bab)^{-\infty}((bab)^2)^{+\infty} \\ & = & (bab)^\infty \\ & = & (ab^2)^\infty. \qquad \blacksquare \end{array}$$

1.6 Langages et automates

Le but de cette section est de rappeler les définitions et résultats de base des théories de langages et automates dont nous nous servirons dans la suite.

1.6.1 Langages

Dans cette section A représente un alphabet fini ou dénombrable. Un *langage* est une partie du monoïde libre A^*, autrement dit, c'est un ensemble de mots de A^*. Un langage de A^+ est une partie du semigroupe libre A^+. Dans la suite nous travailerons en général avec des langages de A^+ mais les définitions et résultats peuvent être addaptés sans difficulté aux langages de A^*.

Outre les opérations *booléennes* classiques (union finie, intersection finie et complémentation) on définit sur les langages diverses autres opérations. Tout d'abord on rappelle les opérations *rationnelles* qui sont :

1) l'union $K \cup L$;
2) le produit $K \cdot L = \{uv \mid u \in K,\ v \in L\}$;
3) l'opération "plus", définie par

$$L^+ = \{u_1 \cdots u_n \in A^+ \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } u_1, \ldots, u_n \in L\},$$

   autrement dit, L^+ est le sous-semigroupe de A^+ engendré par L ;
4) l'opération étoile, définie par

$$L^* = \{u_1 \cdots u_n \in A^* \mid n \in \mathbb{N}_0 \text{ et } u_1, \ldots, u_n \in L\},$$

   autrement dit, $L^* = L^+ \cup \{1\}$ est le sous-monoïde de A^* engendré par L.

L'ensemble $\mathrm{Rat}(A^+)$ des langages *rationnels* de A^+ est le plus petit ensemble de langages de A^+ tel que

1) $\mathrm{Rat}(A^+)$ contient l'ensemble vide et tous les singletons $\{a\}$ avec $a \in A$;
2) $\mathrm{Rat}(A^+)$ est fermé par union finie, produit fini et par l'opération $L \to L^+$.

Les langages rationnels de A^+ sont, donc, ceux qu'on peut obtenir à partir de l'ensemble vide et des lettres de A en utilisant un nombre fini de fois les opérations rationnelles $\_ \cup \_$, $\_ \cdot \_$ et $\_^+$.

Notation : Pour alléger les notations on adopte la convention d'écrire u à la fois de $\{u\}$ et $+$ à la fois de $\cup$. En outre le point du produit sera omis. ■

Il y a deux autres opérations sur les langages qui sont indispensables. Pour deux langages K et L de A^+ le *quotient à gauche* et le *quotient à droite* de L par K sont donnés, respectivement, par

$$K^{-1}L = \{v \in A^+ \mid \text{il existe } u \in K \text{ tel que } uv \in L\}$$

et

$$LK^{-1} = \{v \in A^+ \mid \text{il existe } u \in K \text{ tel que } vu \in L\}.$$

On dit qu'un langage L de A^+ est *reconnu par un semigroupe* S s'il existe un morphisme $\varphi : A^+ \longrightarrow S$ et une partie P de S tels que

$$L = \varphi^{-1}(P).$$

On dit qu'un langage de A^+ est *reconnaissable* s'il est reconnu par un semigroupe fini. La classe des langages reconnaissables de A^+ sera notée $\mathrm{Rec}(A^+)$.

Le résultat qui suit énonce l'équivalence des notions de rationnalité et reconnaissabilité, constituant un des fondements de la théorie des langages.

Théorème 1.6.1 (Kleene) *Soit A un alphabet fini. Un langage L de A^+ est rationnel si et seulement si il est reconnaissable. Autrement dit,* $\mathrm{Rat}(A^+) = \mathrm{Rec}(A^+)$. □

On remarque que tout langage L de A^+ est reconnu par son semigroupe syntaxique $S(L) = A^+/{\sim_L}$ puisque $\eta_L^{-1}(\eta_L(L)) = L$, où $\eta_L : A^+ \longrightarrow S(L)$ est le morphisme syntaxique de L. En outre, $\sim_L$ est la congruence la plus grossière qui sature L ce qui entraîne une partie du résultat suivant.

Proposition 1.6.2 *Soit L un langage de A^+.*

(1) *Un semigroupe S reconnaît L si et seulement si $S(L)$ divise S ;*

(2) *Le langage L est reconnaissable si et seulement si $S(L)$ est fini.* □

Les propriétés suivantes des semigroupes syntaxiques sont importantes comme motivation pour l'introduction de la notion de pseudo-variété de semigroupes.

Proposition 1.6.3 *Soient L, L_1 et L_2 des langages reconnaissables de A^+ et soit K un langage quelconque. Alors*

(1) $S(A^+ \setminus L) = S(L)$.

(2) $S(L_1 \cap L_2)$ *et* $S(L_1 \cup L_2)$ *divisent* $S(L_1) \times S(L_2)$.

(3) $S(LK^{-1})$ *et* $S(K^{-1}L)$ *divisent* $S(L)$.

(4) *si* $\varphi : B^+ \longrightarrow A^+$ *est un morphisme de semigroupes libres,* $S(\varphi^{-1}(L))$ *divise* $S(L)$. □

1.6.2 Automates

Nous introduisons maintenant la notion d'automate qui nous permettra de retrouver les langages reconnaissables dans une autre perspective.

Un *automate* est un quintuple

$$\mathcal{A} = (Q, A, \cdot, q_0, F)$$

où

- Q est un ensemble, dont les éléments sont appelés *états* ;
- A est un alphabet fini ;
- $\cdot$ désigne une action droite de A sur Q ;
- $q_0 \in Q$ est dit l'état *initial* ;
- $F \subseteq Q$ est dit l'ensemble des états *finaux*.

L'action $\cdot$ est étendue par associativité à A^+ en posant

$$q \cdot (ua) = (q \cdot u) \cdot a$$

pour tout $q \in Q$, $u \in A^+$ et $a \in A$. L'automate est dit fini si Q est fini. Tous les automates considérés dans la suite seront finis. Si l'action $\cdot$ est une application de $Q \times A$

dans Q on dit que l'automate $\mathcal{A}$ est *déterministe*. On dit que $\mathcal{A}$ est *codéterministe* si $|F| = 1$ et, pour tous $q \in Q$ et $a \in A$, il existe au plus un état $p \in Q$ tel que $p \cdot a = q$.

Si $\mathcal{A}$ est un automate déterministe, chaque lettre $a \in A$ définit une application de Q dans Q. Le semigroupe d'applications engendré par ces applications (i.e., le sous-semigroupe de $\mathcal{T}_Q$) est appelé le *semigroupe de transition* de $\mathcal{A}$ et sera noté $S(\mathcal{A})$[1].

Le *langage reconnu* par un automate $\mathcal{A} = (Q, A, \cdot, q_0, F)$ est l'ensemble

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in A^+ \mid q_0 \cdot w \cap F \neq \emptyset\}.$$

Cette notion de reconnaissabilité par automate est équivalente à celle par semigroupe comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.6.4 *Un langage de A^+ reconnu par un automate est reconnu par le semigroupe de transition de cet automate. De plus, L est reconnaissable si et seulement si il est reconnu par un automate fini.* □

Rappelons qu'un *graphe (orienté)* est une paire $G = (V, E)$ d'ensembles disjoints munie de deux applications $\alpha, \beta : E \to V$. Les éléments de V sont appelés de *sommets* et les éléments de E d'*arêtes* (ou *arcs*). Pour $e \in E$, les sommets $\alpha(e)$ et $\beta(e)$ sont appelés, respectivement, les sommets *initial* et *final* de l'arête e.

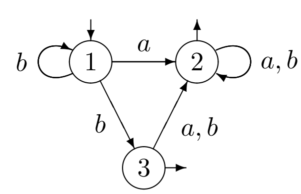
On représente un automate par un graphe dont les sommets représentent les états de l'automate, et dont les arêtes représentent les *transitions*, (c'est-à-dire, les triplets

$$(p, a, q) \in Q \times A \times Q$$

tels que $q \in p \cdot a$). La lettre a est l'*étiquette* de la transition (p, a, q). L'état initial sera indiqué par une flèche entrante et les ètats finaux par une flèche sortante.

Deux transitions (p, a, q) et (p', a', q') sont dites *consécutives* si $q = p'$. Un *chemin* dans l'automate est une suite de transitions consécutives. Deux chemins sont *coterminaux* si ses états initiaux (resp. et ses états finaux) coïncident. L'*étiquette* d'un chemin est la suite d'étiquettes des transitions qui le composent. S'il n'y a pas risque de confusion sur les états intermédes d'un chemin étiqueté $u \in A^+$ d'un état p pour un état q on dira quelques fois, par abus de langage, la "transition" (p, u, q) à la fois du chemin. Une *boucle* est un chemin dont l'état initial et l'état final coïncident.

Exemple 1.6.5 *Considérons l'automate suivant.*



[1] Cette notation, bien que similaire à celle du semigroupe syntaxique d'un langage, ne se confond avec elle puisque un automate sera noté toujours en lettres calligraphiques.

Cet automate admet trois états, son alphabet est $A = \{a, b\}$, $(3, a, 2)$ *est une de ces transitions, les chemins* $(1, a, 2)$ *et* $(1, b, 3)(3, b, 2)(2, a, 2)$ *sont coterminaux et il reconnaît le langage*

$$L = b^*aA^* + b^+ + b^+A^+. \blacksquare$$

Soit L un langage reconnaissable de A^+. On appelle *automate minimal* de L l'automate $\mathcal{A} = (Q, A, \cdot, q_0, F)$ où

$$Q = \{u^{-1}L \mid u \in A^*\}, \qquad q_0 = L, \qquad F = \{u^{-1}L \mid u \in L\}$$

et les transitions sont définies par

$$(u^{-1}L) \cdot a = a^{-1}(u^{-1}L) = (ua)^{-1}L$$

pour tous $u \in A^+$ et $a \in A$. Comme on peut le vérifier, l'automate minimal de L reconnaît L. De plus, c'est le plus petit automate *accessible* (i.e., tel que, pour tout état $q \neq q_0$, il existe un mot $u \in A^+$ tel que $q_0 \cdot u = q$) reconnaissant L. En outre on a la propriété suivante.

Proposition 1.6.6 *Le semigroupe de transition de l'automate minimal d'un langage reconnaissable* L *est isomorphe à* $S(L)$. $\square$

Chapitre 2

Variétés

Ce chapitre est entièrement consacré aux variétés : variétés de semigroupes, variétés de semigroupes finis (que nous appelons plutôt pseudo-variétés de semigroupes) et variétés de langages. On rappelle notamment le théorème bien connu de Birkhoff qui montre que les variétés sont définies par des identités. Pour les pseudo-variétés on dispose d'un résultat analogue dû à Reiterman, qui a montré qu'elles sont définies par des "pseudo-identités", mais que nous étudierons seulement au prochain chapitre. Cependant, on rappelle ici un autre résultat important sur les pseudo-variétés, le théorème d'Eilenberg-Schützenberger qui dit que les pseudo-variétés sont définies "ultimement" par des identités.

Enfin nous rappelons aussi le théorème (des variétés) d'Eilenberg [34] qui constitue la formalisation des liens très étroits qui existent entre les semigroupes finis et les langages reconnaissables. Ce résultat de 1976 associe bijectivement à chaque pseudo-variété de semigroupes une variété de langages, et constitue le "corollaire" naturel des cas particuliers qui étaient connus jusqu'à ce moment dûs à Schützenberger [66] (pour la pseudo-variété des semigroupes apériodiques), à Simon [71] (pour la pseudo-variété des semigroupes $\mathcal{J}$-triviaux) et, indépendamment, à Brzozowski et Simon [30] et à McNaughton [50] (pour la pseudo-variété des semigroupes localement idempotents et localement commutatifs).

Les références pour ce chapitre sont les livres d'Eilenberg [34], d'Almeida [9] et de Pin [57].

2.1 Variétés de semigroupes

Dans cette section nous rappelons le concept, introduit par Birkhoff, de variété de semigroupes et rappelons aussi le résultat classique, dû également à Birkhoff, qui les caractérise comme étant les classes de semigroupes équationnelles.

Tout d'abord on introduit quelques opérateurs sur les classes de semigroupes. Fixons une classe $\mathcal{C}$ de semigroupes. On note

- $H(\mathcal{C})$ la classe des quotients (autrement dit, des images homomorphes) des semigroupes de $\mathcal{C}$;

- $S(\mathcal{C})$ la classe des sous-semigroupes de semigroupes de $\mathcal{C}$;
- $P(\mathcal{C})$ la classe des produits directs de semigroupes de $\mathcal{C}$;
- $P_f(\mathcal{C})$ la classe des produits directs finis de semigroupes de $\mathcal{C}$.

La composition $O_1(O_2(\mathcal{C}))$ où $O_1, O_2 \in \{H, S, P, P_f\}$ sera notée simplement $O_1O_2(\mathcal{C})$. Si $O(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ avec O un de H, S, P et P_f on dit que $\mathcal{C}$ est *fermée par*, respectivement, *quotient*, *sous-semigroupe, produit direct* et *produit direct fini*. On dit que $\mathcal{C}$ est *fermée par division* si $\mathcal{C}$ est fermée à la fois par quotient et sous-semigroupe.

Une classe de semigroupes est dite une *variété* si elle est fermée par division et produit direct. Il est immédiat que toute intersection de variétés est encore une variété. On peut donc définir la variété *engendrée* par une classe de semigroupes $\mathcal{C}$ comme étant l'intersection de toutes les variétés qui contiennent $\mathcal{C}$. On la note $V(\mathcal{C})$.

Proposition 2.1.1 *Pour toute classe de semigroupes $\mathcal{C}$ on a $V(\mathcal{C}) = HSP(\mathcal{C})$. Autrement dit, un semigroupe est dans $V(\mathcal{C})$ si et seulement si il divise un produit direct de semigroupes de $\mathcal{C}$.* □

Dans la suite nous trouverons un certain type de variétés : une variété est dite *localement finie* si tout semigroupe finiment engendré de cette variété est fini.

Soit A un ensemble dénombrable. Une *identité* (ou *équation*) de semigroupes sur A est une paire (u, v) de mots de A^+, normalement représentée par $u = v$. Une identité de la forme $u = u$ est dite *triviale*.

On dit qu'un semigroupe S *satisfait* une identité $u = v$, et on écrit $S \models u = v$, si $\varphi(u) = \varphi(v)$ pour tout morphisme $\varphi : A^+ \to S$. Une classe $\mathcal{C}$ de semigroupes *satisfait* un ensemble Σ d'identités, et on note $\mathcal{C} \models \Sigma$, si

$$\forall S \in \mathcal{C}\ \forall u = v \in \Sigma,\ S \models u = v.$$

Étant donné un ensemble Σ d'identités, il est facile de vérifier que la classe de tous les semigroupes qui vérifient toutes les identités de Σ est une variété. Cette variété est notée $[\Sigma]$ et est dite la variété *définie* par Σ. Une classe de semigroupes $\mathcal{V}$ est dite *équationnelle* s'il existe un ensemble Σ d'identités tel que $\mathcal{V} = [\Sigma]$. Dans ce cas on dit que Σ est une *base* (d'identités) de $\mathcal{V}$.

On peut maintenant énoncer le résultat fondamental suivant.

Théorème 2.1.2 (Birkhoff) *Une classe de semigroupes est une variété si et seulement si elle est équationnelle.* □

Pour le reste de cette section on fixe une identité $u = v$ et un ensemble Σ d'identités sur A. Voyons quand $u = v$ est une "conséquence" de Σ et comment on peut obtenir "constructivement" $u = v$ à partir de Σ.

On dit que Σ *implique* $u = v$ et on écrit $\Sigma \models u = v$ si, pour tout semigroupe S, $S \models \Sigma$ implique $S \models u = v$.

La *fermeture déductive* de Σ est le plus petit ensemble $D(\Sigma)$ d'identités sur A tel que $\Sigma \subseteq D(\Sigma)$ et

1) $u = u \in D(\Sigma)$ pour tout $u \in A^+$;
2) $u = v \in D(\Sigma) \Rightarrow v = u \in D(\Sigma)$;
3) $u = v, v = w \in D(\Sigma) \Rightarrow u = w \in D(\Sigma)$;
4) $u = v \in D(\Sigma)$, $r, s \in A^* \Rightarrow rus = rvs \in D(\Sigma)$;
5) $u = v \in D(\Sigma)$, $a \in A$, $r \in A^+ \Rightarrow u' = v' \in D(\Sigma)$, où u' et v' sont les mots obtenus à partir des mots u et v, respectivement, par la substitution de chaque ocurrence de a par r.

Enfin, on dit que $u = v$ se *déduit* de Σ (ou des identités de Σ) et on écrit $\Sigma \vdash u = v$ s'il existe une *déduction* de $u = v$ à partir de Σ, i.e., s'il existe une suite finie d'identités

$$u_1 = v_1,\ u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$$

sur A telle que chaque $u_i = v_i$ est dans Σ, ou est de la forme $u = u$, ou est obtenue à partir des identités qui la précédent dans la suite en utilisant l'une des règles de transformation 2) à 5), et $u_n = v_n$ est l'identité $u = v$.

Le théorème qui suit (comme le théorème 2.1.2) peut être énoncé pour des classes d'algèbres quelconques.

Théorème 2.1.3 (Complétude de la logique équationnelle-Birkhoff) *Soient Σ et $u = v$, respectivement, un ensemble d'identités et une identité de semigroupes sur A. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\Sigma \models u = v$;
(2) $\Sigma \vdash u = v$;
(3) $u = v \in D(\Sigma)$. □

2.2 Pseudo-variétés de semigroupes

Dans cette section nous nous intéresserons seulement aux classes de semigroupes finis. Pour ces classes on dispose d'un concept analogue à celui de variété, qu'on a défini dans la section précédante pour des semigroupes quelconques. Cette notion, qu'on rappelle ci-dessous, a été introduite par Eilenberg.

2.2.1 Définition

Une classe de semigroupes finis est dite une *pseudo-variété de semigroupes* (aussi appelée *variété de semigroupes finis*) si elle est fermée par division et produit direct fini. Les pseudo-variétés seront notées en général par des lettres grasses. On notera $\mathcal{P}s(\mathbf{V})$ le treillis de toutes les sous-pseudo-variétés d'une pseudo-variété $\mathbf{V}$.

Comme exemples de classes de semigroupes finis qui forment des pseudo-variétés on peut citer tout d'abord

- **S**, la classe de tous les semigroupes finis ;
- **I**, la classe constituée des semigroupes à un élément. Cette pseudo-variété est appelée la pseudo-variété *triviale* ;
- **G**, la classe de tous les groupes finis ;
- **N**, la classe de tous les semigroupes nilpotents finis.

Comme exemples de classes de semigroupes finis qui ne forment pas des pseudo-variétés on peut citer

- la classe de tous les semigroupes réguliers finis ;
- la classe de tous les semigroupes inversifs finis ;
- la classe de tous les semigroupes orthodoxes finis.

Comme dans le cas des variétés, on voit facilement que toute intersection de pseudo-variétés est encore une pseudo-variété. On définit donc la pseudo-variété *engendrée* par une classe $\mathcal{C}$ de semigroupes finis, notée $\mathbf{V}(\mathcal{C})$, comme étant l'intersection de toutes les pseudo-variétés qui contiennent $\mathcal{C}$.

Proposition 2.2.1 *Pour toute classe de semigroupes finis $\mathcal{C}$ on a $\mathbf{V}(\mathcal{C}) = HSP_f(\mathcal{C})$. Autrement dit, un semigroupe est dans $\mathbf{V}(\mathcal{C})$ si et seulement si il divise un produit direct fini de semigroupes de $\mathcal{C}$.* □

Par exemple, la pseudo-variété engendrée par la classe des semigroupes finis réguliers est **S**. Cela est une conséquence immédiate du théorème 1.3.1 et du fait que tout semigroupe de la forme $\mathcal{T}_A$, où A est un ensemble non vide, est régulier.

Le problème de déterminer la pseudo-variété engendrée par la classe des semigroupes inversifs finis est longtemps resté ouvert. Ash [18] a montré que c'est la pseudo-variété **ECom** des semigroupes dont les idempotents commutent (entre eux).

Peu après, Birget, Margolis et Rhodes [27] ont montré que la pseudo-variété engendrée par la classe des semigroupes orthodoxes finis est la pseudo-variété, notée **O**, des semigroupes dont les idempotents forment un sous-semigroupe.

La pseudo-variété engendrée par un seul semigroupe S sera notée simplement $\mathbf{V}(S)$. On remarque que si $\mathbf{V}$ est une pseudo-variété finiment engendrée, disons par des semigroupes $S_1, \ldots, S_n$, alors $\mathbf{V} = \mathbf{V}(S_1 \times \ldots \times S_n)$.

2.2.2 Des pseudo-variétés non équationnelles

Malgré la similitude des définitions de variété et de pseudo-variété, le théorème de Birkhoff ne s'applique pas à ces dernières classes. Cependant, il est clair que la classe des semigroupes finis qui satisfont un ensemble d'identités Σ est une pseudo-variété, que l'on représente par $[\Sigma]^F$. Autrement dit, $[\Sigma]^F = [\Sigma] \cap \mathbf{S}$ est la sous-classe des semigroupes finis de la variété $[\Sigma]$. Comme les variétés sont les classes équationnelles, on dira qu'une pseudo-variété $\mathbf{V}$ est une *pseudo-variété équationnelle* si $\mathbf{V} = \mathcal{V}^F$ pour une variété $\mathcal{V}$. La pseudo-variété $[\Sigma]^F$ est aussi représentée par $[\![\Sigma]\!]$. Cette notation sera utilisée plus tard dans un contexte plus vaste mais on l'introduit maintenant par commodité. Les pseudo-variétés usuelles suivantes sont équationnelles :

- $\mathbf{Com} = [\![ab = ba]\!]$, la pseudo-variété des semigroupes commutatifs ;
- $\mathbf{B} = [\![a = a^2]\!]$, la pseudo-variété des semigroupes idempotents ;
- $\mathbf{J}_1 = [\![ab = ba, a = a^2]\!]$, la pseudo-variété des demi-treillis.

La pseudo-variété $\mathbf{J}_1$ est souvent notée **Sl** (de l'anglais "semilattice"). La notation $\mathbf{J}_1$ est due au fait que cette pseudo-variété est la première d'une hiérarchie de pseudo-variétés notées $\mathbf{J}_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Les pseudo-variétés $\mathbf{S} = [\![a = a]\!]$ et $\mathbf{I} = [\![a = b]\!]$ constituent d'autres exemples de pseudo-variétés équationnelles. Par contre, les pseudo-variétés $\mathbf{G}$ [36] et $\mathbf{N}$ [34] ne sont pas équationnelles puisqu'elles ne satisfont aucune identité non triviale. D'où le résultat suivant.

Proposition 2.2.2 *Toute pseudo-variété, distincte de* $\mathbf{S}$*, contenant* $\mathbf{G}$ *ou* $\mathbf{N}$ *est non équationnelle.* □

Toutes les pseudo-variétés ne sont pas définies par des ensembles d'identités, comme nous venons de le remarquer. Cependant, on peut les définir toutes en termes d'identités. Par exemple,

$$\mathbf{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![a_1 \cdots a_n = 0]\!] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![a^n = 0]\!]$$

et

$$\mathbf{G} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![a^n = 1]\!]$$

où les notations $a = 0$ et $a = 1$ sont des abréviations de $ab = ba = a$ et $ab = ba = b$, respectivement. On note que l'union de pseudo-variétés n'est pas en général une pseudo-variété. Dans les exemples de $\mathbf{N}$ et $\mathbf{G}$ ci-dessus on a, cependant, des unions très particulières qui forment toujours des pseudo-variétés. Dans le premier cas, les pseudo-variétés $[\![a_1 \cdots a_n = 0]\!]_{n\in\mathbb{N}}$ (et $[\![a^n = 0]\!]_{n\in\mathbb{N}}$ aussi) forment une chaîne. Quant au second, les pseudo-variétés $[\![a^n = 1]\!]_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille dirigée (i.e., pour deux pseudo-variétés quelconques de la famille il en existe une troisième qui les contient).

Le théorème suivant montre que toute pseudo-variété est union d'une chaîne de pseudo-variétés équationnelles.

Théorème 2.2.3 (Eilenberg-Schützenberger) *Soit* $\mathbf{V}$ *une pseudo-variété. Alors il existe une suite* $(u_n = v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'identités telle que* $\mathbf{V} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\bigcap_{n\geq k}[\![u_n = v_n]\!])$. □

Précisons que la pseudo-variété $\mathbf{V} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\bigcap_{n\geq k}[\![u_n = v_n]\!])$ est constituée par les semigroupes qui satisfont toutes les identités $u_n = v_n$ à partir d'un certain rang. On dit donc que $\mathbf{V}$ est *ultimement définie* par la suite $(u_n = v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles d'identités, on dira aussi que la pseudo-variété $\mathbf{V} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\bigcap_{n\geq k}[\![\Sigma_n]\!])$ est ultimement définie par la suite $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut vérifier par exemple que $\mathbf{G}$ est ultimement définie par la suite $(a^{n!} = 1)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.2.3 Pseudo-variétés définies par les relations de Green

On a vu au chapitre précédent divers exemples de classes de semigroupes qui peuvent être définies par les relations de Green. La plupart de ces classes (restreintes aux semi-groupes finis) constituent même des pseudo-variétés. Du fait de leur grande importance, pour l'instant on va se dédier en particulier aux classes dont les semigroupes ont des relations de Green triviales.

Pour chaque relation de Green $\mathcal{K}$, on dit qu'un semigroupe S est $\mathcal{K}$-trivial si $\mathcal{K}$ est la relation identité sur S, c'est-à-dire, si, pour tous $r, s \in S$, $r \mathrel{\mathcal{K}} s$ entraîne $r = s$.

Proposition 2.2.4 *Soit $\mathcal{K}$ l'une des relations de Green. La classe des semigroupes finis $\mathcal{K}$-triviaux constitue une pseudo-variété.* $\square$

Soit $\mathcal{K}$ l'une des relations de Green $\mathcal{J}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{H}$. La pseudo-variété des semigroupes $\mathcal{K}$-triviaux correspondante est notée **J**, **R**, **L** et **A**. Des identités qui les définissent ultimement sont énoncées ci-dessous.

Proposition 2.2.5 *Les pseudo-variétés* **R**, **L**, **J** *et* **A** *sont caractérisées de la manière suivante.*

(1) *La pseudo-variété* **R** *est ultimement définie par la suite d'identités $(ab)^n = (ab)^n a$.*

(2) *La pseudo-variété* **L** *est ultimement définie par la suite d'identités $(ab)^n = b(ab)^n$.*

(3) *La pseudo-variété* **J** *est ultimement définie par la suite d'identités $(ab)^n a = (ab)^n = b(ab)^n$. Elle est également définie ultimement par les suites $(ab)^n = (ba)^n$ et $a^n = a^{n+1}$.*

(4) *La pseudo-variété* **A** *est ultimement définie par la suite d'identités $a^n = a^{n+1}$.* $\square$

En certains cas on peut simplifier la notation des suites d'identités définissant ultimement une pseudo-variété. En fait tel est le cas de la plupart des pseudo-variétés usuelles. Par exemple, la pseudo-variété **R** est aussi ultimement définie par la suite $(ab)^{n!} = (ab)^{n!}a$. Un semigroupe fini S est donc dans **R** si et seulement si S satisfait toutes les identités $(ab)^{n!} = (ab)^{n!}a$ à partir d'un certain rang. Or si k est un exposant de S il se trouve que, pour tout $n \geq k$, $n!$ est aussi un exposant de S. Par conséquent, S est $\mathcal{R}$-trivial si et seulement si $(rs)^\omega = (rs)^\omega r$ pour tous $r, s \in S$. On peut donc écrire simplement $(ab)^\omega = (ab)^\omega a$ pour la suite $(ab)^{n!} = (ab)^{n!}a$. Les cas **L**, **J**, **A**, **G** et **N** sont traités de manière similaire et permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= [\![(ab)^\omega = (ab)^\omega a]\!] \\
\mathbf{L} &= [\![(ab)^\omega = b(ab)^\omega]\!] \\
\mathbf{J} &= [\![(ab)^\omega a = (ab)^\omega = b(ab)^\omega]\!] \\
&= [\![(ab)^\omega = (ba)^\omega, a^\omega = a^{\omega+1}]\!] \\
\mathbf{A} &= [\![a^\omega = a^{\omega+1}]\!] \\
\mathbf{G} &= [\![a^\omega b = ba^\omega = b]\!] \\
\mathbf{N} &= [\![a^\omega b = ba^\omega = a^\omega]\!].
\end{aligned}$$

On a l'habitude d'abrèger encore la notation pour **G** et **N** en écrivant

$$\mathbf{G} = [\![a^\omega = 1]\!] \qquad \text{et} \qquad \mathbf{N} = [\![a^\omega = 0]\!].$$

Réciproquement, on peut définir des pseudo-variétés en utilisant la notation ci-dessus sans aucune ambiguïté. Par exemple, les pseudo-variétés

$$\begin{aligned}\mathbf{LI} &= [\![a^\omega b a^\omega = a^\omega]\!]\\ \mathbf{K} &= [\![a^\omega b = a^\omega]\!]\\ \mathbf{D} &= [\![b a^\omega = a^\omega]\!]\end{aligned}$$

sont constituées des semigroupes S tels que, pour tous $s, e \in S$ avec e idempotent, $ese = e$, $es = e$ et $se = e$, respectivement.

Notation : Pour simplifier les notations, et sauf mention contraire, on adopte la convention de remplacer les expressions du type a^ω, b^ω et c^ω par des lettres e, f et g si les variables a, b et c apparaissent seulement dans e, f et g, respectivement. Ainsi les pseudo-variétés **LI** et **K**, par exemple, sont définies par $eae = e$ et $ea = e$, respectivement. ■

2.2.4 Opérateurs sur les pseudo-variétés

Plusieurs des pseudo-variétés les plus étudiées sont (ou peuvent être) décrites à l'aide d'autres pseudo-variétés, en général plus simples. C'est-à-dire qu'on construit de nouvelles pseudo-variétés à partir de celles déjà connues, en utilisant des opérateurs. Bon nombre de problèmes de recherche portent d'ailleurs sur l'étude de ces opérateurs, du calcul de leur résultat et de la recherche de théorèmes de décomposition. Nous décrivons maintenant quelques uns de ces opérateurs.

• Les opérateurs de treillis

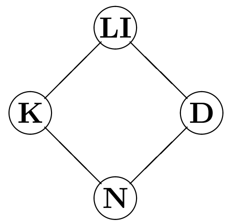
Ce sont peut-être les plus naturels et les plus simples à décrire. Étant données deux pseudo-variétés **V** et **W**,

- l'infimum $\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}$ est l'intersection $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$;
- le supremum $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ est la pseudo-variété engendrée par l'union $\mathbf{V} \cup \mathbf{W}$.

En fait $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ est une pseudo-variété pour tous **V** et **W** tandis que $\mathbf{V} \cup \mathbf{W}$ est une pseudo-variété si et seulement si $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}$ ou $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$. Comme on peut le vérifier $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ est l'ensemble de tous les quotients de tous les produits directs de la forme $S \times T$ avec $S \in \mathbf{V}$ et $T \in \mathbf{W}$.

Le calcul de l'intersection de deux pseudo-variétés **V** et **W** ne pose pas de grandes difficultés : on obtient une base de pseudo-identités (qu'on définira au prochain chapitre) de $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ en prenant l'union des bases de **V** et de **W**. Par contre, le calcul de $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ est très difficile en général et relativement peu de résultats sur les pseudo-variétés de ce type sont connus à l'heure actuelle.

Comme exemples bien connus on mentionnera les égalités $\mathbf{K} \cap \mathbf{D} = \mathbf{N}$ et $\mathbf{K} \vee \mathbf{D} = \mathbf{LI}$. On a ainsi le sous-treillis suivant de $\mathcal{P}s(\mathbf{S})$



Les pseudo-variétés $\mathbf{N}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$ et $\mathbf{LI}$ seront fondamentales pour la suite de ce travail (on peut même dire qu'elles sont omniprésentes). En particulier, le chapitre 4 est consacré au calcul de diverses pseudo-variétés du type $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ où $\mathbf{V}$ est l'une de ces pseudo-variétés.

D'autres exemples classiques sont les suivants

$$\mathbf{R} \cap \mathbf{LI} = \mathbf{K}, \qquad \mathbf{L} \cap \mathbf{LI} = \mathbf{D}, \qquad \mathbf{J} \cap \mathbf{LI} = \mathbf{N}.$$

Peut-être le premier calcul de supremum obtenu en utilisant la thèorie des opérations implicites est dû à Almeida [4] qui a montré que

$$\mathbf{G} \vee \mathbf{Com} = \mathbf{ZE}$$

où $\mathbf{ZE} = [\![a^\omega b = ba^\omega]\!]$ est la pseudo-variété des semigroupes dont les idempotents sont centraux. Il est plus facile de montrer que

$$\mathbf{G} \vee \mathbf{N} = \mathbf{IE}$$

où $\mathbf{IE} = [\![a^\omega = b^\omega]\!]$ est la pseudo-variété des semigroupes ayant un seul idempotent.

• L'opérateur $\_ * \_$

Soient S et T deux semigroupes, et soit End S le monoïde de tous les morphismes de S dans lui-même. Une *action (gauche)* de T sur S est un morphisme de monoïdes $\varphi : T^1 \to \mathrm{End}\ S$, autrement dit (en utilisant la notation additive dans S, la notation multiplicative dans T et en représentant $\varphi(t)(s)$ par ts) tel que

$$\begin{aligned} t(s_1 + s_2) &= ts_1 + ts_2 \\ (t_1t_2)s &= t_1(t_2s) \\ 1s &= s \end{aligned}$$

pour tous $t, t_1, t_2 \in T$ et $s, s_1, s_2 \in S$. Le *produit semi-direct* $S *_\varphi T$ est le semigroupe d'univers $S \times T$ dont l'opération est définie par

$$(s_1, t_1)(s_2, t_2) = (s_1 + t_1s_2, t_1t_2).$$

En général on omet la référence à l'action φ en écrivant simplement $S * T$ pour le produit semi-direct $S *_\varphi T$.

Pour deux pseudo-variétés $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ on définit le *produit semi-direct*

$$\mathbf{V} * \mathbf{W}$$

de $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ comme étant la pseudo-variété engendrée par tous les produits semi-directs du type $S * T$ avec $S \in \mathbf{V}$ et $T \in \mathbf{W}$.

Deux exemples classiques de pseudo-variétés de cette forme sont,

$$\mathbf{J}_1 * \mathbf{D} = \mathbf{LJ}_1$$

déterminée indépendamment par Brzozowski et Simon [30] et McNaughton [50], et

$$\mathbf{Com} * \mathbf{D} = [\![eafbecf = ecfbeaf]\!]$$

obtenue par Thérien et Weiss [80].

• L'opérateur _ⓜ _

Soient S et T deux semigroupes. Un *morphisme relationnel* de S dans T est une relation $\pi : S \to T$ telle que, pour tous $s, t \in S$,

1) $\pi(s) \neq \emptyset$;
2) $\pi(s)\pi(t) \subseteq \pi(st)$.

Pour deux pseudo-variétés $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ on définit le *produit de Mal'cev*

$$\mathbf{V} \textcircled{m} \mathbf{W}$$

de $\mathbf{V}$ par $\mathbf{W}$ comme étant la pseudo-variété des semigroupes finis S pour lesquels il existe un semigroupe T dans $\mathbf{W}$ et un morphisme relationnel $\pi : S \to T$ tel que $\pi^{-1}(e) \in \mathbf{V}$ pour tout idempotent $e \in T$.

• L'opérateur D_

Pour une pseudo-variété $\mathbf{V}$ de semigroupes on définit

$$\mathbf{DV} = \{S \in \mathbf{S} \mid \text{ les } \mathcal{D}\text{-classes régulières de } S \text{ sont des semigroupes de } \mathbf{V}\}.$$

Cette classe de semigroupes constitue bien sûr une pseudo-variété. Des exemples de pseudo-variétés de ce type les plus usuelles sont les suivantes

$$\begin{aligned}
\mathbf{DA} &= [\![(ab)^w(ba)^w(ab)^w = (ab)^w, a^{w+1} = a^w]\!] \\
\mathbf{DG} &= [\![(ab)^w = (ba)^w]\!] \\
\mathbf{DO} &= [\![(ab)^w(ba)^w(ab)^w = (ab)^w]\!] \\
\mathbf{DS} &= [\![((ab)^w(ba)^w(ab)^w)^w = (ab)^w]\!].
\end{aligned}$$

Nous rencontrerons souvent dans la suite de ce travail la sous-pseudo-variété de $\mathbf{DO}$, notée $\mathbf{DRG}$ (resp. $\mathbf{DLG}$), formée des semigroups dont les relations de Green $\mathcal{R}$

et $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{L}$ et $\mathcal{H}$) coïncident dans chaque $\mathcal{D}$-classe régulière. Ces pseudo-variétés ont été étudiées en détail dans [17] et on sait que

$$\begin{aligned}\mathbf{DRG} &= [\![(ab)^\omega(ba)^\omega = (ab)^\omega]\!]\\ \mathbf{DLG} &= [\![(ab)^\omega(ba)^\omega = (ba)^\omega]\!].\end{aligned}$$

Pour chaque pseudo-variété **H** de groupes on notera **DOH** (resp. **DRH**, **DLH**, **DH**) la pseudo-variété des semigroupes dans **DO** (resp. **DRG**, **DLG**, **DG**) dont tous les sous-groupes sont dans **H**. En particulier, on a

$$\mathbf{DOI} = \mathbf{DA}, \qquad \mathbf{DRI} = \mathbf{R}, \qquad \mathbf{DLI} = \mathbf{L}, \qquad \mathbf{DI} = \mathbf{J}.$$

• Les opérateurs $\__{\mathbf{M}}$, $\__{\mathbf{S}}$ et $\mathbf{M}\_$

Jusqu'ici on a considéré seulement des pseudo-variétés de semigroupes. Néanmoins, de la même manière qu'on a défini les pseudo-variétés de semigroupes, on peut définir des pseudo-variétés de n'importe quelles algèbres finies du même type. Ainsi, dans ce travail on va considérer aussi des *pseudo-variétés de monoïdes* et des *pseudo-variétés de groupes*.

La pseudo-variété de monoïdes formée de tous les monoïdes finis sera notée **M**. On peut passer des pseudo-variétés de semigroupes aux pseudo-variétés de monoïdes, et inversement, en utilisant certains opérateurs. Pour l'instant on définit trois d'entre eux. Un quatrième sera introduit aussitôt après.

Étant donnée une pseudo-variété de semigroupes **V** on l'associe la classe $\mathbf{V_M}$ des monoïdes finis qui, vus comme des semigroupes, sont dans **V**. Cette classe est une pseudo-variété de monoïdes. Pour cette raison on utilisera souvent dans la suite la même notation pour représenter une pseudo-variété de semigroupes **V** et la pseudo-variété de monoïdes $\mathbf{V_M}$.

Réciproquement, étant donnée une pseudo-variété de monoïdes **V** on lui associe la pseudo-variété de semigroupes $\mathbf{V_S}$ engendrée par la classe des monoïdes de **V**, vus comme des semigroupes.

Finalement, on associe à une pseudo-variété de semigroupes **V** la pseudo-variété **MV** de monoïdes engendrée par la classe des monoïdes de forme S^1 avec $S \in \mathbf{V}$.

On présente maintenant trois exemples de calculs du type **MV**, obtenus, respectivement, par Straubing, Pin et Almeida (voir [9]).

$$\begin{aligned}\mathbf{MN} &= [\![a^\omega b = ba^\omega, a^{\omega+1} = a^\omega]\!] = \mathbf{ZE} \cap \mathbf{A}\\ \mathbf{MK} &= [\![a^\omega ba = a^\omega b]\!]\\ \mathbf{MLI} &= [\![a^\omega baca^\omega = a^\omega bca^\omega, a^\omega bacdc^\omega = a^\omega bcadc^\omega]\!].\end{aligned}$$

• L'opérateur $\mathbf{L}\_$

Un autre opérateur qui relie les semigroupes avec les monoïdes est l'opérateur **L**_ qu'on décrit tout de suite.

Soit S un semigroupe. Pour tout idempotent $e \in S$, eSe est un monoïde d'identité e. Ce monoïde est appelé le monoïde *local* de S associé à e. Pour une pseudo-variété **V** de monoïdes on note

$$\mathbf{LV} = \{S \in \mathbf{S} \mid eSe \in \mathbf{V} \text{ pour tout } e \in E(S)\}.$$

Il est facile de vérifier que cette classe est une pseudo-variété de semigroupes, que l'on appelle la pseudo-variété *localisée* associée à **V**. La pseudo-variété **LV** est la plus grande pseudo-variété de semigroupes dont l'intersection avec **M** est **V**. En particulier la pseudo-variété **LI**, des semigroupes localement triviaux, est de ce type.

On dispose d'une méthode, établie par Eilenberg [34], pour trouver une suite d'identités définissant ultimement une pseudo-variété de la forme **LV**, en en connaissant une pour **V**. Supposons **V** définie ultimement par une suite d'identités

$$(a_{n,1} \cdots a_{n,k_n} = b_{n,1} \cdots b_{n,m_n})_{n \in \mathbb{N}}$$

sur un ensemble A, avec $a_{n,1}, \ldots, a_{n,k_n}, b_{n,1}, \ldots, b_{n,m_n} \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors **LV** est ultimement définie par la suite d'identités

$$(c^{n!}a_{n,1}c^{n!}a_{n,2} \cdots c^{n!}a_{n,k_n}c^{n!} = c^{n!}b_{n,1}c^{n!}b_{n,2} \cdots c^{n!}b_{n,m_n}c^{n!})_{n \in \mathbb{N}},$$

où c est une lettre n'appartenant pas à A. Ainsi on obtient, par exemple, les descriptions suivantes de **LV** pour $\mathbf{V} = \mathbf{J}_1$, **G**, **ZE**, **ECom** ou **DG** :

$$\begin{aligned}
\mathbf{LJ}_1 &= [\![eaeae = eae, eaebe = ebeae]\!] \\
\mathbf{LG} &= [\![(eae)^\omega = e]\!] \\
\mathbf{LZE} &= [\![(eae)^\omega ebe = ebe(eae)^\omega]\!] \\
\mathbf{LECom} &= [\![(eae)^\omega(ebe)^\omega = (ebe)^\omega(eae)^\omega]\!] \\
\mathbf{LDG} &= [\![(eaebe)^\omega = (ebeae)^\omega]\!].
\end{aligned}$$

On remarque que la pseudo-variété **ZE**, par exemple, a été définie comme étant une pseudo-variété de semigroupes et que l'opérateur **L**_ agit sur des pseudo-variétés de monoïdes. Cependant, comme nous avons mentionné ci-dessus, nous utilisons la même notation pour une pseudo-variété de semigroupes **V** et pour la pseudo-variété de monoïdes $\mathbf{V_M}$ $(= \mathbf{V} \cap \mathbf{M})$ qui lui est associée. De plus, une base de pseudo-identités qui définit la pseudo-variété **V**, définit aussi la pseudo-variété $\mathbf{V_M}$.

Par les mêmes raisons on peut aussi parler de la pseudo-variété $\mathbf{L}(\mathbf{LV})$ et montrer que $\mathbf{L}(\mathbf{LV}) = \mathbf{LV}$.

• L'opérateur P_

Pour une pseudo-variété **V** on note **PV** la pseudo-variété engendrée par tous les semigroupes des parties $\mathcal{P}(S)$ avec $S \in \mathbf{V}$.

2.3 Variétés de langages

Dans la section 1.6 nous avons vu quelques connexions entre les langages reconnaissables et les semigroupes finis. On a vu notamment que, à chaque langage reconnaissable il est associé un unique semigroupe fini, qui est son semigroupe syntaxique. Dans cette section nous verrons comme on peut classifier les langages reconnaissables de façon que, à chaque classe correspond (bijectivement) une pseudo-variété de semigroupes. Le résultat qui établit cette correspondance est le théorème des variétés d'Eilenberg.

Une *classe de langages reconnaissables* est une correspondance $\mathcal{C}$ qui associe à chaque alphabet fini A un ensemble $\mathcal{C}(A^+)$ de langages reconnaissables de A^+. Une *variété de langages* est une classe $\mathcal{V}$ de langages reconnaissables telle que, pour tous alphabets finis A et B,

(1) $\mathcal{V}(A^+)$ est une algèbre de Boole ;

(2) pour tout morphisme $\varphi : A^+ \to B^+$, $L \in \mathcal{V}(B^+)$ implique $\varphi^{-1}(L) \in \mathcal{V}(A^+)$;

(3) si $L \in \mathcal{V}(A^+)$ et $a \in A$, alors $a^{-1}L, La^{-1} \in \mathcal{V}(A^+)$.

Soit $\mathbf{V}$ une pseudo-variété et soit $\mathcal{V}$ la classe de langages reconnaissables qui associe à chaque alphabet fini A l'ensemble $\mathcal{V}(A^+)$ des langages $\mathbf{V}$-reconnaissables de A^+, i.e., des langages de A^+ qui sont reconnus par un semigroupe de $\mathbf{V}$. Remarquons que, pour un langage L, être reconnu par un semigroupe de $\mathbf{V}$ équivaut à dire, d'après la proposition 1.6.2, que $S(L)$ est dans $\mathbf{V}$. D'après la proposition 1.6.3 cette classe $\mathcal{V}$ constitue bien sûr une variété de langages. De plus, on a le résultat fondamental suivant.

Théorème 2.3.1 (Eilenberg) *La correspondance $\mathbf{V} \mapsto \mathcal{V}$ définit une bijection entre les pseudo-variétés de semigroupes et les variétés de langages.* □

Les définitions et résultats de cette section (et d'autres aussi) peuvent être bien sûr adaptés aisément aux monoïdes. Il suffit de remplacer "A^+" par "A^*" et "semigroupe" par "monoïde".

Notation : En général on notera $\mathcal{V}$ la variété de langages associée à une pseudo-variété de semigroupes notée $\mathbf{V}$. Ainsi, on notera par exemple $\mathcal{DA}$, $\mathcal{LJ}_1$ et $\mathcal{C}om$ les variétés de langages associées, respectivement, à $\mathbf{DA}$, $\mathbf{LJ}_1$ et $\mathbf{Com}$. ■

Nous groupons dans le théorème suivant quelques résultats qui décrivent les variétés de langages associées, par le théorème d'Eilenberg, à certaines pseudo-variétés. Ces résultats peuvent être trouvés dans les livres d'Eilenberg [34] et de Pin [57].

Théorème 2.3.2 *Pour chaque alphabet fini A,*

1) *[Simon] $\mathcal{J}(A^*)$ est l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme*

$$A^*a_1A^* \cdots a_nA^*$$

où $n \in \mathbb{N}_0$ et $a_1, \ldots, a_n \in A$.

2) *[Eilenberg]* $\mathcal{R}(A^*)$ *est constituée des langages qui s'écrivent comme union disjointe d'un nombre fini de langages de la forme*

$$A_0^* a_1 A_1^* \cdots a_n A_n^*$$

où $n \in \mathbb{N}_0$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $A_i \subseteq A \setminus \{a_{i+1}\}\,(i = 0, \ldots, n-1)$ *et* $A_n \subseteq A$.

3) *[Schützenberger]* $\mathcal{DA}(A^*)$ *est constituée des langages qui s'écrivent comme union disjointe d'un nombre fini de langages de la forme*

$$A_0^* a_1 A_1^* \cdots a_n A_n^* \tag{2.1}$$

où $n \in \mathbb{N}_0$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $A_0, \ldots, A_n \subseteq A$ *et le produit* (2.1) *est* non ambigu, *i.e., chacun de ces éléments* w *admet une factorisation unique de la forme* $w = u_0 a_1 u_1 \cdots a_n u_n$ *avec* $u_i \in A_i^*$ $(i = 0, \ldots, n)$.

4) *[Brzozowski, Simon, McNaughton, Zalcstein]* $\mathcal{LJ}_1(A^+)$ *est l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme* wA^*, A^*w *et* A^*wA^* *avec* $w \in A^+$.

5) $\mathcal{C}om(A^*)$ *est l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme*

$$\{u \in A^* \mid |u|_a = r\} \qquad et \qquad \{u \in A^* \mid |u|_a \equiv r \ mod\ p^n\}$$

où $r \in \mathbb{N}_0$, p *est un nombre premier,* $n \in \mathbb{N}$ *et* $a \in A$. □

Les classes $\mathcal{J}$ et $\mathcal{LJ}_1$ sont, respectivement, les classes bien connus des langages *testables par morceaux* et des langages *localement testables*. La classe $\mathcal{LJ}_1$ est souvent notée $\mathcal{L}t$.

Chapitre 3

Opérations Implicites

Dans ce chapitre nous présentons les résultats fondamentaux de la théorie des opérations implicites et des semigroupes profinis libres. Cette théorie a connu un grand développement après la publication de l'article de Reiterman [65], principalement par des travaux d'Almeida [5, 8, etc] et Azevedo [21]. À présent, il y a plusieurs façons d'exposer la thèorie en partant de différentes définitions de ce qu'est une opération implicite (voir, par exemple, Almeida [5, 9], Almeida et Weil [15, 16], Weil [90], Zeitoun [96]). Les exposés d'Almeida [5, 9] portent sur des algèbres quelconques. Cependant nous nous intéresserons seulement aux pseudo-variétés de semigroupes et donc toutes les algèbres que nous allons considérer dans ce chapitre seront des semigroupes (sauf dans la première section où des algèbres quelconques seront considérées dans la définition de limite projective).

Nous suivrons principalement les résumés d'Almeida et Weil [15, 16] où les semigroupes d'opérations implicites sur une pseudo-variété $\mathbf{V}$ sont vus comme des cas particuliers d'objets un peu plus généraux qui sont les semigroupes pro-$\mathbf{V}$ libres, notés $\hat{F}_A(\mathbf{V})$, sur un ensemble A possiblement infini (les semigroupes d'opérations implicites sur $\mathbf{V}$ sont exactement les semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ avec A fini). Dans ce travail nous utiliserons plutôt des ensembles finis, mais au chapitre 9 nous aurons besoin de considérer les semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ dans un contexte plus vaste.

Les semigroupes pro-$\mathbf{V}$ libres sont introduits dans la deuxième section, et dans la troisième section nous exposons les liens entre ces semigroupes et les opérations implicites, en exposant aussi autres approches possibles. La quatrième section est destinée à présenter quelques exemples simples de semigroupes de la forme $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ mais qui seront importants pour la suite. Le théorème de Reiterman sera rappelé dans la cinquième section. On termine ce chapitre en rappelant les principaux résultats sur les opérations implicites sur les sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DS}$.

3.1 Limites projectives

Tous les énoncés de cette section sont tirés de [15, 16] auxquels on pourra se reporter pour les preuves. Pour être utilisé au chapitre 9 nous considérons des algèbres quelconques dans cette section. À partir de la deuxième section nous considérons seulement des semigroupes.

Un ensemble ordonné $(I, \leq)$ est dit *dirigé* si toute partie de I à deux éléments est majorée. Soit $(I, \leq)$ un ordre dirigé et soit $(S_i)_{i \in I}$ une famille d'algèbres telle que, pour chaque paire (i, j) d'éléments de I avec $i \geq j$, il existe un morphisme $\varphi_{i,j} : S_i \longrightarrow S_j$. La famille $(S_i)_{i \in I}$ est dite un *système projectif*[1] si, pour tous $i, j, k \in I$ avec $i \geq j \geq k$,

- $\varphi_{i,i} = id_{S_i}$;
- $\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j} = \varphi_{i,k}$, autrement dit, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & S_i \arrow[dl, "\varphi_{i,j}"'] \arrow[dr, "\varphi_{i,k}"] & \\ S_j \arrow[rr, "\varphi_{j,k}"'] & & S_k \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Soit $(I, \leq)$ un ordre dirigé et soit $(S_i)_{i \in I}$ un système projectif d'algèbres pour une famille $(\varphi_{i,j})_{i,j}$ de morphismes. La *limite projective* de la famille $(S_i)_{i \in I}$, si elle existe, est la sous-algèbre du produit direct $\prod_{i \in I} S_i$ notée et définie par

$$\varprojlim (S_i)_{i \in I} = \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} S_i \mid i \geq j \Rightarrow \varphi_{i,j}(x_i) = x_j\}.$$

On appelle *morphisme canonique* chaque restriction

$$\pi_i : \varprojlim (S_i)_i \longrightarrow S_i$$

de la projection de $\prod_{i \in I} S_i$ sur S_i.

Exemple 3.1.1 *Soit $I = \mathbb{N}$. Pour tout $n, k \in \mathbb{N}_0$, soit $S_n = \mathbb{Z}$ et considérons les morphismes*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{n+k,n} : & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \mapsto & 2^k x. \end{array}$$

Ces donnés définissent un système projectif et $\varprojlim (S_n)_n = \{0\}$. ■

Soit $(S_i)_{i \in I}$ un système projectif d'algèbres pour une famille $(\varphi_{i,j})_{i,j}$ de morphismes, indexé par un ordre dirigé I. Soit T une algèbre et soit $(\rho_i : T \longrightarrow S_i)_{i \in I}$ une famille de morphismes telle que, pour tous $i, j \in I$ avec $i \geq j$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "\rho_i"'] \arrow[dr, "\rho_j"] & \\ S_i \arrow[rr, "\varphi_{i,j}"'] & & S_j \end{tikzcd}$$

[1] Avec la famille $(\varphi_{i,j})_{i,j \in I, i \geq j}$ sous-entendue.

commute. La famille $(\rho_i : T \longrightarrow S_i)_{i\in I}$ est appelée un *système projectif de morphismes* défini sur l'algèbre T.

La limite projective jouit de la propriété universelle suivante.

Proposition 3.1.2 *Soit $(\rho_i : T \longrightarrow S_i)_{i\in I}$ un système projectif de morphismes défini sur une algèbre T et soit $S = \varprojlim(S_i)_i$. Alors il existe un unique morphisme $\rho : T \longrightarrow S$ qui rend commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\rho_i"] & \\ S \arrow[rr, "\pi_i"'] & & S_i \end{tikzcd}$$

pour tout $i \in I$. De plus, ρ est défini, pour tout $t \in T$, par $\rho(t) = (\rho_i(t))_i$.

Cette propriété définit $\varprojlim(S_i)_{i\in I}$ à isomorphisme près. □

Nous disons que le morphisme ρ décrit ci-dessus est *induit* par le système projectif de morphismes $(\rho_i)_i$.

Dans la suite nous considérons que toutes les algèbres d'un système projectif $(S_i)_{i\in I}$ sont des algèbres topologiques et que les morphismes $\varphi_{i,j}$ sont continus. On munit le produit direct $\prod_{i\in I} S_i$ de la topologie produit. Par définition, une base d'ouverts pour cette topologie est formée des ensembles de la forme

$$\prod_{i\in I} U_i$$

où les U_i sont des ouverts de S_i et où $U_i = S_i$ sauf pour un nombre fini d'indices.

Dans ces conditions, la limite projective $\varprojlim(S_i)_{i\in I}$ est une sous-algèbre fermée de $\prod_{i\in I} S_i$ et que les morphismes canoniques π_i sont continus. On déduit en particulier que, si les S_i sont compactes, alors leur produit direct l'est aussi et donc aussi $\varprojlim(S_i)_i$.

Remarque 3.1.3 *Une base d'ouverts pour $\varprojlim(S_i)_i$ est formée des ensembles de la forme $\pi_i^{-1}(U_i)$ où $i \in I$ et où U_i est un ouvert de S_i. Ceci est une conséquence du fait que I est un ensemble dirigé.* ■

Comme nous nous intéressons aux pseudo-variétés, le cas où les algèbres S_i sont finies va être très important. Dans ce cas on munit les algèbres S_i de la topologie discrète. On obtient donc des algèbres compactes, des morphismes $\varphi_{i,j}$ continus et l'algèbre topologique $\varprojlim(S_i)_i$ est compacte et totalement discontinue.

Pour toute classe d'algèbres $\mathcal{C}$, on dit qu'une algèbre est *pro-$\mathcal{C}$* si elle est la limite projective d'un système projectif d'algèbres dans $\mathcal{C}$. En particulier, une algèbre est *profinie* si elle est la limite projective d'un système projectif d'algèbres finies.

Proposition 3.1.4 *Un semigroupe topologique est profini si et seulement si il est compact et totalement discontinu.* □

Ce dernier énoncé est aussi valide pour d'autres algèbres, telles que monoïdes, groupes, treillis, ensembles, etc.

Nous poursuivons avec l'énoncé de deux propriétés des limites projectives.

Lemme 3.1.5 *Soit $\mathcal{C}$ une classe d'algèbres topologiques fermée par passage aux sous-algèbres fermées, soit $S = \varprojlim(S_i)_i$ la limite projective d'un système projectif d'algèbres dans $\mathcal{C}$ et soient $\pi_i : S \to S_i$ les morphismes canoniques. Alors $\pi_i(S)$ est une sous-algèbre de S_i, pour tout i, et $S = \varprojlim(\pi_i(S))_i$.* □

Ce dernier résultat montre que, si S est une algèbre pro-$\mathcal{C}$ (avec $\mathcal{C}$ comme dans l'énoncé), alors on peut considérer que S est la limite projective d'un système projectif $(S_i)_i$ d'algèbres dans $\mathcal{C}$ dont les morphismes canoniques $\pi_i : S \to S_i$ sont surjectifs.

Le prochain lemme montre que les images homomorphes finies continues d'une limite projective $\varprojlim(S_i)_i$ d'algèbres compactes sont exactement les images des S_i.

Lemme 3.1.6 *Soit $S = \varprojlim(S_i)_i$ la limite projective d'algèbres compactes et soient $\pi_i : S \to S_i$ $(i \in I)$ les morphismes canoniques, qu'on peut supposer surjectifs. Soit T une algèbre finie et soit $\varphi : S \to T$ un morphisme continu. Alors, il existe $i \in I$ et un morphisme continu $\varphi_i : S_i \to T$ tel que $\varphi = \varphi_i \circ \pi_i$.* □

On termine cette section avec la preuve d'un résultat qui regroupe quelques propriétés des semigroupes compacts (et en particulier des semigroupes profinis), auxquelles nous avons déjà fait référence et qui seront beaucoup utilisées dans la suite. Ce résultat est une généralisation de propriétés bien connues des semigroupes finis.

Proposition 3.1.7 *Soit S un semigroupe compact. Alors*

(1) *S contient un idempotent ;*

(2) *si $r, s \in S$ sont tels que $r \leq_{\mathcal{J}} s$, alors*
   - $s \leq_{\mathcal{R}} r \Rightarrow r \,\mathcal{R}\, s$ *;*
   - $s \leq_{\mathcal{L}} r \Rightarrow r \,\mathcal{L}\, s$ *;*
   - $s \leq_{\mathcal{H}} r \Rightarrow r \,\mathcal{H}\, s$ *;*

(3) *les relations de Green $\mathcal{D}$ et $\mathcal{J}$ coïncident dans S.*

Preuve. Pour chaque élément $s \in S$ soit M_s la fermeture du sous-semigroupe de S engendré par s. Alors M_s est compact. Soit I_s l'intersection de tous les idéaux fermés de M_s. Comme l'intersection d'un nombre fini d'idéaux fermés est non vide, la compacité de M_s montre que I_s est l'unique idéal minimal fermé de M_s. Maintenant, la minimalité de I_s entraîne $xI_s = I_sx = I_s$ pour tout $x \in I_s$, ce qui montre que I_s est un groupe. Par conséquent, I_s contient un idempotent ce qui prouve (1).

Les autres cas étant similaires, on donne la preuve de (2) seulement pour la relation $\mathcal{R}$. Soient donc $r, s \in S$ tels que $r \leq_{\mathcal{J}} s$ et $s \leq_{\mathcal{R}} r$. Alors $r = xsy$ et $s = rz$ avec $x, y, z \in S^1$. On a donc

$$r = x^k r (zy)^k$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par (1) il existe une suite $((zy)^{n_k})_k$ qui converge vers un idempotent, d'où

$$r = \lim_k x^{n_k} r (zy)^{2n_k}.$$

Mais, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$x^{n_k} r (zy)^{2n_k} = r(zy)^{n_k} = rzy(zy)^{n_k - 1} = sy(zy)^{n_k - 1} \leq_{\mathcal{R}} s.$$

Le passage à la limite montre ainsi que $r \leq_{\mathcal{R}} s$, et termine la preuve de (2).

Pour conclure la preuve de la proposition considérons $r, s \in S$ et supposons que $r \mathrel{\mathcal{J}} s$. En particulier, on peut écrire r sous la forme $r = xsy$ avec $x, y \in S^1$. En outre, $xs \leq_{\mathcal{J}} s \mathrel{\mathcal{J}} r$ et donc $xs \leq_{\mathcal{J}} r \leq_{\mathcal{R}} xs$. Par (2) ceci entraîne $r \mathrel{\mathcal{R}} xs$. Maintenant, $s \mathrel{\mathcal{J}} r \mathrel{\mathcal{J}} xs$ et $xs \leq_{\mathcal{L}} s$ et on déduit de (2), encore une fois, que $s \mathrel{\mathcal{L}} xs$. On a ainsi montré que $r \mathrel{\mathcal{D}} s$ ce qui achève la preuve. □

3.2 Semigroupes profinis relativement libres

Dans cette section nous allons considérer seulement des semigroupes. Pour des classes d'algèbres plus générales on peut se reporter à [5].

Soit A un ensemble profini. Considérons la catégorie $\mathcal{C}_A$ dans laquelle

- les objets sont les couples $\mathcal{S} = (S, \mu_S)$, où S est un semigroupe profini et $\mu_S : A \to S$ est une application continue telle que le sous-semigroupe engendré par $\mu_S(A)$ est dense dans S (un tel semigroupe profini est dit *A-engendré*) ;
- φ est un morphisme de $\mathcal{S} = (S, \mu_S)$ dans $\mathcal{T} = (T, \mu_T)$ si c'est un morphisme de semigroupes continu $\varphi : S \to T$ tel que $\varphi \circ \mu_S = \mu_T$.

On note que entre deux objets de $\mathcal{C}_A$ il y a au plus un morphisme. On peut donc définir un ordre (dirigé) $\leq$ sur $\mathcal{C}_A$ par

$$\mathcal{S} \leq \mathcal{T} \text{ s'il existe un morphisme de } \mathcal{S} \text{ dans } \mathcal{T}.$$

Soit maintenant $\mathbf{V}$ une pseudo-variété de semigroupes et considérons la classe $\mathbf{V}_A$ de tous les semigroupes $S \in \mathbf{V}$ — tels que (S, μ_S) est un objet de $\mathcal{C}_A$,— munie de tous les morphismes $\varphi : S \to T$ entre eux — tels que φ est un morphisme de $\mathcal{S} = (S, \mu_S)$ dans $\mathcal{T} = (T, \mu_T)$. La classe $\mathbf{V}_A$ constitue bien un système projectif, et sa limite projective est notée $\hat{F}_A(\mathbf{V})$.

Pour être utilisée plus tard, nous énonçons la remarque suivante qui est une conséquence immédiate de la définition de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ (et de la définition de sa topologie) et de la remarque 3.1.3.

Lemme 3.2.1 *La topologie de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ est la topologie initiale pour tous les morphismes continus dans les semigroupes de $\mathbf{V}$.* □

Pour chaque semigroupe profini $S \in \mathbf{V}$ et chaque application continue $\mu_S : A \to S$ telle que le sous-semigroupe engendré par $\mu_S(A)$ est dense dans S, on peut considérer (cf. la proposition 1.5.1) l'extension naturelle $\bar{\mu}_S : A^+ \to S$ de μ_S à A^+. Puisque S est fini, $\bar{\mu}_S$ est un morphisme surjectif. D'après la propriété universelle des limites projectives donnée par la proposition 3.1.2, ces morphismes $\bar{\mu}_S$ induisent un morphisme unique

$$\iota : A^+ \to \hat{F}_A(\mathbf{V})$$

appelé le *morphisme naturel* de A^+ sur $\hat{F}_A(\mathbf{V})$. Notons ι_A la restriction de ι à A. On remarque que, si $\mathbf{V}$ n'est pas la pseudo-variété triviale, alors l'application ι_A est injective. Cependant, le morphisme ι peut être non injectif.

Exemple. Soit A un ensemble fini, soit $a \in A$ et considérons la pseudo-variété $\mathbf{B}$ des semigroupes idempotents. Comme $\bar{\mu}_S(a^2) = \bar{\mu}_S(a)$ pour tout morphisme $\bar{\mu}_S : A^+ \to S$ avec $S \in \mathbf{B}$, on déduit que $\iota(a^2) = \iota(a)$, ce qui montre que ι n'est pas injectif. En général, pour un ensemble fini A et une pseudo-variété $\mathbf{V}$, ι est injectif si et seulement si $\mathbf{V}$ ne satisfait aucune identité non triviale en $|A|$ variables. ■

Dans la suite nous identifierons souvent les semigroupes isomorphes $\iota(A^+)$ et $A^+/\mathrm{Ker}\,\iota$ (cf. la proposition 1.2.1). En particulier, lorsque A soit fini et $\mathbf{V}$ ne satisfait aucune identité non triviale en $|A|$ variables nous regarderons A^+ comme un sous-semigroupe de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$.

On remarque que le semigroupe $A^+/\mathrm{Ker}\,\iota$ est le semigroupe $\mathbf{V}$-libre sur A. En effet, par définition de semigroupe $\mathbf{V}$-libre sur A, il suffit de vérifier que $\mathrm{Ker}\,\iota$ est exactement $\theta_{\mathbf{V}}(A)$. Or, pour tout $u, v \in A^+$,

$$\begin{aligned}
(u,v) \in \mathrm{Ker}\,\iota &\iff \iota(u) = \iota(v) \\
&\iff \text{pour tout morphisme } \varphi : A^+ \to S \in \mathbf{V},\ \varphi(u) = \varphi(v) \\
&\iff \text{pour tout morphisme } \varphi : A^+ \to S \in \mathbf{V},\ (u,v) \in \mathrm{Ker}\,\varphi \\
&\iff (u,v) \in \theta_{\mathbf{V}}(A).
\end{aligned}$$

Alors, dans la suite le semigroupe $\iota(A^+)$ sera souvent noté $F_A(\mathbf{V})$.

On peut maintenant prouver le résultat fondamental suivant.

Proposition 3.2.2 *Soit A un ensemble profini et soit $\mathbf{V}$ une pseudo-variété de semigroupes. Alors, $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ (muni de l'application ι_A) est le semigroupe pro-$\mathbf{V}$ libre sur A. Autrement dit, $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ est un semigroupe pro-$\mathbf{V}$, A-engendré et toute application continue $\mu_S : A \to S$ sur un semigroupe pro-$\mathbf{V}$ et A-engendré, induit un morphisme continu $\varphi : \hat{F}_A(\mathbf{V}) \to S$ tel que $\varphi \circ \iota_A = \mu_S$.*

En outre, un semigroupe fini A-engendré est dans $\mathbf{V}$ si et seulement si il est image continue de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$.

Preuve. On prouve d'abord que $\iota(A^+)$ est dense dans $\hat{F}_A(\mathbf{V})$. Pour chaque semigroupe profini S A-engendré de $\mathbf{V}$ (muni de l'application continue μ_S associée) soit

$\pi_S : \hat{F}_A(\mathbf{V}) \to S$ le morphisme canonique associé. Alors,

$$\pi_S \circ \iota = \bar{\mu}_S.$$

Par définition de la topologie de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$, une base de voisinages ouverts pour un élément $x \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ consiste de tous les

$$\pi_S^{-1}(\pi_S(x)).$$

Mais $\bar{\mu}_S(A^+) = S$ pour tout $S \in \mathbf{V}$. Par conséquent, si $\pi_S(x) = \bar{\mu}_S(u)$ pour un $u \in A^+$, alors $\iota(u) \in \pi_S^{-1}(\pi_S(x))$. On déduit ainsi que $\iota(A^+)$ est dense dans $\hat{F}_A(\mathbf{V})$.

Soit maintenant $\mu_S : A \to S$ une application continue sur un semigroupe S pro-$\mathbf{V}$ telle que le sous-semigroupe engendré par $\mu_S(A)$ est dense dans S. Puisque S est pro-$\mathbf{V}$, il existe un système projectif $(S_i)_{i\in I}$ de semigroupes dans $\mathbf{V}$ tel que $S = \varprojlim (S_i)_i$. Soient $\pi_i : S \to S_i$ $(i \in I)$ les morphismes canoniques associés, que, d'après le lemme 3.1.5, on peut supposer surjectifs. Par définition de limite projective, chaque élément x de S est de la forme $x = (\pi_i(x_i))_i$. Si on pose, pour chaque $i \in I$,

$$\mu_i = \pi_i \circ \mu_S : A \to S_i,$$

alors on vérifie que S_i est un semigroupe profini A-engendré de $\mathbf{V}$. Par conséquent, si on considère les morphismes canoniques associés à la limite projective qui définit $\hat{F}_A(\mathbf{V})$, on vérifie qu'il existe des morphismes continus $\varphi_i : \hat{F}_A(\mathbf{V}) \to S_i$ tels que

$$\varphi_i \circ \iota_A = \mu_i = \pi_i \circ \mu_S.$$

D'après la propriété universelle des limites projectives, ces morphismes induisent un morphisme continu surjectif $\varphi : \hat{F}_A(\mathbf{V}) \to S$ tel que $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$. On déduit donc $\pi_i \circ \varphi \circ \iota_A = \pi_i \circ \mu_S$ pour tout $i \in I$, ce qui entraîne $\varphi \circ \iota_A = \mu_S$. On a ainsi terminé la preuve de la première partie de la proposition.

Pour conclure la démonstration il suffit de considérer le lemme 3.1.6 et la définition de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$. □

Comme conséquence de cette dernière proposition on a l'utile résultat suivant.

Corollaire 3.2.3 *Soient $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ deux pseudo-variétés de semigroupes telles que $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$, soient A et B deux ensembles profinis, soit ι l'application naturelle de A^+ dans $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ et soit ι_A la restriction de ι à A. Si $\varphi : A \to \hat{F}_B(\mathbf{W})$ est une application continue, alors φ induit un unique morphisme continu $\bar{\varphi} : \hat{F}_A(\mathbf{V}) \to \hat{F}_B(\mathbf{W})$ tel que $\bar{\varphi} \circ \iota_A = \varphi$.*

En particulier, l'application identité de A induit un morphisme continu surjectif de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ sur $\hat{F}_A(\mathbf{W})$. □

Les semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ sont particulièrement simples à décrire lorsque A est fini et le semigroupe $\mathbf{V}$-libre sur A est fini aussi.

Proposition 3.2.4 *Soit A un ensemble fini et soit $\mathbf{V}$ une pseudo-variété de semigroupes. Si le semigroupe $F_A(\mathbf{V})$ est fini, alors $\hat{F}_A(\mathbf{V}) = F_A(\mathbf{V})$. En particulier, $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ est fini et c'est un élément A-engendré de $\mathbf{V}$.* □

Comme exemples de cette situation nous avons les pseudo-variétés $\mathbf{V}$ finiment engendrées : pour chaque ensemble fini A, la catégorie $\mathbf{V}_A$ des éléments A-engendrés de $\mathbf{V}$ admet seulement un nombre fini d'éléments, à isomorphisme près, et $F_A(\mathbf{V})$ est son objet initial d'après le théorème 1.2.4. Comme un cas particulier, nous avons l'exemple très important de la pseudo-variété $\mathbf{J}_1$ qui, comme il est bien connu, est engendrée par le monoïde U_1.

Il est aussi important de rappeler le résultat suivant qui sera utile dans le chapitre 4. Une pseudo-variété sera dite *localement finie* si elle engendre une variété localement finie.

Proposition 3.2.5 *Soit* $\mathbf{V}$ *une pseudo-variété de semigroupes. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Le semigroupe* $\mathbf{V}$*-libre* $F_A(\mathbf{V})$ *est fini pour tout ensemble fini* A *;*

(2) *Le semigroupe* $\mathbf{V}$*-libre* $F_A(\mathbf{V})$ *est dans* $\mathbf{V}$ *pour tout ensemble fini* A *;*

(3) $\mathbf{V}$ *est localement finie.*

Si $\mathbf{V}$ *satisfait l'une de ces conditions, alors* $\mathbf{V}$ *est équationnelle.* □

Par contre, si une pseudo-variété est équationnelle, elle n'est pas nécessairement localement finie. Comme exemple de cette situation nous avons la pseudo-variété

$$\mathbf{V} = [\![a^2 = 0]\!] = [\![a^2b = a^2 = ba^2]\!]$$

puisque il y a une infinité de mots sans carré sur trois lettres (voir [81, 49]). Ceci fournit aussi un exemple d'une pseudo-variété telle que $\hat{F}_A(\mathbf{V}) = F_A(\mathbf{V})$ avec $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ infini (voir [5]).

Un exemple important d'une pseudo-variété qui satisfait les conditions de la proposition 3.2.5 est donné par la pseudo-variété $\mathbf{B}$ des bandes finies. En effet, Green et Rees [43] ont résolu le problème du mot pour les bandes libres sur chaque alphabet fini ce qui a permis de montrer qu'elles sont finies (voir par exemple [44, 49]).

3.3 Opérations implicites et semigroupes pro-V

Comme nous le verrons dans cette section, pour un alphabet fini A, le semigroupe $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ peut être vu comme le semigroupe des opérations implicites A-aires sur $\mathbf{V}$. Pour cette raison, les éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ sont usuellement appelés opérations implicites (A-*aires*) (sur $\mathbf{V}$).

3.3.1 Opérations implicites

Soit $\mathbf{V}$ une pseudo-variété de semigroupes et soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un alphabet fini (de cardinalité $n \in \mathbb{N}$). Sauf mention contraire, dans ce chapitre, A sera toujours cet alphabet. Une *opération implicite* A*-aire* (on dit aussi n-aire) *sur* $\mathbf{V}$ est une famille $x = (x_S)_{S \in \mathbf{V}}$, indexée par les éléments de $\mathbf{V}$, telle que x_S est une application de S^A

sur S et telle que, si $\varphi : S \to T$ est un morphisme avec $S, T \in \mathbf{V}$, alors le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "x_S"] \arrow[d, "\varphi^n"'] & S \arrow[d, "\varphi"] \\ T^n \arrow[r, "x_T"] & T \end{tikzcd}$$

Autrement dit, pour tous $s_1, \ldots, s_n \in S$, on a

$$\varphi x_S(s_1, \ldots, s_n) = x_T(\varphi(s_1), \ldots, \varphi(s_n)).$$

L'ensemble de toutes les opérations implicites A-aires sur $\mathbf{V}$ sera noté (provisoirement...) $I_A(\mathbf{V})$. L'ensemble $I_A(\mathbf{V})$ peut être muni d'une structure de semigroupe en posant : si x et y sont deux opérations implicites A-aires sur $\mathbf{V}$, l'opération implicite xy est donnée, pour tout $S \in \mathbf{V}$ et tous $s_1, \ldots, s_n \in S$, par

$$(xy)_S(s_1, \ldots, s_n) = x_S(s_1, \ldots, s_n) y_S(s_1, \ldots, s_n).$$

Les exemples d'opérations implicites A-aires sur $\mathbf{V}$ les plus simples sont les *projections* $a_1, \ldots, a_n$ définies,— pour $S \in \mathbf{V}$, $s_1, \ldots, s_n \in S$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$,— par

$$(a_i)_S(s_1, \ldots, s_n) = s_i.$$

Le sous-semigroupe de $I_A(\mathbf{V})$ engendré par les projections sera noté (provisoirement...) $E_A(\mathbf{V})$ et ses éléments sont appelés *opérations explicites*. Autrement dit, les opérations explicites A-aires sont les opérations implicites A-aires induites par les mots de A^+. Par exemple, si $(|A| =)n = 3$, le mot $u = a_2a_1a_2^3a_3$ définit une opération explicite 3-aire sur $\mathbf{V}$ en posant, pour tout $S \in \mathbf{V}$ et tout $s_1, s_2, s_3 \in S$,

$$u_S(s_1, s_2, s_3) = s_2s_1s_2^3s_3.$$

Notons que, même si $n > 3$, le mot $u = a_2a_1a_2^3a_3$ peut bien sûr être interprété comme une opération explicite n-aire.

Il y a une autre opération implicite, la puissance-ω, qui est facile à décrire et qui, en général, n'est pas explicite. Rappelons que, pour chaque élément s d'un semigroupe fini S, s^ω dénote l'unique idempotent du sous-semigroupe de S engendré par s (autrement dit, s^ω est l'unique idempotent de la forme s^k avec $k \in \mathbb{N}$). Alors, si on pose

$$(a^\omega)_S(s) = s^\omega,$$

pour tout $S \in \mathbf{V}$ et tout $s \in S$, on obtient ainsi une opération unaire a^ω sur $\mathbf{V}$. En effet, on vérifie facilement que $\varphi(s^\omega) = (\varphi(s))^\omega$ pour tout $s \in S$ et pour tout morphisme de semigroupes $\varphi : S \to T$.

Le résultat anoncé est le suivant.

Proposition 3.3.1 *Soit* $\mathbf{V}$ *une pseudo-variété de semigroupes et soit* A *un alphabet fini. Alors, les semigroupes* $I_A(\mathbf{V})$ *et* $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ *sont naturellement isomorphes. Dans cet isomorphisme, les éléments de* $\iota(A^+)$ *sont exactement les images des opérations explicites* A*-aires sur* $\mathbf{V}$*, où* ι *est le morphisme naturel de* A^+ *sur* $\hat{F}_A(\mathbf{V})$*.*

Preuve. Soient $S \in \mathbf{V}$ et $\mu : A \to S$ une application continue telle que le sous-semigroupe engendré par $\mu(A)$ est dense dans S. Considérons maintenant l'application

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_\mu : & I_A(\mathbf{V}) & \to & S \\ & x & \mapsto & x_S(\mu(a_1), \ldots, \mu(a_n)). \end{array}$$

Cette application est un morphisme, et la famille de tous les φ_μ constitue un système projectif de morphismes tel que

$$\bigcap_\mu \varphi_\mu^{-1}(\varphi_\mu(x)) = \{x\}$$

pour tout $x \in I_A(\mathbf{V})$. Alors, d'après la définition de limite projective, il est immédiat que le morphisme $\varphi : I_A(\mathbf{V}) \to \hat{F}_A(\mathbf{V})$ induit par ce système projectif est injectif.

Le morphisme inverse $\psi : \hat{F}_A(\mathbf{V}) \to I_A(\mathbf{V})$ est construit comme suit. Pour chaque $S \in \mathbf{V}$ et chaque $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S^n$ considérons l'application

$$\begin{array}{rrcl} \mu_s : & A & \to & S \\ & a_i & \mapsto & s_i \end{array}$$

et soit $\bar{\mu}_s : \hat{F}_A(\mathbf{V}) \to S$ le morphisme canonique correspondant. En particulier, $\bar{\mu}_s \circ \iota_A = \mu_s$. L'image $\psi(x)$ d'un élément $x \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$, est l'opération implicite A-aire sur $\mathbf{V}$ donnée par : pour tous $S \in \mathbf{V}$ et $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S^n$,

$$(\psi(x))_S(s_1, \ldots, s_n) = \bar{\mu}_s(x).$$

Comme on peut le vérifier $\psi(x)$ constitue bien une opération implicite et l'application ψ ainsi définie est le morphisme inverse de φ. $\square$

Notation : Dans la suite nous identifierons les semigroupes $I_A(\mathbf{V})$ et $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ et addoptons la notation $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ pour les deux. De même, outre la signification originale, la notation $F_A(\mathbf{V})$ sera utilisée aussi pour représenter les semigroupes $E_A(\mathbf{V})$ et $\iota(A^+)$. $\blacksquare$

On remarque que, pour une opération implicite x sur $\mathbf{V}$, l'opération implicite x^ω est l'unique idempotent du sous-semigroupe fermé de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ engendré par x.

3.3.2 Une autre approche de la topologie de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$

La topologie du semigroupe $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ sur un ensemble fini A, décrite dans la section précédente, peut être construite d'une autre façon légèrement différente.

Pour chaque semigroupe $S \in \mathbf{V}$, il existe une application naturelle

$$\begin{array}{rrcl} \alpha_S : & \hat{F}_A(\mathbf{V}) & \rightarrow & S^{S^n} \\ & x & \mapsto & x_S \end{array}$$

qui induit une application injective

$$\begin{array}{rrcl} \alpha_{\mathbf{V}} : & \hat{F}_A(\mathbf{V}) & \rightarrow & \prod_{S \in \mathbf{V}_0} S^{S^n} \\ & x & \mapsto & (x_S)_S \end{array}$$

où $\mathbf{V}_0$ est un ensemble qui contient un représentant de chaque classe d'isomorphisme des éléments de $\mathbf{V}$. On peut, donc, interpréter $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ comme un sous-semigroupe de $\prod_{S \in \mathbf{V}_0} S^{S^n}$.

Maintenant, on munit les semigroupes finis de la topologie discrète, on munit le produit cartésien $\prod_{S \in \mathbf{V}_0} S^{S^n}$ de la topologie produit et on considére $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ comme un sous-espace topologique de $\prod_{S \in \mathbf{V}_0} S^{S^n}$ au moyen de l'application $\alpha_{\mathbf{V}}$. Autrement dit, la topologie de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ est la topologie initiale pour les applications α_S avec $S \in \mathbf{V}$.

Cette topologie est équivalente à la topologie définie dans la section précédente, comme le montre le résultat suivant.

Lemme 3.3.2 *La topologie de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$, définie ci-dessus, est la topologie initiale pour tous les morphismes continus dans les semigroupes de $\mathbf{V}$.* □

Le lemme suivant sera utile.

Lemme 3.3.3 *Soit $\varphi : \hat{F}_A(\mathbf{V}) \rightarrow S$ un morphisme continu avec $S \in \mathbf{V}$. Alors, pour tout $x \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$,*

$$\varphi(x) = x_S(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)).$$

Preuve. L'égalité est claire pour $x \in F_A(\mathbf{V})$. Le cas général est alors une conséquence de la continuité de φ et du fait que, d'après la proposition 3.2.2, $F_A(\mathbf{V})$ est dense dans $\hat{F}_A(\mathbf{V})$. □

3.3.3 Propriétés métriques de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$

Nous retrouverons encore la topologie de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ comme la topologie induite par une distance que nous décrivons maintenant.

Soit r l'application de $\hat{F}_A(\mathbf{V}) \times \hat{F}_A(\mathbf{V})$ sur $\mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ définie par

$$r(x, y) = \min\{|S| \mid S \in \mathbf{V},\, x_S \neq y_S\}$$

où, par convention, on pose $\min \emptyset = +\infty$. Définissons maintenant une distance d sur $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ en posant

$$\begin{array}{rrcl} d : & \hat{F}_A(\mathbf{V}) \times \hat{F}_A(\mathbf{V}) & \rightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & (x, y) & \mapsto & \begin{cases} 2^{-r(x,y)} & \text{si } r(x,y) \text{ est fini} \\ 0 & \text{si } r(x,y) = +\infty \end{cases} \end{array}$$

où $\mathbb{R}_0^+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs. Comme on peut le vérifier cette application d est bien une distance pour $\hat{F}_A(\mathbf{V})$.

On peut maintenant prouver le résultat anoncé.

Proposition 3.3.4 *La topologie de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ est induite par d.*

Preuve. Notons tout d'abord que, si $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ et $r \in \mathbb{N}$, alors $d(x,y) < 2^{-r}$ si et seulement si $x_S = y_S$ pour tout $S \in \mathbf{V}$ tel que $|S| \leq r$. Comme il y a seulement un nombre fini de semigroupes $S \in \mathbf{V}_0$ tels que $|S| \leq r$, nous concluons que la boule

$$\{x \in \hat{F}_A(\mathbf{V}) \mid d(x,y) < 2^{-r}\}$$

est un ouvert de la topologie de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ induite par le produit $\prod_{S \in \mathbf{V}_0} S^{S^n}$.

Soit maintenant $\varphi : \hat{F}_A(\mathbf{V}) \to S$, avec $S \in \mathbf{V}$, un morphisme continu par rapport à la topologie de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$. Pour tout $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$, si $d(x,y) < 2^{-|S|}$, alors $r(x,y) > |S|$ et donc $x_S = y_S$. Par conséquent, on a $\varphi(x) = \varphi(y)$ d'après le lemme 3.3.3 ce qui montre que φ est continu par rapport à la topologie induite par d. Le résultat suit du lemme 3.3.2. □

Comme le semigroupe $F_A(\mathbf{V})$ est dense dans $\hat{F}_A(\mathbf{V})$, on déduit le résultat suivant.

Corollaire 3.3.5 *L'espace $(\hat{F}_A(\mathbf{V}), d)$ est le complété de $(F_A(\mathbf{V}), d)$.* □

Comme la topologie de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ est induite par d, les ensembles

$$\{x \in \hat{F}_A(\mathbf{V}) \mid d(x,y) < 2^{-r}\}$$

avec $y \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ et $r \in \mathbb{N}$, forment une base d'ouverts pour $\hat{F}_A(\mathbf{V})$. On a donc la remarque suivante.

Remarque 3.3.6 *Une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'opérations implicites A-aires sur $\mathbf{V}$ converge vers $x \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ si et seulement si, pour tout $S \in \mathbf{V}$, $x_S = (x_k)_S$ à partir d'un certain rang, autrement dit, si et seulement si la suite $(x_k)_k$ coïncide ultimement avec x dans chaque élément S de $\mathbf{V}$.* ■

Par exemple, l'opération implicite a^ω sur $\mathbf{V}$ est la limite de la suite d'opérations explicites $(a^{k!})_k$ sur $\mathbf{V}$. En fait, pour chaque semigroupe $S \in \mathbf{V}$ et chaque élément $s \in S$, $s^{k!}$ coïncide avec l'idempotent s^ω pour tout $k \geq |S|$.

3.3.4 Langages V-reconnaissables et topologie de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$

On expose maintenant quelques connexions qui existent entre la topologie de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ et les langages $\mathbf{V}$-reconnaissables de A^+. Pour le reste de cette section nous allons considérer seulement des pseudo-variétés $\mathbf{V}$ telles que $F_A(\mathbf{V}) = A^+$ pour tout alphabet fini A. Par exemple, toute pseudo-variété contenant $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{G}$ satisfait cette condition puisque ces pseudo-variétés ne satisfont aucune identité non triviale.

On commence avec l'énoncé d'un résultat qui montre que les langages $\mathbf{V}$-reconnaissables de A^+ sont caractérisés par les ensembles ouverts-fermés de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$.

Proposition 3.3.7 *Les conditions suivantes sont équivalentes pour tout langage L de A^+.*

(1) *L est $\mathbf{V}$-reconnaissable ;*

(2) *$L = K \cap A^+$ pour un certain ouvert-fermé K de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$;*

(3) *La fermeture $\overline{L}$ de L dans $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ est un ouvert-fermé et $L = \overline{L} \cap A^+$.*

De plus, l'ensemble des fermetures $\overline{L}$ dans $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ des sous-ensembles $\mathbf{V}$-reconnaissables de A^+ forme une base de la topologie de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$. $\square$

Ce résultat permet d'obtenir la caractérisation suivante de la convergence dans $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ d'une suite de mots de A^+.

Corollaire 3.3.8 *Une suite de A^+ converge dans $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ si et seulement si, pour tout langage $\mathbf{V}$-reconnaissable L de A^+, la suite est dans L ou dans $A^+ \setminus L$ à partir d'un certain rang.* $\square$

Nous avons vu à la section 2.3 que l'ensemble $\mathcal{V}(A^+)$ des langages $\mathbf{V}$-reconnaissables de A^+ est une algèbre de Boole. Dans ce travail nous allons déterminer des ensembles de générateurs pour ces algèbres de Boole pour diverses pseudo-variétés. Pour cela, le résultat qui suit (dû à Almeida [9, 15]) sera fondamental.

Nous disons qu'une famille $\mathcal{X}$ de sous-ensembles de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ *sépare* les points de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ si, pour chaque paire d'éléments x et y de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$, il existe un élément X de $\mathcal{X}$ tel que, soit $x \in X$ et $y \notin X$, soit $x \notin X$ et $y \in X$.

Proposition 3.3.9 *Soit A un alphabet fini, soit $\mathbf{V}$ une pseudo-variété ne satisfaisant aucune identité non triviale, et soit $\mathcal{V}(A^+)$ l'algèbre de Boole des langages de A^+ reconnus par $\mathbf{V}$. Soit $\mathcal{L}$ un sous-ensemble de $\mathcal{V}(A^+)$ et soit $\overline{\mathcal{L}}$ l'ensemble des fermetures topologiques dans $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ des éléments de $\mathcal{L}$.*

L'algèbre de Boole $\mathcal{V}(A^+)$ est engendrée par $\mathcal{L}$ si et seulement si les points de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ sont séparés par $\overline{\mathcal{L}}$. $\square$

3.4 Premiers exemples

Dans cette section nous présentons quelques exemples simples de semigroupes de la forme $\hat{F}_A(\mathbf{V})$. En particulier nous étudierons les semigroupes d'opérations implicites sur les pseudo-variétés $\mathbf{N}$, $\mathbf{K}$ et $\mathbf{LI}$, qui seront très importants pour la suite de ce travail.

• Les pseudo-variétés $\mathbf{B}$ et $\mathbf{J}_1$

Parmi les exemples les plus simples de semigroupes de la forme $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ qu'on peut citer se trouvent les semigroupes dont la pseudo-variété $\mathbf{V}$ est localement finie. En effet, d'après les propositions 3.2.5 et 3.2.4, dans ce cas $\hat{F}_A(\mathbf{V}) = F_A(\mathbf{V})$ est un semigroupe fini (de $\mathbf{V}$), donc muni de la topologie discrète.

En particulier, les semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{B})$ et $\hat{F}_A(\mathbf{J}_1)$ sont de ce type. Les bandes libres $F_A(\mathbf{B})(= \hat{F}_A(\mathbf{B}))$ sur chaque alphabet fini A, ont été décrites par Green et Rees [43]. Quant au demi-treillis libre $F_A(\mathbf{J}_1) = \hat{F}_A(\mathbf{J}_1)$ il est bien connu qu'il est le demi-treillis $\mathcal{P}(A)$ des parties de l'ensemble A, muni de l'union.

• La pseudo-variété N

Rappelons que la pseudo-variété $\mathbf{N} = [\![a^\omega = 0]\!]$ des semigroupes nilpotents finis est aussi donnée par

$$\mathbf{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{N}_k$$

où $\mathbf{N}_k = [\![a_1 \cdots a_k = 0]\!]$.

Soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un alphabet fini fixé et, pour chaque entier $k \in \mathbb{N}$, soit $I_k = A^{\geq k}$ l'idéal de A^+ formé de tous les mots de longueur supérieure ou égale à k. Considérons maintenant le quotient de Rees $S_k = A^+/I_k$. Alors le semigroupe S_k est formé de tous les mots sur A de longueur inférieure à k avec un zéro adjoint, dont le produit est donné, pour tout $u, v \in A^{<k}$, par

$$uv = \begin{cases} uv & \text{si } |uv| < k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, on vérifie que $S_k \in \mathbf{N}$ puisque S_k vérifie l'identité $a_1 \cdots a_k = 0$. En vérité S_k est même isomorphe au semigroupe $F_A(\mathbf{N}_k)$. Les semigroupes S_k ($k \in \mathbb{N}$) constituent, donc, un ensemble de générateurs pour $\mathbf{N}$. On déduit ainsi que (comme nous l'avons déjà mentionné) $\mathbf{N}$ ne satisfait aucune identité non triviale, d'où $F_A(\mathbf{N}) = A^+$.

On remarque que, une suite $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $F_A(\mathbf{N}) = A^+$ converge dans $\hat{F}_A(\mathbf{N})$ si et seulement si elle converge dans chaque S_k, c'est-à-dire si et seulement si elle est ultimement constante dans chaque S_k. Alors, si $(u_i)_i$ converge, on déduit que, soit $u_i = u \in A^+$ pour tout i à partir d'un certain rang, soit pour tout k, $|u_i| \geq k$ à partir d'un certain rang (qui dépend de k).

On peut donc conclure que :

– $F_A(\mathbf{N})$ est un espace topologique discret ;
– $\hat{F}_A(\mathbf{N}) = A^+ \cup \{0\}$ est le compactifié d'Alexandroff de A^+, c'est-à-dire que $\hat{F}_A(\mathbf{N})$ est le semigroupe topologique obtenu de A^+ par l'addition d'un “point à l'infini” qui, en particulier, est un zéro ;
– les ouverts-fermés de $\hat{F}_A(\mathbf{N})$ sont les sous-ensembles finis de A^+ et leurs complémentaires dans $\hat{F}_A(\mathbf{N})$;
– les langages $\mathbf{N}$-reconnaissables de A^+ sont les langages finis et cofinis (i.e., les complémentaires des langages finis).

De plus, comme on peut le montrer, la propriété suivante est valide.

Proposition 3.4.1 *Pour une pseudo-variété* $\mathbf{V}$ *de semigroupes,* $F_A(\mathbf{V})$ *est à la fois le semigroupe libre sur* A *et un espace topologique discret si et seulement si* $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{V}$. □

• La pseudo-variété K

Considérons maintenant la pseudo-variété $\mathbf{K} = [\![x^\omega y = x^\omega]\!]$ des semigroupes dont les idempotents sont des zéros à gauche, aussi donnée par

$$\mathbf{K} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{K}_k$$

où $\mathbf{K}_k = [\![a_1 \cdots a_k b = a_1 \cdots a_k]\!]$.

Comme $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{K}$ on déduit de la proposition 3.4.1 que $F_A(\mathbf{K}) = A^+$ est un espace topologique discret. Maintenant, pour chaque entier $k \in \mathbb{N}$, considérons le semigroupe

$$S_k = F_A(\mathbf{K}_k)$$

qui peut être vu comme l'ensemble formé de tous les mots sur A de longueur inférieure ou égale à k avec produit $uv = i_k(uv)$, i.e.,

$$uv = \begin{cases} uv & \text{si } |uv| \leq k \\ p_k(uv) & \text{si } |uv| > k. \end{cases}$$

Les semigroupes S_k engendrent $\mathbf{K}$, et on vérifie qu'une suite $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de A^+ converge dans $\hat{F}_A(\mathbf{K})$ si et seulement si soit elle est ultimement constante, soit elle satisfait

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists i_k \in \mathbb{N} :\ i, j \geq i_k \implies u_i \text{ et } u_j \text{ ont le même préfixe de longueur } k.$$

On peut donc identifier les éléments non explicites de $\hat{F}_A(\mathbf{K})$ avec les mots infinis à droite sur A. Nous avons donc les résultats suivants :

- $F_A(\mathbf{K})$ est un espace topologique discret ;
- $\hat{F}_A(\mathbf{K}) = A^+ \cup A^{\mathbb{N}}$ et le produit sur $\hat{F}_A(\mathbf{K})$ est étendu du produit sur A^+ en posant $uv = u$ si $u \in A^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire que les éléments de $A^{\mathbb{N}}$ sont des zéros à gauche ; la topologie sur $A^{\mathbb{N}}$ est la topologie produit de la topologie discrète sur A ;
- une base d'ouverts-fermés pour la topologie de $\hat{F}_A(\mathbf{K})$ est la famille constituée des langages de la forme $\{w\}$ et $w\hat{F}_A(\mathbf{K})$ avec $w \in A^+$;
- les langages $\mathbf{K}$-reconnaissables de A^+ sont les combinaisons booléennes de langages de la forme wA^* avec $w \in A^+$.

On peut bien sûr conduire une étude analogue pour la pseudo-variété $\mathbf{D}$ et montrer, en particulier, que $\hat{F}_A(\mathbf{D}) = A^+ \cup A^{-\mathbb{N}}$ est obtenu à partir de A^+ par l'addition des mots infinis à gauche et le produit sur $\hat{F}_A(\mathbf{D})$ est étendu du produit sur A^+ en posant $uv = v$ si $v \in A^{-\mathbb{N}}$, c'est-à-dire que les éléments de $A^{-\mathbb{N}}$ sont des zéros à droite.

• La pseudo-variété LI

Soit $\mathbf{LI} = [\![a^\omega b a^\omega = a^\omega]\!]$ la pseudo-variété des semigroupes localement triviaux. Les semigroupes utilisées pour la description de $\hat{F}_A(\mathbf{LI})$ sont les suivants (avec $k \in \mathbb{N}$)

$$F_A(\mathbf{LI}_k)$$

où $\mathbf{LI}_k = [\![a_1 \cdots a_k b c_1 \cdots c_k = a_1 \cdots a_k c_1 \cdots c_k]\!]$.

Comme on peut le prouver, une suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de A^+ converge dans $\hat{F}_A(\mathbf{LI})$ si et seulement si soit elle est ultimement constante, soit elle satisfait

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists i_k \in \mathbb{N} :\ i,j \geq i_k \implies \begin{array}{l} u_i \text{ et } u_j \text{ ont le même préfixe et} \\ \text{le même suffixe de longueur } k. \end{array}$$

On peut donc identifier les éléments non explicites de $\hat{F}_A(\mathbf{LI})$ avec les couples (v,w) où v est un mot infini à droite et w est un mot infini à gauche sur A. De plus, on peut montrer le suivant :

– $F_A(\mathbf{LI})$ est un espace topologique discret ;
– $\hat{F}_A(\mathbf{LI}) = A^+ \cup (A^{\mathbb{N}} \times A^{-\mathbb{N}})$ et le produit sur $\hat{F}_A(\mathbf{LI})$ est donné, pour tous $u,u' \in A^+$ et tous $(v,w),(v',w') \in A^{\mathbb{N}} \times A^{-\mathbb{N}}$, par

$$\begin{array}{rcl} u\cdot u' &=& uu' \\ u\cdot(v,w) &=& (uv,w) \\ (v,w)\cdot u &=& (v,wu) \\ (v,w)\cdot(v',w') &=& (v,w'); \end{array}$$

la topologie sur $A^{\mathbb{N}} \times A^{-\mathbb{N}}$ est la topologie produit de la topologie discrète sur A ;
– une base d'ouverts-fermés pour la topologie de $\hat{F}_A(\mathbf{LI})$ est la famille constituée des langages de la forme $\{w\}$ et $w\hat{F}_A(\mathbf{LI})w'$ avec $w,w' \in A^+$;
– les langages $\mathbf{LI}$-reconnaissables de A^+ sont les combinaisons booléennes de langages de la forme wA^* et A^*w avec $w \in A^+$.

• La pseudo-variété Com

Soit $\mathbf{Com} = [\![ab = ba]\!]$ la pseudo-variété des semigroupes commutatifs. Le semigroupe $F_{\{a\}}(\mathbf{Com})$ est le semigroupe monogène infini engendré par a. Alors, $\mathbf{Com}$ engendre la variété $[ab = ba]$ des semigroupes commutatifs. En outre, pour un alphabet fini $A = \{a_1,\ldots,a_n\}$, le semigroupe $\mathbf{Com}$-libre sur A, $F_A(\mathbf{Com})$, peut être identifié avec l'ensemble des "mots" sur l'alphabet A écrits sans tenir compte de l'ordre des lettres. En particulier on peut écrire les lettres par l'ordre des indices, par exemple. Ainsi, $F_A(\mathbf{Com})$ est le semigroupe constitué des mots de la forme $a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}$ où les indices $k_i \in \mathbb{N}_0$ ne sont pas tous nuls, et dont le produit est donné par

$$a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}\cdot a_1^{m_1}\cdots a_n^{m_n} = a_1^{k_1+m_1}\cdots a_n^{k_n+m_n}.$$

Alors, la fonction naturelle

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & F_A(\mathbf{Com}) & \to & \hat{F}_{\{a_1\}}(\mathbf{Com})^1 \times \ldots \times \hat{F}_{\{a_n\}}(\mathbf{Com})^1 \\ & a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n} & \mapsto & (a_1^{k_1},\ldots,a_n^{k_n}) \end{array}$$

définit une bijection entre $F_A(\mathbf{Com})$ et $F_{\{a_1\}}(\mathbf{Com})^1 \times \ldots \times F_{\{a_n\}}(\mathbf{Com})^1 \setminus \{(1,\ldots,1)\}$, d'où $\varphi(F_A(\mathbf{Com}))$ est dense dans $\hat{F}_{\{a_1\}}(\mathbf{Com})^1 \times \ldots \times \hat{F}_{\{a_n\}}(\mathbf{Com})^1 \setminus \{(1,\ldots,1)\}$. On peut donc conclure (en considérant les projections sur chaque composante et en utilisant le corollaire 3.2.3, par exemple) que φ admet un unique prolongement injectif continu à $\hat{F}_A(\mathbf{Com})$. On déduit donc que

$$\hat{F}_A(\mathbf{Com})^1 \simeq \hat{F}_{\{a_1\}}(\mathbf{Com})^1 \times \ldots \times \hat{F}_{\{a_n\}}(\mathbf{Com})^1,$$

ce qui réduit le calcul de $\hat{F}_A(\mathbf{Com})$ au calcul de $\hat{F}_{\{a\}}(\mathbf{Com})$, c'est-à-dire au calcul des opérations implicites unaires sur **Com**.

3.5 Le théorème de Reiterman

Dans cette section nous montrons le théorème de Reiterman qui est l'analogue pour les pseudo-variétés du théorème de Birkhoff pour les variétés. Ce théorème dit que les pseudo-variétés de semigroupes sont exactement les classes de semigroupes finis qui satisfont un ensemble de “pseudo-identités”.

Rappelons tout d'abord une conséquence importante du corollaire 3.2.3. Si $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ sont deux pseudo-variétés de semigroupes telles que $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ et si A est un ensemble fini, alors l'application identité de A induit un morphisme continu surjectif

$$\pi : \hat{F}_A(\mathbf{V}) \to \hat{F}_A(\mathbf{W})$$

appelé la *projection canonique de* $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ *sur* $\hat{F}_A(\mathbf{W})$. L'image $\pi(x)$ d'un élément x de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ est appelée la *restriction de* x *à* $\mathbf{W}$.

Soit $\mathbf{V}$ une pseudo-variété de semigroupes et soit A un alphabet fini. Une $\mathbf{V}$-*pseudo-identité* sur l'alphabet A (où en $|A|$-variables) est une paire (x, y) d'éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$, qui est usuellement notée $x = y$. Si la pseudo-variété $\mathbf{V}$ est sous-entendue, ou si elle est la pseudo-variété $\mathbf{S}$ de tous les semigroupes finis, nous parlerons simplement de pseudo-identités. Une pseudo-identité $x = y$ est dite *non triviale* si les éléments x et y sont distincts. Rappelons qu'une identité sur A est une paire (u, v) de mots de A^+. Comme chaque élément de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ est la limite d'une suite d'opérations explicites, nous pouvons regarder la pseudo-identité $x = y$ comme la limite d'une suite d'identités.

Rappelons aussi qu'un semigroupe S satisfait une identité $u = v$ sur A si $\varphi(u) = \varphi(v)$ pour tout morphisme $\varphi : A^+ \to S$. On étend cette notion aux pseudo-identités en disant qu'un semigroupe pro-$\mathbf{V}$ S *satisfait* une $\mathbf{V}$-pseudo-identité $x = y$ sur A, et nous écrivons $S \models x = y$, si $\varphi(x) = \varphi(y)$ pour tout morphisme continu $\varphi : \hat{F}_A(\mathbf{V}) \to S$. En particulier, un semigroupe $S \in \mathbf{V}$ satisfait une $\mathbf{V}$-pseudo-identité $x = y$ si et seulement si $x_S = y_S$.

Exemple. Si $S = \varprojlim (S_i)_{i \in I}$, alors S satisfait toutes les pseudo-identités satisfaites par les S_i. En particulier, le semigroupe $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ satisfait toutes les $\mathbf{V}$-pseudo-identités qui sont satisfaites par les semigroupes A-engendrés de $\mathbf{V}$. ■

Nous disons qu'une classe $\mathbf{W}$ de semigroupes pro-$\mathbf{V}$ satisfait un ensemble Σ de $\mathbf{V}$-pseudo-identités (n'impliquant pas nécessairement un nombre borné de variables), et on écrit $\mathbf{W} \models \Sigma$, si chaque élément de $\mathbf{W}$ satisfait chaque élément de Σ. La classe de tous les semigroupes de $\mathbf{V}$ qui satisfont Σ est dite *définie par* Σ et est notée $[\![\Sigma]\!]_{\mathbf{V}}$. On notera simplement $[\![\Sigma]\!]$ lorsque $\mathbf{V} = \mathbf{S}$. On vérifie facilement que $[\![\Sigma]\!]_{\mathbf{V}}$ est une sous-pseudo-variété de $\mathbf{V}$ et on a, par exemple, les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_1 &= [\![ab = ba, a^2 = a]\!] \\
&= [\![ab = ba]\!]_{\mathbf{B}} \\
\mathbf{J} &= [\![(ab)^\omega = (ba)^\omega]\!]_{\mathbf{A}} \\
&= [\![a^\omega = a^{\omega+1}]\!]_{\mathbf{DG}} \\
\mathbf{DA} &= [\![(ab)^\omega (ba)^\omega (ab)^\omega = (ab)^\omega]\!]_{\mathbf{A}} \\
\mathbf{N} &= [\![ba^\omega = a^\omega]\!]_{\mathbf{K}} \\
\mathbf{Ab} &= [\![ab = ba]\!]_{\mathbf{G}}
\end{aligned}$$

où $\mathbf{Ab} = \mathbf{Com} \cap \mathbf{G}$ est la pseudo-variété des groupes *abéliens*. Si $\mathbf{W} = [\![\Sigma]\!]_{\mathbf{V}}$, l'ensemble Σ sera dit une *base* (de $\mathbf{V}$-pseudo-identités) de $\mathbf{W}$. On dira par abus de langage qu'une $\mathbf{V}$-pseudo-identité en *implique* une autre lorsque tout semigroupe de $\mathbf{V}$ qui satisfait la première satisfait aussi la deuxième.

On peut finalement énoncer le théorème de Reiterman.

Théorème 3.5.1 *Soit* $\mathbf{V}$ *une pseudo-variété de semigroupes et soit* $\mathbf{W}$ *une sous-classe de* $\mathbf{V}$*. Alors,* $\mathbf{W}$ *est une pseudo-variété si et seulement si il existe un ensemble* Σ *de* $\mathbf{V}$*-pseudo-identités tel que* $\mathbf{W} = [\![\Sigma]\!]_{\mathbf{V}}$*.*

Preuve. Il reste à montrer la condition nécessaire. Soit Σ l'ensemble de toutes les $\mathbf{V}$-pseudo-identités qui sont satisfaites par $\mathbf{W}$. On a bien $\mathbf{W} \subseteq [\![\Sigma]\!]_{\mathbf{V}}$. Il reste donc à montrer que, si S est un semigroupe de $\mathbf{V}$ qui satisfait toutes les pseudo-identités de Σ, alors $S \in \mathbf{W}$.

Comme S est fini, il existe un ensemble fini A et un morphisme surjectif continu $\varphi : \hat{F}_A(\mathbf{V}) \to S$. Soit $\pi : \hat{F}_A(\mathbf{V}) \to \hat{F}_A(\mathbf{W})$ la projection canonique. Par définition, $\operatorname{Ker} \pi$ est exactement le sous-ensemble de Σ formé de toutes les $\mathbf{V}$-pseudo-identités sur A qui sont satisfaites par $\mathbf{W}$. Alors, les hypothèses sur S entraînent $\operatorname{Ker} \pi \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$. D'après la proposition 1.2.2 ceci implique l'existence d'un morphisme surjectif $\psi : \hat{F}_A(\mathbf{W}) \to S$ tel que $\varphi = \psi \circ \pi$. Maintenant, pour chaque $s \in S$, $\varphi^{-1}(s)$ est fermé et donc compact. Alors, d'après la continuité de π, $\psi^{-1}(s) = \pi(\varphi^{-1}(s))$ est fermé. Par conséquent, ψ est continu et la proposition 3.2.2 montre que $S \in \mathbf{W}$. $\square$

On remarquera que, comme l'a montré Almeida [9], on ne dispose pas pour les pseudo-identités d'un résultat analogue au théorème de la complétude de la logique équationnelle (théorème 2.1.3).

3.6 Sous-pseudo-variétés de DS

Dans cette section nous rappelons les principaux résultats connus sur les opérations implicites sur les sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DS}$.

Avant de poursuivre il convient de citer quelques sous-pseudo-variétés importantes de **DS** et les relations d'inclusion entre elles :

$$\mathbf{J}_1 \subseteq \mathbf{J} \subseteq \mathbf{DG} \subseteq \mathbf{DRG} \subseteq \mathbf{DO} \subseteq \mathbf{DS}$$

Le fait crucial sur les sous-pseudo-variétés $\mathbf{V}$ de **DS** c'est qu'elles jouissent d'une propriété importante (prouvée par Azevedo [20, 21] en étendant un résultat similaire d'Almeida [8] pour $\mathbf{J}$) qui est le fait que chaque opération implicite sur $\mathbf{V}$ peut être factorisée comme un produit fini d'opérations explicites et d'opérations implicites régulières. Il est connu que, pour certaines de ces pseudo-variétés $\mathbf{V}$, une certaine forme de telles factorisations est unique sur $\mathbf{V}$. Tel est le cas, par exemple, de $\mathbf{J}$ (Almeida [8]), $\mathbf{J} \cap \mathbf{L}\,\mathbf{J_1}$ (Selmi [69]), **DRH** et $\mathbf{DH} \cap \mathbf{ECom}$ (Almeida et Weil [14, 17]). Cependant, le problème général de décrire des factorisations uniques pour toutes les sous-pseudo-variétés de **DS** (ou même pour **DS** elle-même) est encore très loin d'être résolu.

Les références pour cette section sont le livre d'Almeida [9], la thèse d'Azevedo [21] et les articles [12, 15].

3.6.1 Le contenu

Tout d'abord on introduit la notion de contenu d'une opération implicite. Cette notion généralise la notion de contenu d'un mot que nous avons déjà présenté.

Soit $\mathbf{V}$ une pseudo-variété de semigroupes et soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble fini. On dit que $x \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ *dépend de* a_i s'il existe un semigroupe $S \in \mathbf{V}$ et des éléments $s_1, \ldots, s_{i-1}, r, r', s_{i+1}, \ldots, s_n \in S$ tels que

$$x_S(s_1, \ldots, s_{i-1}, r, s_{i+1}, \ldots, s_n) \neq x_S(s_1, \ldots, s_{i-1}, r', s_{i+1}, \ldots, s_n),$$

autrement dit, la fonction $x_S : S^n \to S$ dépend de la i-ème composante. On notera $c(x)$ l'ensemble de tous les a_i dont x dépend et on l'appellera le *contenu* de x.

Le contenu définit donc une fonction de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ sur $\mathcal{P}(A) = \hat{F}_A(\mathbf{J}_1)$. Cette fonction se comporte particulièrement bien pour les pseudo-variétés qui contiennent $\mathbf{J}_1$.

Proposition 3.6.1 (Azevedo [21]) *Soit* $\mathbf{V}$ *une pseudo-variété qui contient* $\mathbf{J}_1$. *Alors, la fonction*

$$c : \hat{F}_A(\mathbf{V}) \to \hat{F}_A(\mathbf{J}_1)$$

est le seul morphisme continu surjectif tel que $c(a_i) = \{a_i\}$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Autrement dit,* c *est la projection canonique de* $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ *sur* $\hat{F}_A(\mathbf{J}_1)$.

Preuve. Comme $\hat{F}_A(\mathbf{J}_1)$ est un élément de $\mathbf{J}_1$ et donc de $\mathbf{V}$, il suffit de montrer que c est un morphisme. Soient donc $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$. Il est clair que, si x et y ne dépendent de a_i, alors xy ne dépend de a_i non plus. Réciproquement, supposons, par exemple, que x dépend de a_i. Il existe alors un semigroupe $S \in \mathbf{V}$ tel que x_S dépend de la i-ème composante. Comme $\mathbf{J}_1$ est engendré par le demi-treillis $U_1 = \{0, 1\}$ à deux éléments, on peut supposer que $\mathbf{J}_1 \subseteq \mathbf{V}(S)$. Sur S, x et y coïncident avec des opérations explicites

u et v, respectivement. Alors, a_i apparaît dans u et donc aussi dans uv. Par conséquent, la substitution de chaque lettre (a_i excepté) par 1 montre que la fonction

$$(uv)_{U_1} : (U_1)^n \to U_1$$

dépend de la i-ème composante. Comme $U_1 \in \mathbf{V}(S)$ et S satisfait $xy = uv$, on conclut que xy dépend de a_i. Alors $c(x) \subseteq c(xy)$. On montre de façon analogue que $c(y) \subseteq c(xy)$, ce qui termine la preuve de l'égalité $c(xy) = c(x) \cup c(y)$. □

Ainsi, si $\mathbf{J}_1 \subseteq \mathbf{V}$ et si a, b et c sont des projections sur $\mathbf{V}$, alors l'opération implicite $(a^\omega b)^\omega ac^\omega (b^{\omega+1}c^\omega)^\omega$ a comme contenu $\{a, b, c\}$.

Par contre, le contenu d'une opération implicite sur une pseudo-variété qui ne contient pas $\mathbf{J}_1$ n'est pas si clair, même si l'opération implicite est donnée par une expression comme celle de l'exemple ci-dessus. Par exemple, il est immédiat que les opérations implicites a^ω et b^ω sur $\mathbf{G}$ coïncident et que leur contenu commun est l'ensemble vide. On peut aussi montrer que si a, b et c sont des projections sur $\mathbf{G}$, alors le contenu de $(a^\omega b)^\omega ac^\omega (b^{\omega+1}c^\omega)^\omega$ est $\{a\}$.

Lemme 3.6.2 *Soit $\mathbf{V}$ une pseudo-variété quelconque et soit $x \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$. Si $a_i \in c(x)$, alors il existe $x_1, x_2 \in \hat{F}_A(\mathbf{V})^1$ tels que $x = x_1 a_i x_2$.*

Preuve. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérations explicites convergeant vers x. Comme x coïncide ultimement avec $(u_k)_k$ sur chaque semigroupe fini, on peut supposer que tous les u_k dépendent de a_i. On peut donc écrire $u_k = v_k a_i w_k$ et, d'après la compacité de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$, on peut supposer de plus que les suites $(v_k)_k$ et $(w_k)_k$ sont convergentes, disons vers x_1 et x_2 respectivement. Pour terminer, on utilise la continuité de la multiplication pour prouver que $x = \lim\limits_{k\to\infty} u_k = (\lim\limits_{k\to\infty} v_k) a_i (\lim\limits_{k\to\infty} w_k) = x_1 a_i x_2$. □

3.6.2 Opérations implicites sur DS

Rappelons que **DS** est la pseudo-variété des semigroupes S dont chaque $\mathcal{D}$-classe régulière est un sous-semigroupe de S. Nous disposons encore des descriptions suivantes de **DS**.

Proposition 3.6.3 *Soit S un semigroupe fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $S \in \mathbf{DS}$;
(2) $S \in [\![((ab)^w(ba)^w(ab)^w)^w = (ab)^w]\!]$;
(3) *chaque $\mathcal{H}$-classe régulière de S est un groupe ;*
(4) *si $r, s \in S$ sont tels que r est régulier et $r \leq_\mathcal{J} s$, alors $rs \mathrel{\mathcal{J}} sr \mathrel{\mathcal{J}} r$;*
(5) *pour chaque idempotent $e \in S$, l'ensemble $\{s \in S \mid e \leq_\mathcal{J} s\}$ est un sous-semigroupe de S.* □

Chaque $\mathcal{D}$-classe régulière d'un semigroupe de **DS** est donc de la forme

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
* & * & \cdots & * \\
\hline
* & * & \cdots & * \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
* & * & \cdots & * \\
\hline
\end{array}$$

Corollaire 3.6.4 *Soit* $\mathbf{V}$ *une sous-pseudo-variété de* $\mathbf{DS}$. *Si* $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ *sont tels que* x *est régulier et* $x \leq_{\mathcal{J}} y$, *alors* $xy \,\mathcal{J}\, yx \,\mathcal{J}\, x$. □

Le résultat qui suit caractérise les $\mathcal{J}$-classes régulières de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$, lorsque $\mathbf{V}$ est une sous-pseudo-variété de $\mathbf{DS}$ qui contient $\mathbf{J}_1$. Il montre en particulier la grande importance de la notion de contenu d'une opération implicite.

Proposition 3.6.5 *Soit* $\mathbf{V}$ *une sous-pseudo-variété de* $\mathbf{DS}$ *contenant* $\mathbf{J}_1$ *et soient* $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ *deux éléments réguliers. Alors,*

$$x \leq_{\mathcal{J}} y \Leftrightarrow c(y) \subseteq c(x).$$

De plus, $\mathbf{DS}$ *est la plus grande pseudo-variété possédant cette propriété.*

Preuve. Supposons d'abord que $x \leq_{\mathcal{J}} y$. Comme le contenu est un morphisme on a $c(x) \leq_{\mathcal{J}} c(y)$. Le fait de $\hat{F}_A(\mathbf{J}_1)$ être le demi-treillis $\mathcal{P}(A)$ des parties de l'ensemble A, muni de l'union, montre donc que $c(y) \subseteq c(x)$.

Réciproquement, supposons $c(y) \subseteq c(x)$. Comme le contenu est une fonction continue et comme $\hat{F}_A(\mathbf{J}_1)$ est discret, il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $F_A(\mathbf{V})$ convergeant vers y telle que $c(u_k) = c(y)$ pour tout k. Supposons que, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $u_k = a_{k,1}a_{k,2}\cdots a_{k,i_k}$. Le lemme 3.6.2 montre que $x \leq_{\mathcal{J}} a_{k,1}$ et le corollaire 3.6.4 permet de déduire $x \,\mathcal{J}\, xa_{k,1}$. On peut montrer de façon similaire que $xa_{k,1} \,\mathcal{J}\, xa_{k,1}a_{k,2}$ et, par récurrence, que $x \,\mathcal{J}\, xu_k$. En particulier, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe $z_k, t_k \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ tels que $x = z_k u_k t_k$. D'après la compacité de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ on peut supposer que les suites $(z_k)_k$ et $(t_k)_k$ sont convergentes, disons vers z et t, respectivement. Alors $x = zyt$ par continuité de la multiplication dans $\hat{F}_A(\mathbf{V})$. On a donc $x \leq_{\mathcal{J}} y$.

Soit maintenant $\mathbf{W}$ une pseudo-variété qui contient $\mathbf{J}_1$ telle que, si $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{W})$ sont des éléments réguliers, alors $x \leq_{\mathcal{J}} y$ si et seulement si $c(y) \subseteq c(x)$. Soient $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{W})$. Les éléments $((xy)^w(yx)^w(xy)^w)^\omega$ et $(xy)^w$ ont même contenu d'après la proposition 3.6.1. Alors, par hypothèse, ils sont $\mathcal{J}$-équivalents. Mais $((xy)^w(yx)^w(xy)^w)^\omega \leq_{\mathcal{H}} (xy)^w$ et donc ils sont dans la même $\mathcal{H}$-classe d'après la proposition 3.1.7. Comme ils sont idempotents on déduit qu'ils sont égaux et donc que $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{DS}$. □

L'observation suivante est une consequence immédiate de la dernière proposition et nous l'utiliserons souvent.

Corollaire 3.6.6 *Soit* $\mathbf{V}$ *une sous-pseudo-variété de* $\mathbf{DS}$ *contenant* $\mathbf{J}_1$ *et soient* $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$. *Si* x *est régulier et* $c(y) \subseteq c(x)$, *alors* xy *(resp.* yx*) est régulier et* $x \,\mathcal{R}\, xy$ *(resp.* $x \,\mathcal{L}\, yx$*).*

Preuve. Les éléments x et $(xy)^\omega$ ont même contenu et sont réguliers. Alors, d'après la dernière proposition, $x \mathcal{J} (xy)^\omega$. Comme $(xy)^\omega \leq_{\mathcal{J}} xy \leq_{\mathcal{J}} x$ on déduit que $xy \mathcal{J} x$ et, en particulier, que xy est régulier. Puisque, en outre, $xy \leq_{\mathcal{R}} x$ on a $xy \mathcal{R} x$ par la proposition 3.1.7. □

Nous introduisons maintenant un paramètre qui va être très utile. On rappelle d'abord qu'un mot $u = a_{i_1} \cdots a_{i_k} \in A^+$ est un *sous-mot* d'un mot $v \in A^+$ si v se factorise comme

$$v = v_0 a_{i_1} v_1 \cdots a_{i_k} v_k$$

avec $v_0, v_1, \ldots, v_k \in A^*$, autrement dit, si u est une sous-suite de la suite v de lettres de A. Pour $u, v \in A^+$ on notera

$$\left[\!\!\left[\begin{matrix} v \\ u \end{matrix}\right]\!\!\right] = \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid u^k \text{ est un sous-mot de } v\}.$$

Par exemple $\left[\!\left[\begin{smallmatrix} acbbabc \\ b \end{smallmatrix}\right]\!\right] = 3$, $\left[\!\left[\begin{smallmatrix} acbbabc \\ ab \end{smallmatrix}\right]\!\right] = 2$ et $\left[\!\left[\begin{smallmatrix} acbbabc \\ ca \end{smallmatrix}\right]\!\right] = 1$.

Pour chaque mot $u = a_{i_1} \cdots a_{i_k} \in A^+$ nous notons $L(u)$ le langage

$$L(u) = A^* a_{i_1} A^* \cdots a_{i_k} A^*$$

des mots sur A qui admettent u comme sous-mot. On note que, par définition de $\left[\!\left[\begin{smallmatrix} v \\ u \end{smallmatrix}\right]\!\right]$, on a

$$\left[\!\!\left[\begin{matrix} v \\ u \end{matrix}\right]\!\!\right] \geq k \Leftrightarrow v \in L(u^k).$$

Montrons maintenant l'observation suivante.

Lemme 3.6.7 *Pour tout ensemble fini A et tout mot $u \in A^+$, le langage $L(u)$ est* **J***-reconnaissable.*

Preuve. Soit $u \in A^+$. On veut donc prouver que $S(L(u)) \in \mathbf{J}$. Si $k = |u|$ et $x, y \in A^+$, il suffit de prouver que $x^{k+1} \sim_{L(u)} x^k$ et que $(xy)^k \sim_{L(u)} (yx)^k$.

Soient $r, s \in A^*$. Comme $rx^k s$ est un sous-mot de $rx^{k+1}s$, la condition $rx^k s \in L(u)$ entraîne $rx^{k+1}s \in L(u)$. Réciproquement, si $rx^{k+1}s \in L(u)$, alors on peut regarder u comme une sous-suite du mot $rx^{k+1}s$ qui utilise au plus k lettres de x^{k+1}. En particulier, un des facteurs x de x^{k+1} n'est pas utilisé et donc u est aussi un sous-mot de $rx^k s$. Cela revient à dire que $rx^k s \in L(u)$, et montre que $x^{k+1} \sim_{L(u)} x^k$.

Similairement, si $r(xy)^k s \in L(u)$, on peut regarder u comme une sous-suite de $r(xy)^k s$ qui utilise au plus une lettre de chaque facteur xy. Cette lettre apparaît aussi dans yx et donc u est aussi un sous-mot de $r(yx)^k s$. Par symétrie, ceci montre que $r(xy)^k s \in L(u)$ si et seulement si $r(yx)^k s \in L(u)$, et par conséquent $(xy)^k \sim_{L(u)} (yx)^k$.
□

Lorsque $\mathbf{V}$ est une pseudo-variété qui contient $\mathbf{J}$ et $u \in A^+$, on peut généraliser la définition de $\left[\!\left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right]\!\right]$ à tous les éléments x de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$.

Proposition 3.6.8 *Soit* $\mathbf{V}$ *une pseudo-variété qui contient* $\mathbf{J}$*. Pour chaque alphabet* A *et chaque* $u \in A^+$*, la fonction*

$$\begin{array}{ccc} A^+ & \to & \mathbb{N}_0 \\ v & \mapsto & \left[\!\!\left[\begin{matrix} v \\ u \end{matrix} \right]\!\!\right] \end{array}$$

est uniformément continue pour la topologie induite par la distance d *(définie dans la section 3.3.3) et donc se prolonge de façon unique à une fonction continue*

$$\begin{array}{ccc} \hat{F}_A(\mathbf{V}) & \to & \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \\ x & \mapsto & \left[\!\!\left[\begin{matrix} x \\ u \end{matrix} \right]\!\!\right] \end{array}$$

où $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ *est le compactifié de l'espace discret* $\mathbb{N}_0$*.*

Preuve. Il suffit de montrer que, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $v, v' \in A^+$,

$$d(v, v') < \epsilon \Rightarrow \left[\!\!\left[\begin{matrix} v \\ u \end{matrix} \right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\begin{matrix} v' \\ u \end{matrix} \right]\!\!\right] \text{ ou } \left[\!\!\left[\begin{matrix} v \\ u \end{matrix} \right]\!\!\right], \left[\!\!\left[\begin{matrix} v' \\ u \end{matrix} \right]\!\!\right] \geq k.$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, soit $n_k = |S(L(u^k))|$. Rappelons que $S(L(u^k)) \in \mathbf{J}$. Par conséquent, si $d(v, v') < 2^{n_k}$, alors $v \sim_{L(u^k)} v'$ et donc $\left[\!\left[\begin{smallmatrix} v \\ u \end{smallmatrix} \right]\!\right], \left[\!\left[\begin{smallmatrix} v' \\ u \end{smallmatrix} \right]\!\right] \geq k$ ou $\left[\!\left[\begin{smallmatrix} v \\ u \end{smallmatrix} \right]\!\right], \left[\!\left[\begin{smallmatrix} v' \\ u \end{smallmatrix} \right]\!\right] < k$. Comme ceci est vrai pour tout k, la conclusion est maintenant immédiate. $\square$

Les paramètres $\left[\!\left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix} \right]\!\right]$ sont utiles pour l'identification des éléments réguliers des semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ avec $\mathbf{V}$ dans l'intervalle $[\mathbf{J}, \mathbf{DS}]$. On prouve d'abord la propriété suivante des semigroupes de $\mathbf{DS}$.

Lemme 3.6.9 *Soit* $S \in \mathbf{DS}$*, soit* $w \in A^+$ *avec* $c(w) = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$ *et soit* $u = a_{i_1} \cdots a_{i_k}$*. Si* $\left[\!\left[\begin{smallmatrix} w \\ u \end{smallmatrix} \right]\!\right] > |S|$*, alors* $S \models w^{\omega+1} = w$*.*

Preuve. Soit $w = u_1 \cdots u_m v$ une factorisation avec $\left[\!\left[\begin{smallmatrix} u_i \\ u \end{smallmatrix} \right]\!\right] = 1$ et $m > |S|$, et écrivons $w_j = u_1 \cdots u_j$. Soient $s_1, \ldots, s_n \in S$. Il faut montrer que

$$w_S(s_1, \ldots, s_n) = (w^{\omega+1})_S(s_1, \ldots, s_n).$$

Pour chaque $t \in A^+$, on écrira t' au lieu de $t_S(s_1, \ldots, s_n)$. Comme $m > |S|$, les éléments $w'_1, \ldots, w'_m$ ne sont pas tous distincts et il existe donc $1 \leq p < q \leq m$ tels que $w'_p = w'_q$. Alors,

$$w'_q = w'_p u'_{p+1} \cdots u'_q = w'_q u'_{p+1} \cdots u'_q$$

ce qui permet de déduire l'égalité

$$w'_q = w'_q (u'_{p+1} \cdots u'_q)^\omega.$$

Mais $c(w_q) = c(u_i) = c(u_{q+1} \cdots u_m v)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. Alors, les opérations $w_q(u_{p+1} \cdots u_q)^\omega u_{q+1} \cdots u_m v$ et $(u_{p+1} \cdots u_q)^\omega$ sont $\mathcal{J}$-équivalentes par le corollaire 3.6.6, et donc $(w_q(u_{p+1}\cdots u_q)^\omega u_{q+1}\cdots u_m v)^{\omega+1} = w_q(u_{p+1}\cdots u_q)^\omega u_{q+1}\cdots u_m v$ par la proposition 3.6.3. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} w' &= w'_q(u'_{p+1}\cdots u'_q)^\omega u'_{q+1}\cdots u'_m v' \\ &= (w'_q(u'_{p+1}\cdots u'_q)^\omega u'_{q+1}\cdots u'_m v')^{\omega+1} \\ &= (w')^{\omega+1}.\Box \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant prouver la caractérisation suivante des éléments réguliers de $\hat{F}_A(\mathbf{DS})$.

Théorème 3.6.10 *Soit* $\mathbf{V}$ *une pseudo-variété dans l'intervalle* $[\mathbf{J},\mathbf{DS}]$ *et soit* $x \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$. *Alors,* x *est régulier si et seulement si* $\left[\!\left[{x \atop u}\right]\!\right] \in \{0,\infty\}$ *pour tout* $u \in A^+$.

Preuve. Notons d'abord que la condition $\left[\!\left[{x \atop u}\right]\!\right] \in \{0,\infty\}$ pour tout $u \in A^+$ équivaut à dire que $\left[\!\left[{x \atop u_0}\right]\!\right] = \infty$ pour un certain $u_0 \in A^+$ de même contenu que x. Ainsi, si $c(x) = \{a_{i_1},\ldots,a_{i_k}\}$ on peut fixer, par exemple, $u_0 = a_{i_1}\cdots a_{i_k}$.

Supposons que x est régulier. Alors, il existe $y \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ tel que $x = xyx$ et on a donc

$$\left[\!\left[{x \atop u_0}\right]\!\right] = \left[\!\left[{xyx \atop u_0}\right]\!\right] \geq 2\left[\!\left[{x \atop u_0}\right]\!\right] \text{ et } \left[\!\left[{x \atop u_0}\right]\!\right] = \left[\!\left[{(xy)^{k-1}x \atop u_0}\right]\!\right] \geq 1.$$

On déduit ainsi que $\left[\!\left[{x \atop u_0}\right]\!\right] = \infty$.

Réciproquement, supposons que $\left[\!\left[{x \atop u_0}\right]\!\right] = \infty$ et soit $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite dans A^+ convergeant vers x dans $\hat{F}_A(\mathbf{V})$. Comme $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{V}$, on peut supposer que $c(w_m) = c(x)$ pour tout m et que $\left(\left[\!\left[{w_m \atop u_0}\right]\!\right]\right)_m$ est une suite croissante, d'après la proposition 3.6.8. Soit $S \in \mathbf{V}$. Puisque $(w_m)_m$ converge vers x, il existe un m_0 tel que, pour tout $m \geq m_0$, S satisfait $x = w_m$. Alors, si on choisit $m \geq m_0$ tel que $\left[\!\left[{w_m \atop u_0}\right]\!\right] > |S|$, on déduit du lemme antérieur que

$$S \models x = w_m = w_m^{\omega+1} = x^{\omega+1}.$$

Comme $S \in \mathbf{V}$ est quelconque, cela entraîne que x est régulier. $\Box$

Nous sommes maintenant en possession de tous les outils pour prouver que chaque opération implicite sur $\mathbf{DS}$ est un produit fini d'opérations explicites et d'opérations implicites regulières. Autrement dit, pour chaque alphabet fini A, le semigroupe $\hat{F}_A(\mathbf{DS})$ est engendré par ses éléments réguliers et par les lettres de A.

Théorème 3.6.11 (Azevedo [21]) *Soit* A *un alphabet fini. Toute opération implicite* $x \in \hat{F}_A(\mathbf{S})$ *admet une factorisation de la forme*

$$x = u_0x_1u_1\cdots x_ku_k$$

où

- $u_i \in A^*$ *pour tout* $0 \leq i \leq n$, *et* $u_0 \neq 1$ *si* $x = u_0$ *;*
- *la restriction à* $\mathbf{DS}$ *de chaque* $x_1,\ldots,x_k \in \hat{F}_A(\mathbf{S})$ *est régulière ;*
- *si* $u_i = 1$ $(1 \leq i \leq k-1)$, *alors* $c(x_i)$ *et* $c(x_{i+1})$ *sont* $\subseteq$*-incomparables ;*

– *pour tout* $1 \leq i \leq k$ *tel que* $u_i \neq 1$ *(resp.* $u_{i-1} \neq 1$*), la première (resp. dernière) lettre de* u_i *(resp.* u_{i-1}*) n'appartient pas à* $c(x_i)$*.*

Preuve. On prouve d'abord que x peut être écrit comme un produit d'opérations explicites et d'opérations implicites dont la restriction à **DS** est regulière. On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des mots *linéaires* de A^+, i.e., des mots sur A où chaque lettre apparaît au plus une fois. Nous travaillerons sur $\hat{F}_A(\mathbf{S})^1$ en posant, par convention, $\left[\!\!\left[{1 \atop u} \right]\!\!\right] = 0$ pour tout $u \in A^+$. Pour chaque $x \in \hat{F}_A(\mathbf{S})^1$ notons $\nu(x)$ le nombre de mots $u \in \mathcal{L}$ tels que $\left[\!\!\left[{x \atop u} \right]\!\!\right] = 0$. La preuve est faite par récurrence descendante sur $\nu(x)$.

Le résultat est vrai si $\nu(x)$ est maximum (c'est-à-dire, si $\nu(x) = |\mathcal{L}|$) puisque dans ce cas $x = 1$ et 1 est régulier. Supposons maintenant que tout $x \in \hat{F}_A(\mathbf{S})^1$ tel que $\nu(x) > m$ admet une factorisation dont chaque facteur, soit est une opération explicite, soit est une opération implicite dont la restriction à **DS** est regulière, et prenons $x \in \hat{F}_A(\mathbf{S})$ tel que $\nu(x) = m$.

Si $\left[\!\!\left[{x \atop u} \right]\!\!\right] \in \{0, \infty\}$ pour tout $u \in \mathcal{L}$, alors la restriction de x à **DS** est régulière par le théorème 3.6.10. Sinon, $0 < \left[\!\!\left[{x \atop u} \right]\!\!\right] < \infty$ pour un certain $u \in \mathcal{L}$. Soit $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de A^+ convergeant vers x (pour laquelle on peut supposer $\left[\!\!\left[{w_k \atop u} \right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[{x \atop u} \right]\!\!\right]$ pour tout k, d'après la proposition 3.6.8). Considérons une factorisation

$$w_k = w_{k0} a_{i1} w_{k1} \cdots a_{ip} w_{kp}$$

où $a_{i1} \cdots a_{ip} = u^q$, $q = \left[\!\!\left[{x \atop u} \right]\!\!\right]$ et $w_{k0}, \ldots, w_{kp} \in A^*$. En particulier, par définition de q, on a $\left[\!\!\left[{w_{kj} \atop u} \right]\!\!\right] = 0$ pour tout $j = 0, \ldots, p$. De plus, on peut supposer que la suite $(w_{kj})_k$ converge, disons vers $y_j \in \hat{F}_A(\mathbf{S})^1$. On a donc

$$x = y_0 a_{i1} y_1 \cdots a_{ip} y_p$$

avec $\left[\!\!\left[{y_j \atop u} \right]\!\!\right] = 0$ pour tout $j = 0, \ldots, p$ par continuité de la fonction $x \mapsto \left[\!\!\left[{x \atop u} \right]\!\!\right]$. En outre, si $\left[\!\!\left[{x \atop v} \right]\!\!\right] = 0$ pour un $v \in A^+$, alors certainement $\left[\!\!\left[{y_j \atop v} \right]\!\!\right] = 0$ et donc $\nu(y_j) > m$. Maintenant, l'application de l'hypothèse de récurrence montre l'existence d'une factorisation de x comme produit d'opérations explicites et d'opérations implicites dont la restriction à **DS** est regulière.

Pour conclure la preuve il suffit de noter que, d'après le corollaire 3.6.6, si $y, z \in \hat{F}_A(\mathbf{DS})$ sont tels que y est régulier et $c(z) \subseteq c(y)$ alors yz et zy sont aussi des éléments réguliers. □

Comme, pour toute pseudo-variété $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{DS}$, le semigroupe $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ est image homomorphe de $\hat{F}_A(\mathbf{DS})$ nous avons la conséquence suivante du théorème antérieur.

Corollaire 3.6.12 *Soit* **V** *une sous-pseudo-variété de* **DS** *et soit* A *un alphabet fini. Alors,* $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ *est engendré par ses éléments réguliers et par les lettres de* A*.* □

3.6.3 Opérations implicites sur DO

Si on se restreint aux sous-pseudo-variétés de **DO**, on peut être plus précis dans l'identification des opérations implicites régulières. Pour certaines de ces pseudo-variétés

V on peut même donner une description complète des semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{V})$. En particulier, la pseudo-variété **J** s'insére dans cette dernière classe et nous rappelerons dans la prochaine section la solution du problème du mot pour une certaine présentation de $\hat{F}_A(\mathbf{J})$.

Nous commençons avec un lemme.

Lemme 3.6.13 *Soit $S \in \mathbf{DO}$, soit $e \in E(S)$ et soient $r, s \in S$ tels que $e \leq_{\mathcal{J}} r, s$. Alors, $erse = erese$.*

Preuve. D'après la proposition 3.6.3, er et se sont des éléments de groupe dans la $\mathcal{J}$-classe de e. Alors,

$$erse = er(er)^\omega(se)^\omega se.$$

Mais $(er)^\omega(se)^\omega$ est idempotent, puisque la $\mathcal{J}$-classe de e est un semigroupe orthodoxe, et $(er)^\omega(se)^\omega \,\mathcal{H}\, e$. Par conséquent, $(er)^\omega(se)^\omega = e$ et donc $erse = erese$. □

On montre maintenant que toute opération implicite régulière sur une sous-pseudo-variété de **DO** est définie par sa puissance idempotente et sa restriction à $\mathbf{V} \cap \mathbf{G}$.

Théorème 3.6.14 (Azevedo [21]) *Soit **V** une sous-pseudo-variété de **DO**, soit A un alphabet fini et soient $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ deux éléments réguliers. Alors, $x = y$ si et seulement si $x^\omega = y^\omega$ et $\mathbf{V} \cap \mathbf{G} \models x = y$.*

Preuve. Soit $S \in \mathbf{V}$ et soit u une opération explicite sur **V** telle que $x_S = u_S$. Pour $s_1, \ldots, s_n \in S$, soit $e = x_S^\omega(s_1, \ldots, s_n)$ et soit H la $\mathcal{H}$-classe de e. Alors, $H \in \mathbf{V} \cap \mathbf{G}$ et

$$\begin{aligned} x_S(s_1, \ldots, s_n) &= u_S(s_1, \ldots, s_n) \\ &= e\, u_S(s_1, \ldots, s_n)\, e \qquad \text{puisque } x \text{ est régulier} \\ &= u_S(es_1e, \ldots, es_ne) \qquad \text{d'après le lemme 3.6.13} \\ &= x_H(es_1e, \ldots, es_ne) \qquad \text{puisque } es_1e, \ldots, es_ne \in H. \end{aligned}$$

Comme par hypothèse $x_H = y_H$ et $x_S^\omega = y_S^\omega$, un raisonnement similaire montre que $x_S = y_S$. On déduit donc que $x = y$. □

Pour les sous-pseudo-variétés **V** de **DG** qui contiennent $\mathbf{J}_1$ et pour des éléments réguliers $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$, $x^\omega = y^\omega$ équivaut à $c(x) = c(y)$ d'après la proposition 3.6.5. Par conséquent, la dernière proposition entraîne immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 3.6.15 *Soit **V** une pseudo-variété telle que $\mathbf{J}_1 \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{DG}$, soit A un alphabet fini et soient $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ deux éléments réguliers. Alors, $x = y$ si et seulement si $c(x) = c(y)$ et $\mathbf{V} \cap \mathbf{G} \models x = y$.* □

Alors, si **V** est une pseudo-variété telle que $\mathbf{J}_1 \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{DG}$, on notera

$$[B, g]$$

où B est un sous-ensemble non vide de A et $g \in \hat{F}_A(\mathbf{V} \cap \mathbf{G})$, l'unique élément régulier x de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ de contenu B et restriction g à $\mathbf{V} \cap \mathbf{G}$. En particulier, si x est idempotent, il sera noté $[B, 1]$.

Notons que, si $\mathbf{V} \in [\mathbf{J}_1, \mathbf{DG}]$ est une pseudo-variété apériodique (i.e., telle que $\mathbf{V} \cap \mathbf{G} = \mathbf{I}$), alors tout élément régulier x de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ est de la forme $[B, 1]$ (c'est-à-dire que tout élément régulier de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ est idempotent) et caractérisé par son contenu. Alors, dans ce cas on simplifie la notation de x en écrivant $x = (B)$. On remarque que $\mathbf{V}$ est apériodique et dans l'intervalle $[\mathbf{J}_1, \mathbf{DG}]$ si et seulement si $\mathbf{V}$ est dans l'intervalle $[\mathbf{J}_1, \mathbf{J}]$.

3.6.4 Opérations implicites sur J

Nous rappelons maintenant le résultat d'Almeida (voir [8, 9]) sur les semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{J})$. Il montre l'unicité des factorisations, comme dans le théorème 3.6.11, des éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{J})$. On rappelle qu'un idempotent de $\hat{F}_A(\mathbf{J})$ est noté (B) où B est son contenu.

Théorème 3.6.16 *Soit A un alphabet fini. Tout élément x de $\hat{F}_A(\mathbf{J})$ admet une factorisation de la forme*

$$x = u_0(A_1)u_1 \cdots (A_k)u_k$$

où

- *$u_i \in A^*$ pour tout $0 \leq i \leq k$, et $u_0 \neq 1$ si $x = u_0$;*
- *si $u_i = 1$ $(1 \leq i \leq k-1)$, alors A_i et A_{i+1} sont $\subseteq$-incomparables ;*
- *pour tout $1 \leq i \leq k$ tel que $u_i \neq 1$ (resp. u_{i-1}), la première (resp. dernière) lettre de u_i (resp. u_{i-1}) n'appartient pas à A_i.*

De plus, cette factorisation est canonique*, c'est-à-dire, si $y = v_0(B_1)v_1 \cdots (B_m)v_m$ est une autre factorisation de ce type, alors $x = y$ si et seulement si $k = m$, $u_i = v_i$ et $A_i = B_i$ pour tout i.* □

Notons qu'un idempotent $\hat{F}_A(\mathbf{J})$ avec contenu B coïncide avec u^ω, où u est un mot de contenu B. Alors, on peut construire tous les éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{J})$ à partir des projections $a_1, \ldots, a_n$ en utilisant un nombre fini de fois deux opérations : la multiplication et l'opération $x \mapsto x^\omega$. Par conséquent, $\hat{F}_A(\mathbf{J})$ peut être vu comme une algèbre de type $(2, 1)$ et Almeida a montré le suivant résultat.

Théorème 3.6.17 *Pour tout alphabet fini A, $\hat{F}_A(\mathbf{J})$ est le semigroupe libre avec une opération unaire $x \mapsto x^\omega$ sur A dans la variété définie par les identités $(xy)^\omega = (yx)^\omega = (x^\omega y^\omega)^\omega$ et $x^\omega x = x^\omega = x x^\omega = (x^\omega)^\omega$.* □

Deuxième partie

Opérations Implicites sur Certaines Classes de Semigroupes

Chapitre 4

Quelques Pseudo-variétés du Type $\mathbf{LI} \vee \mathbf{W}$

Dans ce court chapitre nous donnons une description de toutes les pseudo-variétés du type $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ où $\mathbf{V}$ est l'une des pseudo-variétés $\mathbf{LI}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$ ou $\mathbf{N}$ et où $\mathbf{W}$ est une sous-pseudo-variété de la pseudo-variété $\mathbf{T} = [\![ab^\omega c = (ab^\omega c)^{\omega+1}]\!]$. Nous calculons une base Σ de $\mathbf{T}$-pseudo-identités de $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ (i.e., telle que $\mathbf{V} \vee \mathbf{W} = [\![\Sigma]\!]_{\mathbf{T}}$) à partir d'une base de $\mathbf{W}$. Le résultat obtenu est assez naturel et généralise des résultats déjà connus, notamment les calculs de $\mathbf{V}\vee\mathbf{B}$, $\mathbf{V}\vee\mathbf{J}_1$, $\mathbf{V}\vee\mathbf{G}$, $\mathbf{V}\vee\mathbf{Ab}$ et $\mathbf{N}\vee\mathbf{CR}$ (voir par exemple [96]).

Les calculs $\mathbf{V} \vee \mathbf{W} = \mathbf{U}$ effectués ne sont pas prouvés en utilisant des techniques algébriques (qui consisteraient à montrer que $\mathbf{V}, \mathbf{W} \subseteq \mathbf{U}$ et que tout semigroupe de $\mathbf{U}$ divise un produit $S \times T$ avec $S \in \mathbf{V}$ et $T \in \mathbf{W}$) mais en utilisant des techniques syntaxiques à base d'opérations implicites. Les opérations implicites ont été utilisées avec beaucoup de succès pendant les dernières années dans le calcul de pseudo-variétés du type $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$, notamment dans le travail d'Almeida, Azevedo, Weil et Zeitoun [2, 4, 5, 11, 13, 14, 15, 17, 22, 23, 96, 97]. Les méthodes développées dans [14, 15] seront utilisées pour nous dans le prochain chapitre où nous obtenons d'autres résultats de ce type.

4.1 Généralités

Si $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ sont deux pseudo-variétés de semigroupes contenues dans une troisième $\mathbf{Z}$, il est facile de vérifier que

$$\mathbf{V} \vee \mathbf{W} = [\![\Sigma]\!]_{\mathbf{Z}}$$

où Σ est l'ensemble de toutes les $\mathbf{Z}$-pseudo-identités satisfaites à la fois par $\mathbf{V}$ et par $\mathbf{W}$. En d'autres termes, on a l'observation suivante.

Lemme 4.1.1 *Soient $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ et $\mathbf{Z}$ des pseudo-variétés telles que $\mathbf{V}, \mathbf{W} \subseteq \mathbf{Z}$ et soient $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{Z})$. Alors, $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ satisfait $x = y$ si et seulement si $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ vérifient $x = y$.*

Preuve. Comme il est évident il faut montrer seulement la condition suffisante. Pour cela il suffit de noter que, si deux semigroupes S et T satisfont la pseudo-identité $x = y$, alors $S \times T$ et tout semigroupe qui divise $S \times T$ la satisfont aussi. $\square$

Pour prouver une égalité du type $\mathbf{V} \vee \mathbf{W} = [\![\Sigma]\!]_{\mathbf{Z}}$ nous utilisons le procédé suivant :

– l'inclusion de gauche à droite (est normalement facile et) est prouvée en montrant que $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ satisfont les pseudo-identités de Σ, c'est-à-dire que $\mathbf{V}, \mathbf{W} \subseteq [\![\Sigma]\!]_{\mathbf{Z}}$;
– l'inclusion de droite à gauche (est normalement difficile et) est prouvée en montrant que, si $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ satisfait une $\mathbf{Z}$-pseudo-identité, alors la pseudo-variété $[\![\Sigma]\!]_{\mathbf{Z}}$ la satisfait aussi.

Tout d'abord on rappelle un résultat, simple mais fondamental, sur les pseudo-variétés **LI**, **K** et **D**.

Lemme 4.1.2 *Soit* $\mathbf{V}$ *une pseudo-variété contenant* **LI** *(resp.* **K**, **D***) et soient* $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{V}) \setminus A^+$ *tels que* **LI** *(resp.* **K**, **D***) satisfait* $x = y$. *Alors, il existe* $r, s, u, v \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$, *avec* $r, s \notin A^+$, *tels que* $x = rus$ *et* $y = rvs$ *(resp.* $x = ru$ *et* $y = rv$, $x = us$ *et* $y = vs$*).*

Preuve. Considérons des suites $(x_k)_k$ et $(y_k)_k$ dans A^+ convergeant, respectivement, vers x et y dans $\hat{F}_A(\mathbf{V})$. Notons que ces suites sont aussi convergentes dans $\hat{F}_A(\mathbf{LI})$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{LI}_m$ satisfait ultimement les identités $(x_k = y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, et on peut choisir donc des sous-suites $(x'_k)_k$ et $(y'_k)_k$, de $(x_k)_k$ et $(y_k)_k$, respectivement, telles que

$$x'_k = r_k u_k s_k \qquad \text{et} \qquad y'_k = r_k v_k s_k$$

pour des $r_k, u_k, v_k, s_k \in A^+$ avec $|r_k|, |s_k| = k$. De plus, par compacité de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ on peut supposer que les suites $(r_k)_k$, $(u_k)_k$, $(v_k)_k$ et $(s_k)_k$ sont convergentes dans $\hat{F}_A(\mathbf{V})$, ce qui prouve le résultat. $\square$

Nous utiliserons aussi le résultat qui suit (voir [9, corollaire 5.6.2]) et qui constitue une sorte de généralisation de la proposition 1.3.4.

Proposition 4.1.3 *Soit* $\mathbf{V}$ *une pseudo-variété et soit* $x \in \hat{F}_A(\mathbf{V}) \setminus F_A(\mathbf{V})$. *Alors, il existe* $x_1, x_2, x_3 \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ *tels que* $x = x_1 x_2^\omega x_3$. $\square$

4.2 Quelques calculs déjà connus

On rappelle dans cette section quelques calculs du type $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ déjà effectués, où $\mathbf{V}$ est l'une des pseudo-variétés **LI**, **K**, **D** ou **N**. Presque tous ces résultats sont mentionnés dans [96, 98].

Pour la pseudo-variété **Com** des semigroupes commutatifs on a les égalités suivantes, prouvées par Almeida [2, 4],

$$\begin{aligned}
\mathbf{LI} \vee \mathbf{Com} &= [\![a^\omega bcd^\omega = a^\omega cbd^\omega]\!] \\
\mathbf{K} \vee \mathbf{Com} &= [\![a^\omega bc = a^\omega cb]\!] \\
\mathbf{D} \vee \mathbf{Com} &= [\![bca^\omega = cba^\omega]\!] \\
\mathbf{N} \vee \mathbf{Com} &= [\![a^\omega b = ba^\omega, a^\omega bc = a^\omega cb]\!].
\end{aligned}$$

Dans le cas de la pseudo-variété **B** des bandes on a les calculs suivants effectués par Zeitoun [97]

$$\begin{aligned}
\mathbf{LI} \vee \mathbf{B} &= [\![a^\omega b = (a^\omega b)^2, ba^\omega = (ba^\omega)^2, a^\omega bc^\omega = a^\omega b^2 c^\omega]\!]\\
\mathbf{K} \vee \mathbf{B} &= [\![ba^\omega = (ba^\omega)^2, a^\omega b = a^\omega b^2]\!]\\
\mathbf{D} \vee \mathbf{B} &= [\![a^\omega b = (a^\omega b)^2, ba^\omega = b^2 a^\omega]\!]\\
\mathbf{N} \vee \mathbf{B} &= [\![a^\omega b = ab^\omega]\!].
\end{aligned}$$

De plus, si **V** est l'une des pseudo-variétés **LI**, **K**, **D** ou **N**, on a

$$\mathbf{V} \vee \mathbf{J}_1 = \mathbf{V} \vee (\mathbf{B} \cap \mathbf{Com}) = (\mathbf{V} \vee \mathbf{B}) \cap (\mathbf{V} \vee \mathbf{Com}).$$

On rappelle maintenant les égalités suivantes qui sont des classiques

$$\begin{aligned}
\mathbf{LI} \vee \mathbf{G} &= [\![a^\omega b^\omega a^\omega = a^\omega]\!]\\
\mathbf{K} \vee \mathbf{G} &= [\![a^\omega b^\omega = a^\omega]\!]\\
\mathbf{D} \vee \mathbf{G} &= [\![a^\omega b^\omega = b^\omega]\!]\\
\mathbf{N} \vee \mathbf{G} &= [\![a^\omega = b^\omega]\!].
\end{aligned}$$

Si **V** est l'une des pseudo-variétés **LI**, **K**, **D** ou **N**, on a aussi

$$\mathbf{V} \vee \mathbf{Ab} = \mathbf{V} \vee (\mathbf{G} \cap \mathbf{Com}) = (\mathbf{V} \vee \mathbf{G}) \cap (\mathbf{V} \vee \mathbf{Com}).$$

D'autres calculs effectués par Almeida [9] et par Azevedo [21, 22] sont les suivants

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} \vee \mathbf{CR} &= [\![(ab)^{\omega+1} = a^{\omega+1} b^{\omega+1}]\!]\\
\mathbf{K} \vee \mathbf{MN} &= [\![a^\omega b^\omega c = a^\omega c b^\omega, a^\omega = a^{\omega+1}]\!]\\
\mathbf{K} \vee \mathbf{J} &= [\![a^\omega b(cd)^\omega = a^\omega b(dc)^\omega, a^\omega = a^{\omega+1}]\!]\\
\mathbf{LI} \vee \mathbf{J} &= [\![a^\omega b(cd)^\omega e f^\omega = a^\omega b(dc)^\omega e f^\omega, a^\omega = a^{\omega+1}]\!]
\end{aligned}$$

Pour terminer les exemples on mentionne le résultat suivant d'Azevedo et Zeitoun [23]

$$\mathbf{D} \vee \mathbf{MK} = [\![a^\omega b a^\omega c d^\omega = a^\omega b c d^\omega, a^\omega = a^{\omega+1}]\!].$$

4.3 Le résultat principal

Dans la suite de ce chapitre nous fixons un ensemble dénombrable $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ et nous notons $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Considérons la pseudo-variété

$$\mathbf{T} = [\![ab^\omega c = (ab^\omega c)^{\omega+1}]\!].$$

Considérons aussi la pseudo-variété

$$\mathbf{CR} = [\![a = a^{\omega+1}]\!]$$

des semigroupes complètement réguliers. On note que la pseudo-identité qui définit la pseudo-variété $\mathbf{T}$ est obtenue de la pseudo-identité $a = a^{\omega+1}$ qui définit $\mathbf{CR}$ en remplaçant la variable a par le terme $ab^\omega c$. D'après Pin et Weil [62], cela signifie que $\mathbf{T} = \mathbf{CR} ⓜ \mathbf{N}$.

Il est clair que $\mathbf{CR}$ et $\mathbf{LI}$ sont des sous-pseudo-variétés de $\mathbf{T}$, et donc aussi $\mathbf{G}$, $\mathbf{Ab}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{N}$, etc. Par contre, $\mathbf{Com}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{MN}$ et $\mathbf{MK}$, par exemple, ne sont pas contenues dans $\mathbf{T}$. De plus, on remarque qu'un semigroupe fini S appartient à $\mathbf{T}$ si et seulement si pour tous $s, e \in S$, avec e idempotent, si $s \leq_{\mathcal{J}} e$ alors s est un élément de groupe. Autrement dit, l'idéal de S engendré par les idempotents est un sous-semigroupe complètement régulier. On peut dire, donc, que S est une extension nilpotente d'un semigroupe complètement régulier. En particulier, toute $\mathcal{D}$-classe régulière de S est une union de groupes, ce qui montre que $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{DS}$.

Remarquons enfin que $\mathbf{T}$ peut être définie alternativement par

$$\mathbf{T} = [\![a^\omega b = (a^\omega b)^{\omega+1}, ba^\omega = (ba^\omega)^{\omega+1}]\!].$$

En effet, on voit facilement que $\mathbf{T}$ satisfait ces deux pseudo-identités. Réciproquement, elles permettent de déduire

$$ab^\omega c = (ab^\omega)^\omega ab^\omega c = ((ab^\omega)^\omega ab^\omega c)^{\omega+1} = (ab^\omega c)^{\omega+1}.$$

On énonce maintenant le résultat principal de cette section, qui donne une caractérisation des pseudo-variétés du type $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ où $\mathbf{V}$ est l'une des pseudo-variétés $\mathbf{LI}$, $\mathbf{K}$ ou $\mathbf{D}$ et où $\mathbf{W}$ est une sous-pseudo-variété de $\mathbf{T}$.

Théorème 4.3.1 *Soit $\mathbf{W}$ une sous-pseudo-variété de $\mathbf{T}$ et soit Σ une base de $\mathbf{T}$-pseudo-identités de $\mathbf{W}$. Alors,*

$$\begin{aligned}
\mathbf{LI} \vee \mathbf{W} &= [\![a^\omega x b^\omega = a^\omega y b^\omega \mid x = y \in \Sigma]\!]_{\mathbf{T}} \\
\mathbf{K} \vee \mathbf{W} &= [\![a^\omega x = a^\omega y \mid x = y \in \Sigma]\!]_{\mathbf{T}} \\
\mathbf{D} \vee \mathbf{W} &= [\![x a^\omega = y a^\omega \mid x = y \in \Sigma]\!]_{\mathbf{T}}.
\end{aligned}$$

Ce résultat, plus la proposition 4.3.3 ci-dessous, contiennent comme des cas particuliers tous les résultats sur les pseudo-variétés de la forme $\mathbf{V} \vee \mathbf{B}$, $\mathbf{V} \vee \mathbf{J}_1$, $\mathbf{V} \vee \mathbf{G}$ et $\mathbf{V} \vee \mathbf{Ab}$, avec $\mathbf{V} \in \{\mathbf{LI}, \mathbf{K}, \mathbf{D}, \mathbf{N}\}$, mentionnés dans la section 4.2. Pour la démonstration de ce théorème, nous commencerons par prouver le résultat moins puissant suivant.

Lemme 4.3.2 *Soit $\mathbf{W}$ une sous-pseudo-variété de $\mathbf{T}$ et soit Σ l'ensemble de toutes les $\mathbf{T}$-pseudo-identités qui sont satisfaites par $\mathbf{W}$, c'est-à-dire que*

$$\Sigma = \{x = y \mid \textit{il existe } n \in \mathbb{N} \textit{ tel que } x, y \in \hat{F}_{A_n}(\mathbf{T}) \textit{ et } \mathbf{W} \models x = y\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\mathbf{LI} \vee \mathbf{W} &= [\![a^\omega x b^\omega = a^\omega y b^\omega \mid x = y \in \Sigma]\!]_{\mathbf{T}} \\ \mathbf{K} \vee \mathbf{W} &= [\![a^\omega x = a^\omega y \mid x = y \in \Sigma]\!]_{\mathbf{T}} \\ \mathbf{D} \vee \mathbf{W} &= [\![x a^\omega = y a^\omega \mid x = y \in \Sigma]\!]_{\mathbf{T}}.\end{aligned}$$

Preuve. Les autres cas étant similaires, on montre seulement le résultat pour **LI**. Soit **U** la pseudo-variété candidate pour $\mathbf{LI} \vee \mathbf{W}$. Il est évident qu'aussi bien **LI** que **W** satisfont toutes les pseudo-identités de l'ensemble qui définit **U**. Donc $\mathbf{LI} \vee \mathbf{W} \subseteq \mathbf{U}$.

Pour la preuve de l'inclusion inverse, considérons $x, y \in \hat{F}_{A_n}(\mathbf{T})$ et supposons que $\mathbf{LI} \vee \mathbf{W}$ satisfait $x = y$. Il suffit, donc, de prouver que **U** satisfait $x = y$. Il est clair d'après l'étude conduite sur **LI** à la section 3.4 que, puisque **LI** satisfait $x = y$, soit $x, y \in A^+$ et sont le même mot, soit x et y sont tous les deux non explicites. Dans ce cas, d'après le lemme 4.1.2,

$$x = rus \qquad \text{et} \qquad y = rvs$$

pour des $r, s, u, v \in \hat{F}_{A_n}(\mathbf{T})$ avec $r, s \notin A^+$. De plus, d'après la proposition 4.1.3 on a

$$r = r_1 r_2^\omega r_3 \qquad \text{et} \qquad s = s_1 s_2^\omega s_3$$

pour des $r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3 \in \hat{F}_{A_n}(\mathbf{T})$. Ceci entraîne, par définition de **T**, que $r = r^{\omega+1}$ et $s = s^{\omega+1}$. Par conséquent, on déduit

$$x = rus = r^{\omega+1} u s^{\omega+1} = r^\omega x s^\omega.$$

De même, on a $y = r^\omega y s^\omega$. Finalement, comme **W** satisfait $x = y$ il est clair, d'après la définition de **U**, que **U** aussi satisfait $x = y$. □

La caractérisation des pseudo-variétés du type $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ donnée par le lemme 4.3.2 n'est pas tout à fait satisfaisante puisqu'elle ne permet pas en général un calcul effectif de celles-ci. En fait en général on ne connaît pas toutes les pseudo-identités satisfaites par la pseudo-variété **W** (et même quand on les connaît, la caractérisation obtenue reste encore peu aimable). Cet inconvénient est dépassé dans le théorème 4.3.1 (qu'on prouve tout de suite) puisqu'on prend une base quelconque (de **T**-pseudo-identités) de **W** à la place de l'ensemble de toutes les **T**-pseudo-identités qui sont satisfaites par **W**.

Preuve du théorème 4.3.1. On prouve le résultat pour **LI**. Soit **U** la pseudo-variété candidate pour $\mathbf{LI} \vee \mathbf{W}$. L'inclusion $\mathbf{LI} \vee \mathbf{W} \subseteq \mathbf{U}$ est immédiate. La preuve de l'inclusion inverse se fait en trois étapes :

Première étape Supposons d'abord que **W** est localement finie (et donc équationnelle), et que Σ est une base d'identités de **W**. D'après les propositions 3.2.4 et 3.2.5 cela équivaut à dire que les semigroupes $F_{A_n}(\mathbf{W})$ sont finis pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'ils coïncident avec $\hat{F}_{A_n}(\mathbf{W})$. Pour prouver l'inclusion $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{LI} \vee \mathbf{W}$ il suffit, d'après le lemme 4.3.2, de montrer que si $x, y \in \hat{F}_{A_n}(\mathbf{T})$ sont tels que **W** satisfait $x = y$, alors **U** satisfait $a^\omega x b^\omega = a^\omega y b^\omega$.

Premier cas Démontrons d'abord cette affirmation quand x et y sont des mots (et on peut les supposer distincts). Comme $\mathbf{W}$ est une pseudo-variété équationnelle de base Σ et satisfait $x = y$, on peut obtenir l'identité $x = y$ à partir de Σ en utilisant un nombre fini de fois les règles de déduction suivantes :

$r1)$ $u = v \Rightarrow v = u$;

$r2)$ $u = v$, $v = w \Rightarrow u = w$;

$r3)$ $u = v$, $r, s \in A_n^* \Rightarrow rus = rvs$;

$r4)$ $u = v$, $c \in A_n$, $r \in A_n^+ \Rightarrow u' = v'$ où u' et v' sont les mots obtenus à partir des mots u et v, respectivement, par la substitution de chaque ocurrence de c par r.

C'est-à-dire qu'il existe une suite finie d'identités

$$u_1 = v_1,\ u_2 = v_2, \ldots, u_k = v_k$$

telle que chaque $u_i = v_i$ est dans Σ ou est obtenue à partir des identités qui la précédent dans la suite en utilisant l'une des règles $r1)$ à $r4)$, et $u_k = v_k$ est l'identité $x = y$.

Pour montrer que $\mathbf{U}$ satisfait $a^\omega x b^\omega = a^\omega y b^\omega$ on prouve, par récurrence, que $\mathbf{U}$ satisfait $a^\omega u_i b^\omega = a^\omega v_i b^\omega$ pour toute identité $u_i = v_i$ dans la suite. Tout d'abord, il est clair que $u_1 = v_1$ est une identité de Σ et donc que $\mathbf{U}$ satisfait $a^\omega u_1 b^\omega = a^\omega v_1 b^\omega$, d'après la définition de $\mathbf{U}$.

Soit maintenant $1 < i \leq k$, supposons que $\mathbf{U}$ satisfait $a^\omega u_j b^\omega = a^\omega v_j b^\omega$ pour tout $1 \leq j < i$ et montrons que $\mathbf{U}$ vérifie $a^\omega u_i b^\omega = a^\omega v_i b^\omega$. Encore une fois, ceci est clair si $u_i = v_i$ est dans Σ. Supposons donc que $u_i = v_i$ est obtenue des identités $u_j = v_j$ $(1 \leq j < i)$ en utilisant l'une des règles $r1)$ à $r4)$. Si la règle utilisée est $r1)$, $r2)$ ou $r4)$ l'affirmation est aussi valide par hypothèse de récurrence. Il reste le cas où la règle utilisée est $r3)$.

Supposons donc que $u_i = v_i$ est l'identité $ru_js = rv_js$ pour des $r, s \in A^*$ et $1 \leq j < i$. Alors, par hypothèse de récurrence, $\mathbf{U}$ satisfait $a^\omega u_j b^\omega = a^\omega v_j b^\omega$ et, donc, vérifie aussi

$$\begin{aligned}
a^\omega u_i b^\omega &= a^\omega r u_j s b^\omega \\
&= a^\omega r (a^\omega r)^\omega u_j (s b^\omega)^\omega s b^\omega \qquad \text{puisque } \mathbf{U} \subseteq \mathbf{T} \\
&= a^\omega r (a^\omega r)^\omega v_j (s b^\omega)^\omega s b^\omega \\
&= a^\omega r v_j s b^\omega \\
&= a^\omega v_i b^\omega.
\end{aligned}$$

On peut finalement conclure que $\mathbf{U}$ satisfait $a^\omega u_k b^\omega = a^\omega v_k b^\omega$, c'est-à-dire que $\mathbf{U}$ vérifie $a^\omega x b^\omega = a^\omega y b^\omega$.

Deuxième cas Considérons maintenant le cas général où x et y sont quelconques. Comme $F_{A_n}(\mathbf{T}) = A^+$ est dense dans $\hat{F}_{A_n}(\mathbf{T})$ il existe des suites $(u_k)_k$ et $(v_k)_k$ de mots de A^+ dont la limite est, respectivement, x et y. De plus, le fait que $\mathbf{W}$ satisfait $x = y$ et que $\hat{F}_{A_n}(\mathbf{W})$ est fini permet de supposer que $\mathbf{W}$ satisfait $u_k = v_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent, comme on l'a prouvé ci-dessus, $\mathbf{U}$ satisfait $a^\omega u_k b^\omega = a^\omega v_k b^\omega$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On déduit donc que $\mathbf{U}$ satisfait aussi $a^\omega x b^\omega = a^\omega y b^\omega$ par passage à la limite, par continuité de la multiplication.

Cela termine la preuve du résultat dans le cas où $\mathbf{W}$ est une pseudo-variété localement finie et Σ est un ensemble d'identités.

Deuxième étape Supposons maintenant que $\mathbf{W}$ est une pseudo-variété équationnelle, et que Σ est un ensemble d'identités. Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $\mathbf{T}_k$ la sous-pseudo-variété de $\mathbf{T}$ engendrée par les éléments de $\mathbf{T}$ de cardinalité au plus k. En particulier $\mathbf{T}_k$ est localement finie puisqu'elle est finiment engendrée. Soit Δ_k une base (d'identités) de $\mathbf{T}_k$. Maintenant, considérons la pseudo-variété

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{W} \cap \mathbf{T}_k.$$

La pseudo-variété $\mathbf{W}_k$ est aussi localement finie (puisqu'elle est une sous-pseudo-variété de $\mathbf{T}_k$) et a pour base d'identités l'ensemble $\Sigma \cup \Delta_k$. En outre, comme $\mathbf{T} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{T}_k$ on a $\mathbf{W} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{W}_k$ et donc aussi

$$\mathbf{LI} \vee \mathbf{W} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\mathbf{LI} \vee \mathbf{W}_k).$$

Prenons un semigroupe S de $\mathbf{U}$, et soit k sa cardinalité. Alors S est dans $\mathbf{T}_k$ qui, rappelons le, est la pseudo-variété définie par Δ_k. Il s'ensuit que S est aussi dans la pseudo-variété $[\![a^\omega u b^\omega = a^\omega v b^\omega \mid u = v \in \Delta_k]\!]_{\mathbf{T}} \cap \mathbf{U}$, c'est-à-dire la pseudo-variété

$$[\![a^\omega u b^\omega = a^\omega v b^\omega \mid u = v \in \Delta_k \cup \Sigma]\!]_{\mathbf{T}}.$$

Mais, d'après la première étape cette pseudo-variété est la pseudo-variété

$$\mathbf{LI} \vee [\![\Delta_k \cup \Sigma]\!]_{\mathbf{T}} = \mathbf{LI} \vee \mathbf{W}_k.$$

On en déduit donc que S est dans $\mathbf{LI} \vee \mathbf{W}$.

On a ainsi montré que $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{LI} \vee \mathbf{W}$ ce qui conclut la preuve du théorème dans le cas où $\mathbf{W}$ est une pseudo-variété équationnelle et Σ est un ensemble d'identités.

Troisième étape Revenons finalement au cas général où $\mathbf{W}$ et Σ sont quelconques. Soit $S \in \mathbf{U}$. C'est-à-dire que, pour toute pseudo-identité $x = y \in \Sigma$, S satisfait $a^\omega x b^\omega = a^\omega y b^\omega$. Pour tout $x = y \in \Sigma$, considérons une suite $(x_i = y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'identités convergeant vers $x = y$. Alors, il existe un entier k tel que S satisfait $a^\omega x_i b^\omega = a^\omega y_i b^\omega$ pour tout $i \geq k$. Quitte à en extraire des sous-suites on peut donc supposer que, pour tout $x = y \in \Sigma$, S satisfait toutes les pseudo-identités $a^\omega x_i b^\omega = a^\omega y_i b^\omega$. Maintenant, considérons l'ensemble d'identités

$$\Sigma' = \{x_i = y_i \mid x = y \in \Sigma,\ i \in \mathbb{N}\},$$

et soit $\mathbf{W}'$ la sous-pseudo-variété de $\mathbf{T}$ définie par Σ'. On voit facilement que $\mathbf{W}' \subseteq \mathbf{W}$. En outre, on sait d'après la deuxième étape que $S \in \mathbf{LI} \vee \mathbf{W}'$, et donc $S \in \mathbf{LI} \vee \mathbf{W}$.

On a ainsi prouvé que $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{LI} \vee \mathbf{W}$, d'où le résultat. □

Pour la pseudo-variété $\mathbf{N}$ nous avons le résultat suivant.

Proposition 4.3.3 *Pour toute sous-pseudo-variété* $\mathbf{W}$ *de* $\mathbf{T}$ *on a l'égalité suivante*

$$\mathbf{N} \vee \mathbf{W} = (\mathbf{K} \vee \mathbf{W}) \cap (\mathbf{D} \vee \mathbf{W}).$$

Preuve. Soit $\mathbf{U} = (\mathbf{K} \vee \mathbf{W}) \cap (\mathbf{D} \vee \mathbf{W})$. Que $\mathbf{N} \vee \mathbf{W}$ soit incluse dans $\mathbf{U}$ est évident. Pour la preuve de l'inclusion inverse, soient $x, y \in \hat{F}_{A_n}(\mathbf{T})$ et supposons que $\mathbf{N} \vee \mathbf{W}$ satisfait $x = y$. En particulier $\mathbf{N}$ satisfait $x = y$ et, donc, soit x et y sont tous les deux explicites et égaux , soit x et y sont tous les deux non explicites (voir la section 3.4). Dans ce cas on a, d'après la proposition 4.1.3, $x = x_1 x_2^\omega x_3$ et $y = y_1 y_2^\omega y_3$ pour des $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \hat{F}_{A_n}(\mathbf{T})$. Par définition de $\mathbf{T}$ on a donc

$$x = x^{\omega+1} \qquad \text{et} \qquad y = y^{\omega+1}. \tag{4.1}$$

En outre, $\mathbf{W}$ satisfait $x = y$. Alors $\mathbf{W}$ satisfait $x^\omega = y^\omega$ et donc, comme il est évident,

$$\mathbf{K} \vee \mathbf{W} \models x^\omega = x^\omega y^\omega \qquad \text{et} \qquad \mathbf{D} \vee \mathbf{W} \models x^\omega y^\omega = y^\omega.$$

Comme $\mathbf{U} = (\mathbf{K} \vee \mathbf{W}) \cap (\mathbf{D} \vee \mathbf{W})$, ceci implique que $\mathbf{U}$ satisfait $x^\omega = x^\omega y^\omega = y^\omega$. Pour terminer on déduit que $\mathbf{U}$ vérifie

$$\begin{aligned} x &= x^\omega x && \text{d'après (4.1)} \\ &= y^\omega x && \\ &= y^\omega y && \text{puisque } \mathbf{U} \text{ satisfait } a^\omega x = a^\omega y \\ &= y && \text{d'après (4.1).} \end{aligned}$$

On a ainsi montré l'inclusion $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{N} \vee \mathbf{W}$, d'où l'égalité. □

En particulier, cette dernière proposition et le théorème 4.3.1 permettent d'obtenir, par exemple, les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{LI} \vee \mathbf{CR} &= [\![a^\omega b c^\omega = a^\omega b^{\omega+1} c^\omega, a b^\omega c = (a b^\omega c)^{\omega+1}]\!] \\ \mathbf{K} \vee \mathbf{CR} &= [\![a^\omega b = a^\omega b^{\omega+1}, a b^\omega c = (a b^\omega c)^{\omega+1}]\!] \\ \mathbf{D} \vee \mathbf{CR} &= [\![b a^\omega = b^{\omega+1} a^\omega, a b^\omega c = (a b^\omega c)^{\omega+1}]\!] \\ \mathbf{N} \vee \mathbf{CR} &= [\![a^\omega b = a^\omega b^{\omega+1}, b a^\omega = b^{\omega+1} a^\omega, a b^\omega c = (a b^\omega c)^{\omega+1}]\!]. \end{aligned}$$

Rappelons que $\mathbf{T} = [\![ab^\omega c = (ab^\omega c)^{\omega+1}]\!]$ est aussi définie par les pseudo-identités $a^\omega b = (a^\omega b)^{\omega+1}$ et $ba^\omega = (ba^\omega)^{\omega+1}$. De plus, la pseudo-identité $a^\omega b = a^\omega b^{\omega+1}$ en implique $a^\omega b = (a^\omega b)^{\omega+1}$. En effet, si un semigroupe satisfait $a^\omega b = a^\omega b^{\omega+1}$ il satisfait aussi

$$a^\omega b = a^\omega(a^\omega b) = a^\omega(a^\omega b)^{\omega+1} = (a^\omega b)^{\omega+1}.$$

De façon analogue, la pseudo-identité $ba^\omega = b^{\omega+1}a^\omega$ en implique $ba^\omega = (ba^\omega)^{\omega+1}$. On peut donc écrire simplement

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} \vee \mathbf{CR} &= [\![a^\omega b = a^\omega b^{\omega+1}, ba^\omega = (ba^\omega)^{\omega+1}]\!] \\
\mathbf{D} \vee \mathbf{CR} &= [\![ba^\omega = b^{\omega+1}a^\omega, a^\omega b = (a^\omega b)^{\omega+1}]\!] \\
\mathbf{N} \vee \mathbf{CR} &= [\![a^\omega b = a^\omega b^{\omega+1}, ba^\omega = b^{\omega+1}a^\omega]\!].
\end{aligned}$$

Le théorème 4.3.1 permet aussi de prouver la décomposition suivante.

Corollaire 4.3.4 *Soit* $\mathbf{V}$ *l'une des pseudo-variétés* $\mathbf{LI}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$ *ou* $\mathbf{N}$ *et soit* $(\mathbf{W}_i)_{i\in I}$ *une famille de pseudo-variétés telles que* $\bigcap_{i\in I}(\mathbf{V} \vee \mathbf{W}_i) \subseteq \mathbf{T}$. *Alors,*

$$\mathbf{V} \vee (\bigcap_{i\in I} \mathbf{W}_i) = \bigcap_{i\in I}(\mathbf{V} \vee \mathbf{W}_i).$$

Preuve. On montre le résultat pour $\mathbf{LI}$. Les cas $\mathbf{K}$ et $\mathbf{D}$ sont similaires, et le cas $\mathbf{N}$ est une conséquence immédiate de ces résultats et de la proposition 4.3.3.

L'inclusion $\mathbf{LI} \vee (\bigcap_{i\in I} \mathbf{W}_i) \subseteq \bigcap_{i\in I}(\mathbf{LI} \vee \mathbf{W}_i)$ est immédiate. Maintenant, pour chaque $i \in I$, soit Σ_i une base (disons de $\mathbf{S}$-pseudo-identités) de $\mathbf{W}_i$. Alors la pseudo-variété $\bigcap_{i\in I} \mathbf{W}_i$ est définie par l'ensemble $\bigcup_{i\in I} \Sigma_i$. Comme $\bigcap_{i\in I} \mathbf{W}_i \subseteq \bigcap_{i\in I}(\mathbf{LI} \vee \mathbf{W}_i) \subseteq \mathbf{T}$ on déduit du théorème 4.3.1 que

$$\mathbf{LI} \vee (\bigcap_{i\in I} \mathbf{W}_i) = [\![a^\omega x b^\omega = a^\omega y b^\omega \mid x = y \in \bigcup_{i\in I} \Sigma_i]\!] \cap \mathbf{T}$$

Pour prouver l'inclusion droite à gauche il suffit, donc, de montrer que $\bigcap_{i\in I}(\mathbf{LI} \vee \mathbf{W}_i)$ satisfait chaque pseudo-identité $a^\omega x b^\omega = a^\omega y b^\omega$ avec $x = y \in \bigcup_{i\in I} \Sigma_i$. Or, si $x = y \in \bigcup_{i\in I} \Sigma_i$, alors $x = y \in \Sigma_i$ pour un $i \in I$. Par conséquent, la pseudo-variété $\mathbf{LI} \vee \mathbf{W}_i$ satisfait la pseudo-identité $a^\omega x b^\omega = a^\omega y b^\omega$, d'où $\bigcap_{i\in I}(\mathbf{LI} \vee \mathbf{W}_i)$ la vérifie aussi. $\square$

Chapitre 5

Sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}$

Ce chapitre est consacré à l'étude des opérations implicites sur quelques sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DS}$ (plus précisément, sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}$). Nous profitons de la propriété de factorisation des opérations implicites sur $\mathbf{DS}$ donnée par le théorème 3.6.11. Rappelons que ce résultat montre que toute opération implicite sur une sous-pseudo-variété $\mathbf{V}$ de $\mathbf{DS}$ est un produit fini d'opérations explicites et d'opérations implicites regulières sur $\mathbf{V}$. Jusqu'à présent on ne sait pas si la factorisation des opérations implicites sur $\mathbf{DS}$ donnée par le théorème 3.6.11 est canonique pour les éléments de $\mathbf{DS}$ ou non. Cependant, des factorisations du même type sont canoniques pour $\mathbf{J}$ (voir le théorème 3.6.16). D'autres exemples de pseudo-variétés pour lesquelles on connaît des factorisations canoniques sont $\mathbf{DH} \cap \mathbf{ECom}$, $\mathbf{DRH}$ (Almeida et Weil [14, 17]), où $\mathbf{H}$ est une pseudo-variété de groupes quelconque, et $\mathbf{J} \cap \mathbf{LJ}_1$ (Selmi [69]).

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressé à la structure des semigroupes d'opérations implicites sur les pseudo-variétés

- $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LDG} (= \mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$ et $\mathbf{R} \cap \mathbf{LDG} (= \mathbf{R} \cap \mathbf{LJ})$;
- $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ avec $\mathbf{V} \in \{\mathbf{DOH}, \mathbf{DRH}, \mathbf{DH}\}$ et $\mathbf{W} \in \{\mathbf{LECom}, \mathbf{LZE}, \mathbf{L}(\mathbf{ZE} \cap \mathbf{CR}), \mathbf{Com} * \mathbf{D}\}$;
- $\mathbf{DH} \cap \mathbf{W} \cap \mathbf{ECom}$ avec $\mathbf{W} \in \{\mathbf{LZE}, \mathbf{L}(\mathbf{ZE} \cap \mathbf{CR}), \mathbf{Com} * \mathbf{D}\}$.

Comme conséquence de notre travail nous sommes capables de donner des descriptions combinatoires des classes de langages reconnus par chacune de ces pseudo-variétés. Les techniques utilisées sont proches de celles développées par Almeida et Weil [14] dans l'étude des pseudo-variétés de la forme $\mathbf{DH} \cap \mathbf{ECom}$.

On remarque que $\mathbf{ZE} \cap \mathbf{CR} = \mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}$. Notons aussi que les cas non apériodiques $\mathbf{V} \cap \mathbf{LDG}$ avec $\mathbf{V} \in \{\mathbf{DOH}, \mathbf{DRH}, \mathbf{DH}\}$ (et $\mathbf{H}$ une pseudo-variété de groupes non triviale) ne sont pas inclus, car nous ne fûmes pas capables de les résoudre. Pour donner une idée des relations d'inclusion entre les pseudo-variétés considérées, nous noterons les inclusions suivantes :

– $\mathbf{LJ}_1 \subseteq \mathbf{Com} * \mathbf{D} \subseteq \mathbf{LCom} \subseteq \mathbf{LZE} \subseteq \mathbf{LDG}$;
– $\mathbf{LJ}_1 \subseteq \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}) \subseteq \mathbf{LZE}$;
– $\mathbf{LZE} \subseteq \mathbf{LECom}$, $\mathbf{LECom} \not\subseteq \mathbf{LDG}$ mais $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LECom} \subseteq \mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}$.

Un résultat crucial dans ce chapitre est la caractérisation des opérations implicites régulières sur les pseudo-variétés $\mathbf{V}$ dans l'intervalle $[\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{LI}, \mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}]$. Nous prouvons dans le corollaire 5.1.2 qu'elles sont caractérisées par leur restriction à $\mathbf{J}_1$, à $\mathbf{LI}$ et à $\mathbf{V} \cap \mathbf{G}$. Nous montrons aussi que $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}$ est la plus grande sous-pseudo-variété de $\mathbf{DO}$ possédant cette propriété. Notons que $\mathbf{V}$ est telle que $\mathbf{V} \cap \mathbf{B} = \mathbf{NB}$, où $\mathbf{NB} = [\![abca = acba]\!]_{\mathbf{B}}$ est la pseudo-variété des *bandes normales*. Trotter et Weil [85] ont prouvé que la plus grande sous-pseudo-variété $\mathbf{V}$ de $\mathbf{DA}$ telle que $\mathbf{V} \cap \mathbf{B} = \mathbf{NB}$ est $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ} (= \mathbf{DA} \cap \mathbf{LDG})$. En utilisant leurs résultats on peut montrer que $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}$ est la plus grande sous-pseudo-variété de $\mathbf{DO}$ dont l'intersection avec $\mathbf{B}$ est $\mathbf{NB}$. Le corollaire 5.1.2 est donc en relation avec le résultat de Trotter et Weil.

Les résultats antérieurs permettent aussi de calculer quelques suprema de pseudo-variétés. Par exemple, dans le cas $\mathbf{W} = \mathbf{Com} * \mathbf{D}$ on montre que, si $\mathbf{H}$ est une pseudo-variété de groupes abéliens, alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{DOH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}) &= (\mathbf{DA} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})) \vee \mathbf{H} \\
&= (\mathbf{DRH} \vee \mathbf{DLH}) \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}) \\
&\neq (\mathbf{DRH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})) \vee (\mathbf{DLH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})).
\end{aligned}$$

Sauf mention contraire, dans ce chapitre A désignera un alphabet fini.

5.1 Éléments réguliers de $\hat{F}_A(\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG})$

Dans cette section nous donnons une caractérisation des éléments réguliers des semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ d'opérations implicites sur les sous-pseudo-variétés $\mathbf{V}$ de $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}$, et nous en déduisons quelques propriétés importantes de ces éléments.

Rappelons tout d'abord que $\mathbf{LDG} = [\![(eaebe)^\omega = (ebeae)^\omega]\!]$. Montrons maintenant le résultat suivant.

Proposition 5.1.1 *Soit $\mathbf{V}$ une sous-pseudo-variété de $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}$ qui contient $\mathbf{J}_1$ et $\mathbf{K}$ (resp. $\mathbf{D}$). Deux éléments réguliers x et y de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ sont $\mathcal{R}$-(resp. $\mathcal{L}$-)équivalents si et seulement si ils ont même contenu et même restriction à $\mathbf{K}$ (resp. $\mathbf{D}$).*

Preuve. Supposons d'abord que $x \mathrel{\mathcal{R}} y$. En particulier, $x \mathrel{\mathcal{J}} y$ et donc, d'après la proposition 3.6.5, $c(x) = c(y)$. De plus, il existe $z \in \hat{F}_A(\mathbf{V})^1$ tel que $x = yz$. Comme y (et x) n'est pas explicite (disons puisque y est régulier et $\mathbf{V}$ contient $\mathbf{K}$), cela implique que les restrictions de x et y à $\mathbf{K}$ sont égales.

Supposons maintenant que $c(x) = c(y)$ et que $\mathbf{K}$ satisfait $x = y$. En particulier, d'après le lemme 4.1.2 et la proposition 4.1.3, il existe $r, r_1, r_2, r_3, u, v \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$, tels que

$$x = ru, \qquad y = rv \qquad \text{et} \qquad r = r_1 r_2^\omega r_3.$$

De plus, le corollaire 3.6.6 montre que x, y, xy et yx sont des éléments réguliers $\mathcal{J}$-équivalents, et que $xy \mathrel{\mathcal{R}} x$. En particulier, xy est un élément de groupe puisque $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{DS}$ et donc $xy = (xy)^{\omega+1}$. On peut donc déduire successivement

$$\begin{array}{rcll} xy & = & (xy)^{\omega+1} & \\ & = & (r_1 r_2^\omega r_3 u r_1 r_2^\omega r_3 v)^{\omega+1} & \\ & = & r_1 (r_2^\omega r_3 u r_1 r_2^\omega r_3 v r_1 r_2^\omega)^\omega r_3 u r_1 r_2^\omega r_3 v & \\ & = & r_1 (r_2^\omega r_3 v r_1 r_2^\omega r_3 u r_1 r_2^\omega)^\omega r_3 u r_1 r_2^\omega r_3 v & \text{car } \mathbf{V} \subseteq \mathbf{LDG} \\ & = & (r_1 r_2^\omega r_3 v r_1 r_2^\omega r_3 u)^\omega r_1 r_2^\omega r_3 u r_1 r_2^\omega r_3 v & \\ & = & (yx)^\omega xy. & \end{array}$$

Cela montre que $xy \mathrel{\mathcal{R}} y$ et, par conséquent, que $x \mathrel{\mathcal{R}} y$. □

Corollaire 5.1.2 *Soit* $\mathbf{V}$ *une sous-pseudo-variété de* $\mathbf{LDG}$ *et de* $\mathbf{DO}$ *(resp.* $\mathbf{DRG}$*,* $\mathbf{DLG}$*) qui contient* $\mathbf{J}_1$ *et* $\mathbf{LI}$ *(resp.* $\mathbf{K}$*,* $\mathbf{D}$*). Deux éléments réguliers* x *et* y *de* $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ *sont égaux si et seulement si ils ont même contenu et même restriction à* $\mathbf{LI}$ *(resp.* $\mathbf{K}$*,* $\mathbf{D}$*) et à* $\mathbf{V} \cap \mathbf{G}$*.*

De plus, $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}$ *(resp.* $\mathbf{DRG} \cap \mathbf{LDG}$*,* $\mathbf{DLG} \cap \mathbf{LDG}$*) est la plus grande sous-pseudo-variété de* $\mathbf{DO}$ *(resp.* $\mathbf{DRG}$*,* $\mathbf{DLG}$*) possédant cette propriété.*

Preuve. On a besoin de prouver seulement la condition suffisante. Comme $c(x) = c(y)$ et $\mathbf{LI}$ satisfait $x = y$ (et donc aussi $\mathbf{K}$ et $\mathbf{D}$ satisfont $x = y$), nous avons $x \mathrel{\mathcal{H}} y$ d'après la proposition 5.1.1. Alors, comme la $\mathcal{H}$-classe de x est un groupe (disons puisque x est régulier et $\mathbf{V}$ est une sous-pseudo-variété de $\mathbf{DS}$) on déduit que $x^\omega = y^\omega$. Maintenant, l'égalité $x = y$ est une conséquence immédiate du théorème 3.6.14.

Maintenant, supposons que $\mathbf{W}$ est une sous-pseudo-variété de $\mathbf{DO}$ qui n'est pas contenue dans $\mathbf{LDG}$. Alors, il y a deux idempotents distincts de $\hat{F}_A(\mathbf{W})$ de la forme $x^\omega y x^\omega$ et $x^\omega z x^\omega$, respectivement, contenus dans la même $\mathcal{J}$-classe. Ces éléments ont clairement même restriction à $\mathbf{LI}$ et à $\mathbf{W} \cap \mathbf{G}$. En outre, comme ils sont $\mathcal{J}$-équivalents, ils ont même contenu par la proposition 3.6.5. □

Fixons une pseudo-variété $\mathbf{V}$ dans l'intervalle $[\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{LI}, \mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}]$ (resp. $[\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{K}, \mathbf{DRG} \cap \mathbf{LDG}]$, $[\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{D}, \mathbf{DLG} \cap \mathbf{LDG}]$) et soit x un élément régulier de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$. Le résultat précédent montre que x est caractérisé par son contenu, disons $B \subseteq A$, et par ses restrictions à $\mathbf{LI}$ (resp. $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$) et à $\mathbf{V} \cap \mathbf{G}$, disons $(w, w') \in B^{\mathbb{N}} \times B^{-\mathbb{N}}$ et $g \in \hat{F}_A(\mathbf{V} \cap \mathbf{G})$, respectivement. Par conséquent, x sera noté

$$[w, B, g, w'] \text{ (resp. } [w, B, g],\ [B, g, w']).$$

En particulier, lorsque x est idempotent il sera noté

$$[w, B, 1, w'] \text{ (resp. } [w, B, 1],\ [B, 1, w']).$$

De plus, si $\mathbf{V}$ est une pseudo-variété apériodique (i.e., telle que $\mathbf{V} \cap \mathbf{G} = \mathbf{I}$), alors $\mathbf{V}$ est une sous-pseudo-variété de $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LDG}$. En particulier, tout élément régulier de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$

est idempotent, et il est caractérisé par ses restrictions à $\mathbf{J}_1$ et à $\mathbf{LI}$ (resp. $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$). Dans ce cas on simplifie souvent la notation de x en écrivant simplement

$$(w, B, w') \ (resp.\ (w, B),\ (B, w')).$$

Nous utiliserons donc la notation (_) pour les éléments idempotents des pseudo-variétés apériodiques et [_] pour les éléments réguliers des pseudo-variétés non apériodiques.

Notons que de l'article de Trotter et Weil [85] on peut déduire que $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}$ (resp. $\mathbf{DRG} \cap \mathbf{LDG}$, $\mathbf{DLG} \cap \mathbf{LDG}$) est la plus grande sous-pseudo-variété de $\mathbf{DO}$ (resp. $\mathbf{DRG}$, $\mathbf{DLG}$) dont l'intersection avec $\mathbf{B}$ est $\mathbf{NB}$ (resp. $\mathbf{LNB} = [\![abc = acb]\!]_{\mathbf{B}}$, $\mathbf{RNB} = [\![abc = bac]\!]_{\mathbf{B}}$).

Soit u un mot infini (à gauche ou à droite) sur A. On notera $c(u)$ l'ensemble des lettres de A qui apparaissent dans u. Les éléments réguliers de $\hat{F}_A(\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG})$ jouissent de propriétés importantes que nous prouvons tout de suite.

Proposition 5.1.3 *Soit A un alphabet, soient $B, C, D \subseteq A$ tels que $B \cap C \neq \emptyset$ et $D \subseteq B$ et soit $b \in B$. Alors, dans $\hat{F}_A(\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG})$,*

(1) $[w, B, g, w']b = [w, B, gb, w'b]$, $b[w, B, g, w'] = [bw, B, bg, w']$, $[w, B, g, w'][v, D, f, v'] = [w, B, gf, v']$ *et* $[v, D, f, v'][w, B, g, w'] = [v, B, fg, w']$ *;*

(2) *si un de $c(w')$ et $c(z)$ est contenu dans $B \cap C$, alors*

$$[w, B, g, w'][z, C, h, z'] = [w, B, g, w''][z'', C, h, z']$$

pour tout $w'' \in B^{-\mathbb{N}}$ et $z'' \in C^{\mathbb{N}}$ tels que au moins un de $c(w'')$ et $c(z'')$ soit contenu dans $B \cap C$.

En particulier, $\hat{F}_A(\mathbf{DRG} \cap \mathbf{LDG})$ satisfait

(1′) $[w, B, g]b = [w, B, gb]$, $b[w, B, g] = [bw, B, bg]$, $[w, B, g][v, D, f] = [w, B, gf]$ *et* $[v, D, f][w, B, g] = [v, B, fg]$ *;*

(2′) $[w, B, g][z, C, h] = [w, B, g][z'', C, h]$ *pour tout* $z, z'' \in C^{\mathbb{N}}$.

Preuve. (1) Est une conséquence immédiate des corollaires 3.6.6 et 5.1.2.

(2) Supposons, par exemple, que $c(w') \subseteq B \cap C$ et soit $w'' \in B^{-\mathbb{N}}$ et $z'' \in C^{\mathbb{N}}$ tels que $c(w'') \subseteq B \cap C$ ou $c(z'') \subseteq B \cap C$. Si $c(z'') \subseteq B \cap C$, nous déduisons de (1) que $[w, B, g, w'] = [w, B, g, w'][w, B, 1, w''][z'', B \cap C, 1, w']$. Donc,

$$\begin{aligned} [w, B, g, w'][z, C, h, z'] &= ([w, B, g, w'][w, B, 1, w''])([z'', B \cap C, 1, w'][z, C, h, z']) \\ &= [w, B, g, w''][z'', C, h, z'] \qquad \text{d'après (1).} \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $c(z'') \not\subseteq B \cap C$ et soit $a \in B \cap C$. Alors, $c(w'') \subseteq B \cap C$ et en utilisant ce qu'on vient de prouver, on déduit

$$\begin{aligned} [w, B, g, w'][z, C, h, z'] &= [w, B, g, w'][a^{+\infty}, C, h, z'] \\ &= [w, B, g, w'][a^{+\infty}, B \cap C, 1, w''][z'', C, h, z'] \qquad \text{d'après (1)} \\ &= [w, B, g, w''][z'', C, h, z']. \end{aligned}$$

Pour la preuve de $(1')$ et $(2')$ il suffit de considérer la projection canonique de $\hat{F}_A(\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG})$ sur $\hat{F}_A(\mathbf{DRG} \cap \mathbf{LDG})$, et noter que la restriction à $\mathbf{DRG} \cap \mathbf{LDG}$ d'un élément régulier $[w, B, g, w']$ de $\hat{F}_A(\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG})$ est l'élément régulier $[w, B, g]$.$\square$

Notons que, si $\mathbf{V}$ est une sous-pseudo-variété de $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}$ qui contient $\mathbf{J}_1$ et $\mathbf{LI}$, la restriction à $\mathbf{V}$ d'un élément régulier $[w, B, g, w']$ de $\hat{F}_A(\mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG})$ est aussi notée $[w, B, g, w']$. Par conséquent, les propriétés du résultat précédent sont aussi valides dans $\hat{F}_A(\mathbf{V})$.

5.2 Opérations implicites sur $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}$

Nous commençons l'étude proposée pour ce chapitre avec la description des semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$ et $\hat{F}_A(\mathbf{R} \cap \mathbf{LJ})$. Nous prouvons que tout élément de chacun de ces semigroupes admet une écriture unique comme produit de mots et d'idempotents. Notons d'abord que, puisque $\mathbf{J} = \mathbf{DG} \cap \mathbf{A}$, nous avons immédiatement $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LDG} = \mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}$ et $\mathbf{R} \cap \mathbf{LDG} = \mathbf{R} \cap \mathbf{LJ}$. Notons aussi que $\mathbf{J}$ est une sous-pseudo-variété de $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}$ et de $\mathbf{R} \cap \mathbf{LJ}$.

Considérons d'abord le cas $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}$. Fixons un ordre pour les lettres de l'alphabet A. Nous disons qu'une factorisation, d'un élément $x \in \hat{F}_A(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$, de la forme

$$x = u_0(w_1, A_1, w_1')u_1 \cdots u_{n-1}(w_n, A_n, w_n')u_n$$

est *normale* si

- $u_i \in A^*$, $u_0 \neq 1$ si $x = u_0$;
- pour tout $1 \leq i \leq n$ tel que u_i (resp. u_{i-1}) n'est pas le mot vide, la première (resp. dernière) lettre de u_i (resp. u_{i-1}) n'appartient pas à A_i.
- si u_i $(1 \leq i \leq n-1)$ est le mot vide, alors
  - A_i et A_{i+1} sont $\subseteq$-incomparables ;
  - la première lettre de w_{i+1} n'appartient pas à A_i ;
  - si $c(w_i') \subseteq A_{i+1}$, alors $w_i' = u^{-\infty}$ et $w_{i+1} = v^{+\infty}$ où u et v sont les plus petits mots linéaires en ordre lexicographique de contenu, respectivement, $A_i \cap A_{i+1}$ et A_{i+1} tels que la première lettre de v n'appartient pas à A_i.

Proposition 5.2.1 *Tout élément de $\hat{F}_A(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$ admet une factorisation normale.*

Preuve. Soit $x \in \hat{F}_A(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$. Comme conséquence de la proposition 3.6.11, x admet une factorisation de la forme

$$x = u_0(w_1, A_1, w_1')u_1 \cdots u_{n-1}(w_n, A_n, w_n')u_n$$

comme produit de mots $u_i \in A^*$ et d'idempotents (w_i, A_i, w_i') tels que, pour tout $1 \leq i \leq n$ tel que u_i (resp. u_{i-1}) n'est pas le mot vide, la première (resp. dernière) lettre de u_i (resp. u_{i-1}) n'appartient pas à A_i et, si u_i $(1 \leq i \leq n-1)$ est le mot vide, alors A_i et A_{i+1} sont $\subseteq$-incomparables.

Supposons maintenant que $1 \leq i \leq n-1$ est tel que $u_i = 1$. Alors, soit $c(w_i')$ ou $c(w_{i+1})$ est contenu dans $A_i \cap A_{i+1}$, soit ni $c(w_i')$ ni $c(w_{i+1})$ n'est contenu dans $A_i \cap A_{i+1}$. Dans le premier cas, si on prend u et v les plus petits mots linéaires en ordre lexicographique de contenu, respectivement, $A_i \cap A_{i+1}$ et A_{i+1} tels que la première lettre de v n'appartient pas à A_i, alors on déduit de la proposition 5.1.3 (2) que le facteur

$$(w_i, A_i, w_i')(w_{i+1}, A_{i+1}, w_{i+1}')$$

est égal à

$$(w_i, A_i, u^{-\infty})(v^{+\infty}, A_{i+1}, w_{i+1}').$$

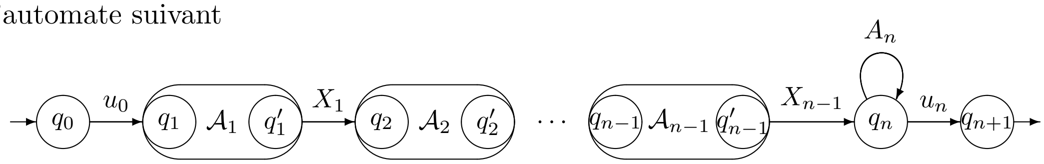
Dans le deuxième cas, $w_{i+1} = zz'$ pour des mots $z \in A_{i+1}^*$ et $z' \in A_{i+1}^{\mathbb{N}}$ tels que $c(z) \subseteq A_i$ (si $z \neq 1$) et la première lettre de z' n'est pas dans A_i. De plus,

$$(w_i, A_i, w_i')(w_{i+1}, A_{i+1}, w_{i+1}') = (w_i, A_i, w_i'z)(z', A_{i+1}, w_{i+1}')$$

d'après la proposition 5.1.3 (1). Par conséquent, pour tout $1 \leq i \leq n-1$ tel que $u_i = 1$, si on remplace dans la factorisation de x le facteur $(w_i, A_i, w_i')(w_{i+1}, A_{i+1}, w_{i+1}')$ par $(w_i, A_i, u^{-\infty})(v^{+\infty}, A_{i+1}, w_{i+1}')$ dans le premier cas et par $(w_i, A_i, w_i'z)(z', A_{i+1}, w_{i+1}')$ dans le deuxième, on obtient une factorisation normale de x. $\square$

Nous décrivons maintenant des automates que nous utiliserons pour construire des semigroupes (les semigroupes syntaxiques des langages reconnus par ces automates) pour séparer des factorisations distinctes d'éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$.

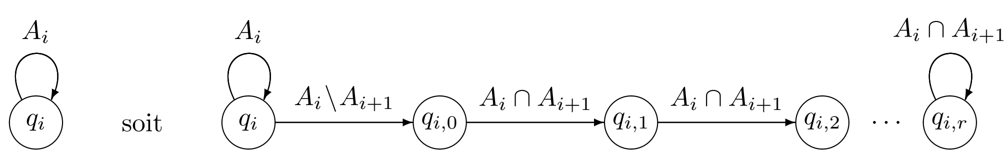
Pour $r, n \in \mathbb{N}_0$, soient $u_0, \ldots, u_n \in A^*$ et $\emptyset \neq A_1, \ldots, A_n \subseteq A$ tels que, pour tout $1 \leq i \leq n-1$: si $u_i \neq 1$ alors $c(u_i)$ n'est pas contenu ni dans A_i ni dans A_{i+1} ; si $u_i = 1$ alors A_i et A_{i+1} sont $\subseteq$-incomparables. Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}(r; u_0, A_1, u_1, \ldots, A_n, u_n)$ l'automate suivant



où, pour tout $1 \leq i \leq n-1$,

$$X_i = \begin{cases} u_i & \text{si } u_i \neq 1 \\ A_{i+1} \setminus A_i & \text{si } u_i = 1 \end{cases}$$

et l'automate $\mathcal{A}_i$ est soit



lorsque, respectivement, $u_i \neq 1$ ou $u_i = 1$. L'état q_i' est égal à q_i dans le premier cas et à $q_{i,r}$ dans le second. Observons que $\mathcal{A}_i$ est un automate sur l'alphabet A_i et notons Q_i l'ensemble des états de l'automate $\mathcal{A}_i$.

Lemme 5.2.2 *Soit L le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}$ ci-dessus. Alors, $S(L)$ appartient à* $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}$*. De plus, si $w \in A^+, k > |u_0 \cdots u_n| + 3n - 2 + lr$ (où l est le nombre d'indices $1 \leq i \leq n-1$ tels que $u_i = 1$) et w^k est l'étiquette d'un chemin $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{A}$, alors il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $w \in A_i^+$ et $\mathcal{T}$ visite l'état q_i (ou l'état $q_{i,r}$ s'il existe) et ne visite ni l'état q_{i-1} ($i > 1$) ni l'état q_{i+1} ($i < n$).*

En particulier, si $r = 0$ et la première lettre de u_j ($1 \leq j \leq n$) n'appartient pas à A_j, alors $S(L) \in \mathbf{R}$. Dans ce cas, si w, k et $\mathcal{T}$ sont comme ci-dessus, alors $\mathcal{T}$ termine dans l'état q_i (ou dans l'état $q_{i,0}$), avec i comme ci-dessus.

Preuve. Le choix de k permet de déduire immédiatement que le chemin $\mathcal{T}$ visite un état p avec une boucle et reste dans p au moins dans $|w|$ pas. Si $p = q_{i,r}$ pour un certain $1 \leq i \leq n-1$, alors $w \in (A_i \cap A_{i+1})^+$ et donc, en particulier, $w \in A_i^+$. Sinon, $p = q_i$ ($1 \leq i \leq n$) et donc $w \in A_i^+$. Dans les deux cas $\mathcal{T}$ ne visite ni l'état q_{i-1} ($i > 1$) ni l'état q_{i+1} ($i < n$) puisque sinon $\mathcal{T}$ contiendrait une transition étiquetée avec un mot n'appartenant pas à A_i^+.

On prouve maintenant que $S(L)$ est dans $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}$. Pour cela, il suffit de prouver que, pour tous $x, y, z \in A^+$, et pour tout m assez grand $(xy)^m(yx)^m(xy)^m \sim_L (xy)^m$, $x^{m+1} \sim_L x^m$ et $(x^m y x^m z x^m)^m \sim_L (x^m z x^m y x^m)^m$. Sans perte de généralité, on peut supposer que m est un exposant de $S(L)$ (c'est-à-dire que $w^m \sim_L w^m w^m$ pour tout $w \in A^+$ et donc l'image syntaxique de w^m est un idempotent de $S(L)$).

Soient $x, y, z \in A^+$. Pour prouver que $(xy)^m(yx)^m(xy)^m \sim_L (xy)^m$ il suffit de montrer la condition suivante :

> $(xy)^m(yx)^m(xy)^m$ est l'étiquette d'un chemin, disons $\mathcal{P}$, dans $\mathcal{A}$ si et seulement si il existe un autre chemin, disons $\mathcal{Q}$, dans $\mathcal{A}$ étiqueté $(xy)^m$ et coterminal avec $\mathcal{P}$.

Donc, supposons d'abord que $\mathcal{P}$ existe. Alors, comme nous l'avons déjà prouvé, il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $xy \in A_i^+$ et $\mathcal{P}$ visite l'état q_i ou l'état $q_{i,r}$ (s'il existe) et ne visite ni l'état q_{i-1} (si $i > 1$) ni l'état q_{i+1} (si $i < n$). Supposons que $q_{i,r}$ existe (i.e., que $1 \leq i < n$ et $u_i = 1$) et que $\mathcal{P}$ visite les états de la forme $q_{i,j}$ ($0 \leq j \leq r$) pour au moins $|xy|$ pas. Alors $xy \in (A_i \cap A_{i+1})^+$ et donc $\mathcal{P}$ est entièrement entre les états $q_{i,0}$ et $q_{i,r}$. Par conséquent, le sous-chemin de $\mathcal{P}$ étiqueté $(yx)^m(xy)^m$ est entièrement dans $q_{i,r}$ et donc l'existence de $\mathcal{Q}$ est claire. Supposons maintenant que $\mathcal{P}$ visite les états de la forme $q_{i,j}$ ($0 \leq j \leq r$) au plus dans $|xy| - 1$ pas, ce qui implique que $\mathcal{P}$ visite l'état q_i. Ainsi, comme $\mathcal{P}$ ne visite pas l'état q_{i-1} (quand $i > 1$) et, comme ci-dessus, il ne peut pas visiter les états de la forme $q_{i-1,j}$ ($0 \leq j \leq r$), s'ils existent, dans plus de $|xy| - 1$ pas, nous déduisons que au plus $\max\{|xy|, |u_{i-1}|\} - 1$ des pas de $\mathcal{P}$ se passent strictement entre les états q_{i-1} et q_i. Par conséquent, le sous-chemin de $\mathcal{P}$ étiqueté $(yx)^m$ est entièrement dans q_i. L'existence de $\mathcal{Q}$ est donc aussi claire dans ce cas. (Plus précisément, ce qui est clair est l'existence d'un chemin étiqueté $(xy)^m(xy)^m$ coterminal avec $\mathcal{P}$. Mais, puisque nous considérons m tel que $(xy)^m \sim_L (xy)^m(xy)^m$, l'existence de $\mathcal{Q}$ est assurée.) Le cas où l'état de la forme $q_{i,r}$ n'existe pas peut être traité de forme analogue. De façon similaire on peut aussi prouver que l'existence de $\mathcal{Q}$ implique l'existence de $\mathcal{P}$, ce qui prouve que $(xy)^m(yx)^m(xy)^m \sim_L (xy)^m$. Que $x^{m+1} \sim_L x^m$ peut être prouvé de façon analogue.

Supposons maintenant que $\mathcal{P}$ est un chemin dans $\mathcal{A}$ étiqueté $(x^m yx^m zx^m)^m$, et donc qu'il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $c(x) \cup c(y) \cup c(z) \subseteq A_i$. Alors, soit $i < n$, $u_i = 1$ et $\mathcal{P}$ occurre entièrement entre les états $q_{i,0}$ et $q_{i,r}$, et l'existence d'un chemin $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{A}$ coterminal avec $\mathcal{P}$ et étiqueté $(x^m zx^m yx^m)^m$ est immédiate. Soit, au moins $|x^m yx^m zx^m|$ des pas de $\mathcal{P}$ se passent dans l'état q_i et au plus $|yx^m zx^m| (= |x^m yx^m z|)$ des pas de $\mathcal{P}$ se passent strictement entre les états q_i et q_{i+1} (resp. entre les états q_{i-1} et q_i). Dans ce cas, soient $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ les sous-chemins de $\mathcal{P}$ étiquetés, respectivement, $x^m yx^m z$, $x^m(x^m yx^m zx^m)^{m-2}x^m$ et $yx^m zx^m$. Alors, $\mathcal{P}_2$ est entièrement dans q_i et donc $\mathcal{P}_1$ termine dans q_i et $\mathcal{P}_3$ commence dans q_i. De plus, le sous-chemin de $\mathcal{P}_1$ étiqueté $yx^m z$ commence dans q_i ou dans $q_{i-1,r}$ (s'il existe). Dans les deux cas il est clair qu'il existe un chemin $\mathcal{P}_1'$ coterminal avec $\mathcal{P}_1$ et étiqueté $x^m zx^m y$. De façon analogue, il existe un chemin $\mathcal{P}_3'$ coterminal avec $\mathcal{P}_3$ et étiqueté $zx^m yx^m$. Comme, trivialement, il existe un chemin étiqueté $x^m(x^m zx^m yx^m)^{m-2}x^m$ entièrement dans q_i nous déduisons l'existence du chemin $\mathcal{Q}$ (coterminal avec $\mathcal{P}$ et étiqueté $(x^m zx^m yx^m)^m$). Par symétrie, on déduit que $(x^m yx^m zx^m)^m \sim_L (x^m zx^m yx^m)^m$.

Finalement, on suppose que $r = 0$ et que la première lettre de u_j $(1 \leq j \leq n)$ n'appartient pas à A_j. Comme avant, ces conditions impliquent clairement l'existence d'un $1 \leq i \leq n$ tel que $w \in A_i^+$ et $\mathcal{T}$ termine dans l'état q_i ou dans l'état $q_{i,0}$ (dans ce cas $i < n$). Pour prouver que $S(L) \in \mathbf{R}$ montrons que $(xy)^m x \sim_L (xy)^m$ pour tout $x, y \in A^+$. Pour cela, soit $\mathcal{P}$ un chemin dans $\mathcal{A}$ étiqueté $(xy)^m x$. Ce chemin termine dans un état q_i ou dans un état $q_{i,0}$. Dans le premier cas, l'affirmation qu'il existe un chemin $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{A}$ étiqueté $(xy)^m$ et coterminal avec $\mathcal{P}$ est immédiate. Dans le deuxième cas, soit $xy \in (A_i \cap A_{i+1})^+$ et donc $\mathcal{P}$ est entièrement dans $q_{i,0}$ (et l'existence du chemin $\mathcal{Q}$ est triviale), soit il existe une lettre de xy dans $A_i \setminus A_{i+1}$ et $\mathcal{P}$ reste dans $q_{i,0}$ pour au plus $|yx| - 1$ pas. Dans ce cas l'existence du chemin $\mathcal{Q}$ est aussi assurée (ce chemin peut passer de l'état q_i pour l'état $q_{i,0}$ en utilisant, par exemple, la dernière occurrence pas dans A_{i+1} d'une lettre du mot $(xy)^m$). La preuve de la réciproque est similaire et donc on conclut que $(xy)^m x \sim_L (xy)^m$, ce qui prouve que $S(L) \in \mathbf{R}$. □

Maintenant nous sommes en mesure de prouver la caractérisation suivante des semi-groupes d'opérations implicites sur $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}$.

Théorème 5.2.3 *Soient $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$ et soient $x = u_0(w_1, A_1, w_1')u_1 \cdots u_{n-1}(w_n, A_n, w_n')u_n$ et $y = v_0(z_1, B_1, z_1')v_1 \cdots v_{m-1}(z_m, B_m, z_m')v_m$ des factorisations en forme normale. Alors, $x = y$ si et seulement si $n = m$, $u_i = v_i$, $w_i = z_i$, $A_i = B_i$ et $w_i' = z_i'$ pour tout i.*

Preuve. Soit $r \in \mathbb{N}$ un entier tel que $r > |v_i|$ pour tout $1 \leq i \leq n$, et $c(s_r(w_i')) \nsubseteq A_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$ tel que $u_i = 1$ et $c(w_i') \nsubseteq A_{i+1}$. Considérons l'automate $\mathcal{A} = \mathcal{A}(r; u_0 p_r(w_1), A_1, u_1', \ldots, u_{n-1}', A_n, s_r(w_n')u_n)$ où, pour tout $1 \leq i \leq n-1$, u_i' est égal à : $s_r(w_i')u_i p_r(w_{i+1})$ si $u_i \neq 1$, ou $u_i = 1$ et $c(w_i') \nsubseteq A_{i+1}$; 1 si $u_i = 1$ et $c(w_i') \subseteq A_{i+1}$. Notons que, par définition de factorisation normale de x, pour tout $1 \leq i \leq n-1$, si $u_i' = 1$ alors A_i et A_{i+1} ne sont pas $\subseteq$-comparables, et si $u_i' \neq 1$ alors $c(u_i') \nsubseteq A_i, A_{i+1}$.

Soit L le langage reconnu par $\mathcal{A}$ et soit $\mu : A^+ \to S$ le morphisme syntaxique de

L. D'après le lemme 5.2.2, $S \in \mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}$. Soit donc $\hat{\mu} : \hat{F}_A(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}) \to S$ l'unique extension homomorphe continue de μ, et soit $k > |u_0 \cdots u_n| + 3n - 2 + lr$ (où l est le nombre d'indices $1 \leq i \leq n-1$ tels que $u'_i = 1$) un entier tel que pour tout $w \in A^+$ l'image syntaxique de w^k est un idempotent de S.

Pour tout $1 \leq i \leq n$, soient $\bar{w}_i \in A_i^{\mathbb{N}}$ et $\bar{w}'_i \in A_i^{-\mathbb{N}}$ définis par $\bar{w}_i = p_r(w_i)^{-1} w_i$ et $\bar{w}'_i = w'_i s_r(w'_i)^{-1}$ de façon que

$$(w_i, A_i, w'_i) = p_r(w_i)(\bar{w}_i, A_i, \bar{w}'_i) s_r(w'_i).$$

Comme $(\bar{w}_i, A_i, \bar{w}'_i)$ est idempotent, son image dans S, $\hat{\mu}(\bar{w}_i, A_i, \bar{w}'_i)$ est aussi idempotente. Par densité de A^+ dans $\hat{F}_A(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$, il existe un mot x_i tel que $c(x_i) = A_i$ et $\hat{\mu}(\bar{w}_i, A_i, \bar{w}'_i) = \mu(x_i^k)$. Maintenant, il n'est pas difficile de vérifier que

$$w = u_0 p_r(w_1) x_1^k s_r(w'_1) u_1 p_r(w_2) x_2^k \cdots s_r(w'_{n-1}) u_{n-1} p_r(w_n) x_n^k s_r(w'_n) u_n$$

est un mot reconnu par $\mathcal{A}$, d'où $w \in L$. En outre, on a $\hat{\mu}(x) = \mu(w)$.

Considérons maintenant des $\bar{z}_i \in B_i^{\mathbb{N}}$ $(1 \leq i \leq m)$ et $\bar{z}'_i \in B_i^{-\mathbb{N}}$ tels que $\bar{z}_i = p_r(z_i)^{-1} z_i$ et $\bar{z}'_i = z'_i s_r(z'_i)^{-1}$ de façon que

$$(z_i, B_i, z'_i) = p_r(z_i)(\bar{z}_i, B_i, \bar{z}'_i) s_r(z'_i).$$

On considére aussi des mots y_i tels que $c(y_i) = B_i$ et $\hat{\mu}(\bar{z}_i, B_i, \bar{z}'_i) = \mu({y_i}^k)$. Soit

$$w' = v_0 p_r(z_1) y_1^k s_r(z'_1) v_1 p_r(z_2) y_2^k \cdots y_m^k s_r(z'_m) v_m.$$

Nous avons $\hat{\mu}(y) = \mu(w')$ et, puisque $x = y$, $\hat{\mu}(x) = \hat{\mu}(y)$. Par conséquent, $\mu(w) = \mu(w')$ d'où $w' \in L$ et donc w' est reconnu par $\mathcal{A}$.

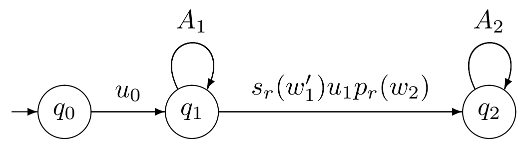
Soit $\mathcal{P}$ un chemin *réussi* dans $\mathcal{A}$ (i.e., un chemin de q_0 pour q_{n+1}) étiqueté w'. Pour tout $1 \leq i \leq m$, soit $\mathcal{P}_i$ le sous-chemin de $\mathcal{P}$ étiqueté $v_0 p_r(z_1) y_1^k s_r(z'_1) v_1 p_r(z_2) y_2^k \cdots y_i^k$. D'après le lemme 5.2.2 on déduit que le chemin $\mathcal{P}_i$ visite l'état q_{j_i} — pour un certain $1 \leq j_i \leq n$ tel que $B_i \subseteq A_{j_i}$ — et ne visite pas l'état q_{j_i+1} (si $j_i < n$). De plus, le sous-chemin $\mathcal{P}'_i$ de $\mathcal{P}_i$ étiqueté $p_r(z_i) y_i^k$ ne visite pas l'état q_{j_i-1} (si $j_i > 1$).

En particulier, le chemin $\mathcal{P}_1$ visite l'état q_1 et donc le mot $u_0 p_r(w_1)$ est un préfixe de $v_0 p_r(z_1) y_1^k$. Maintenant, comme $r > |v_0|$, aussi le chemin $\mathcal{P}'_1$ visite l'état q_1. Par conséquent, $j_1 = 1$ et $B_1 \subseteq A_1$. Par symétrie on déduit que $A_1 = B_1$. En outre, comme la dernière lettre de u_0 (s'elle existe) n'appartient pas à $A_1 = B_1$, on déduit que u_0 est un préfixe de v_0. Encore par symétrie on a $u_0 = v_0$ et par conséquent $p_r(w_1) = p_r(z_1)$. Comme cela est vrai pour tout r suffisamment grand, on conclut que $w_1 = z_1$.

Maintenant, comme la première lettre du mot $v_1 p_r(z_2)$ n'est pas dans $B_1 = A_1$ (notons que, comme la factorisation de y est normale, si $v_1 = 1$ alors la première lettre de z_2 n'appartient pas à B_1) on a $j_2 > 1$. On va traiter les deux cas possibles pour u'_1.

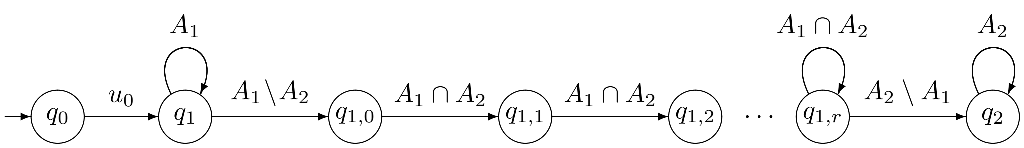
Premier cas Supposons d'abord que $u'_1 \neq 1$, i.e., que $u_1 \neq 1$, ou $u_1 = 1$ et $c(w'_1) \nsubseteq A_2$.

Alors, l'automate $\mathcal{A}$ commence comme suit



Par conséquent, le mot $s_r(w_1')u_1p_r(w_2)$ est un facteur de $y_1^k s_r(z_1')v_1p_r(z_2)y_2^k$. Comme les premières lettres de $u_1p_r(w_2)$ et $v_1p_r(z_2)$, respectivement, ne sont pas dans $A_1 = B_1$, on déduit que $s_r(w_1') = s_r(z_1')$ et que $u_1p_r(w_2)$ est un préfixe de $v_1p_r(z_2)y_2^k$. Maintenant, comme ci-dessus, cela entraîne $w_1' = z_1'$, $j_2 = 2$ et $B_2 \subseteq A_2$. En outre, comme la dernière lettre de u_1 n'appartient pas à A_2, et donc n'appartient non plus à B_2, on déduit que u_1 est un préfixe de v_1. Si $v_1 \neq 1$ on peut appliquer la symétrie pour déduire que $u_1 = v_1$. Si $v_1 = 1$ on a trivialement $u_1 = v_1$. Maintenant, cette égalité entraîne que $p_r(w_2)$ est un préfixe de $p_r(z_2)y_2^k$, d'où $p_r(w_2) = p_r(z_2)$. Par conséquent, comme avant, $w_2 = z_2$. Notons que, dans ce cas, il reste encore à prouver l'inclusion $A_2 \subseteq B_2$.

Deuxième cas Supposons maintenant que $u_1' = 1$, i.e., que $u_1 = 1$ et $c(w_1') \subseteq A_2$. En particulier $w_1' = u^{-\infty}$ et $w_2 = v^{+\infty}$ où u et v sont les mots linéaires les plus petits en ordre lexicographique de contenu, respectivement, $A_1 \cap A_2$ et A_2 tels que la première lettre de v n'appartient pas à A_1. On peut aussi supposer que $v_1 = 1$ puisque si cela n'était pas le cas on pourrait appliquer un argument comme ci-dessus pour déduire que v_1 serait un préfixe de u_1 et donc que u_1 n'était pas égal au mot vide. Dans ce cas, le début de l'automate $\mathcal{A}$ est le suivant



Par conséquent, dans le chemin $\mathcal{P}_2$, la première lettre de $p_r(z_2)$ est lue dans la transition de l'état $q_{1,r}$ pour l'état q_2, et $s_r(z_1')$ est lu dans les transitions entre l'état $q_{1,0}$ et l'état $q_{1,r}$. Cela signifie, en particulier, que $j_2 = 2$ d'où $B_2 \subseteq A_2$. Donc, dans les deux cas ($u_1' = 1$ et $u_1' \neq 1$) on a $B_2 \subseteq A_2$. Par symétrie on déduit que $A_2 = B_2$. Dans le cas $u_1' = 1$ que nous avons en considération, on déduit aussi que $c(s_r(z_1')) \subseteq A_1 \cap A_2$. Comme r est arbitrairement grand, cela entraîne $c(z_1') \subseteq A_2$. Donc, comme nous travaillons avec des factorisations normales et $v_1 = 1$, on a $z_1' = u^{-\infty} = w_1'$ et $z_2 = v^{+\infty} = w_2$.

Nous venons ainsi de prouver que $w_1' = z_1'$, $u_1 = v_1$, $w_2 = z_2$ et $A_2 = B_2$.

En itérant ce qui précède, on montre que $n = m$, $u_i = v_i$, $w_i = z_i$, $A_i = B_i$ et $w_i' = z_i'$ pour tout i. $\square$

Notons que si $x = u_0(w_1, A_1, w_1')u_1 \cdots u_{n-1}(w_n, A_n, w_n')u_n$ est une factorisation normale d'un élément $x \in \hat{F}_A(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$, alors la restriction de x à $\mathbf{J}$ est $u_0(A_1)u_1 \cdots u_{n-1}(A_n)u_n$ et cette factorisation est en forme canonique. En utilisant le théorème 3.6.16 dans la preuve du théorème antérieur on pourrait donc déduire immédiatement que

$n = m$, $u_i = v_i$ et $A_i = B_i$ pour tout i. Nous avons préféré éviter d'utiliser le théorème d'Almeida puisque, comme nous le verrons, la preuve présentée ici peut être addaptée à d'autres cas où le théorème d'Almeida ne s'applique pas.

Notons aussi que, si L est le langage reconnu par un automate $\mathcal{A} = \mathcal{A}(r; u_0, A_1, \ldots, A_n, u_n)$ comme ci-dessus, alors la fermeture $\overline{L}$ de L dans $\hat{F}_A(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$ est formée exactement par les éléments $x \in \hat{F}_A(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$ tels que $\hat{\mu}(x) \in \mu(L)$ où $\mu : A^+ \to S$ est le morphisme syntaxique de L et $\hat{\mu} : \hat{F}_A(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}) \to S$ est l'unique extension homomorphe continue de μ. La preuve du théorème 5.2.3 montre donc, en particulier, que les fermetures des langages reconnus par les automates $\mathcal{A}$ ci-dessus sont suffisantes pour séparer des opérations implicites sur $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}$ distinctes. Par conséquent, d'après la proposition 3.3.9 et le théorème d'Eilenberg on a le corollaire suivant.

Corollaire 5.2.4 *La pseudo-variété* $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}$ *est engendrée par les semigroupes syntaxiques des langages reconnus par les automates* $\mathcal{A}(r; u_0, A_1, \ldots, A_n, u_n)$ *où* $r, n \in \mathbb{N}_0$ *et, pour un alphabet* A, $u_0, \ldots, u_n \in A^*$ *et* $\emptyset \neq A_1, \ldots, A_n \subseteq A$ *sont tels que, pour tout* $1 \leq i \leq n-1$ *: si* $u_i \neq 1$ *alors* $c(u_i)$ *n'est pas contenu ni dans* A_i *ni dans* A_{i+1} *; si* $u_i = 1$ *alors* A_i *et* A_{i+1} *sont* $\subseteq$*-incomparables.* □

Almeida et Azevedo [11] ont montré que

$$\mathbf{R} \vee \mathbf{L} = [\![(ab)^\omega a(ca)^\omega = (ab)^\omega (ca)^\omega]\!].$$

Si a, b et c sont des lettres distinctes d'un alphabet A, alors dans $\hat{F}_A(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$ on a

$$\begin{aligned}(ab)^\omega a(ca)^\omega &= ((ab)^{+\infty}, \{a,b\}, (ab)^{-\infty})a((ca)^{+\infty}, \{a,c\}, (ca)^{-\infty}) \\ &= ((ab)^{+\infty}, \{a,b\}, (ba)^{-\infty})((ca)^{+\infty}, \{a,c\}, (ca)^{-\infty})\end{aligned}$$

et

$$(ab)^\omega (ca)^\omega = ((ab)^{+\infty}, \{a,b\}, (ab)^{-\infty})((ca)^{+\infty}, \{a,c\}, (ca)^{-\infty}).$$

Par conséquent, d'après le théorème 5.2.3, $(ab)^\omega a(ca)^\omega \neq (ab)^\omega (ca)^\omega$ et donc $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}$ ne satisfait pas la pseudo-identité $(ab)^\omega a\ (ca)^\omega = (ab)^\omega (ca)^\omega$. Cela prouve que

$$(\mathbf{R} \vee \mathbf{L}) \cap \mathbf{LJ} \neq \mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}.$$

Considérons maintenant le cas $\mathbf{R} \cap \mathbf{LJ}$. Soit $x \in \hat{F}_A(\mathbf{R} \cap \mathbf{LJ})$. On dit qu'une factorisation de x de la forme

$$x = u_0(w_1, A_1)u_1 \cdots u_{n-1}(w_n, A_n)u_n$$

est *normale* si

- $u_i \in A^*$, $u_0 \neq 1$ si $x = u_0$;
- pour tout $1 \leq i \leq n$ tel que u_i (resp. u_{i-1}) n'est pas le mot vide, la première (resp. dernière) lettre de u_i (resp. u_{i-1}) n'appartient pas à A_i.
- si u_i $(1 \leq i \leq n-1)$ est le mot vide, alors
  - A_i et A_{i+1} sont $\subseteq$-incomparables ;

– si $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, alors $w_{i+1} = v^{+\infty}$ où v est le plus petit mot linéaire en ordre lexicographique de contenu A_{i+1} tel que la première lettre de v n'appartient pas à A_i.

En utilisant les langages $(\mathbf{R} \cap \mathbf{LJ})$-reconnaissables décrites dans le lemme 5.2.2 et en appliquant des arguments similaires à ceux de la preuve du théorème 5.2.3, on prouve que les opérations implicites sur $\mathbf{R} \cap \mathbf{LJ}$ sont caractérisés par le résultat suivant.

Théorème 5.2.5 *Tout élément de $\hat{F}_A(\mathbf{R} \cap \mathbf{LJ})$ admet une factorisation normale. Soient $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{R} \cap \mathbf{LJ})$ et soient $x = u_0(w_1, A_1)u_1 \cdots (w_n, A_n)u_n$ et $y = v_0(z_1, B_1)v_1 \cdots (z_m, B_m)v_m$ des factorisations en forme normale. Alors, $x = y$ si et seulement si $n = m$, $u_i = v_i$, $w_i = z_i$ et $A_i = B_i$ pour tout i.* $\square$

Naturellement, un énoncé dual de ce dernier théorème pourrait être énoncé pour la pseudo-variété $\mathbf{L} \cap \mathbf{LJ}$.

5.3 Opérations implicites sur $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LECom}$

Dans cette section nous nous concentrons sur certaines sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LECom}$, notamment les pseudo-variétés de la forme $\mathbf{W} \cap \mathbf{LECom}$ où, pour une pseudo-variété $\mathbf{H}$ de groupes, $\mathbf{W} = \mathbf{DOH}$, $\mathbf{DRH}$ ou $\mathbf{DH}$. Notons que $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LECom} \subseteq \mathbf{DO} \cap \mathbf{LDG}$. En effet, on a

$$\mathbf{DO} \cap \mathbf{LECom} \subseteq \mathbf{L}(\mathbf{DO} \cap \mathbf{ECom}) = \mathbf{L}(\mathbf{DG} \cap \mathbf{ECom}) \subseteq \mathbf{L}(\mathbf{DG}),$$

puisque $\mathbf{DO} \cap \mathbf{ECom} = \mathbf{DG} \cap \mathbf{ECom}$. Notons aussi que $\mathbf{J}$ n'est pas une sous-pseudo-variété de $\mathbf{LECom}$ puisque, d'après le théorème 3.6.16, $\mathbf{J}$ ne satisfait pas la pseudo-identité

$$(a^\omega b a^\omega)^\omega (a^\omega c a^\omega)^\omega = (a^\omega c a^\omega)^\omega (a^\omega b a^\omega)^\omega$$

qui définit $\mathbf{LECom}$.

Outre les propriétés données par la proposition 5.1.3, les éléments réguliers de $\hat{F}_A(\mathbf{DO} \cap \mathbf{LECom})$ jouissent aussi de la suivante.

Proposition 5.3.1 *Soit A un alphabet et soient B et C des sous-alphabets de A tels que $B \cap C \neq \emptyset$. Dans $\hat{F}_A(\mathbf{DO} \cap \mathbf{LECom})$, si $c(w')$ ou $c(z)$ est contenu dans $B \cap C$, alors $[w, B, g, w'][z, C, h, z'] = [w, B \cup C, gh, z']$.*

En particulier, $\hat{F}_A(\mathbf{DRG} \cap \mathbf{LECom})$ satisfait $[w, B, g][z, C, h] = [w, B \cup C, gh]$ pour tout $z \in C^{\mathbb{N}}$.

Preuve. Posons $p = [w, B, g, w']$ et $q = [z, C, h, z']$. Supposons d'abord que $c(w')$ et $c(z)$ sont tous les deux contenus dans $B \cap C$. Soit aussi r l'idempotent $[z, B \cap C, 1, w']$. Alors, $(rpr)^\omega (rqr)^\omega$ est un idempotent puisque $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{LECom}$, et donc

$$(rpr)^\omega (rqr)^\omega = [z, B \cup C, 1, w']$$

d'après le corollaire 5.1.2. En outre, $p = p(rpr)^\omega$ et $q = (rqr)^\omega q$ d'après la proposition 5.1.3. Ce résultat permet aussi de déduire

$$\begin{aligned} pq &= p(rpr)^\omega(rqr)^\omega q \\ &= p[z, B\cup C, 1, w']q \\ &= [w, B\cup C, gh, z']. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que, par exemple, $c(z) \subseteq B\cap C$ (et non nécessairement $c(w') \subseteq B\cap C$) et soit $a \in B\cap C$. Alors, $q = [z, B\cap C, 1, a^{-\infty}][a^{+\infty}, C, h, z']$ d'après la proposition 5.1.3. Donc, comme $c(a^{-\infty}) = c(a^{+\infty}) = \{a\} \subseteq B\cap C$,

$$\begin{aligned} pq &= p[z, B\cap C, 1, a^{-\infty}][a^{+\infty}, C, h, z'] \\ &= [w, B, g, a^{-\infty}][a^{+\infty}, C, h, z'] \\ &= [w, B\cup C, gh, z'] \qquad \text{par le cas précédent.} \end{aligned}$$

La deuxième partie du résultat est une conséquence naturelle de la première. □

La deuxième partie de ce résultat dit que le produit de deux éléments réguliers de $\hat{F}_A(\mathbf{DRG}\cap\mathbf{LECom})$ avec des contenus non disjoints, est un élément régulier. Dans le cas du produit xy de deux éléments réguliers x et y de $\hat{F}_A(\mathbf{DO}\cap\mathbf{LECom})$ avec des contenus non disjoints, nous sommes certains d'obtenir un élément régulier seulement si un de $c(x')$ et $c(y')$ est contenu dans $c(x)\cap c(y)$, où x' et y' sont, respectivement, les (mots infinis qui identifient les) restrictions de x à $\mathbf{D}$ et de y à $\mathbf{K}$. Comme nous le verrons, seulement dans ces conditions le produit xy est un élément régulier.

On considère d'abord le cas $\mathbf{DOH}\cap\mathbf{LECom}$ où $\mathbf{H}$ est une pseudo-variété de groupes. On dit qu'une factorisation d'un élément $x \in \hat{F}_A(\mathbf{DOH}\cap\mathbf{LECom})$ de la forme

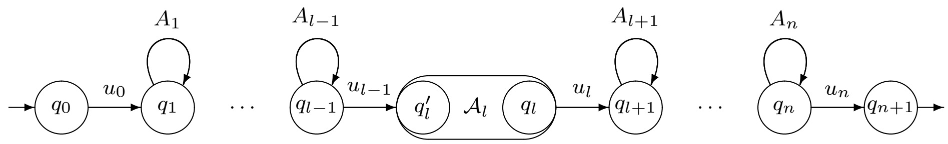
$$x = u_0[w_1, A_1, g_1, w_1']u_1 \cdots u_{n-1}[w_n, A_n, g_n, w_n']u_n$$

est *normale* si :

- $u_i \in A^*$ $(1 \le i \le n)$, $u_0 \ne 1$ si $x = u_0$;
- si u_i $(1 \le i \le n-1)$ est le mot vide, alors la première lettre de w_{n+1} n'est pas dans A_i, et $c(w_i') \not\subseteq A_{i+1}$;
- pour tout $1 \le i \le n$ tel que u_i (resp. u_{i-1}) n'est pas le mot vide, la première (resp. dernière) lettre de u_i (resp. u_{i-1}) n'est pas dans A_i.

Les propositions 3.6.11 et 5.3.1, assurent que tout élément de $\hat{F}_A(\mathbf{DOH}\cap\mathbf{LECom})$ admet une factorisation normale. Pour séparer des factorisations distinctes, nous avons besoin des automates appropriés que nous décrivons de suite.

Pour $n \in \mathbb{N}_0$, soient $u_0, \ldots, u_n \in A^*$ et $\emptyset \ne A_1, \ldots, A_n \subseteq A$ tels que $u_i \ne 1$ $(1 \le i \le n-1)$. Soit $l \in \{1, \ldots, n\}$, soit $\mathcal{A}_l$ un *automate de groupe* (i.e., un automate déterministe dont chaque lettre induit une permutation sur l'ensemble des états) sur l'alphabet A_l avec ensemble d'états Q_l, et soient $q_l, q_l' \in Q_l$. Finalement, soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(u_0, A_1, u_1, \ldots, \mathcal{A}_l; q_l'; q_l, u_l, \ldots, A_n, u_n)$ l'automate suivant



Pour simplifier les notations, on note $Q_i = \{q_i\}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ avec $i \neq l$.

Avant de prouver un lemme, notons que

$$\begin{aligned} \mathbf{DO} \cap \mathbf{LECom} &= \mathbf{DO} \cap [\![(eae)^\omega (ebe)^\omega = (ebe)^\omega (eae)^\omega]\!] \\ &= \mathbf{DO} \cap [\![e(eae)^\omega (ebe)^\omega e = e(ebe)^\omega (eae)^\omega e]\!]. \end{aligned}$$

Lemme 5.3.2 *Soit L le langage reconnu par l'automate $\mathcal{C}$ ci-dessus, et supposons qu'il satisfait la condition supplémentaire suivante : pour tout $1 \leq i \leq n-1$, $c(u_i)$ n'est pas contenu ni dans A_i ni dans A_{i+1}. Alors, $S(L)$ appartient à* $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LECom}$ *et ses sous-groupes sont dans la pseudo-variété engendrée par le groupe de transition $S(\mathcal{A}_l)$.*

De plus, si $w \in A^+$, k est un exposant de $S(L)$ tel que $k > |u_0 \cdots u_n| + n$ et w^k est l'étiquette d'un chemin dans $\mathcal{C}$, alors il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $w \in A_i^+$ et ce chemin visite Q_i et ne visite ni Q_{i-1} ($i > 1$) ni Q_{i+1} ($i < n$).

Preuve. La deuxième partie du lemme et le fait que $S(L)$ vérifie la pseudo-identité $(ab)^\omega (ba)^\omega (ab)^\omega = (ab)^\omega$ qui définit **DO** peuvent être prouvés comme dans le lemme 5.2.2. Maintenant, d'après la remarque immédiatement avant le lemme, pour montrer que $S(L)$ est à **LECom** il suffit de prouver que

$$x^k (x^k y x^k)^k (x^k z x^k)^k x^k \sim_L x^k (x^k z x^k)^k (x^k y x^k)^k x^k$$

pour tous $x, y, z \in A^+$. Pour cela, il suffit de prouver que

> $x^k (x^k y x^k)^k (x^k z x^k)^k x^k$ est l'étiquette d'un chemin $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{C}$ si et seulement si il existe un chemin $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{C}$ étiqueté $x^k (x^k z x^k)^k (x^k y x^k)^k x^k$ et coterminal avec $\mathcal{P}$.

Soient $x, y, z \in A^+$. Supposons que $\mathcal{P}$ existe et considérons les deux sous-chemins $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de $\mathcal{P}$ étiquetés, respectivement, $x^k (x^k y x^k)^k$ et $(x^k z x^k)^k x^k$. Par la deuxième partie du lemme, comme $\mathcal{P}$ est un chemin dans $\mathcal{C}$, il existe $1 \leq i \leq j \leq n$ tels que $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$) visite Q_i (resp. Q_j) et ne visite ni Q_{i-1} ni Q_{i+1} (resp. Q_{j-1} ni Q_{j+1}). Comme $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont des chemins consécutifs, il s'ensuit que, soit $i = j$ soit $i+1 = j$. Prouvons que $i = j$. Supposons, par contradiction, que $i + 1 = j$. Alors, $c(x) \cup c(y) \subseteq A_i$, $c(x) \cup c(z) \subseteq A_{i+1}$ et, d'après le choix de k, le sous-chemin de $\mathcal{P}$ étiqueté $v = y x^k x^k z$ est un chemin de Q_i pour Q_{i+1}. Par conséquent, u_i est un facteur de v d'où il est un facteur d'un de $y x^k x^k$ et $x^k x^k z$. Mais cela contredit l'hypothèse sur le contenu de u_i, puisque dans ce cas $c(u_i) \subseteq A_i$ ou $c(u_i) \subseteq A_{i+1}$. Alors $i = j$ et donc l'existence du chemin $\mathcal{Q}$ est claire. En fait le sous-chemin $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{P}$ étiqueté $(x^k y x^k)^k (x^k z x^k)^k$ est entièrement dans Q_i. Donc, si $Q_i = \{q_i\}$ cela est immédiat. Si Q_i n'est pas un singleton (c'est-à-dire que $i = l$

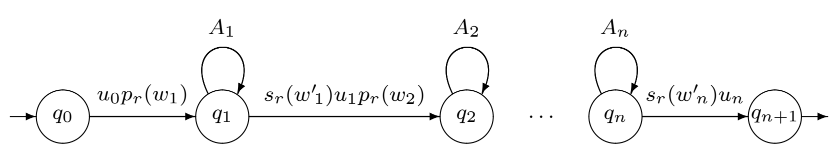
et Q_l est l'ensemble des états de l'automate $\mathcal{A}_l$), l'hypothèse sur k permet de déduire que $\mathcal{P}'$ est un chemin dans $\mathcal{A}_l$ d'un état $q \in Q_l$ au même état q. On déduit de plus qu'il existe un chemin étiqueté $(x^kzx^k)^k(x^kyx^k)^k$ de q à q. Par symétrie il s'ensuit que $x^k(x^kyx^k)^k(x^kzx^k)^kx^k \sim_L x^k(x^kzx^k)^k(x^kyx^k)^kx^k$ ce qui prouve que $S(L) \in \mathbf{LECom}$.

Pour conclure la preuve, considérons le morphisme syntaxique $\mu : A^+ \to S(L)$, soit $w \in A^+$ et supposons que $\mu(w)$ est un élément régulier de $S(L)$, c'est-à-dire que $\mu(w) = \mu(w^{k+1})$. Soit maintenant $w' \in A^+$ tel que $\mu(ww'w) = \mu(w)$ et $\mu(w'ww') = \mu(w')$. Alors, comme ci-dessus, on peut vérifier que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $w \in A_i^+$ si et seulement si $w' \in A_i^+$. Par conséquent, le sous-semigroupe de $S(L)$ formé de ses éléments réguliers divise le produit direct du sous-demi-treillis de $\mathcal{P}(A)$ engendré par les A_i avec les semigroupes de la forme $u'_{i-1}G_iu'_i$, où G_i est le groupe trivial si $i \neq l$ et il est le groupe $S(\mathcal{A}_l)$ sinon, et u'_{i-1} (resp. u'_i) est un suffixe de u_{i-1} (resp. préfixe de u_i) avec contenu contenu dans A_i. Les sous-groupes de ces semigroupes sont des sous-groupes de $S(\mathcal{A}_l)$ et donc la preuve est terminée. $\square$

Avant de prouver la caractérisation des opérations implicites sur $\mathbf{DOH} \cap \mathbf{LECom}$, on rappelle la notion de graphe de Cayley. Soit G un groupe A-engendré. Le *graphe de Cayley de* G est le graphe étiqueté dont l'ensemble des sommets est G, et, pour tous $g \in G$ et $a \in A$, il existe un arc étiqueté a du sommet g au sommet ga.

Théorème 5.3.3 *Soit* $\mathbf{H}$ *une pseudo-variété de groupes, soient* x *et* y *deux éléments de* $\hat{F}_A(\mathbf{DOH} \cap \mathbf{LECom})$ *et soient* $x = u_0[w_1, A_1, g_1, w'_1]u_1 \cdots u_{n-1}[w_n, A_n, g_n, w'_n]u_n$ *et* $y = v_0[z_1, B_1, h_1, z'_1]v_1 \cdots v_{m-1}\ [z_m, B_m, h_m, z'_m]v_m$ *des factorisations en forme normale. Alors,* $x = y$ *si et seulement si* $n = m$, $u_i = v_i$, $w_i = z_i$, $A_i = B_i$, $g_i = h_i$ *et* $w'_i = z'_i$ *pour tout* i.

Preuve. Considérons l'automate $\mathcal{C}$ suivant



où $r \in \mathbb{N}$ est tel que $r > |v_j|$ pour tout $1 \leq j \leq m$, et, pour tout $1 \leq i \leq n-1$ tel que $u_i = 1$, le contenu du mot $s_r(w'_i)$ n'est pas contenu dans A_{i+1}. Cela assure que le contenu du mot $s_r(w'_i)u_ip_r(w_{i+1})$ n'est pas contenu dans A_i ni dans A_{i+1}, et, de plus, que l'automate $\mathcal{C}$ est dans les conditions du lemme 5.3.2. Par conséquent, le semigroupe syntaxique S du langage L reconnu par $\mathcal{C}$ est dans $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LECom}$ et donc $S \in \mathbf{DOH} \cap \mathbf{LECom}$. Maintenant, en utilisant des arguments parfaitement similaires (et de certaine façon plus simples) à ceux dans la preuve du théorème 5.2.3, on peut prouver que $n = m$, $u_i = v_i$, $w_i = z_i$, $A_i = B_i$ et $w'_i = z'_i$ pour tout i.

Notons maintenant que $\mathbf{H} = (\mathbf{DOH} \cap \mathbf{LECom}) \cap \mathbf{G}$. Pour prouver que $g_i = h_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$, considérons $\bar{w}_i \in A_i^{\mathbb{N}}$, $\bar{w}'_i \in A_i^{-\mathbb{N}}$ et $\bar{g}_i, \bar{h}_i \in \hat{F}_{A_i}(\mathbf{H})$ tels que

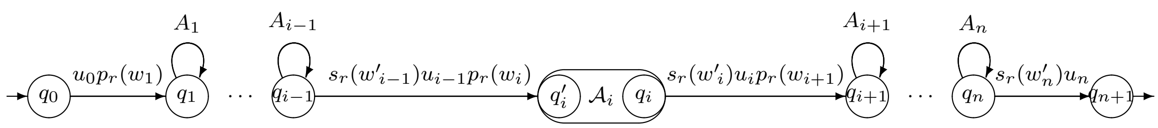
$$[w_i, A_i, g_i, w'_i] = p_r(w_i)[\bar{w}_i, A_i, \bar{g}_i, \bar{w}'_i]s_r(w'_i)$$

et

$$[w_i, A_i, h_i, w'_i] = p_r(w_i)[\bar{w}_i, A_i, \bar{h}_i, \bar{w}'_i]s_r(w'_i).$$

Posons $\bar{x}_i = [\bar{w}_i, A_i, \bar{g}_i, \bar{w}'_i]$ et $\bar{y}_i = [\bar{w}_i, A_i, \bar{h}_i, \bar{w}'_i]$.

Fixons un $i \in \{1, \ldots, n\}$, considérons un groupe A_i-engendré G de $\mathbf{H}$ et soit $\mathcal{A}_i$ le graphe de Cayley de G sur A_i. Notons que G est le semigroupe de transition de $\mathcal{A}_i$. Soit $A_i = \{a_{i,1}, \ldots, a_{i,n_i}\}$ et soit $\mathcal{C}'$ l'automate suivant



où les états q'_i et q_i sont, respectivement, les éléments 1 et $(\bar{x}_i)_G(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n_i})$ de G. Notons $\mu : A^+ \to S$ le morphisme syntaxique du langage reconnu par $\mathcal{C}'$, et $\hat{\mu}$ sa extension continue homomorphe à $\hat{F}_A(\mathbf{DOH} \cap \mathbf{LECom})$ (qui existe par le lemme 5.3.2).

Considérons, en outre, un exposant $k > |u_0 \cdots u_n| + n$ de S et, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, des mots x_j et y_j tels que $c(x_j) = c(y_j) = A_j$, $\hat{\mu}(\bar{x}_j) = \mu(x_j^k)$ et $\hat{\mu}(\bar{y}_j) = \mu(y_j^k)$. On a

- $\hat{\mu}(u_0p_r(w_1)\bar{y}_1s_r(w'_1)u_1p_r(w_2)\cdots\bar{y}_{i-1}s_r(w'_{i-1})u_{i-1}p_r(w_i)) =$
  $\mu(u_0p_r(w_1)y_1^ks_r(w'_1)u_1p_r(w_2)\cdots y_{i-1}^ks_r(w'_{i-1})u_{i-1}p_r(w_i))$,
- $\hat{\mu}(s_r(w'_i)u_ip_r(w_{i+1})\bar{y}_{i+1}\cdots\bar{y}_ns_r(w'_n)u_n) = \mu(s_r(w'_i)u_ip_r(w_{i+1})y_{i+1}^k\cdots y_n^ks_r(w'_n)u_n)$,
- $\hat{\mu}(x) = \mu(u_0p_r(w_1)x_1^k\cdots x_n^ks_r(w'_n)u_n)$.

En utilisant les égalités prouvées jusqu'à ici, on peut vérifier que

- $u_0p_r(w_1)y_1^k\cdots y_{i-1}^ks_r(w'_{i-1})u_{i-1}p_r(w_i)$,
- $s_r(w'_i)u_ip_r(w_{i+1})y_{i+1}^k\cdots y_n^ks_r(w'_n)u_n$,
- $u_0p_r(w_1)x_1^k\cdots x_n^ks_r(w'_n)u_n$,

sont les étiquettes de chemins dans $\mathcal{C}'$ qui vont, respectivement, de q_0 à q'_i, de q_i à q_{n+1} et de q_0 à q_{n+1}. Comme $\hat{\mu}(x) = \hat{\mu}(y) = \hat{\mu}(u_0p_r(w_1)\bar{y}_1\cdots\bar{y}_ns_r(w'_n)u_n)$ et $\mathcal{A}_i$ est un automate de groupe, cela entraîne que

$$(\bar{y}_i)_G(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n_i}) = (\bar{x}_i)_G(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n_i}),$$

ce qui prouve que $\bar{g}_i = \bar{h}_i$. Par conséquent, $g_i = h_i$ et la preuve est terminée. □

Comme conséquence de ce résultat, on peut vérifier, comme dans le cas **LJ** ci-dessus, que

$$(\mathbf{R} \vee \mathbf{L}) \cap \mathbf{LECom} \neq \mathbf{DA} \cap \mathbf{LECom}.$$

Soit maintenant $\mathbf{V}$ l'une des pseudo-variétés $\mathbf{DRH} \cap \mathbf{LECom}$ et $\mathbf{DH} \cap \mathbf{LECom}$. On dit qu'une factorisation d'un élément $x \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ de la forme

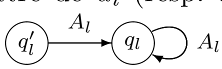
$$x = u_0x_1u_1\cdots u_{n-1}x_nu_n$$

est *normale* si :

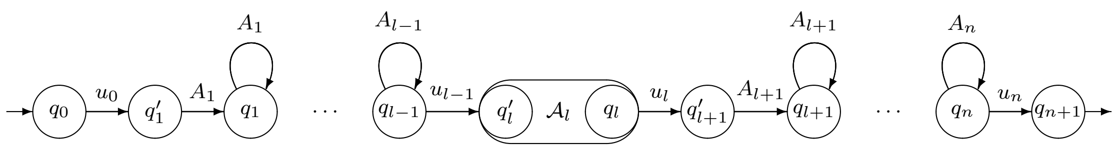
– $u_i \in A^*$, $u_0 \neq 1$ si $x = u_0$;
– $x_i \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ $(1 \leq i \leq n)$ est régulier ;
– si u_i $(1 \leq i \leq n-1)$ est le mot vide, alors $c(x_i) \cap c(x_{i+1}) = \emptyset$;
– pour tout $1 \leq i \leq n$ tel que u_i (resp. u_{i-1}) n'est pas le mot vide, la première (resp. dernière) lettre de u_i (resp. u_{i-1}) n'appartient pas à $c(x_i)$.

Les propositions 3.6.11 et 5.3.1 assurent que tout élément de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ admet une factorisation normale.

On poursuit avec la description des semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap \mathbf{LECom})$. Pour cela on va considérer les automates suivants. Pour $n \in \mathbb{N}_0$, soient $u_0, \ldots, u_n \in A^*$ et $\emptyset \neq A_1, \ldots, A_n \subseteq A$ tels que, si $u_i = 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$ alors $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$ et, pour tout $1 \leq i \leq n$ tel que u_i (resp. u_{i-1}) n'est pas le mot vide, la première (resp. dernière) lettre de u_i (resp. u_{i-1}) n'est pas dans A_i. Soit $l \in \{1, \ldots, n\}$ et soit $\mathcal{A}_l$ l'automate



, ou un automate de groupe non trivial sur l'alphabet A_l avec ensemble d'états Q_l (dans ce cas, nous choisissons deux états distincts $q'_l, q_l \in Q_l$). Finalement, soit $\mathcal{D} = \mathcal{D}(u_0, A_1, u_1, \ldots, u_{l-1}, \mathcal{A}_l; q'_l; q_l, u_l, \ldots, A_n, u_n)$ l'automate suivant



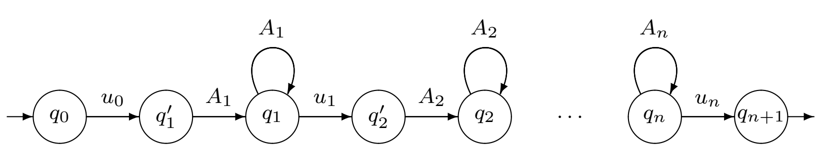
L'analyse de la structure de $\mathcal{D}$ peut être conduite comme dans les lemmes 5.2.2 et 5.3.2, en montrant le lemme suivant.

Lemme 5.3.4 *Considérons l'automate $\mathcal{D}$ ci-dessus et soit L le langage reconnu par $\mathcal{D}$. Alors, $S(L)$ est dans* $\mathbf{DG} \cap \mathbf{LECom}$ *et ses sous-groupes sont dans la pseudo-variété engendrée par le groupe de transition $S(\mathcal{A}_l)$.*

De plus, si $w \in A^+$, k est un exposant de $S(L)$ tel que $k > |u_0 \cdots u_n| + n$ et w^k est l'étiquette d'un chemin dans $\mathcal{D}$ qui ne commence ni ne termine avec une transition étiquetée par le mot vide, alors il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $w \in A_i^+$ et le chemin commence en q'_i ou q_i (dans Q_l si $i = l$) et termine en q_i (dans Q_l si $i = l$). □

Théorème 5.3.5 *Soit* $\mathbf{H}$ *une pseudo-variété de groupes, soient x et y deux éléments de* $\hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap \mathbf{LECom})$ *et soient $x = u_0[A_1, g_1]u_1 \cdots u_{n-1}[A_n, g_n]u_n$ et $y = v_0[B_1, h_1]v_1 \cdots v_{m-1}[B_m, h_m]v_m$ des factorisations en forme normale. Alors, $x = y$ si et seulement si $n = m$, $u_i = v_i$, $A_i = B_i$ et $g_i = h_i$ pour tout i.*

Preuve. Considérons l'automate $\mathcal{D}$ suivant



soit L le langage reconnu par $\mathcal{D}$ et soit $\mu : A^+ \to S$ son morphisme syntaxique. D'après le lemme 5.3.4, $S \in \mathbf{J} \cap \mathbf{LECom}$ et donc $S \in \mathbf{DH} \cap \mathbf{LECom}$. Ainsi, soit $\hat{\mu} : \hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap \mathbf{LECom}) \to S$ l'unique extension continue homomorphe de μ.

Soit $k > |u_0 \cdots u_n| + n$ un exposant de S. Soit $1 \leq i \leq n$. Comme $[A_i, g_i]$ est un élément régulier, son image dans S, $\hat{\mu}([A_i, g_i])$ est un idempotent. D'après la densité de A^+ dans $\hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap \mathbf{LECom})$, il existe un mot x_i tel que $c(x_i) = A_i$ et $\hat{\mu}([A_i, g_i]) = \mu(x_i^k)$. Maintenant, il est immédiat que $w = u_0 x_1^k u_1 \cdots x_n^k u_n$ est un mot reconnu par $\mathcal{D}$, d'où $w \in L$. En outre, on a $\hat{\mu}(x) = \mu(w)$.

Considérons maintenant des mots y_i $(1 \leq i \leq m)$ tels que $c(y_i) = B_i$ et $\hat{\mu}([B_i, h_i]) = \mu({y_i}^k)$. Soit $w' = v_0 y_1^k v_1 \cdots y_m^k v_m$. On a $\hat{\mu}(y) = \mu(w')$ et, comme $x = y$, $\hat{\mu}(x) = \hat{\mu}(y)$. Donc, $w' \in L$. Soit $\mathcal{P}$ un chemin réussi dans $\mathcal{D}$ étiqueté w' et, pour tout $1 \leq i \leq m$, soit $\mathcal{P}_i$ le sous-chemin de $\mathcal{P}$ étiqueté $v_0 y_1^k v_1 y_2^k \cdots y_i^k$. D'après le lemme 5.3.4, le chemin $\mathcal{P}_i$ termine dans l'état q_{j_i}, pour un certain $1 \leq j_i \leq n$ tel que $B_i \subseteq A_{j_i}$. De plus, si $j_i > 1$, le sous-chemin $\mathcal{P}_i'$ de $\mathcal{P}_i$ étiqueté y_i^k, dont la première transition n'est pas étiquetée par le mot vide, ne visite pas l'état $q_{j_i - 1}$.

En particulier, le chemin $\mathcal{P}_1$ visite l'état q_1. Par conséquent u_0 est un préfixe de $v_0 y_1^k$. De plus, si $j_1 > 1$, le chemin $\mathcal{P}_1'$ ne visite pas l'état $q_{j_1 - 1}$. Par conséquent, si $j_1 > 1$, il est clair que u_0 est un préfixe de v_0. Dans le cas où j_1 est égal à 1, on a $B_1 \subseteq A_1$ et comme la dernière lettre de u_0 n'est pas dans A_1 (et donc n'appartient pas au contenu de y_1^k) nous déduisons aussi que u_0 est un préfixe de v_0. Par symétrie il s'ensuit que $u_0 = v_0$, d'où $j_1 = 1$ et $B_1 \subseteq A_1$. Encore par symétrie on déduit que $A_1 = B_1$.

Maintenant, le chemin $\mathcal{P}_2$ termine dans l'état q_{j_2}, pour un certain $1 \leq j_2 \leq n$ tel que $B_2 \subseteq A_{j_2}$. Comme la première lettre du mot $v_1 y_2^k$ n'appartient pas à $B_1 = A_1$ (notons que, comme la factorisation de y est normale, si $v_1 = 1$ alors $B_1 \cap B_2 = \emptyset$), on déduit que $j_2 > 1$. Maintenant, comme avant on peut prouver que $j_2 = 2$, $u_1 = v_1$ et $A_2 = B_2$.

En itérant ce qui précède, on montre que $n = m$, $u_i = v_i$ et $A_i = B_i$ pour tout i.

La preuve des égalités $g_i = h_i$ est similaire à la preuve des même égalités dans le théorème 5.3.3. Nous remarquons seulement que, après le choix d'un groupe G (non trivial) A_i-engendré de $\mathbf{H}$, et après avoir considéré son graphe de Cayley $\mathcal{A}_i$ sur A_i, on a besoin de choisir dans $\mathcal{A}_i$ deux états distincts. L'un de ces états est 1. Maintenant, posons $x_i = [A_i, g_i]$ et $y_i = [A_i, h_i]$. Si $r = (y_i)_G(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n_i})$ et $s = (x_i)_G(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n_i})$ sont tous les deux égaux à 1, alors nous n'avons pas rien à prouver. Sinon, sans perte de généralité, on peut supposer que $s \neq 1$ et donc on choisit s pour être l'autre état. La preuve continue comme dans le théorème 5.3.3, en montrant que r et s doivent être égaux et donc g_i et h_i aussi. □

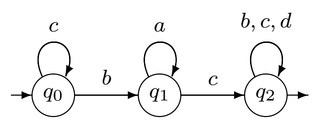
Des résultats similaires sont valides pour les pseudo-variétés $\mathbf{DRH} \cap \mathbf{LECom}$.

Lemme 5.3.6 *Considérons un automate $\mathcal{C} = \mathcal{C}(u_0, A_1, \ldots, \mathcal{A}_l; q_l'; q_l, \ldots, A_n, u_n)$ comme celui défini après la proposition 5.3.1 ci-dessus, et supposons qu'il satisfait les conditions supplémentaires suivantes : pour tout $1 \leq i \leq n$, la première lettre de u_i n'appartient pas à A_i ; pour tout $1 \leq i \leq n-1$ la dernière lettre de u_i appartient à A_{i+1} et,* *si* $c(u_i) \subseteq A_{i+1}$*, alors* $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$*. Soit* L *le langage reconnu par* $\mathcal{C}$*. Alors,* $S(L)$ *appartient à* **DRG** ∩ **LECom** *et ses sous-groupes sont dans la pseudo-variété engendrée par le groupe de transition* $S(\mathcal{A}_l)$*.*

De plus, si $w \in A^+$*,* k *est un exposant de* $S(L)$ *tel que* $k > |u_0 \cdots u_n| + n$ *et* w^k *est l'étiquette d'un chemin* $\mathcal{T}$ *dans* $\mathcal{C}$*, alors il existe* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *tel que* $w \in A_i^+$ *et* $\mathcal{T}$ *termine dans* Q_i*. En outre, soit* $\mathcal{T}$ *ne visite pas* Q_{i-1} *(si* $i > 1$*), soit* $\mathcal{T}$ *commence dans* Q_{i-1} *et il sort de* Q_{i-1} *dans le premier pas.*

Preuve. Le lemme peut être prouvé comme des résultats similaires déjà vus. Nous notons seulement qu'un chemin étiqueté $v = (x^k y x^k)^k (x^k z x^k)^k$ reste plus d'un pas exactement dans un seul Q_i. Ainsi, $c(xyz) \subseteq A_i^+$ et le chemin reste hors de Q_i pour au plus $|u_{i-1}|$ pas. □

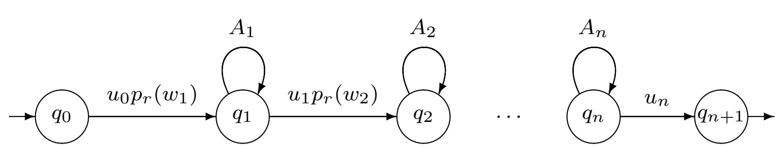
Exemple 5.3.7 *Notons que la condition "pour tout* $1 \leq i \leq n-1$ *la dernière lettre de* u_i *appartient à* A_{i+1}*" dans l'automate* $\mathcal{C}$ *du dernier lemme évite, par exemple, une situation comme la suivante*



où a*,* b*,* c *et* d *sont des lettres distinctes d'un alphabet* A*. Le semigroupe syntaxique du langage reconnu par cet automate ne vérifie pas l'égalité* $(c^\omega bc^\omega)^\omega (c^\omega dc^\omega)^\omega = (c^\omega dc^\omega)^\omega (c^\omega bc^\omega)^\omega$ *et donc il n'est pas dans* **LECom**. ■

Théorème 5.3.8 *Soit* **H** *une pseudo-variété de groupes, soient* x *et* y *deux éléments de* $\hat{F}_A(\mathbf{DRH} \cap \mathbf{LECom})$ *et soient* $x = u_0[w_1, A_1, g_1]u_1 \cdots u_{n-1}[w_n, A_n, g_n]u_n$ *et* $y = v_0[z_1, B_1, h_1]v_1 \cdots v_{m-1}[z_m, B_m, h_m]v_m$ *des factorisations en forme normale. Alors,* $x = y$ *si et seulement si* $n = m$*,* $u_i = v_i$*,* $w_i = z_i$*,* $A_i = B_i$ *et* $g_i = h_i$ *pour tout* i*.*

Preuve. La projection canonique de $\hat{F}_A(\mathbf{DRH} \cap \mathbf{LECom})$ sur $\hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap \mathbf{LECom})$ montre immédiatement que $n = m$, $u_i = v_i$, $A_i = B_i$ et $g_i = h_i$ pour tout i. Pour prouver l'égalité $p_r(w_i) = p_r(z_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $r \geq 1$, il suffit de considérer l'automate suivant



— qui reconnaît un langage dont le semigroupe syntaxique appartient à **R** ∩ **LECom**, d'après le lemme 5.3.6 —, et de continuer comme dans la preuve du théorème 5.3.3. Cela montre que $w_i = z_i$ pour tout i. □

Un résultat dual est valide pour les pseudo-variétés **DLH** ∩ **LECom**.

5.4 Opérations implicites sur $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LZE}$ et $\mathbf{DO} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$

Cette section est consacrée à l'étude des semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ où $\mathbf{V}$ est une pseudo-variété de la forme $\mathbf{V} = \mathbf{W} \cap \mathbf{LZE}$ ou de la forme $\mathbf{V} = \mathbf{W} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$ avec $\mathbf{W} \in \{\mathbf{DOH}, \mathbf{DRH}, \mathbf{DH}\}$. Comme dans les sections précédentes, nous décrivons des formes "normales" pour les éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ et nous prouvons qu'elles sont uniques. Nous utilisons ces résultats pour calculer certaines pseudo-variétés du type $\mathbf{U} \vee \mathbf{U}'$.

Tout d'abord on note que la pseudo-variété $\mathbf{ZE} \cap \mathbf{CR}$ est, trivialement, égale à $\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}$ et que $\mathbf{ZE} \subseteq \mathbf{ECom}$. Par conséquent, on déduit immédiatement que $\mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}) \subseteq \mathbf{LZE} \subseteq \mathbf{LECom}$.

Dans la dernière section, où nous avons étudié les semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{W} \cap \mathbf{LECom})$, nous eûmes à séparer la description des factorisations normales en deux cas. Le cas $\mathbf{DOH} \cap \mathbf{LECom}$ d'une part et les cas $\mathbf{DRH} \cap \mathbf{LECom}$ et $\mathbf{DH} \cap \mathbf{LECom}$ de l'autre. Comme nous le verrons, cela n'est pas nécessaire pour les semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{W} \cap \mathbf{LZE})$ (ni pour $\hat{F}_A(\mathbf{W} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}))$). Les factorisations normales $x = u_0 x_1 u_1 \cdots x_n u_n$ décrites pour un élément $x \in \hat{F}_A(\mathbf{DO} \cap \mathbf{LZE})$ seront telles que, si π est la projection canonique de $\hat{F}_A(\mathbf{DO} \cap \mathbf{LZE})$ sur $\hat{F}_A(\mathbf{W} \cap \mathbf{LZE})$, alors $\pi(x) = u_0 \pi(x_1) u_1 \cdots \pi(x_n) u_n$ est une factorisation normale de l'élément $\pi(x) \in \hat{F}_A(\mathbf{W} \cap \mathbf{LZE})$. La définition de factorisation normale sera inspirée par le résultat suivant.

Proposition 5.4.1 *Soit A un alphabet, soient $B, C \subseteq A$ tels que $B \cap C \neq \emptyset$ et soit $x \in \hat{F}_A(\mathbf{DO} \cap \mathbf{LZE})^1$. Alors, dans $\hat{F}_A(\mathbf{DO} \cap \mathbf{LZE})$,*

$$[w, B, g, w']x[z, C, h, z'] = [w, B \cup C, g, w']x[z, B \cup C, h, z'].$$

En particulier, $[w, B, g, w'][z, C, h, z'] = [w, B \cup C, gh, z']$.

De plus, si $x \in \hat{F}_A(\mathbf{DO} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}))^1$, alors dans $\hat{F}_A(\mathbf{DO} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}))$ on a,

$$[w, B, g, w']x[z, C, h, z'] = [w, B \cup c(x) \cup C, gx'h, z']$$

où x' est la restriction de x à $\mathbf{G}$.

Preuve. Supposons d'abord que $C \subseteq B$ et posons $p = [w, B, g, w']$ et $q = [z, C, h, z']$. On a $p = pp^\omega(q^\omega p^\omega q^\omega)^\omega q^\omega p^\omega$ et $q = q^\omega q$ d'après la proposition 5.1.3. Donc,

$$\begin{aligned}
pxq &= pp^\omega(q^\omega p^\omega q^\omega)^\omega q^\omega p^\omega x q^\omega q \\
&= pp^\omega q^\omega p^\omega x q^\omega (q^\omega p^\omega q^\omega)^\omega q \qquad \text{car } \mathbf{DO} \cap \mathbf{LZE} \subseteq \mathbf{LZE} \\
&= [w, B, g, w']x[z, B, h, z'] \qquad \text{d'après la proposition 5.1.3.}
\end{aligned}$$

Que le résultat est aussi vrai pour $B \subseteq C$, peut être prouvé de façon analogue.

Prouvons maintenant le cas particulier $x = 1$. Soit $a \in B \cap C$. Alors, $p = pa^\omega a^\omega p^\omega$ d'après la proposition 5.1.3. Par conséquent,

$$pq = pa^\omega a^\omega p^\omega q = p[a^{+\infty}, C, 1, a^{-\infty}][a^{+\infty}, B, 1, a^{-\infty}]p^\omega q$$

par ci-dessus puisque $c(a^\omega) = \{a\} \subseteq B \cap C$. De façon similaire, on peut prouver que $[a^{+\infty}, C, 1, a^{-\infty}][a^{+\infty}, B, 1, a^{-\infty}]$ est un idempotent. Alors, par le corollaire 5.1.2, il est égal à $[a^{+\infty}, B \cup C, 1, a^{-\infty}]$. L'égalité $pq = [w, B \cup C, gh, z']$ est maintenant une conséquence simple de la proposition 5.1.3.

Finalement, on prouve le cas général. On a, $p = pa^\omega p^\omega$ et $q = q^\omega a^\omega q$. Par conséquent, des cas particuliers prouvés avant, on déduit

$$\begin{aligned} pxq &= pa^\omega p^\omega x q^\omega a^\omega q \\ &= p[a^{+\infty}, C, 1, a^{-\infty}]p^\omega x q^\omega [a^{+\infty}, B, 1, a^{-\infty}]q \\ &= p[a^{+\infty}, B \cup C, 1, w']x[z, B \cup C, 1, a^{-\infty}]q \\ &= [w, B \cup C, g, w']x[z, B \cup C, h, z']. \end{aligned}$$

Pour conclure la preuve il reste à montrer le résultat pour $\mathbf{DO} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a $pxq = pa^\omega p^\omega x q^\omega a^\omega q$. Maintenant, $a^\omega p^\omega x q^\omega a^\omega$ est un élément de groupe car $\mathbf{DO} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}) \subseteq \mathbf{LCR}$. Donc c'est un élément régulier de contenu $B \cup c(x) \cup C$, et le résultat est une conséquence de la proposition 5.1.3. □

Almeida et Weil [17] ont prouvé que, pour toute pseudo-variété $\mathbf{H}$ de groupes, la pseudo-variété $\mathbf{DRH} \vee \mathbf{DLH}$ est strictement contenue dans $\mathbf{DOH}$. En fait, ils ont prouvé que

$$\mathbf{DRH} \vee \mathbf{DLH} = [\![(ab)^\omega a^\omega (ca)^\omega = (ab)^\omega (ca)^\omega]\!] \cap \mathbf{DOH}.$$

Cependant, quand on les intersecte avec $\mathbf{LZE}$, on obtient une égalité. Cela est une conséquence immédiate de la proposition 5.4.1.

Corollaire 5.4.2 *Pour toute pseudo-variété de groupes* $\mathbf{H}$*, on a l'égalité suivante*

$$(\mathbf{DRH} \vee \mathbf{DLH}) \cap \mathbf{LZE} = \mathbf{DOH} \cap \mathbf{LZE}.$$

Preuve. L'inclusion $(\mathbf{DRH} \vee \mathbf{DLH}) \cap \mathbf{LZE} \subseteq \mathbf{DOH} \cap \mathbf{LZE}$ est claire. Maintenant, pour prouver l'inclusion inverse il suffit de prouver que $\mathbf{DOH} \cap \mathbf{LZE}$ satisfait la pseudo-identité $(ab)^\omega a^\omega (ca)^\omega = (ab)^\omega (ca)^\omega$. Pour cela il suffit de montrer que cette égalité est satisfaite par $\hat{F}_A(\mathbf{DOH} \cap \mathbf{LZE})$ quand a, b et c sont des lettres de A. Dans ce cas on a dans $\hat{F}_A(\mathbf{DOH} \cap \mathbf{LZE})$,

$$(ab)^\omega = [(ab)^{+\infty}, \{a, b\}, 1, (ab)^{-\infty}]$$

et

$$(ca)^\omega = [(ca)^{+\infty}, \{a, c\}, 1, (ca)^{-\infty}].$$

Maintenant, la proposition 5.4.1 montre que

$$(ab)^\omega a^\omega (ca)^\omega = [(ab)^{+\infty}, \{a, b, c\}, 1, (ca)^{-\infty}] = (ab)^\omega (ca)^\omega,$$

ce qui achève la preuve. □

Une autre conséquence de la proposition 5.4.1 est que, si $x = u_0 x_1 u_1 \cdots u_{n-1} x_n u_n$ est une factorisation d'un élément x de $\hat{F}_A(\mathbf{DO} \cap \mathbf{LZE})$ (resp. $\hat{F}_A(\mathbf{DO} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}))$) en produits de mots u_i et d'éléments réguliers x_i, alors on peut supposer que les contenus des éléments réguliers sont égaux ou disjoints (resp. disjoints) deux à deux. Nous allons donc considérer la notion suivante de factorisation normale pour les opérations implicites sur les pseudo-variétés de la forme $\mathbf{V} = \mathbf{W} \cap \mathbf{LZE}$ (resp. $\mathbf{V} = \mathbf{W} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$), avec $\mathbf{W} \in \{\mathbf{DOH}, \mathbf{DRH}, \mathbf{DH}\}$.

Dans les cas $\mathbf{V} = \mathbf{W} \cap \mathbf{LZE}$, on dira qu'une factorisation d'un élément $x \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ de la forme

$$x = u_0 x_1 u_1 \cdots u_{n-1} x_n u_n$$

est *normale* si :

- $u_i \in A^*$, $u_0 \neq 1$ si $x = u_0$;
- $x_i \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ $(1 \leq i \leq n)$ est régulier ;
- pour toute paire $1 \leq i, j \leq n$, $c(x_i) = c(x_j)$ ou $c(x_i) \cap c(x_j) = \emptyset$;
- si u_i $(1 \leq i \leq n-1)$ est le mot vide, alors $c(x_i) \cap c(x_{i+1}) = \emptyset$;
- pour tout $1 \leq i \leq n$ tel que u_i (resp. u_{i-1}) n'est pas le mot vide, la première (resp. dernière) lettre de u_i (resp. u_{i-1}) n'appartient pas à $c(x_i)$.

Dans les cas $\mathbf{V} = \mathbf{W} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$ la définition de factorisation *normale* d'un élément de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ est égale à celle ci-dessus sauf dans la condition "pour toute paire $1 \leq i, j \leq n$, $c(x_i) = c(x_j)$ ou $c(x_i) \cap c(x_j) = \emptyset$" qui est remplacée par

- pour toute paire $1 \leq i, j \leq n$, $c(x_i) \cap c(x_j) = \emptyset$ si $i \neq j$;

Notons que ces définitions de factorisation normale différent de celle des éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{W} \cap \mathbf{LECom})$, avec $\mathbf{W} \in \{\mathbf{DRH}, \mathbf{DH}\}$, seulement dans l'imposition de la condition suivante (on pose $c(x_i) = A_i$)

$$A_i = A_j \text{ ou } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pour toute paire } 1 \leq i, j \leq n \tag{5.1}$$

dans les cas $\hat{F}_A(\mathbf{W} \cap \mathbf{LZE})$ et de la condition

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pour toute paire } i \neq j \tag{5.2}$$

dans les cas $\hat{F}_A(\mathbf{W} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}))$.

Proposition 5.4.3 *Soit* $\mathbf{H}$ *une pseudo-variété de groupes, soit* $\mathbf{V} = \mathbf{W} \cap \mathbf{LZE}$ *ou* $\mathbf{V} = \mathbf{W} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$*, où* $\mathbf{W}$ *est l'une de* $\mathbf{DOH}$, $\mathbf{DRH}$ *et* $\mathbf{DH}$. *Tout élément de* $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ *admet une factorisation normale.* □

Avec cette notion de factorisation normale, une étude parfaitement similaire à celle conduite pour les sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LECom}$ peut être menée pour les sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LZE}$ et de $\mathbf{DO} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$, conduisant aux résultats suivants. Les preuves sont souvent omises puisqu'elles sont analogues à celles d'autres résultats similaires.

Les automates utilisés pour séparer des factorisations distinctes des éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{DOH} \cap \mathbf{LZE})$ (resp. $\hat{F}_A(\mathbf{DOH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}))$) sont les automates $\mathcal{C} = \mathcal{C}(u_0, A_1, \ldots, \mathcal{A}_l; q_l'; q_l, \ldots, A_n, u_n)$ comme dans le lemme 5.3.2 où, évidemment, les A_i doivent satisfaire la condition (5.1) (resp. la condition (5.2)).

Lemme 5.4.4 *Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(u_0, A_1, \ldots, \mathcal{A}_l; q_l'; q_l, \ldots, A_n, u_n)$ un automate comme celui défini après la proposition 5.3.1 ci-dessus, et supposons qu'il satisfait les conditions supplémentaires suivantes : $A_i = A_j$ ou $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$, et pour tout $1 \leq i \leq n-1$, $c(u_i)$ n'est contenu ni dans A_i ni dans A_{i+1}. Soit L le langage reconnu par $\mathcal{C}$. Alors, $S(L)$ est dans* $\mathbf{DO} \cap \mathbf{LZE}$ *et ses sous-groupes sont dans la pseudo-variété engendrée par le groupe de transition $S(\mathcal{A}_l)$. Si $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour toute paire $i \neq j$, alors $S(L) \in \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$.*

De plus, si $w \in A^+$, k est un exposant de $S(L)$ tel que $k > |u_0 \cdots u_n| + n$ et w^k est l'étiquette d'un chemin dans $\mathcal{C}$, alors il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $w \in A_i^+$ et le chemin visite Q_i et ne visite ni Q_{i-1} (si $i > 1$) ni Q_{i+1} (si $i < n$).

Preuve. Nous rappelons seulement la preuve que $S(L)$ appartient à $\mathbf{LZE}$. En supposant que $S(L) \in \mathbf{DO}$ est déjà prouvé, pour prouver que $S(L) \in \mathbf{LZE}$ il suffit, comme dans le lemme 5.3.2, de montrer que, pour tous $x, y, z \in A^+$, $x^k(x^kyx^k)^kx^kzx^k \sim_L x^kzx^k(x^kyx^k)^kx^k$, ou plus généralement que

> $x^k(x^kyx^k)^kx^kzx^k$ est l'étiquette d'un chemin $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{C}$ si et seulement si il existe un chemin $\mathcal{P}'$ dans $\mathcal{C}$ étiqueté $x^kzx^k(x^kyx^k)^kx^k$ et coterminal avec $\mathcal{P}$.

Soient $x, y, z \in A^+$ et supposons que $\mathcal{P}$ existe. Considérons les trois sous-chemins $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ de $\mathcal{P}$ étiquetés, respectivement, $x^k(x^kyx^k)^kx^k$, z et x^k. Pour prouver l'existence de $\mathcal{P}'$ il suffit de montrer qu'il existe des chemins $\mathcal{P}_1'$ et $\mathcal{P}_3'$ étiquetés x^k et $x^k(x^kyx^k)^kx^k$, respectivement, coterminaux avec $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$. Par la deuxième partie du lemme (que nous supposons déjà prouvée), comme $\mathcal{P}$ est un chemin, il existe $1 \leq i \leq j \leq n$ tels que $c(x) \cup c(y) \subseteq A_i$, $c(x) \subseteq A_j$ et i (resp. j) est le plus petit (resp. le plus grand) indice tel que $\mathcal{P}$ visite Q_i (resp. Q_j). En particulier, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ et par conséquent $A_i = A_j$. De plus, le chemin $\mathcal{P}_1$ ne visite ni Q_{i-1} ni Q_{i+1}. Donc, il est clair que $\mathcal{P}_1'$ existe. De façon analogue, comme le chemin $\mathcal{P}_3$ ne visite ni Q_{j-1} ni Q_{j+1} et $c(x) \cup c(y) \subseteq A_j$, $\mathcal{P}_3'$ existe en prouvant l'existence de $\mathcal{P}'$. Par symétrie on déduit que $x^k(x^kyx^k)^kx^kzx^k \sim_L x^kzx^k(x^kyx^k)^kx^k$ d'où $S(L) \in \mathbf{LZE}$. □

Théorème 5.4.5 *Soit* $\mathbf{H}$ *une pseudo-variété de groupes et soit* $\mathbf{V} = \mathbf{DOH} \cap \mathbf{LZE}$ *ou* $\mathbf{DOH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$. *Soient $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ et soient $x = u_0[w_1, A_1, g_1, w'_1]u_1 \cdots u_{n-1} [w_n, A_n, g_n, w'_n]u_n$ et $y = v_0[z_1, B_1, h_1, z'_1]v_1 \cdots v_{m-1}[z_m, B_m, h_m, z'_m]v_m$ des factorisations en forme normale. Alors, $x = y$ si et seulement si $n = m$, $u_i = v_i$, $w_i = z_i$, $A_i = B_i$, $g_i = h_i$ et $w'_i = z'_i$ pour tout i.* □

Des résultats similaires sont valides pour $\mathbf{DRH} \cap \mathbf{LZE}$ et $\mathbf{DRH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$. Pour séparer deux factorisations normales distinctes par rapport à $\mathbf{DRH} \cap \mathbf{LZE}$ il suffit de considérer encore une fois les automates $\mathcal{C} = \mathcal{C}(u_0, A_1, \ldots, \mathcal{A}_l; q_l'; q_l, \ldots, A_n, u_n)$, définis après la proposition 5.3.1 et d'imposer des conditions appropriées.

Lemme 5.4.6 *Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(u_0, A_1, \ldots, \mathcal{A}_l; q_l'; q_l, \ldots, A_n, u_n)$ un automate comme celui défini après la proposition 5.3.1, et supposons qu'il satisfait les conditions supplémentaires suivantes : pour tous $1 \leq i, j \leq n$, $A_i = A_j$ ou $A_i \cap A_j = \emptyset$, la première lettre de u_i n'appartient pas à A_i, et, pour tout $1 \leq i \leq n-1$, si $c(u_i) \subseteq A_{i+1}$, alors $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$. Soit L le langage reconnu par $\mathcal{A}$. Alors, $S(L)$ est dans $\mathbf{DRG} \cap \mathbf{LZE}$ et ses sous-groupes sont dans la pseudo-variété engendrée par le groupe de transition $S(\mathcal{A}_l)$. Si $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour toute paire $i \neq j$, alors $S(L) \in \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$.* □

On remarque que l'automate $\mathcal{C}$ de (la première partie de) ce dernier lemme n'est pas obtenu à partir de l'automate du lemme 5.3.6 par l'imposition de la condition supplémentaire (5.1). En fait, l'automate du lemme 5.3.6 satisfait de plus la condition "pour tout $1 \leq i \leq n-1$ la dernière lettre de u_i appartient à A_{i+1}". Notons que le semigroupe syntaxique du langage reconnu par l'automate de l'exemple 5.3.7 n'appartient pas à **LZE**. Cela provient du fait que l'automate ne verifie pas la condition "$A_i = A_j$ ou $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$" du dernier lemme.

Théorème 5.4.7 *Soit $\mathbf{H}$ une pseudo-variété de groupes et soit $\mathbf{V} = \mathbf{DRH} \cap \mathbf{LZE}$ ou $\mathbf{DRH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$. Soient $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ et soient $x = u_0[w_1, A_1, g_1]u_1 \cdots [w_n, A_n, g_n]u_n$ et $y = v_0[z_1, B_1, h_1]v_1 \cdots [z_m, B_m, h_m]v_m$ des factorisations en forme normale. Alors, $x = y$ si et seulement si $n = m$, $u_i = v_i$, $w_i = z_i$, $A_i = B_i$ et $g_i = h_i$ pour tout i.* □

Dans le corollaire 5.4.2 nous avons prouvé que

$$(\mathbf{DRH} \vee \mathbf{DLH}) \cap \mathbf{LZE} = \mathbf{DOH} \cap \mathbf{LZE}$$

(et, donc, aussi $(\mathbf{DRH} \vee \mathbf{DLH}) \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}) = \mathbf{DOH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$).

Maintenant, notons que d'après le théorème 5.4.5 et le dernier théorème et son analogue pour $\mathbf{DLH} \cap \mathbf{LZE}$, si x et y sont deux éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{DOH} \cap \mathbf{LZE})$, alors x et y sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes restrictions à $\mathbf{DRH} \cap \mathbf{LZE}$ et $\mathbf{DLH} \cap \mathbf{LZE}$. Un argument similaire est valide pour $\mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$. Le théorème de Reiterman permet donc de déduire les égalités suivantes.

Corollaire 5.4.8 *Soit $\mathbf{H}$ une pseudo-variété de groupes. Alors,*

– $(\mathbf{DRH} \cap \mathbf{LZE}) \vee (\mathbf{DLH} \cap \mathbf{LZE}) = \mathbf{DOH} \cap \mathbf{LZE}$;
– $(\mathbf{DRH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})) \vee (\mathbf{DLH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})) = \mathbf{DOH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$. □

De façon à conclure l'étude de cette section, on va considérer maintenant les cas $\mathbf{DH} \cap \mathbf{LZE}$ et $\mathbf{DH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$. Les automates utilisés pour séparer les factorisations distinctes des éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap \mathbf{LZE})$ (resp. $\hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}))$) sont les automates $\mathcal{D} = \mathcal{D}(u_0, A_1, \ldots, \mathcal{A}_l; q_l'; q_l, \ldots, A_n, u_n)$ comme dans le lemme 5.3.4, où les A_i satisfont de plus la condition (5.1) (resp. la condition (5.2)).

Lemme 5.4.9 *Considérons l'automate $\mathcal{D} = \mathcal{D}(u_0, A_1, \ldots, \mathcal{A}_l; q_l'; q_l, \ldots, A_n, u_n)$ comme celui du lemme 5.3.4 avec $A_i = A_j$ ou $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour toute paire $1 \leq i, j \leq n$. Soit L le langage reconnu par l'automate $\mathcal{D}$. Alors, $S(L)$ appartient à $\mathbf{DG} \cap \mathbf{LZE}$ et ses sous-groupes appartiennent à la pseudo-variété engendrée par le groupe de transition $S(\mathcal{A}_l)$. Si $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour toute paire $i \neq j$, alors $S(L) \in \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$.* □

Théorème 5.4.10 *Soit* $\mathbf{H}$ *une pseudo-variété de groupes et soit* $\mathbf{V} = \mathbf{DH} \cap \mathbf{LZE}$ *ou* $\mathbf{DH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$. *Soient* $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ *et soient* $x = u_0[A_1, g_1]u_1 \cdots u_{n-1}[A_n, g_n]u_n$ *et* $y = v_0[B_1, h_1]v_1 \cdots v_{m-1}[B_m, h_m]v_m$ *des factorisations en forme normale. Alors,* $x = y$ *si et seulement si* $n = m$, $u_i = v_i$, $A_i = B_i$ *et* $g_i = h_i$ *pour tout* i. □

Dans le cas des intersections avec $\mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$, nous pouvons déduire de plus les décompositions suivantes.

Corollaire 5.4.11 *Soit* $\mathbf{H}$ *une pseudo-variété de groupes abéliens. Alors,*

– $\mathbf{DOH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}) = (\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}_1) \vee \mathbf{H}$;
– $\mathbf{DRH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}) = (\mathbf{R} \cap \mathbf{LJ}_1) \vee \mathbf{H}$;
– $\mathbf{DH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}) = (\mathbf{J} \cap \mathbf{LJ}_1) \vee \mathbf{H}$.

Pour prouver ce corollaire nous utiliserons le résultat suivant (voir l'étude conduite sur la pseudo-variété **Com** dans la section 3.4).

Proposition 5.4.12 *Soit* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *un alphabet et soit* $\mathbf{V}$ *une pseudo-variété de semigroupes commutatifs. Alors,* $\hat{F}_A(\mathbf{V})^1$ *est isomorphe au produit direct* $\hat{F}_{\{a_1\}}(\mathbf{V})^1 \times \ldots \times \hat{F}_{\{a_n\}}(\mathbf{V})^1$. □

Preuve du corollaire 5.4.11. Nous donnons, par exemple, la preuve de la première égalité. Soient $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{DOH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}))$. D'après le théorème de Reiterman, il suffit de prouver que, si $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}_1$ et $\mathbf{H}$ satisfont $x = y$, alors $x = y$. Donc, soient

$$x = u_0[w_1, A_1, g_1, w'_1]u_1 \cdots u_{n-1}[w_n, A_n, g_n, w'_n]u_n$$

et

$$y = v_0[z_1, B_1, h_1, z'_1]v_1 \cdots v_{m-1}[z_m, B_m, h_m, z'_m]v_m$$

des factorisations en forme normale et supposons que $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}_1$ et $\mathbf{H}$ satisfont $x = y$. Les restrictions de x et y à $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}_1$ sont, respectivement,

$$u_0(w_1, A_1, w'_1)u_1 \cdots (w_n, A_n, w'_n)u_n \qquad \text{et} \qquad v_0(z_1, B_1, z'_1)v_1 \cdots (z_m, B_m, z'_m)v_m$$

et ces factorisations sont en forme normale. Alors, d'après le théorème 5.4.5 on déduit immédiatement que $n = m$, $u_i = v_i$, $w_i = z_i$, $A_i = B_i$ et $w'_i = z'_i$ pour tout i.

Maintenant, comme $\mathbf{H} = (\mathbf{DOH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})) \cap \mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ satisfait $x = y$, on a dans $\hat{F}_A(\mathbf{H})$, $u_0 g_1 u_1 g_2 \cdots u_{n-1} g_n u_n = v_0 h_1 v_1 h_2 \cdots v_{n-1} h_n v_n$. Nous savons déjà que $u_i = v_i$ pour tout i. Par conséquent, par commutativité et simplifiabilité dans $\hat{F}_A(\mathbf{H})$ on déduit $g_1 g_2 \cdots g_n = h_1 h_2 \cdots h_n$. Par conséquent, comme les contenus des éléments réguliers sont disjoints deux à deux, on déduit de la proposition 5.4.12 que $g_i = h_i$ pour tout i. Cela montre que $x = y$ et conclut la preuve. □

Notons qu'on n'a pas de résultat similaire pour $\mathbf{LZE}$. Par exemple, l'égalité $\mathbf{DOH} \cap \mathbf{LZE} = (\mathbf{DA} \cap \mathbf{LZE}) \vee \mathbf{H}$ est fausse pour toute pseudo-variété de groupes $\mathbf{H}$ non triviale.

En effet, soient $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{DOH} \cap \mathbf{LZE})$ tels que $c(x) \cap c(y) = \emptyset$ et x est un élément régulier non idempotent. Alors, $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LZE}$ et $\mathbf{H}$ satisfont $xy^\omega x^\omega = x^\omega y^\omega x$ mais, d'après le théorème 5.4.5, $\mathbf{DOH} \cap \mathbf{LZE}$ ne la vérifie pas.

Notons que $\mathbf{V} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}) = \mathbf{V} \cap \mathbf{LJ}_1$ pour toute pseudo-variété apériodique $\mathbf{V}$. Les cas apériodiques $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}_1$, $\mathbf{R} \cap \mathbf{LJ}_1$ et $\mathbf{J} \cap \mathbf{LJ}_1$, considérés dans cette section, sont l'objet de l'article [33] de l'auteur.

5.5 Opérations implicites sur $\mathbf{DO} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$

Cette section a pour objet l'étude de la structure des semigroupes d'opérations implicites sur les sous-pseudo-variétés $\mathbf{V} = \mathbf{W} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$ de $\mathbf{DO} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$ avec $\mathbf{W}$ comme d'habitude. Remarquons que $\mathbf{Com} * \mathbf{D}$ est une sous-pseudo-variété de $\mathbf{LZE}$. En fait, il est clair que $\mathbf{Com} * \mathbf{D} \subseteq \mathbf{LCom} \subseteq \mathbf{LZE}$. Encore une fois nous décrivons des factorisations "normales", en termes de mots et d'éléments réguliers, pour les éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$. Toutefois, contrairement aux cas considérés jusqu'ici, ces factorisations ne sont pas nécessairement uniques. Cependant, nous prouvons que, étant donnés deux éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$, écrits dans telle forme "normale", on peut décider s'ils sont égaux ou non.

Naturellement, la notion de forme normale pour un élément de $\hat{F}_A(\mathbf{W} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$ est obtenue à partir de la même notion que pour les éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{W} \cap \mathbf{LZE})$ en faisant un petit ajustement, "dicté" par le résultat suivant.

Proposition 5.5.1 *Soient A un alphabet, $x, y, z \in \hat{F}_A(\mathbf{DO} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))^1$ et $B, C \subseteq A$. Alors, dans $\hat{F}_A(\mathbf{DO} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$,*

(1) $[w_1, B, g_1, w'_1]x[w_2, B, g_2, w'_2] = [w_1, B, g_1g_2, w'_1]x[w_2, B, 1, w'_2] =$
$[w_1, B, 1, w'_1]x[w_2, B, g_1g_2, w'_2]$ *;*

(2) $[w_1, B, g_1, w'_1]x[z_1, C, h_1, z'_1]y[w_2, B, g_2, w'_2]z[z_2, C, h_2, z'_2] =$
$[w_1, B, g_1, w'_2]z[z_2, C, h_1, z'_1]y[w_2, B, g_2, w'_1]x[z_1, C, h_2, z'_2]$.

En particulier,

$$[w_1, B, g_1, w'_1]x[w_2, B, g_2, w'_2]y[w_3, B, g_3, w'_3] =$$
$$[w_1, B, g_1, w'_2]y[w_3, B, g_2, w'_1]x[w_2, B, g_3, w'_3].$$

Preuve. Posons $\mathbf{V} = \mathbf{DO} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$, $p_i = [w_i, B, g_i, w'_i]$ et $q_i = [z_i, C, h_i, z'_i]$ pour $i = 1, 2$. On a $p_1 = p_1 p_1^\omega p_2^\omega p_1^\omega$ et $p_2 = p_2^\omega p_2 p_2^\omega$ d'après la proposition 5.1.3, puisque $c(p_1) = c(p_2) = B$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} p_1 x p_2 &= p_1 p_1^\omega \boldsymbol{p_2^\omega} \underline{p_1^\omega x} \boldsymbol{p_2^\omega} \underline{p_2} \boldsymbol{p_2^\omega} \\ &= p_1 p_1^\omega \boldsymbol{p_2^\omega} \underline{p_2} \boldsymbol{p_2^\omega} \underline{p_1^\omega x} \boldsymbol{p_2^\omega} \qquad \text{car } \mathbf{V} \subseteq \mathbf{LCom} \\ &= [w_1, B, g_1g_2, w'_1]x[w_2, B, 1, w'_2]. \end{aligned}$$

La deuxième égalité de (1) peut être prouvée symétriquement.

En outre, on a

$$\begin{aligned}
p_1 x q_1 y p_2 z q_2 &= p_1 \boldsymbol{p_1^\omega} \underline{x} \boldsymbol{q_1^\omega} q_1 y p_2^\omega \boldsymbol{p_1^\omega} \underline{p_2^\omega z q_2^\omega} \boldsymbol{q_1^\omega} q_2^\omega q_2 \\
&\qquad \text{puisque } c(p_1) = c(p_2) = B \text{ et } c(q_1) = c(q_2) = C \\
&= p_1 \boldsymbol{p_1^\omega} \underline{p_2^\omega z q_2^\omega} \boldsymbol{q_1^\omega} q_1 y p_2^\omega \boldsymbol{p_1^\omega} \underline{x} \boldsymbol{q_1^\omega} q_2^\omega q_2 \qquad \text{car } \mathbf{V} \subseteq \mathbf{Com} * \mathbf{D} \\
&= [w_1, B, g_1, w'_2] z [z_2, C, h_1, z'_1] y [w_2, B, g_2, w'_1] x [z_1, C, h_2, z'_2]. \square
\end{aligned}$$

Si $\mathbf{V}$ est l'une des pseudo-variétés $\mathbf{W} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$, avec $\mathbf{W} \in \{\mathbf{DOH}, \mathbf{DRH}, \mathbf{DH}\}$, on dit qu'une factorisation

$$x = u_0 x_1 u_1 \cdots u_{n-1} x_n u_n$$

d'un élément $x \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ est *normale* si :

- $u_i \in A^*$, $u_0 \neq 1$ si $x = u_0$;
- $x_i \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ $(1 \leq i \leq n)$ est régulier ;
- pour tout $1 \leq i \leq n$ tel que u_i (resp. u_{i-1}) n'est pas le mot vide, la première (resp. dernière) lettre de u_i (resp. u_{i-1}) n'appartient pas à $c(x_i)$;
- pour toute paire $1 \leq i, j \leq n$, soit $c(x_i) = c(x_j)$ soit $c(x_i) \cap c(x_j) = \emptyset$;
- si u_i $(1 \leq i \leq n-1)$ est le mot vide, alors $c(x_i) \cap c(x_{i+1}) = \emptyset$;
- si $c(x_i) = c(x_j)$ pour des $i \neq j$, alors au moins un de x_i et x_j est idempotent (c'est-à-dire qu'à contenu donné, au plus un des éléments réguliers x_i n'est pas idempotent).

Notons que cette définition de factorisation normale diffère de celle des éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{W} \cap \mathbf{LZE})$ seulement dans l'imposition de la condition suivante

$$\text{si } c(x_i) = c(x_j) \text{ pour des } i \neq j, \text{ alors au moins un de } x_i \text{ et } x_j \text{ est idempotent.} \tag{5.3}$$

L'imposition de cette condition est une conséquence naturelle du point (1) de la proposition 5.5.1.

Proposition 5.5.2 *Soit* $\mathbf{V} = \mathbf{W} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$ *avec* $\mathbf{W} \in \{\mathbf{DOH}, \mathbf{DRH}, \mathbf{DH}\}$. *Tout élément de* $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ *admet une factorisation normale.* □

Exemple 5.5.3 *Soit* $\mathbf{V}$ *l'une des pseudo-variétés* $\mathbf{W} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$. *On note qu'une factorisation normale d'un élément* $x \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ *n'est pas nécessairement unique. Par exemple, supposons que* x *est de la forme* $x = y^\omega a z^\omega a y^\omega a^2 z^\omega$ *pour des* $y, z \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ *et* $a \in A$ *tels que* $c(y) \cap c(z) = \emptyset$ *et* $a \notin c(y), c(z)$. *Alors, cette factorisation de* x *est en forme normale et, comme* $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{Com} * \mathbf{D}$, $x = y^\omega a^2 z^\omega a y^\omega a z^\omega$ *est une autre factorisation normale de* x. ■

Les premiers semigroupes d'opérations implicites à être décrits dans cette section seront les semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$. Notons que, pour toute pseudo-variété $\mathbf{H}$ de groupes, $(\mathbf{Com} * \mathbf{D}) \cap \mathbf{H} = \mathbf{H} \cap \mathbf{Ab}$. Donc, dans cette section on peut supposer que $\mathbf{H}$ est une pseudo-variété de groupes abéliens.

Comme nous le verrons, étant donnés deux éléments $x = u_0 x_1 u_1 \cdots u_{n-1} x_n u_n$ et $y = v_0 y_1 v_1 \cdots v_{m-1} y_m v_m$ de $\hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$ écrits en forme normale, pour décider si x et y sont le même élément ou non il ne suffit pas de regarder seulement chaque facteur u_i et x_i (et v_j et y_j) isolé. On doit aussi comparer les facteurs de x et y de la forme $x_i u_i x_{i+1}$ et $y_j v_j y_{j+1}$. Le résultat qu'on veut prouver est le suivant.

Théorème 5.5.4 *Soit* $\mathbf{H}$ *une pseudo-variété de groupes abéliens, soient* x *et* y *deux éléments de* $\hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$ *et soient* $x = u_0[A_1, g_1]u_1 \cdots u_{n-1}[A_n, g_n]u_n$ *et* $y = v_0[B_1, h_1]v_1 \cdots v_{m-1}[B_m, h_m]v_m$ *des factorisations en forme normale. Alors,* $x = y$ *si et seulement si*

(1) $n = m$, $u_0 = v_0$, $A_1 = B_1$, $A_n = B_m$, $u_n = v_m$ *;*

(2) *si* $n \geq 2$, *alors il existe une permutation* α *de l'ensemble* $\{1, \ldots, n-1\}$ *telle que, pour tout* $1 \leq i \leq n-1$, *le triplet* (B_i, v_i, B_{i+1}) *est égal à* $(A_{\alpha(i)}, u_{\alpha(i)}, A_{\alpha(i)+1})$ *;*

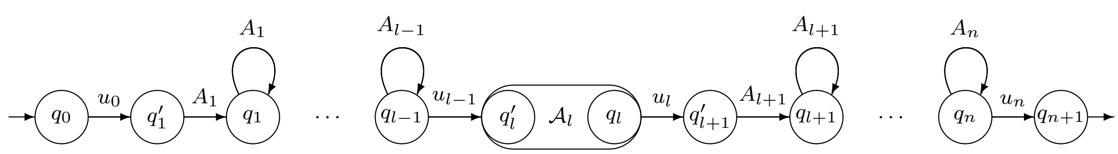
(3) *pour tout* $1 \leq i \leq n$, *il existe une permutation* β *de l'ensemble* $\{1, \ldots, n\}$ *telle que* $h_i = g_{\beta(i)}$.

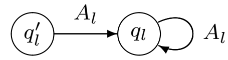
Pour prouver ce résultat nous avons besoin, comme d'habitude, de définir des automates destinés à séparer les factorisations d'éléments distincts de $\hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$. Comme il est évident, ces automates ne sont pas supposés séparer, par exemple, les factorisations normales

$$x = y^\omega a z^\omega a y^\omega a^2 z^\omega \qquad \text{et} \qquad x = y^\omega a^2 z^\omega a y^\omega a z^\omega,$$

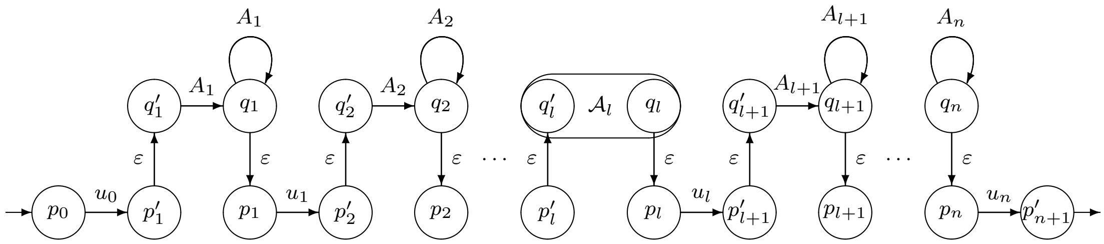
comme dans l'exemple 5.5.3, d'un élément $x \in \hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$. Un tel automate, disons $\mathcal{G}$, est construit comme une "union" d'un nombre fini de certaines formes d'automates $\mathcal{D}$ comme dans le lemme 5.4.9 (dans le sens que le langage reconnu par $\mathcal{G}$ est l'union des langages reconnus par ces automates $\mathcal{D}$). D'une façon informelle, on peut dire que l'automate $\mathcal{G}$ est obtenu à partir d'un unique automate $\mathcal{D}$ mais en permettant que les transitions $q_i \xrightarrow{u_i} q'_{i+1}$ soient travérsées dans un ordre différent de leur ordre "naturel" (comme il est évident, tous les ordres ne seront pas permis). Soyons plus précis.

Soit $\mathcal{D} = \mathcal{D}(u_0, A_1, u_1, \ldots, u_{l-1}, \mathcal{A}_l; q'_l; q_l, u_l, \ldots, A_n, u_n)$ l'automate

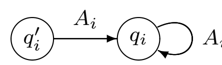


comme celui du lemme 5.4.9, où $u_0, \ldots, u_n \in A^*$ et $\emptyset \neq A_1, \ldots, A_n \subseteq A$ sont tels que : pour tout $1 \leq i \leq n$ tel que u_i (resp. u_{i-1}) n'est pas le mot vide, la première (resp. dernière) lettre de u_i (resp. u_{i-1}) n'appartient pas à A_i ; si $u_i = 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$ alors $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$; $A_i = A_j$ ou $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour toute paire $1 \leq i, j \leq n$; $\mathcal{A}_l$ $(1 \leq l \leq n)$ soit est l'automate 

, soit est un automate de groupe non trivial sur l'alphabet A_l avec ensemble d'états Q_l et $q'_l, q_l \in Q_l$ sont deux états distincts. Maintenant, considérons l'automate $\mathcal{D}'$ suivant

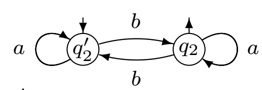


et notons que le langage reconnu par $\mathcal{D}'$ est le même que le langage reconnu par $\mathcal{D}$. Finalement, soit $\mathcal{G} = \mathcal{G}(u_0, A_1, u_1, \ldots, u_{l-1}, \mathcal{A}_l; q'_l; q_l, u_l, \ldots, A_n, u_n)$ l'automate obtenu de $\mathcal{D}'$ par l'addition des transitions suivantes : si $A_i = A_j$ pour des $i \neq j$, alors il existe dans $\mathcal{G}$ des transitions $p'_i \xrightarrow{\varepsilon} q'_j$, $p'_j \xrightarrow{\varepsilon} q'_i$, $q_i \xrightarrow{\varepsilon} p_j$ et $q_j \xrightarrow{\varepsilon} p_i$.

Pour tout $1 \leq i \leq n$ avec $i \neq l$, notons $\mathcal{A}_i$ l'automate  . On dit qu'un mot $w \in A^+$ est *reconnu* par l'automate $\mathcal{G}$ si w est l'étiquette d'un chemin $\mathcal{P}$ dans l'automate qui va de p_0 à p'_{n+1} et qui passe dans chaque état p_i $(0 \leq i \leq n)$ et q'_j $(1 \leq j \leq n)$ exactement une fois (i.e., le chemin passe par chaque transition $p_i \xrightarrow{u_i} p'_{i+1}$ et par chaque automate $\mathcal{A}_j$ exactement une fois). Un tel chemin est dit *réussi*. Notons que le chemin $\mathcal{P}$ est de la forme

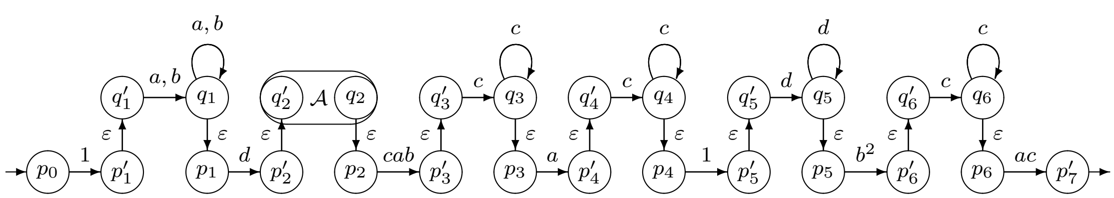
$$p_0 \xrightarrow{u_0} p'_1 \xrightarrow{\varepsilon} q'_{j_1} \xrightarrow{w_{j_1}} q_{j_1} \xrightarrow{\varepsilon} p_{r_1} \xrightarrow{u_{r_1}} p'_{r_1+1} \xrightarrow{\varepsilon} q'_{j_2} \xrightarrow{w_{j_2}} q_{j_2} \cdots q'_{j_n} \xrightarrow{w_{j_n}} q_{j_n} \xrightarrow{\varepsilon} p_n \xrightarrow{u_n} p'_{n+1}$$

où $q'_{j_k} \xrightarrow{w_{j_k}} q_{j_k}$ représente un chemin étiqueté w_{j_k} dans l'automate $\mathcal{A}_{j_k}$. Par conséquent, w est de la forme $w = u_0 w_{j_1} u_{r_1} w_{j_2} u_{r_2} \cdots w_{j_n} u_n$ avec $w_{j_k} \in A^+_{j_k}$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Notons aussi que $A_1 = A_{j_1} = A_{r_1}$, $A_{r_{k-1}+1} = A_{j_k} = A_{r_k}$ pour tout $2 \leq k \leq n-1$ et $A_n = A_{j_n} = A_{r_{n-1}+1}$.

Exemple 5.5.5 *Soit $A = \{a, b, c, d\}$, soit $\mathcal{A} =$*  *l'automate à groupe sur l'alphabet $\{a, b\}$, et considérons l'automate*

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(1, \{a, b\}, d, \mathcal{A}; q'_2; q_2, cab, \{c\}, a, \{c\}, 1, \{d\}, b^2, \{c\}, ac).$$

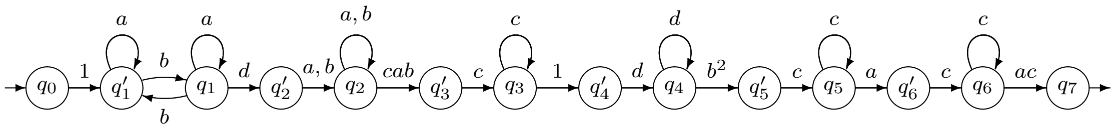
L'automate $\mathcal{G}$ peut être représenté comme suit



où nous omettons les ε-transitions $p'_1 \to q'_2$, $p'_2 \to q'_1$, $q_1 \to p_2$, $q_2 \to p_1$, $p'_3 \to q'_4$, etc. Le langage reconnu par $\mathcal{G}$ est

$$L = (\{a, b\}^+ dL' + L'd\{a, b\}^+) cabc^+(ac^+d^+b^2 + d^+b^2c^+a)c^+ac,$$

où $L' = a^*ba^*(ba^*ba^*)^*$ est le langage reconnu par $\mathcal{A}$. Notons que L est l'union de quatre langages $(\mathbf{DG} \cap \mathbf{LZE})$-reconnaissables. Par exemple, $L'd\{a,b\}^+cabc^+d^+b^2c^+ac^+ac$ est le langage reconnu par l'automate

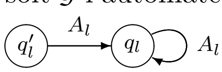


qui satisfait aux conditions du lemme 5.4.9. ■

Lemme 5.5.6 *Considérons l'automate $\mathcal{G}$ ci-dessus et soit L le langage reconnu par $\mathcal{G}$. Alors, $S(L)$ est dans $\mathbf{DG} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$ et ses sous-groupes sont dans la pseudo-variété engendrée par le groupe de transition $S(\mathcal{A}_l)$.*

De plus, si $w \in A^+$, k est un exposant de $S(L)$ tel que $k > |u_0 \cdots u_n| + n$ et w^k est l'étiquette d'un chemin dans $\mathcal{G}$, alors il existe un chemin $\mathcal{P}$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$ tels que : $\mathcal{P}$ est étiqueté w^k et ne contient pas de ε-transitions ; $w \in A_i^+$ et le chemin $\mathcal{P}$ commence en q_i' ou q_i (dans Q_l si $i = l$) et termine en q_i (dans Q_l si $i = l$). □

Maintenant nous sommes capables de prouver le résultat annoncé.

Preuve du théorème 5.5.4. Supposons tout d'abord que $x = y$. Soit $l \in \{1, \ldots, n\}$ et soit $\mathcal{G}$ l'automate $\mathcal{G}(u_0, A_1, u_1, \ldots, u_{l-1}, \mathcal{A}_l; q_l'; q_l, u_l, \ldots, A_n, u_n)$ où $\mathcal{A}_l$ est l'automate  , soit L le langage reconnu par $\mathcal{G}$ et soit S le semigroupe syntaxique de L. D'après le lemme 5.5.6, S appartient à $\mathbf{J} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$ et donc il appartient aussi à $\mathbf{DH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$.

Soit $k > |u_0 \cdots u_n| + n$ un exposant de S. Comme dans la preuve du théorème 5.3.5, on peut prouver que $\mathcal{G}$ reconnaît un mot w' de la forme $w' = v_0 y_1^k v_1 y_2^k \cdots y_m^k v_m$ où, pour tout $1 \leq i \leq m$, y_i est un mot de contenu B_i. Soit $\mathcal{P}$ un chemin réussi dans $\mathcal{A}$ étiqueté w'. En particulier, pour tout $1 \leq i \leq m$, ${y_i}^k$ est l'étiquette d'un sous-chemin $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{P}$ et, par le lemme 5.5.6, il existe $1 \leq j_i \leq n$ tel que $y_i \in A_{j_i}^+$ d'où $B_i \subseteq A_{j_i}$. Par symétrie, on a aussi $A_{j_i} \subseteq B_r$ pour un certain $1 \leq r \leq m$. Cela entraîne $B_i \subseteq B_r$ et donc, par définition de factorisation normale, on déduit $B_i = B_r$. Par conséquent $B_i = A_{j_i}$. Maintenant, comme la dernière (resp. première) lettre du mot $y_{i-1}^k v_{i-1}$ (resp. $v_i y_{i+1}^k$) n'appartient pas à B_i, on peut supposer sans perte de généralité que le chemin $\mathcal{Q}$ est de la forme $t_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_{j_i}' \overset{y_i^k}{\dashrightarrow} q_{j_i} \xrightarrow{\varepsilon} t_2$ pour des états t_1 et t_2. Cela implique $m \leq n$ et, par symétrie, il s'ensuit que $n = m$. Par conséquent, le chemin $\mathcal{P}$ est de la forme

$$p_0 \xrightarrow{u_0} p_1' \xrightarrow{\varepsilon} q_{j_1}' \overset{y_1^k}{\dashrightarrow} q_{j_1} \xrightarrow{\varepsilon} p_{r_1} \xrightarrow{u_{r_1}} p_{r_1+1}' \xrightarrow{\varepsilon} q_{j_2}' \overset{y_2^k}{\dashrightarrow} q_{j_2} \cdots\ q_{j_n}' \overset{y_n^k}{\dashrightarrow} q_{j_n} \xrightarrow{\varepsilon} p_n \xrightarrow{u_n} p_{n+1}'$$

et la correspondance $i \mapsto r_i$ est une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n-1\}$. Maintenant, comme dans des preuves antérieures, on déduit que $u_0 = v_0$, $u_n = v_n$, $A_1 = A_{j_1} = B_1$, $A_n = A_{j_n} = B_n$ et $v_i = u_{r_i}$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. De plus, comme u_{r_i} est l'étiquette d'une transition de p_{r_i} pour p_{r_i+1}', ce qui signifie que y_i^k (resp. y_{i+1}^k) est un mot de contenu A_{r_i} (resp. A_{r_i+1}), on déduit que $B_i = A_{r_i}$ et que $B_{i+1} = A_{r_i+1}$. Cela montre les points (1) et (2).

Maintenant, posons $x_i = [A_i, g_i]$ et $y_i = [A_i, h_i]$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Pour prouver le point (3), supposons que x_i n'est pas idempotent pour un certain $1 \leq i \leq n$, i.e., que $g_i \neq 1$. Rapellons qu'il n'existe pas d'autre x_j de contenu A_i qui ne soit pas idempotent, et qu'il existe au plus un tel y_j. En utilisant des arguments similaires à ceux de la preuve du théorème 5.3.5, on peut prouver que, pour tout groupe A_i-engendré G de $\mathbf{H}$, $(x_i)_G$ coïncide avec $(y_j)_G$ pour un certain $1 \leq j \leq n$ tel que $A_i = A_j$. Maintenant, comme x_i n'est pas idempotent, nous déduisons qu'il existe $1 \leq k \leq n$ tel que y_k n'est pas idempotent et que $(x_i)_G$ coïncide avec $(y_k)_G$ pour tout G. Par conséquent $g_i = h_k$ et le point (3) est prouvé. (Notons que, en alternative, on pourrait prouver le point (3) en utilisant des arguments analogues à ceux de la preuve du corollaire 5.4.11, puisque $(\mathbf{DH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})) \cap \mathbf{G}$ est une pseudo-variété de groupes abéliens et il existe un x_i et un y_j de contenu fixé qui ne soient pas idempotents.)

Prouvons maintenant la réciproque. Si $n \leq 1$ ou $n = 2$ et $A_1 \neq A_2$ il est clair que $x = y$. Si $n = 2$ et $A_1 = A_2$, alors l'égalité $x = y$ est une conséquence simple du point (1) de la proposition 5.5.1. Donc, supposons que $n \geq 3$. Dans la suite nous dirons qu'une factorisation normale de y de la forme $y = w_0[C_1, f_1]w_1 \cdots w_{n-1}[C_n, f_n]w_n$ satisfait la condition $(*)$ si elle satisfait les conditions (1) à (3) de l'énoncé avec w_i, C_i et f_i à la place de v_i, B_i et h_i respectivement. Pour simplifier les notations nous noterons $\bar{C}$ (avec $C \subseteq A$) tout élément régulier de $\hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$ avec un contenu donné C. Cette notation est un peu ambiguë puisqu'elle "cache" la restriction des éléments à $\mathbf{H}$. Cependant, comme nous travaillons seulement avec des factorisations normales, avec un même contenu C il existe au plus un seul élément régulier qui n'est pas idempotent. De plus, d'après le point (1) de la proposition 5.5.1, dans un produit, deux facteurs réguliers de même contenu peuvent être échangés.

On commence par prouver que y admet une factorisation normale de la forme

$$y = u_0\bar{A}_1 u_1 \bar{A}_2 w_2 \bar{C}_3 \cdots \bar{C}_{n-1} w_{n-1} \bar{A}_n u_n \tag{5.4}$$

satisfaisant la condition $(*)$.

Supposons que $u_1 \neq v_1$ ou $A_2 \neq B_2$. Par hypothèse, il existe $2 \leq k \leq n-1$ tel que $A_1 = B_k$, $u_1 = v_k$ et $A_2 = B_{k+1}$. Donc

$$y = u_0\bar{A}_1 v_1 \bar{B}_2 \cdots \bar{B}_{k-1} v_{k-1} \underline{\bar{A}_1 u_1 \bar{A}_2} v_{k+1} \bar{B}_{k+1} \cdots \bar{B}_{n-1} v_{n-1} \bar{A}_n u_n. \tag{5.5}$$

Si $A_2 = A_1$, on déduit du point (2) de la proposition 5.5.1, que

$$\begin{aligned} y &= u_0 \bar{\mathbf{A}}_\mathbf{1} \underline{v_1 \bar{B}_2 \cdots v_{k-1}} \bar{\mathbf{A}}_\mathbf{1} \underline{u_1} \bar{\mathbf{A}}_\mathbf{1} v_{k+1} \cdots \bar{B}_{n-1} v_{n-1} \bar{A}_n u_n \\ &= u_0 \bar{\mathbf{A}}_\mathbf{1} \underline{u_1} \bar{\mathbf{A}}_\mathbf{1} \underline{v_1 \bar{B}_2 \cdots v_{k-1}} \bar{\mathbf{A}}_\mathbf{1} v_{k+1} \cdots \bar{B}_{n-1} v_{n-1} \bar{A}_n u_n \\ &= u_0 \bar{A}_1 u_1 \bar{A}_2 v_1 \bar{B}_2 \cdots v_{k-1} \bar{A}_1 v_{k+1} \cdots \bar{B}_{n-1} v_{n-1} \bar{A}_n u_n \end{aligned}$$

et cette factorisation est de la forme (5.4). De plus, il est clair qu'elle satisfait la condition $(*)$.

Maintenant, supposons que $A_2 \neq A_1$. Comme le cas $B_2 = B_1 (= A_1)$ peut être traité comme le cas $A_2 = A_1$, on peut supposer aussi que $B_2 \neq A_1$. Dans ce cas $k > 2$ nécessairement. Si $A_2 = B_2$, en appliquant le point (2) de la proposition 5.5.1, on déduit de (5.5) que

$$\begin{aligned} y &= u_0 \boldsymbol{\bar{A}_1} v_1 \boldsymbol{\bar{A}_2} v_2 \cdots v_{k-1} \boldsymbol{\bar{A}_1} u_1 \boldsymbol{\bar{A}_2} v_{k+1} \cdots v_{n-1} \bar{A}_n u_n \\ &= u_0 \boldsymbol{\bar{A}_1} u_1 \boldsymbol{\bar{A}_2} v_2 \cdots v_{k-1} \boldsymbol{\bar{A}_1} v_1 \boldsymbol{\bar{A}_2} v_{k+1} \cdots v_{n-1} \bar{A}_n u_n. \end{aligned}$$

Supposons, maintenant, que $A_2 \neq B_2$. S'il existe $k+1 < i \leq n$ tel que $A_1 = B_i$ on a

$$\begin{aligned} y &= u_0 \boldsymbol{\bar{A}_1} v_1 \bar{B}_2 \cdots v_{k-1} \boldsymbol{\bar{A}_1} u_1 \bar{A}_2 v_{k+1} \cdots v_{i-1} \boldsymbol{\bar{A}_1} v_i \cdots \bar{B}_{n-1} v_{n-1} \bar{A}_n u_n \\ &= u_0 \boldsymbol{\bar{A}_1} u_1 \bar{A}_2 v_{k+1} \cdots v_{i-1} \boldsymbol{\bar{A}_1} v_1 \bar{B}_2 \cdots v_{k-1} \boldsymbol{\bar{A}_1} v_i \cdots \bar{B}_{n-1} v_{n-1} \bar{A}_n u_n. \end{aligned}$$

Maintenant on suppose que, pour tout $k+1 < i \leq n$, $A_1 \neq B_i$. S'il existe $2 \leq i < k$ tel que $A_2 = B_i$ on a

$$\begin{aligned} y &= u_0 \boldsymbol{\bar{A}_1} v_1 \bar{B}_2 \cdots v_{i-1} \boldsymbol{\bar{A}_2} v_{i+1} \cdots v_{k-1} \boldsymbol{\bar{A}_1} u_1 \boldsymbol{\bar{A}_2} v_{k+1} \cdots \bar{B}_{n-1} v_{n-1} \bar{A}_n u_n \\ &= u_0 \boldsymbol{\bar{A}_1} u_1 \boldsymbol{\bar{A}_2} v_{i+1} \cdots v_{k-1} \boldsymbol{\bar{A}_1} v_1 \bar{B}_2 \cdots v_{i-1} \boldsymbol{\bar{A}_2} v_{k+1} \cdots \bar{B}_{n-1} v_{n-1} \bar{A}_n u_n. \end{aligned}$$

Assumons, maintenant, que pour tout $2 \leq i < k$, $A_2 \neq B_i$. Comme $B_1 = A_1$ et $A_1 \neq A_2$, le triplet (A_1, v_1, B_2) est égal au triplet (A_l, u_l, A_{l+1}) pour un certain $3 \leq l \leq n-1$. Donc,

$$x = u_0 \bar{A}_1 u_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{l-1} u_{l-1} \underline{\bar{A}_1 v_1 \bar{B}_2} u_{l+1} \bar{A}_{l+1} \cdots u_{n-1} \bar{A}_n u_n.$$

De plus, l ne peut pas être égal à 3. En effet, supposons par contradiction que $l = 3$. Alors,

$$x = u_0 \bar{A}_1 u_1 \bar{A}_2 u_2 \bar{A}_1 v_1 \bar{B}_2 u_4 \bar{A}_5 \cdots u_{n-1} \bar{A}_n u_n,$$

et il existe $3 \leq i \leq n-1$ tel que $A_2 = B_i$ et $A_1 = B_{i+1}$ (et $u_2 = v_i$). Par conséquent, soit il existe $k+1 < i \leq n$ tel que $A_1 = B_i$, soit il existe $2 \leq i < k$ tel que $A_2 = B_i$. Mais cela contredit nos hypothèses. Donc, $l > 3$.

Maintenant, nous affirmons qu'il existe $3 \leq h \leq l-1$ tel que $A_h = B_r = B_s \neq A_1$ pour des $2 \leq r < k$ et $k+1 < s \leq n$. En fait, on a

$$\forall i \in \{2, \ldots, l-1\} \exists j \in \{1, \ldots, n-1\},\ A_i = B_j \text{ et } A_{i+1} = B_{j+1}. \tag{5.6}$$

En particulier, pour $i = 2$, on a $A_2 = B_j$ et $A_3 = B_{j+1}$ pour un certain $1 \leq j \leq n-1$. Comme, par hypothèse, $A_2 \neq B_j$ pour tout $2 \leq j < k$ on a $j \geq k$. De plus, $B_k = A_1 \neq A_2$. Donc, $j \neq k$ et on a $A_3 = B_j$ pour un $k+1 < j \leq n$. Notons que cela entraîne $A_3 \neq A_1$ d'après nos hypothèses. Considérons, maintenant, $i = l-1$ dans (5.6). On a $A_{l-1} = B_j$ et $(A_1 =) A_l = B_{j+1}$ pour un $1 \leq j \leq n-1$. Mais $B_{k+1} = A_2 \neq A_1$. Donc, $j \neq k$ et comme $A_1 \neq B_j$ pour tout $j > k+1$ on déduit que $A_{l-1} = B_j$ pour un certain $1 \leq j < k$. Maintenant, il est clair par (5.6) que l'affirmation est valide.

Par conséquent, y est égal à

$$
\begin{aligned}
& u_0 \bar{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{1}} v_1 \bar{B}_2 \cdots v_{r-1} \bar{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{h}} v_{r+1} \cdots v_{k-1} \bar{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{1}} u_1 \bar{A}_2 v_{k+1} \cdots v_{s-1} \bar{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{h}} v_{s+1} \cdots v_{n-1} \bar{A}_n u_n \\
= \; & u_0 \bar{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{1}} u_1 \bar{A}_2 v_{k+1} \cdots v_{s-1} \bar{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{h}} v_{r+1} \cdots v_{k-1} \bar{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{1}} v_1 \bar{B}_2 \cdots v_{r-1} \bar{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{h}} v_{s+1} \cdots v_{n-1} \bar{A}_n u_n .
\end{aligned}
$$

Donc, dans tous les cas possibles, y admet une factorisation normale de la forme (5.4) satisfaisant la condition $(*)$.

En itérant les arguments ci-dessus, on montre que y admet une factorisation de la forme $u_0 \bar{A}_1 u_1 \bar{A}_2 u_2 \bar{A}_3 \cdots u_{n-1} \bar{A}_n u_n$ satisfaisant la condition $(*)$. Maintenant, en appliquant le point (3) de l'énoncé on déduit du point (1) de la proposition 5.5.1 que $x = y$. $\square$

Cette dernière preuve montre, en particulier, que étant donnés deux éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$ écrits en forme normale, ces éléments sont égaux si et seulement si on peut passer d'une forme normale à l'autre en utilisant un nombre fini de fois les “régles de réécriture” suivantes

$$x_1[B, g_1]x_2[C, h_1]x_3[B, g_2]x_4[C, h_2]x_5 \mapsto x_1[B, g_1]x_4[C, h_1]x_3[B, g_2]x_2[C, h_2]x_5$$

$$x_1[B, g_1]x_2[B, g_2]x_3[B, g_3]x_4 \mapsto x_1[B, g_1]x_3[B, g_2]x_2[B, g_3]x_4$$

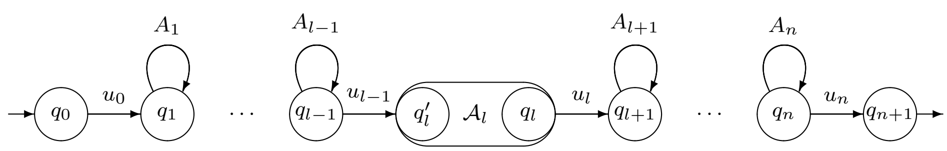
$$x_1[B, 1]x_2[B, g]x_3 \mapsto x_1[B, g]x_2[B, 1]x_3$$

$$x_1[B, g]x_2[B, 1]x_3 \mapsto x_1[B, 1]x_2[B, g]x_3$$

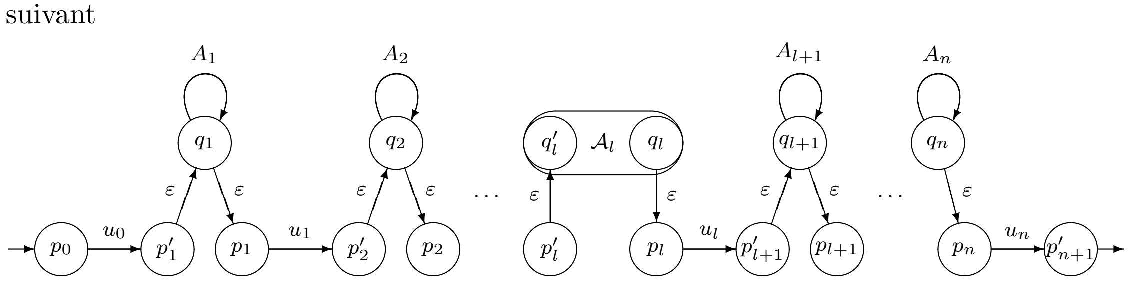
données par la proposition 5.5.1.

Les résultats précédents peuvent être adaptés facilement aux cas $\mathbf{DOH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$ et $\mathbf{DRH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$. Les automates utilisés sont les suivants.

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(u_0, A_1, u_1, \ldots, \mathcal{A}_l; q_l'; q_l, u_l, \ldots, A_n, u_n)$ un automate



comme celui défini après la proposition 5.3.1, i.e., où $u_0, \ldots, u_n \in A^*$ et $\emptyset \neq A_1, \ldots, A_n \subseteq A$ sont tels que $u_i \neq 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$ et, $\mathcal{A}_l$ est un automate de groupe sur l'alphabet A_l avec ensemble d'états Q_l et q_l, q_l' sont deux états de Q_l (contrairement au cas $\mathbf{DH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$, cette fois les états q_l et q_l' peuvent coïncider). Soit aussi $A_i = A_j$ ou $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour toute paire $1 \leq i, j \leq n$. Maintenant, considérons l'automate $\mathcal{C}'$ suivant



Finalement, soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}(u_0, A_1, u_1, \ldots, \mathcal{A}_l; q'_l; q_l, \ldots, A_n, u_n)$ l'automate obtenu de $\mathcal{C}'$ par l'addition des transitions suivantes : si $A_i = A_j$ pour des $i \neq j$, alors il existe dans $\mathcal{H}$ les transitions suivantes $p'_i \xrightarrow{\varepsilon} q_j$ (resp. $p'_i \xrightarrow{\varepsilon} q'_l$ si $j = l$), $q_i \xrightarrow{\varepsilon} p_j$ et vice versa.

Lemme 5.5.7 *Considérons un automate* $\mathcal{H} = \mathcal{H}(u_0, A_1, \ldots, \mathcal{A}_l; q'_l; q_l, \ldots, A_n, u_n)$ *comme celui ci-dessus satisfaisant la condition supplémentaire* $(*)$ *suivante : pour tout* $1 \leq i \leq n-1$, $c(u_i)$ *n'est contenu ni dans* A_i *ni dans* A_{i+1}. *Soit* L *le langage reconnu par* $\mathcal{H}$. *Alors,* $S(L)$ *est dans* $\mathbf{DO} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$ *et ses sous-groupes sont dans la pseudo-variété engendrée par le groupe de transition* $S(\mathcal{A}_l)$. *Si à la place de la condition* $(*)$, $\mathcal{H}$ *satisfait la condition "pour tout* $1 \leq i \leq n$, *la première lettre de* u_i *n'appartient pas à* A_i, *et si* $c(u_i) \subseteq A_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$, *alors* $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$*", alors* $S(L) \in \mathbf{DRG} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$.
□

Naturellement, les pseudo-variétés $\mathbf{DOH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$ et $\mathbf{DRH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$ admettent des analogues du théorème 5.5.4, qui sont les suivants. Leurs preuves peuvent être adaptées de la preuve du théorème 5.5.4 et d'autres résultats et donc nous les omettons.

Théorème 5.5.8 *Soit* $\mathbf{H}$ *une pseudo-variété de groupes abéliens, soient* x *et* y *deux éléments de* $\hat{F}_A(\mathbf{DOH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$ *et soient*

$$x = u_0[w_1, A_1, g_1, w'_1]u_1 \cdots u_{n-1}[w_n, A_n, g_n, w'_n]u_n$$

et

$$y = v_0[z_1, B_1, h_1, z'_1]v_1 \cdots v_{m-1}[z_m, B_m, h_m, z'_m]v_m$$

des factorisations en forme normale. Alors, $x = y$ *si et seulement si*

(1) $n = m$, $u_0 = v_0$, $w_1 = z_1$, $A_1 = B_1$, $A_n = B_m$, $w'_n = z'_m$, $u_n = v_m$;

(2) *si* $n \geq 2$, *alors il existe une permutation* α *de l'ensemble* $\{1, \ldots, n-1\}$ *telle que* $(B_i, z'_i, v_i, z_{i+1}, B_{i+1}) = (A_{\alpha(i)}, w'_{\alpha(i)}, u_{\alpha(i)}, w_{\alpha(i)+1}, A_{\alpha(i)+1})$ *pour tout* $1 \leq i \leq n-1$;

(3) *pour tout* $1 \leq i \leq n$, *il existe une permutation* β *de l'ensemble* $\{1, \ldots, n\}$ *telle que* $h_i = g_{\beta(i)}$. □

Théorème 5.5.9 *Soit* $\mathbf{H}$ *une pseudo-variété de groupes abéliens, soient* x *et* y *deux éléments de* $\hat{F}_A(\mathbf{DRH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$ *et soient* $x = u_0[w_1, A_1, g_1]u_1 \cdots u_{n-1}[w_n, A_n, g_n]u_n$ *et* $y = v_0[z_1, B_1, h_1]v_1 \cdots v_{m-1}\ [z_m, B_m, h_m]v_m$ *des factorisations en forme normale. Alors,* $x = y$ *si et seulement si*

(1) $n = m$, $u_0 = v_0$, $w_1 = z_1$, $A_1 = B_1$, $A_n = B_m$, $u_n = v_m$;

(2) *si* $n \geq 2$, *alors il existe une permutation* α *de l'ensemble* $\{1, \ldots, n-1\}$ *telle que* $(B_i, v_i, z_{i+1}, B_{i+1}) = (A_{\alpha(i)}, u_{\alpha(i)}, w_{\alpha(i)+1}, A_{\alpha(i)+1})$ *pour tout* $1 \leq i \leq n-1$;

(3) *pour tout* $1 \leq i \leq n$, *il existe une permutation* β *de l'ensemble* $\{1, \ldots, n\}$ *telle que* $h_i = g_{\beta(i)}$. □

Comme on peut le vérifier par le théorème 5.5.8, si $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{DOH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$, alors $x = y$ si et seulement si $\mathbf{DA} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$ et $\mathbf{H}$ satisfont $x = y$. Des remarques analogues sont valides pour $\mathbf{DRH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$ et $\mathbf{DH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$, en prouvant les décompositions suivantes.

Corollaire 5.5.10 *Soit* $\mathbf{H}$ *une pseudo-variété de groupes abéliens. Alors,*

– $\mathbf{DOH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}) = (\mathbf{DA} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})) \vee \mathbf{H}$;
– $\mathbf{DRH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}) = (\mathbf{R} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})) \vee \mathbf{H}$;
– $\mathbf{DH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}) = (\mathbf{J} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})) \vee \mathbf{H}$. □

Un résultat dual du théorème 5.5.9 peut être énoncé pour $\mathbf{DLH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$. Comme $\mathbf{Com} * \mathbf{D} \subseteq \mathbf{LZE}$, on déduit du corollaire 5.4.2 que

$$(\mathbf{DRH} \vee \mathbf{DLH}) \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}) = \mathbf{DOH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}).$$

Maintenant nous montrons que $(\mathbf{DRH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})) \vee (\mathbf{DLH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$ est strictement contenue dans $(\mathbf{DRH} \vee \mathbf{DLH}) \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$.

Corollaire 5.5.11 *Soit* $\mathbf{H}$ *une pseudo-variété de groupes abéliens. Alors,*

$$(\mathbf{DRH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})) \vee (\mathbf{DLH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})) \neq \mathbf{DOH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}).$$

Preuve. Soit, par exemple, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$, $w \in B^{\mathbb{N}}$, $w' \in B^{-\mathbb{N}}$ et $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{DOH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$ avec $x = [w, B, 1, a^{-\infty}b]c[a^{+\infty}, B, 1, a^{-\infty}]c[ba^{+\infty}, B, 1, w']$ et $y = [w, B, 1, a^{-\infty}b]c[ba^{+\infty}, B, 1, a^{-\infty}]c[a^{+\infty}, B, 1, w']$.

Alors, x et y sont différents par le théorème 5.5.8, mais leurs restrictions à $\mathbf{DRH}$ $\cap(\mathbf{Com} * \mathbf{D})$ et $\mathbf{DLH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$ sont égales. En fait, les restrictions de x et y à $\mathbf{DRH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$, par exemple, sont respectivement $[w, B, 1]c[a^{+\infty}, B, 1]c[ba^{+\infty}, B, 1]$ et $[w, B, 1]c[ba^{+\infty}, B, 1]c[a^{+\infty}, B, 1]$, qui sont clairement égales par le théorème 5.5.9. Le résultat découle du théorème de Reiterman. □

5.6 Opérations implicites sur $\mathbf{DG} \cap \mathbf{LZE} \cap \mathbf{ECom}$

Considérons la pseudo-variété $\mathbf{ECom}$ de tous les semigroupes finis dont les idempotents commutent. Observons que $\mathbf{DS} \cap \mathbf{ECom} = \mathbf{DG} \cap \mathbf{ECom}$. Rappelons aussi que la commutativité des idempotents dans un semigroupe implique que le produit d'éléments réguliers est encore un élément régulier, puisque le produit de deux idempotents dans un tel semigroupe est un élément régulier. Cela permet de considérer une notion de factorisation *normale* pour les éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap \mathbf{W} \cap \mathbf{ECom})$ (où $\mathbf{W}$ est l'une de $\mathbf{LZE}$, $\mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$ et $\mathbf{Com} * \mathbf{D}$) en imposant la condition supplémentaire suivante

$$u_i \neq 1 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n-1$$

dans la définition de factorisation normale des éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap \mathbf{W})$. Notons que $\mathbf{ECom} \subseteq \mathbf{LECom}$ et que les semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap \mathbf{ECom})$ ont été étudiés par Almeida et Weil [14, 15].

Munis de cette définition de factorisation normale pour les opérations implicites sur $\mathbf{DH} \cap \mathbf{W} \cap \mathbf{ECom}$, et en développant une étude parfaitement similaire à celle conduite pour $\mathbf{DH} \cap \mathbf{W}$, on montre que les énonces analogues obtenus des théorèmes 5.4.10 et 5.5.4 par un simple remplacement de $\mathbf{DH} \cap \mathbf{W}$ par $\mathbf{DH} \cap \mathbf{W} \cap \mathbf{ECom}$ sont valides.

Notons que $\mathbf{LZE} \cap \mathbf{ECom}$ est la pseudo-variété intermédiaire entre $\mathbf{ZE}$ et $\mathbf{ECom}$, définie par la pseudo-identité $(a^\omega ba^\omega)c^\omega = c^\omega(a^\omega ba^\omega)$.

Remarquons (voir [14]) qu'une pseudo-variété $\mathbf{H}$ de groupes non triviale est *arborescente* si $(\mathbf{H} \cap \mathbf{Ab}) * \mathbf{H} = \mathbf{H}$. Comme exemples de pseudo-variétés de groupes arborescentes, on peut mentionner les pseudo-variétés fermées par produit semidirect (voir Gildenhuys et Ribes [41]). Par contre, la pseudo-variété $\mathbf{Ab}$, par exemple, n'est pas arborescente. La condition "$u_i \neq 1$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$" dans la définition de factorisation normale des éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap \mathbf{W} \cap \mathbf{ECom})$ permet les décompositions suivantes.

Corollaire 5.6.1 *Soit* $\mathbf{W}$ *l'une des pseudo-variétés* $\mathbf{LZE}$, $\mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$ *et* $\mathbf{Com} * \mathbf{D}$ *et soit* $\mathbf{H}$ *une pseudo-variété de groupes arborescente. Dans les cas* $\mathbf{W} = \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$ *et* $\mathbf{W} = \mathbf{Com} * \mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ *peut aussi être abélienne. Alors,*

$$\mathbf{DH} \cap \mathbf{W} \cap \mathbf{ECom} = (\mathbf{J} \cap \mathbf{W} \cap \mathbf{ECom}) \vee \mathbf{H}. \square$$

La preuve de la partie "arborescente" de ce résultat est parfaitement analogue à celle de la preuve du théorème 4.1 dans [14]. La partie "abélienne" est similaire aux corollaires 5.4.11 et 5.5.10. Notons que la condition "arborescente" dans le cas $\mathbf{W} = \mathbf{Com} * \mathbf{D}$ est superflue puisque $(\mathbf{Com} * \mathbf{D}) \cap \mathbf{G} = \mathbf{Ab}$.

Troisième partie

Les Langages Associés

Chapitre 6

Langages Associés aux Pseudo-Variétés du Chapitre Antérieur

Dans ce chapitre nous donnons des descriptions combinatoires des variétés de langages associées, via la correspondance d'Eilenberg, aux pseudo-variétés que nous avons étudiées dans le dernier chapitre. On présente un ensemble de générateurs pour chacune de ces variétés. Quelques-uns de ces résultats sont contenus dans des tableaux comparatifs dans l'annexe B.

Dans ce chapitre nous fixons un alphabet fini A.

6.1 Langages $(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$-reconnaissables

Notons $\mathcal{L}(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$ (resp. $\mathcal{L}(\mathbf{R} \cap \mathbf{LJ})$) la classe de tous les langages de la forme

$$u_0 A_1^* X_1 A_2^* \cdots X_{n-1} A_n^* u_n$$

tels que $n, r \in \mathbb{N}_0$, $u_0, \ldots, u_n \in A^*$, $\emptyset \neq A_1, \ldots, A_n \subseteq A$ et pour tout $1 \leq i \leq n-1$:

- $X_i = \begin{cases} u_i & \text{si } u_i \neq 1 \\ (A_i \setminus A_{i+1})(A_i \cap A_{i+1})^{\geq r} & \text{si } u_i = 1\,; \end{cases}$
- si $u_i \neq 1$ alors $c(u_i)$ n'est pas contenu ni dans A_i ni dans A_{i+1} ;
- si $u_i = 1$ alors A_i et A_{i+1} sont $\subseteq$-incomparables ;
- (resp. $r = 0$ et pour tout $1 \leq i \leq n$ tel que $u_i \neq 1$, la première lettre de u_i n'appartient pas à A_i).

Notons que les langages de la classe $\mathcal{L}(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$ sont exactement les langages reconnus par les automates $\mathcal{A}(r; u_0, A_1, u_1, \ldots, A_n, u_n)$ comme dans le lemme 5.2.2, et donc ils sont $(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$-reconnaissables. La description de la classe de tous les langages $(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$-reconnaissables de A^+ est donc une simple transcription du corollaire 5.2.4 en utilisant la correspondance d'Eilenberg. Des résultats similaires sont valides pour $\mathbf{R} \cap \mathbf{LJ}$.

Théorème 6.1.1 *Soit A un alphabet fini. La classe des langages dans A^+ qui sont reconnus par des semigroupes dans $\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}$ (resp. $\mathbf{R} \cap \mathbf{LJ}$) est l'algèbre de Boole engendrée par $\mathcal{L}(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ})$ (resp. $\mathcal{L}(\mathbf{R} \cap \mathbf{LJ})$).* □

6.2 Langages $(\mathbf{DO} \cap \mathbf{W})$-reconnaissables, où $\mathbf{W} = \mathbf{LECom}$, $\mathbf{LZE}$ ou $\mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$

Pour $n \in \mathbb{N}_0$ et $1 \leq l \leq n$ notons $\mathcal{L}(\mathbf{DOH} \cap \mathbf{LECom})$ (resp. $\mathcal{L}(\mathbf{DRH} \cap \mathbf{LECom})$) la classe de tous les langages de la forme

$$u_0 A_1^* u_1 \cdots A_{l-1}^* u_{l-1} L_l u_l A_{l+1}^* \cdots A_n^* u_n$$

tels que :

- $u_0, \ldots, u_n \in A^*$, $u_i \neq 1$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$;
- L_l est un langage de groupe sur A_l dont le semigroupe syntaxique est dans $\mathbf{H}$ et dont l'automate minimal a un seul état final ;
- $\emptyset \neq A_1, \ldots, A_n \subseteq A$ et, pour tout $1 \leq i \leq n-1$, $c(u_i)$ n'est pas contenu ni dans A_i ni dans A_{i+1}.
- (resp. pour tout $1 \leq i \leq n$, la première lettre de u_i n'appartient pas à A_i et, pour tout $1 \leq i \leq n-1$, la dernière lettre de u_i est dans A_{i+1} et, si $c(u_i) \subseteq A_{i+1}$ alors $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$).

Alors, comme ci-dessus on a le résultat suivant.

Théorème 6.2.1 *Soit $\mathbf{H}$ une pseudo-variété de groupes. La classe de tous les langages dans A^+ qui sont reconnus par des semigroupes dans $\mathbf{DOH} \cap \mathbf{LECom}$ (resp. $\mathbf{DRH} \cap \mathbf{LECom}$) est l'algèbre de Boole engendrée par $\mathcal{L}(\mathbf{DOH} \cap \mathbf{LECom})$ (resp. $\mathcal{L}(\mathbf{DRH} \cap \mathbf{LECom})$).* □

Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}_0$ et $1 \leq l \leq n$ notons $\mathcal{L}(\mathbf{DH} \cap \mathbf{LECom})$ la classe de tous les langages de la forme

$$u_0 A_1^+ u_1 \cdots A_{l-1}^+ u_{l-1} L_l u_l A_{l+1}^+ \cdots A_n^+ u_n \tag{6.1}$$

où :

- $u_0, \ldots, u_n \in A^*$, $\emptyset \neq A_1, \ldots, A_n \subseteq A$;
- si $u_i = 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$ alors $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$;
- L_l est égal à A_l^+ soit est un langage de groupe sur A_l dont le semigroupe syntaxique est dans $\mathbf{H}$ et dont l'automate minimal n'est pas trivial et a un seul état final, distinct de l'état initial ;
- pour tout $1 \leq i \leq n$ tel que u_i (resp. u_{i-1}) n'est pas le mot vide, la première (resp. dernière) lettre de u_i (resp. u_{i-1}) n'appartient pas à A_i.

Théorème 6.2.2 *Soit* $\mathbf{H}$ *une pseudo-variété de groupes. La classe des langages dans* A^+ *qui sont reconnus par des semigroupes dans* $\mathbf{DH} \cap \mathbf{LECom}$ *est l'algèbre de Boole engendrée par* $\mathcal{L}(\mathbf{DH} \cap \mathbf{LECom})$. □

La situation est similaire quand nous considérons la pseudo-variété $\mathbf{LZE}$ (resp. $\mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$) à la place de $\mathbf{LECom}$. Les langages correspondants sont obtenus par l'addition de la condition "$A_i = A_j$ ou $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$" (resp. "$A_i \cap A_j = \emptyset$ pour toute paire $i \neq j$"). Dans le cas des langages $(\mathbf{DRH} \cap \mathbf{LZE})$- et $(\mathbf{DRH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G}))$-reconnaissables, on doit aussi supprimer la condition "pour tout $1 \leq i \leq n-1$, la dernière lettre de u_i est dans A_{i+1}" dans la définition des langages $(\mathbf{DRH} \cap \mathbf{LECom})$-reconnaissables.

On peut aussi utiliser les décompositions données par les corollaires 5.4.8 et 5.4.11 pour donner des descriptions alternatives de ces langages. Par exemple, notons le dual de $\mathcal{L}(\mathbf{DRH} \cap \mathbf{LZE})$ par $\mathcal{L}(\mathbf{DLH} \cap \mathbf{LZE})$. Alors, la décomposition

$$(\mathbf{DRH} \cap \mathbf{LZE}) \vee (\mathbf{DLH} \cap \mathbf{LZE}) = \mathbf{DOH} \cap \mathbf{LZE}$$

donnée par le corollaire 5.4.8 permet de déduire le résultat suivant.

Théorème 6.2.3 *Soit* $\mathbf{H}$ *une pseudo-variété de groupes. La classe des langages dans* A^+ *qui sont reconnus par des semigroupes dans* $\mathbf{DOH} \cap \mathbf{LZE}$ *est l'algèbre de Boole engendrée par* $\mathcal{L}(\mathbf{DRH} \cap \mathbf{LZE}) \cup \mathcal{L}(\mathbf{DLH} \cap \mathbf{LZE})$. □

En outre, dans le cas $\mathbf{DOH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$, par exemple, on déduit du corollaire 5.4.11 la description alternative suivante.

Théorème 6.2.4 *Soit* $\mathbf{H}$ *une pseudo-variété de groupes. La classe des langages dans* A^+ *qui sont reconnus par des semigroupes dans* $\mathbf{DOH} \cap \mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$ *est l'algèbre de Boole engendrée par* $\mathcal{L}(\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}_1)$ *et par les langages reconnus par des semigroupes dans* $\mathbf{H}$. □

6.3 Langages $(\mathbf{DO} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$-reconnaissables

Soit $\mathbf{H}$ une pseudo-variété de groupes abéliens, soient $n \in \mathbb{N}_0$ et $1 \leq l \leq n$, et considérons un langage de la forme

$$u_0 A_1^* u_1 \cdots A_{l-1}^* u_{l-1} L_l u_l A_{l+1}^* \cdots A_n^* u_n$$

tel que :

- $u_0, \ldots, u_n \in A^*$, $u_i \neq 1$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$;
- $\emptyset \neq A_1, \ldots, A_n \subseteq A$;
- $A_i = A_j$ ou $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$;
- L_l est un langage de groupe sur A_l dont le semigroupe syntaxique est dans $\mathbf{H}$ et dont l'automate minimal (disons $\mathcal{A}_l$) a un seul état final ;
- pour tout $1 \leq i \leq n-1$, $c(u_i)$ n'est pas contenu ni dans A_i ni dans A_{i+1}.

Maintenant, notons $L(u_0, A_1, \ldots, A_{l-1}, u_{l-1}, L_l, u_l, A_{l+1}, \ldots, A_n, u_n)$ l'union (finie) de tous les langages de la forme

$$u_0 K_1 v_1 K_2 \cdots v_{n-1} K_n u_n$$

tels que :

– pour tout $1 \le i \le n$, K_i est un langage sur un sous-alphabet B_i de A ;
– $K_j = L_l$ pour un $1 \le j \le n$ et $K_i = B_i^*$ pour tout $i \neq j$;
– $B_1 = A_1$, $B_n = A_n$ et, si $n \ge 2$, il existe une permutation α de l'ensemble $\{1, \ldots, n-1\}$ telle que $(B_i, v_i, B_{i+1}) = (A_{\alpha(i)}, u_{\alpha(i)}, A_{\alpha(i)+1})$ pour tout $1 \le i \le n-1$.

Notons que le langage $L(u_0, A_1, \ldots, L_l, u_l, \ldots, A_n, u_n)$ est précisément le langage reconnu par l'automate $\mathcal{H}(u_0, A_1, \ldots, \mathcal{A}_l; q_l'; q_l, \ldots, A_n, u_n)$, où q_l' et q_l sont, respectivement, l'état initial et l'état final de $\mathcal{A}_l$, et donc il est $(\mathbf{DOH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$-reconnaissable, d'après le lemme 5.5.7. Maintenant, soit $\mathcal{L}(\mathbf{DOH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$ la classe de tous les langages $L(u_0, A_1, \ldots, L_l, u_l, \ldots, A_n, u_n)$.

Théorème 6.3.1 *Soit* $\mathbf{H}$ *une pseudo-variété de groupes abéliens. La classe des langages dans* A^+ *qui sont reconnus par des semigroupes dans* $\mathbf{DOH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$ *est l'algèbre de Boole engendrée par* $\mathcal{L}(\mathbf{DOH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$. □

Les langages $(\mathbf{DRH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$-reconnaissables sont décrits de façon analogue. Il suffit de remplacer la condition "pour tout $1 \le i \le n-1$, $c(u_i)$ n'est contenu ni dans A_i ni dans A_{i+1}" dans la définition de $\mathcal{L}(\mathbf{DOH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$ ci-dessus par la condition "pour tout $1 \le i \le n$, la première lettre de u_i n'appartient pas à A_i et, si $c(u_i) \subseteq A_{i+1}$ $(1 \le i \le n-1)$ alors $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$".

Considérons maintenant un langage de la forme

$$u_0 A_1^+ u_1 \cdots A_{l-1}^+ u_{l-1} L_l u_l A_{l+1}^+ \cdots A_n^+ u_n$$

où :

– $u_0, \ldots, u_n \in A^*$;
– $\emptyset \neq A_1, \ldots, A_n \subseteq A$;
– $A_i = A_j$ ou $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $1 \le i, j \le n$;
– L_l est égal à A_l^+ soit est un langage de groupe sur A_l dont le semigroupe syntaxique est dans $\mathbf{H}$ et dont l'automate minimal (disons $\mathcal{A}_l$) n'est pas trivial et a un seul état final, distinct de l'état initial ;
– si $u_i = 1$ alors $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$ et pour tout $1 \le i \le n$ tel que u_i (resp. u_{i-1}) n'est pas le mot vide, la première (resp. dernière) lettre de u_i (resp. u_{i-1}) n'appartient pas à A_i.

Soit $L'(u_0, A_1, \ldots, A_{l-1}, u_{l-1}, L_l, u_l, A_{l+1}, \ldots, A_n, u_n)$ l'union (finie) de tous les langages de la forme

$$u_0 K_1 v_1 K_2 \cdots v_{n-1} K_n u_n$$

tels que :

- pour tout $1 \leq i \leq n$, K_i est un langage sur un sous-alphabet B_i de A ;
- $K_j = L_l$ pour un $1 \leq j \leq n$ et $K_i = B_i^+$ pour tout $i \neq j$;
- $B_1 = A_1$, $B_n = A_n$ et, si $n \geq 2$, il existe une permutation α de l'ensemble $\{1, \ldots, n-1\}$ telle que $(B_i, v_i, B_{i+1}) = (A_{\alpha(i)}, u_{\alpha(i)}, A_{\alpha(i)+1})$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$.

Le langage $L'(u_0, A_1, \ldots, L_l, u_l, \ldots, A_n, u_n)$ est le langage reconnu par l'automate $\mathcal{G}(u_0, A_1, \ldots, \mathcal{A}_l; q_l'; q_l, \ldots, A_n, u_n)$, où q_l' et q_l sont, respectivement, l'état initial et l'état final de $\mathcal{A}_l$, et donc, d'après le lemme 5.5.6, il est $(\mathbf{DH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$-reconnaissable. Maintenant, soit $\mathcal{L}(\mathbf{DH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$ la classe de tous les langages $L'(u_0, A_1, \ldots, L_l, u_l, \ldots, A_n, u_n)$.

Théorème 6.3.2 *Soit* $\mathbf{H}$ *une pseudo-variété de groupes abéliens. La classe des langages dans* A^+ *qui sont reconnus par des semigroupes dans* $\mathbf{DH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$ *est l'algèbre de Boole engendrée par* $\mathcal{L}(\mathbf{DH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$. □

Dans le cas des pseudo-variétés $\mathbf{DOH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$, par exemple, le corollaire 5.5.10 permet la description alternative suivante.

Théorème 6.3.3 *Soit* $\mathbf{H}$ *une pseudo-variété de groupes abéliens. La classe des langages dans* A^+ *qui sont reconnus par des semigroupes dans* $\mathbf{DOH} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D})$ *est l'algèbre de Boole engendrée par* $\mathcal{L}(\mathbf{DA} \cap (\mathbf{Com} * \mathbf{D}))$ *et par les langages reconnus par des semigroupes dans* $\mathbf{H}$. □

Les langages $(\mathbf{DH} \cap \mathbf{W} \cap \mathbf{ECom})$-reconnaissables (où $\mathbf{W} = \mathbf{LZE}$, $\mathbf{L}(\mathbf{J}_1 \vee \mathbf{G})$ ou $\mathbf{Com} * \mathbf{D}$) sont décrits comme les langages $(\mathbf{DH} \cap \mathbf{W})$-reconnaissables : il suffit d'ajouter la condition supplémentaire "$u_i \neq 1$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$".

Comme on peut le vérifier, cette dernière condition permet, alternativement, de remplacer les langages de la forme (6.1) par les langages de la forme

$$u_0 A_1^* u_1 \cdots A_{l-1}^* u_{l-1} L_l u_l A_{l+1}^* \cdots A_n^* u_n$$

où L_l est égal à A_l^* soit est un langage de groupe sur A_l dont le semigroupe syntaxique est dans $\mathbf{H}$ et dont l'automate minimal a un seul état final (pas nécessairement distinct de l'état initial).

Chapitre 7

Langages Localement Testables à Compteur

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressé à des classes de langages $\mathcal{C}$ telles que, pour chaque alphabet A, l'algèbre de Boole $\mathcal{C}(A^+)$ est engendrée par un ou plusieurs des types de langages suivants :

- wA^*, avec $w \in A^+$,
- A^*w, avec $w \in A^+$,
- A^*wA^* $(= L(w,1,1,1))$, avec $w \in A^+$,
- $L(w,r,1,t)$, avec $w \in A^+$ et $r,t \in \mathbb{N}_0$,
- $L(w,r,n,t)$, avec $w \in A^+$, $r,t \in \mathbb{N}_0$ et $n \in \mathbb{N}$,

où $L(w,r,n,t)$ est l'ensemble de tous les mots u dans A^+ tels que le nombre d'occurrences du facteur w dans u est congru à r modulo n seuil t (voir la section 1.5). Par exemple nous avons la classe bien connue des langages *localement testables*, que nous notons $\mathcal{L}t$, et qui est telle que $\mathcal{L}t(A^+)$ est l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme wA^*, A^*w et A^*wA^*, où $w \in A^+$. Les langages localement testables ont été caractérisés indépendamment par Brzozowski et Simon [30] et par McNaughton [50] comme étant les langages dont le semigroupe syntaxique est dans $\mathbf{LJ}_1$. Rapellons qu'un langage L est localement testable si on peut décider l'appartenance d'un mot u à L en considérant les facteurs de u d'une longueur fixée k et ses préfixes et suffixes de longueur $< k$.

Dans [26], Beauquier et Pin ont considéré trois variations sur cette dernière définition de langages localement testables et ont obtenu ainsi trois classes de langages différentes. Premièrement, ils ont supprimé les conditions sur les préfixes et les suffixes et ont appelé langage *fortement localement testable* ($\mathcal{F}lt$) tout langage dont les éléments sont déterminés par les facteurs d'une longueur fixée. La classe de tous ces langages dans A^+ est l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme A^*wA^* avec $w \in A^+$. Cette classe n'est pas une variété de langages mais c'est une classe décidable qui est caractérisée par une propriété sympathique. Dans ce chapitre nous considérons une classe de langages intermédiaire entre les langages localement testables et les langages fortement localement testables, constituée par langages que nous appelons *localement testables par préfixes* ($\mathcal{L}tp$). L'appartenance d'un mot u dans ce type de langage est déterminée par les facteurs de u d'une longueur fixée k et par ses préfixes de longueur $< k$. Ainsi, un langage de A^+ est localement testable par préfixes s'il est combinaison booléenne de langages de la forme wA^* et A^*wA^* où $w \in A^+$. Cette classe de langages est caractérisée par une propriété algébrique analogue à celle obtenue par Beauquier et Pin pour les langages fortement localement testables.

Deuxièmement, Beauquier et Pin ont caractérisé les langages de A^+ qui sont combinaisons booléennes de langages de la forme wA^*, A^*w et $L(w, r, 1, t)$. L'appartenance d'un mot u à ce type de langage — qu'ils ont appelé *localement testable à seuil* ($\mathcal{L}t$-s) — est déterminée par les facteurs de u d'une longueur fixée k, mais en tenant compte de leur nombre d'occurrences jusqu'à un certain seuil t, et par ses préfixes et suffixes de longueur $< k$. Finalement, en supprimant les conditions sur les préfixes et les suffixes dans cette dernière condition, Beauquier et Pin ont introduit une nouvelle classe de langages. Un élément de cette classe, nommé langage *fortement localement testable à seuil* ($\mathcal{F}lt$-s), est combinaison booléenne de langages de la forme $L(w, r, 1, t)$. Cependant, la caractérisation syntaxique de ces langages vient à peine d'être obtenue récemment par Pin [59]. Encore une fois, nous décrivons une version “latéralisée” de ce travail, en supprimant à peine la condition sur les suffixes. On obtient une classe de langages dont chaque élément est combinaison booléenne de langages du type wA^* et $L(w, r, 1, t)$, que nous appelons langage *localement testable par préfixes à seuil* ($\mathcal{L}tp$-s).

Si on remplace wA^* par A^*w dans les générateurs des langages localement testables par préfixes au-dessus, on obtient dualement les classes de langages *localement testables par suffixes* ($\mathcal{L}ts$) et de langages *localement testables par suffixes à seuil* ($\mathcal{L}ts$-s). Nous complétons notre étude en considérant les langages qui sont combinaisons booléennes de langages du type wA^*, A^*w et $L(w, r, n, t)$. Ces langages, que nous appelons *localement testables à compteur* ($\mathcal{L}t$-c), peuvent être aussi obtenus en utilisant seulement les langages $L(w, r, n, t)$, c'est-à-dire qu'ils coïncident avec leur version “forte”.

Ce travail complète, donc, la caractérisation des classes de langages engendrées par un ou plusieurs des types de langages mentionnés au début de ce chapitre. Rappelons que la classe de langages $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{C}(A^+)$ est l'algèbre de Boole engendrée par l'ensemble $\{wA^* : w \in A^+\}$ (resp. $\{A^*w : w \in A^+\}$, $\{wA^*, A^*w : w \in A^+\}$) est la classe de langages associée, via le théorème d'Eilenberg, avec la pseudovariété $\mathbf{K}$ (resp. $\mathbf{D}$, $\mathbf{LI}$).

Dans la partie finale de ce chapitre nous déterminons la plus petite (resp. grande) variété de langages qui contient (resp. qui est contenue dans) les classes de langages mentionnées au-dessus. Par exemple, nous montrons que la classe des langages localement testables (resp. localement testables et $\mathcal{J}$-triviaux) est la plus petite (resp. grande) variété de langages qui contient (resp. qui est contenue dans) la classe $\mathcal{F}lt$ des langages fortement localement testables. Autrement dit, $\mathcal{L}t$ est engendrée (comme variété de langages) par les langages de la forme A^*wA^* avec $w \in A^+$. On remarque l'analogie de ce résultat avec la caractérisation bien connue de la variété de langages $\mathcal{J}_1$ comme étant l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme A^*aA^* avec $a \in A$.

7.1 Langages définis par facteurs de mots

Dans cette section nous présentons quelques relations d'équivalence que nous allons utiliser pour décrire les langages qui nous intéressent. Les équivalences $\equiv_{k,1,t}$ et $\sim_{k,1,t}$ ci-dessous ont été introduites dans l'article de Beauquier et Pin [26].

Rappelons que, pour $w, u \in A^+$, $\left[\begin{smallmatrix} w \\ u \end{smallmatrix}\right]$ dénote le nombre d'occurrences de u comme facteur de w et que, pour des entiers $x, y, t \in \mathbb{N}_0$ et $n \in \mathbb{N}$, nous écrivons $x \equiv_{n,t} y$ si ou bien $x = y$, ou bien $x, y \geq t$ et x est congru à y modulo n.

Soient $k, n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{N}_0$. Nous définissons une relation d'équivalence $\equiv_{k,n,t}$ d'indice fini sur A^+ en posant

$$u \equiv_{k,n,t} v \text{ si et seulement si, pour chaque mot } x \text{ de longueur} \leq k,\ \left[\begin{smallmatrix} u \\ x \end{smallmatrix}\right] \equiv_{n,t} \left[\begin{smallmatrix} v \\ x \end{smallmatrix}\right].$$

En particulier : $u \equiv_{k,1,1} v$ si et seulement si u et v ont les mêmes facteurs de longueur k ; $u \equiv_{k,1,4} v$ si et seulement si u et v ont les mêmes facteurs de longueur $\leq k$ mais en comptant leur multiplicité au seuil 4 ; $u \equiv_{k,5,2} v$ si et seulement si u et v ont les mêmes facteurs de longueur $\leq k$ mais en comptant leur multiplicité modulo 5 au seuil 2.

Exemple 7.1.1 *Si $u = a^3bababa^2$ et $v = a^2babababa^3$, nous avons $u \equiv_{3,1,2} v$ mais $u \not\equiv_{3,2,2} v$ parce que $\left[\begin{smallmatrix} u \\ aba \end{smallmatrix}\right] = 3 \not\equiv_{2,2} 4 = \left[\begin{smallmatrix} v \\ aba \end{smallmatrix}\right]$. Cependant $u \equiv_{3,2,2} a^2bababababa^3$.* ■

Notons que l'équivalence $\equiv_{k,n,t}$ n'est pas une congruence en général. Par exemple, considérons $A = \{a, b\}$, $u = aba$ et $v = abab$. On a $u \equiv_{2,1,1} v$, mais $ua \not\equiv_{2,1,1} va$. En effet a^2 est un facteur de longueur 2 de ua mais n'est pas facteur de va.

Soit maintenant $\sim_{k,n,t}$ l'équivalence d'indice fini sur A^+ donnée par

$$u \sim_{k,n,t} v \text{ si et seulement si } i_{k-1}(u) = i_{k-1}(v),\ t_{k-1}(u) = t_{k-1}(v) \text{ et } u \equiv_{k,n,t} v.$$

Autrement dit, deux mots u et v sont équivalents modulo $\sim_{k,n,t}$ s'ils ont les mêmes préfixes et les mêmes suffixes de longueur $< k$ et les mêmes facteurs de longueur $\leq k$, comptés avec multiplicité modulo n au seuil t. On remarque que l'équivalence $\sim_{k,n,t}$ est une congruence.

Si dans la définition de $\sim_{k,n,t}$ on supprime la condition sur les suffixes on obtient une nouvelle équivalence sur A^+, que nous dénotons par $\approx_{k,n,t}$. C'est-à-dire que $\approx_{k,n,t}$ est donnée par

$$u \approx_{k,n,t} v \text{ si et seulement si } i_{k-1}(u) = i_{k-1}(v) \text{ et } u \equiv_{k,n,t} v.$$

Cette équivalence n'est pas une congruence en général.

Beauquier et Pin [26] ont introduit trois des notions suivantes.

Définition 7.1.2 *Soit A un alphabet. On dit qu'un langage de A^+ est*

– localement testable *($\mathcal{L}t$),* fortement localement testable *($\mathcal{F}lt$) ou* localement testable par préfixes *($\mathcal{L}tp$) s'il est saturé, respectivement, par* $\sim_{k,1,1}$*,* $\equiv_{k,1,1}$ *ou* $\approx_{k,1,1}$ *pour un entier* $k \in \mathbb{N}$ *;*
– localement testable à seuil *($\mathcal{L}t$-s),* fortement localement testable à seuil *($\mathcal{F}lt$-s) ou* localement testable par préfixes à seuil *($\mathcal{L}tp$-s) s'il est saturé, respectivement, par* $\sim_{k,1,t}$*,* $\equiv_{k,1,t}$ *ou* $\approx_{k,1,t}$ *pour des entiers* $k \in \mathbb{N}$ *et* $t \in \mathbb{N}_0$ *;*
– localement testable à compteur *($\mathcal{L}t$-c),* fortement localement testable à compteur *($\mathcal{F}lt$-c) ou* localement testable par préfixes à compteur *($\mathcal{L}tp$-c) s'il est saturé, respectivement, par* $\sim_{k,n,t}$*,* $\equiv_{k,n,t}$ *ou* $\approx_{k,n,t}$ *pour des entiers* $k, n \in \mathbb{N}$ *et* $t \in \mathbb{N}_0$*.* ∎

Les notions de langage *localement testable par suffixes* ($\mathcal{L}ts$), de langage *localement testable par suffixes à seuil* ($\mathcal{L}ts$-*s*) et de langage *localement testable par suffixes à compteur* ($\mathcal{L}ts$-*c*) peuvent être définis dualement. Il suffit de remplacer la condition sur les préfixes dans la définition de $\approx_{k,n,t}$ par une condition duale sur les suffixes. Les classes de toutes les langages $\mathcal{L}t$, $\mathcal{F}lt$, $\mathcal{L}tp$, $\mathcal{L}t$-*s*, $\mathcal{L}t$-*c*, etc, seront denotées aussi par $\mathcal{L}t$, $\mathcal{F}lt$, $\mathcal{L}tp$, $\mathcal{L}t$-*s*, $\mathcal{L}t$-*c*, etc.

La proposition suivante décrit toutes ces classes comme algèbres de Boole. Pour un ensemble de langages $\mathcal{L}$ de A^+ on dénote par $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ l'algèbre de Boole engendrée par $\mathcal{L}$.

Proposition 7.1.3 *Soit A un alphabet. Alors*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}t\text{-}c(A^+) &= \mathcal{B}\{wA^*, A^*w, L(w,r,n,t) \mid w \in A^+,\ r,t \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N}\}\\
\mathcal{L}tp\text{-}c(A^+) &= \mathcal{B}\{wA^*, L(w,r,n,t) \mid w \in A^+,\ r,t \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N}\}\\
\mathcal{L}ts\text{-}c(A^+) &= \mathcal{B}\{A^*w, L(w,r,n,t) \mid w \in A^+,\ r,t \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N}\}\\
\mathcal{F}lt\text{-}c(A^+) &= \mathcal{B}\{L(w,r,n,t) \mid w \in A^+,\ r,t \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

Des résultats similaires sont valables pour les quatre classes de langages localement testables "à seuil" et les quatre classes de langages localement testables restantes. Il faut seulement remplacer $L(w,r,n,t)$ par $L(w,r,1,t)$ et par $L(w,1,1,1)$, respectivement.

Preuve. On présente, par exemple, la preuve pour les langages $\mathcal{L}t$-*c*. Supposons d'abord que $L \subseteq A^+$ est un langage localement testable à compteur. Alors, L est saturé par $\sim_{k,n,t}$ pour des entiers $k, n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{N}_0$. Si $n = 1$ et $t = 0$, alors la classe d'équivalence $E(u)$, d'un mot $u \in L$, par rapport à $\sim_{k,n,t}$ est A^+ car $\equiv_{1,0}$ est la relation universelle sur $\mathbb{N}_0$. Dans ce cas, $L = E(u) = A^+$. Supposons maintenant que $n \neq 1$ ou que $t \neq 0$. Si $k = 1$, alors l'appartenance d'un mot u à L est déterminée par les facteurs de u de longueur 1. Donc,

$$E(u) = \bigcap_{a \in A} L(a, \left[\begin{smallmatrix} u \\ a \end{smallmatrix}\right], n, t).$$

Maintenant, supposons $k \geq 2$. Si $|u| < k-1$ alors

$$E(u) = \{u\} = uA^* \setminus \left(\bigcup_{a \in A} uaA^* \right).$$

Si $|u| \geq k-1$, posons $p = p_{k-1}(u)$ et $s = s_{k-1}(u)$. Alors

$$E(u) = pA^* \cap A^*s \cap \bigcap_{w \in A^{\leq k}} L(w, \tbinom{u}{w}, n, t).$$

Ceci montre que $E(u)$ est une combinaison booléenne de langages de la forme wA^*, A^*w et $L(w, r, n, t)$ avec $w \in A^+$, $r, t \in \mathbb{N}_0$ et $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, le même est vrai pour L.

Pour l'inverse, on a besoin de montrer que wA^*, A^*w et $L(w, r, n, t)$ ($w \in A^+$, $r, t \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$) sont dans $\mathcal{L}t\text{-}c(A^+)$. Nous affirmons d'abord que wA^* (et similairement que A^*w) est saturé par $\sim_{k+1,1,1}$ où $k = |w|$. Considérons un mot $u \in wA^*$ et supposons que $u \sim_{k+1,1,1} u'$. Alors $p_k(u) = p_k(u')$ et, donc, w est préfixe de u'. Par conséquent $u' \in wA^*$ ce qui prouve l'affirmation. Maintenant on prouve que $L(w, r, n, t)$ est saturé par $\sim_{k,n,t}$ où $k = |w|$. Soit $u \in L(w, r, n, t)$. Alors $\left[\begin{smallmatrix} u \\ w \end{smallmatrix}\right] \equiv_{n,t} r$. Supposons que $u \sim_{k,n,t} u'$. Alors, comme $|w| \leq k$, on a $\left[\begin{smallmatrix} u \\ w \end{smallmatrix}\right] \equiv_{n,t} \left[\begin{smallmatrix} u' \\ w \end{smallmatrix}\right]$. Donc, $\left[\begin{smallmatrix} u' \\ w \end{smallmatrix}\right] \equiv_{n,t} r$ et par conséquent $u' \in L(w, r, n, t)$. $\square$

Le prochain résultat dit que les générateurs de la forme wA^* et A^*w sont superflus pour $\mathcal{L}t\text{-}c$, c'est-à-dire qu'on peut restreindre les générateurs de $\mathcal{L}t\text{-}c$ aux langages de la forme $L(w, r, n, t)$.

Proposition 7.1.4 *On a les égalités $\mathcal{L}t\text{-}c = \mathcal{L}tp\text{-}c = \mathcal{L}ts\text{-}c = \mathcal{F}lt\text{-}c$.*

Preuve. Évidemment il suffit de prouver seulement l'inclusion $\mathcal{L}t\text{-}c \subseteq \mathcal{F}lt\text{-}c$. Pour cela on montre que, pour chaque alphabet A et chaque mot $w \in A^+$, les langages wA^* et A^*w sont des combinaisons booléennes de langages de la forme $L(u, r, n, t)$ avec $u \in A^+$, $r, t \in \mathbb{N}_0$ et $n \in \mathbb{N}$. Plus précisément, on va prouver que wA^* (pour A^*w c'est similaire) est l'union (disjointe) de tous les langages de la forme

$$L(w, \alpha, 2, 1) \cap \bigcap_{a \in A} L(aw, \beta_a, 2, 0),$$

où $\alpha \in \{1, 2\}$, $\beta_a \in \{0, 1\}$, $\sum_{a \in A} \beta_a$ est pair si $\alpha = 1$ et est impair si $\alpha = 2$.

On observe d'abord qu'un mot $u \in A^+$ appartient à wA^* si et seulement si

$$\sum_{a \in A} \begin{bmatrix} u \\ aw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - 1. \tag{7.1}$$

Soit $u \in wA^*$. Alors, ou bien $\left[\begin{smallmatrix} u \\ w \end{smallmatrix}\right]$ est impair, ou bien est pair et non nul. Dans le premier cas $u \in L(w, 1, 2, 1)$. En outre, on déduit de (7.1) que $\sum_{a \in A} \left[\begin{smallmatrix} u \\ aw \end{smallmatrix}\right]$ est pair. Il en résulte que

$$u \in \bigcap_{a \in A} L(aw, \beta_a, 2, 0)$$

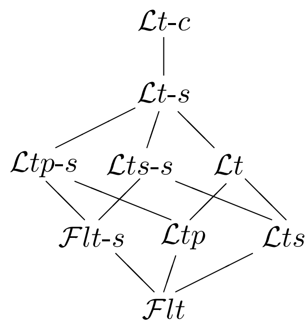
pour une famille $(\beta_a)_{a \in A}$, $\beta_a \in \{0, 1\}$, telle que $\sum_{a \in A} \beta_a$ est pair. De façon analogue, on peut montrer que dans le second cas

$$u \in L(w, 2, 2, 1) \cap \bigcap_{a \in A} L(aw, \beta_a, 2, 0)$$

pour une famille $(\beta_a)_{a\in A}$, $\beta_a \in \{0,1\}$, telle que $\sum_{a\in A}\beta_a$ est impair. Ceci montre une des inclusions.

Pour prouver l'inclusion inverse, soit $u \in L(w,\alpha,2,1) \cap \bigcap_{a\in A} L(aw,\beta_a,2,0)$ où $\alpha \in \{1,2\}$, $\beta_a \in \{0,1\}$, $\sum_{a\in A}\beta_a$ est pair si $\alpha = 1$ et est impair si $\alpha = 2$. Alors α (et donc $\left[{u \atop w}\right]$ aussi) est pair si et seulement si $\sum_{a\in A}\beta_a$ est impair, c'est-à-dire, si et seulement si $\sum_{a\in A}\left[{u \atop aw}\right]$ est impair. Par conséquent $\left[{u \atop w}\right]$ et $\sum_{a\in A}\left[{u \atop aw}\right]$ sont différents, ce qui montre que w est un préfixe de u. Donc, u appartient à wA^*. $\square$

Comme nous le verrons, toutes les autres classes de langages sont distinctes entre elles, et distinctes de $\mathcal{L}t$-c. Les relations d'inclusion entre elles sont montrées dans la figure suivante.



On verra à la section prochaine que l'intersection de deux quelconques de ces classes donne une troisième d'entre elles (par exemple, $\mathcal{L}tp \cap \mathcal{L}ts = \mathcal{F}lt$) sauf l'intersection $\mathcal{L}tp$-$s \cap \mathcal{L}ts$-s qui ne coïncide pas avec $\mathcal{F}lt$-s et forme, donc, une nouvelle classe.

On verra aussi que seules les classes $\mathcal{L}t$, $\mathcal{L}t$-s et $\mathcal{L}t$-c constituent des variétés de langages,—dont les pseudo-variétés associées, via le théorème d'Eilenberg, sont respectivement $\mathbf{LJ}_1$, $(\mathbf{Com} * \mathbf{D}) \cap \mathbf{A}$ et $\mathbf{Com} * \mathbf{D}$. De plus, on montrera à la section 7.3 que $\mathcal{L}t$ (resp. $\mathcal{L}t$-s) est la variété de langages engendrée par $\mathcal{F}lt$ (resp. $\mathcal{F}lt$-s).

Exemple 7.1.5 *Soit $A = \{a,b\}$. Le langage $L = ba^*ba^*$ est localement testable par préfixes à seuil, puisque*

$$L = bA^* \cap L(b,2,1,3).$$

De façon moins évidente, L est aussi fortement localement testable à seuil. En effet,

$$L = L(b,2,1,3) \setminus [L(abb,1,1,1) \cup L(ab,2,1,2)].\blacksquare$$

7.2 Caractérisations syntaxiques

Dans cette section on présente des caractérisations effectives de toutes les classes de langages présentées dans la section antérieure. Ces caractérisations sont toutes données en termes d'une propriété algébrique des morphismes syntaxiques des langages. Les classes $\mathcal{L}t$, $\mathcal{L}t$-s et $\mathcal{L}t$-c sont caractérisées par une propriété des semigroupes syntaxiques de leurs langages. Pour les autres classes il est nécessaire aussi de considérer les images syntaxiques des langages.

On aura besoin de quelques définitions et résultats dûs à Straubing [76]. Soit $k \in \mathbb{N}$. On représente les mots de $(A^k)^*$ par des séquences finies $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$, avec $w_i \in A^k$, et on définit une fonction (séquencielle) $\sigma_k : A^+ \to (A^k)^*$ en posant, pour $w \in A^+$ et $a \in A$,

$$\sigma_k(wa) = \begin{cases} 1 & \text{si } |w| < k-1 \\ (wa) & \text{si } |w| = k-1 \\ (\sigma_k(w), s_k(wa)) & \text{si } |w| \geq k. \end{cases}$$

Par exemple, $\sigma_2(aba^2) = (ab, ba, a^2)$.

On rappelle maintenant un résultat de Straubing [76] qui a été montré par Beauquier et Pin [26] sous la forme équivalente qui suit.

Théorème 7.2.1 *Soit* $\mathbf{V}$ *une pseudo-variété et soit* $\mathbf{V}_k = \mathbf{V} * \mathbf{LI}_k$. *Pour chaque alphabet* A, $\mathcal{V}_k(A^+)$ *est l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme* wA^*, A^*w *et* $\sigma_k^{-1}(X)$, *avec* $w \in A^{\leq k-1}$ *et* $X \in \mathcal{V}((A^k)^*)$. □

Nous aurons besoin aussi du théorème suivant.

Théorème 7.2.2 (Straubing [76]) *Soit* S *un semigroupe. Alors,* $S \in \mathbf{V} * \mathbf{LI}$ *si et seulement si* $S \in \mathbf{V} * \mathbf{LI}_k$, *où* $k = |S|$. □

Comme conséquence de ces théorèmes on obtient la caractérisation de $\mathcal{L}t$, de $\mathcal{L}t$-*s* et de $\mathcal{L}t$-*c*. La première est due à Brzozowski et Simon [30] et McNaughton [50]. La seconde est due à Beauquier et Pin [26].

Théorème 7.2.3 *Soit* L *un langage reconnaissable.*

(1) L *est* $\mathcal{L}t$ *si et seulement si* $S(L) \in \mathbf{J}_1 * \mathbf{LI}$.

(2) L *est* $\mathcal{L}t$-*s si et seulement si* $S(L) \in (\mathbf{Com} \cap \mathbf{A}) * \mathbf{LI}$.

(3) L *est* $\mathcal{L}t$-*c si et seulement si* $S(L) \in \mathbf{Com} * \mathbf{LI}$.

Preuve. Nous prouvons seulement (3). Les autres preuves sont similaires. Soit A un alphabet et soit L un langage de A^+. D'après les théorèmes 7.2.1 et 7.2.2, $S(L) \in \mathbf{Com} * \mathbf{LI}$ si et seulement si L est une combinaison booléenne de langages de la forme wA^*, A^*w et $\sigma_k^{-1}(X)$, où $w \in A^+$ et $X \in \mathcal{C}om((A^k)^*)$. De plus, le théorème 2.3.2 dit que $X \in \mathcal{C}om((A^k)^*)$ si et seulement si X est combinaison booléenne de langages de la forme

$$\{u \in (A^k)^* \mid |u|_w = r\}$$

où $r \in \mathbb{N}_0$ et $w \in A^k$, et de la forme

$$\{u \in (A^k)^* \mid |u|_w \equiv r \bmod p^n\}$$

où $r \in \mathbb{N}_0$ (on peut supposer $r < p^n$), p est un nombre premier, $n \in \mathbb{N}$ et $w \in A^k$. Or, on a

$$\sigma_k^{-1}(\{u \in (A^k)^* \mid |u|_w = r\}) = \{u \in A^+ \mid \left[\begin{smallmatrix} u \\ w \end{smallmatrix}\right] = r\} = L(w, r, n, t)$$

pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t > r$. En outre,

$$\begin{aligned}\sigma_k^{-1}(\{u \in (A^k)^* \mid |u|_w \equiv r \bmod p^n\}) &= \{u \in A^+ \mid \left[\begin{smallmatrix}u\\w\end{smallmatrix}\right] \equiv r \bmod p^n\}\\ &= \{u \in A^+ \mid \left[\begin{smallmatrix}u\\w\end{smallmatrix}\right] \equiv_{p^n,t} r\} \text{ pour tout } t \leq r\\ &= L(w, r, p^n, t).\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $t \leq r$, on a

$$L(w, r, 1, t) = A^+ \setminus \bigcup_{i=0}^{t-1} L(w, i, 1, t).$$

De plus, si m est un entier > 1 alors m est de la forme $m = p_1^{n_1} \cdots p_i^{n_i}$ avec $i \geq 1$ et $p_1, \ldots, p_i$ nombres premiers, et on peut vérifier que

$$L(w, r, m, t) = \bigcap_{j=1}^{i} L(w, r, p_j^{n_j}, t).$$

Il en résulte que $S(L) \in \mathbf{Com} * \mathbf{LI}$ si et seulement si L est une combinaison booléenne de langages de la forme wA^*, A^*w et $L(w, r, n, t)$ avec $w \in A^+$, $r, t \in \mathbb{N}_0$ et $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, si et seulement si L est localement testable à compteur. □

Or, Brzozowski et Simon [30] et McNaughton [50] ont montré que $\mathbf{J}_1 * \mathbf{LI} = \mathbf{LJ}_1$, et on sait d'après Thérien et Weiss [80] que $\mathbf{Com} * \mathbf{LI} = [\![eafbecf = ecfbeaf]\!] = \mathbf{Com} * \mathbf{D}$ et que $(\mathbf{Com} \cap \mathbf{A}) * \mathbf{LI} = (\mathbf{Com} * \mathbf{D}) \cap \mathbf{A}$. On a, donc, un algorithme pour décider quand un semigroupe donné appartient, respectivement, à $\mathbf{J}_1 * \mathbf{LI}$, à $(\mathbf{Com} \cap \mathbf{A}) * \mathbf{LI}$ ou à $\mathbf{Com} * \mathbf{LI}$. Ceci permet, donc, de conclure la décidabilité des classes de langages $\mathcal{L}t$, $\mathcal{L}t$-s et $\mathcal{L}t$-c.

On continue avec la caractérisation des classes de langages restantes. Pour ces langages on a besoin de considérer leurs images syntaxiques parce que leurs semigroupes syntaxiques ne sont pas suffisants.

Soit S un semigroupe fini. Définissons J comme étant la plus petite relation d'équivalence sur S qui contient la relation $\mathcal{J}$ et qui satisfait la condition :

$$\forall e, f \in E(S)\, \forall r, s \in S,\ erfse\, J\, fserf. \tag{7.2}$$

Beauquier et Pin [26] et Pin [59] ont donné, respectivement, les caractérisations des classes $\mathcal{F}lt$ et $\mathcal{F}lt$-s.

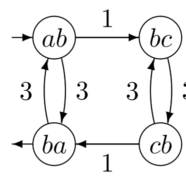
Théorème 7.2.4 *Soit L un langage reconnaissable de A^+, soit S le semigroupe syntaxique de L et soit P son image syntaxique.*

(1) *L est $\mathcal{F}lt$ si et seulement si $S \in \mathbf{LJ}_1$ et P est une union de $\mathcal{J}$-classes de S.*

(2) *L est $\mathcal{F}lt$-s si et seulement si $S \in (\mathbf{Com} * \mathbf{D}) \cap \mathbf{A}$ et P est une union de J-classes de S.* □

Maintenant nous présentons la version “lateralisée” de ce dernier théorème. Pour cela on va utiliser les notions suivantes.

Nous associons à chaque mot $w \in A^+$ et entiers k et t, un graphe étiqueté à deux sommets distingués $N_{k,t}(w)$ où l'ensemble de sommets est $\mathrm{Fact}_{k-1}(w)$ et, si $u \in \mathrm{Fact}_k(w)$, alors il existe un arc étiqueté $\left[\begin{smallmatrix} w \\ u \end{smallmatrix}\right]$ *seuil* t du sommet $p_{k-1}(u)$ au sommet $s_{k-1}(u)$. Le sommet $p_{k-1}(w)$ (resp. $s_{k-1}(w)$) est appelé le sommet initial (resp. final) de $N_{k,t}(w)$. Par exemple, le graphe $N_{3,3}((ab)^4(cb)^4a)$ peut être représenté ainsi



On dit que deux sommets v_1 et v_2 sont dans la même *t-composante*, s'il existe deux chemins, de v_1 pour v_2 et de v_2 pour v_1, respectivement, utilisant seulement des arcs d'étiquette t. Dans le graphe ci-dessus, par exemple, *ab* et *ba* (resp. *bc* et *cb*) sont dans la même 3-composante. Nous aurons besoin du lemme suivant (voir [59]).

Lemme 7.2.5 *Soient A un alphabet fini, $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}_0$ et $T \geq (1 + t(|A|^k!))(1 + |A|)$. Si $w, w' \in A^+$ sont tels que $w \approx_{k,1,T} w'$, alors les graphes $N_{k,t}(w)$ et $N_{k,t}(w')$ sont égaux, sauf peut-être en ce qui concerne leurs sommets initiaux et finaux. De plus, deux cas sont possibles :*

(1) *les sommets $p_{k-1}(w)$ et $p_{k-1}(w')$ sont dans la même t-composante et les sommets $s_{k-1}(w)$ et $s_{k-1}(w')$ sont dans la même t-composante.*

(2) *les sommets $p_{k-1}(w)$ et $s_{k-1}(w)$ sont dans la même t-composante et les sommets $p_{k-1}(w')$ et $s_{k-1}(w')$ sont dans la même t-composante.* $\square$

On peut maintenant énoncer le résultat suivant.

Théorème 7.2.6 *Soit L un langage reconnaissable de A^+, soit S le semigroupe syntaxique de L et soit P son image syntaxique.*

(1) *L est $\mathcal{L}tp$ (resp. $\mathcal{L}ts$) si et seulement si $S \in \mathbf{LJ}_1$ et P est une union de $\mathcal{R}$-classes (resp. $\mathcal{L}$-classes) de S.*

(2) *L est $\mathcal{L}tp$-s (resp. $\mathcal{L}ts$-s) si et seulement si $S \in (\mathbf{Com} * \mathbf{D}) \cap \mathbf{A}$ et P est une union de $\mathcal{R}$-classes (resp. $\mathcal{L}$-classes) de S.*

Preuve. Les preuves s'adaptent sans difficulté des preuves correspondantes du théorème 7.2.4. Nous rappelons seulement la preuve de (2). Supposons d'abord que L est un langage $\mathcal{L}tp$-s. Alors, il existe des entiers $k \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{N}_0$ tels que L est saturé par $\approx_{k,1,t}$. Comme $\mathcal{L}tp$-$s \subseteq \mathcal{L}t$-s, L est aussi $\mathcal{L}t$-s et le théorème 7.2.3 montre que $S \in (\mathbf{Com} * \mathbf{D}) \cap \mathbf{A}$. Comme le morphisme syntaxique de L, $\eta : A^+ \to S$, est surjectif, on peut fixer, pour chaque élément $s \in S^1$, un mot $s' \in A^*$ tel que $\eta(s') = s$ (si $s = 1$, on prend $s' = 1$). Pour prouver que P est une union de $\mathcal{R}$-classes de S, considérons deux éléments r et s de S, $\mathcal{R}$-équivalents, et supposons que $r \in P$. On veut montrer que $s \in P$. Puisque $r \mathcal{R} s$ il existe $x, y \in S^1$ tels que $rx = s$ et $sy = r$. Maintenant, soit $n \in \mathbb{N}$ un exposant de S tel que $n \geq kt$. Alors

$$r'(x'y')^n \approx_{k,1,t} r'(x'y')^n x'.$$

Mais $\eta(r'(x'y')^n) = r \in P$ et donc $r'(x'y')^n \in L$. Ceci implique $r'(x'y')^n x' \in L$, d'où $\eta(r'(x'y')^n x') = s \in P$.

Réciproquement, comme $S \in (\mathbf{Com} * \mathbf{D}) \cap \mathbf{A}$ on déduit du théorème 7.2.3 qu'il existe des entiers k et t tels que L est saturé par $\sim_{k,1,t}$. Nous allons prouver que L est saturé par $\approx_{k,1,T}$ pour un T suffisamment grand (on peut supposer $T = (1+t(|A|^k!))(1+|A|))$.

Soient w et w' deux mots tels que $w \approx_{k,1,T} w'$ et $w \in L$. On veut prouver que $w' \in L$. Si $|w| < k$ (ou $|w'| < k$), alors $w = w'$. Donc, on peut supposer que $|w|, |w'| \geq k$. Supposons maintenant que $|w| < T$ (ou $|w'| < T$). Nous affirmons que $w \sim_{k,1,T} w'$. Comme $w \approx_{k,1,T} w'$, il suffit de prouver que $s_{k-1}(w) = s_{k-1}(w')$. Si $k = 1$ ceci est clair. Soit maintenant $k \geq 2$ et posons $s = s_{k-1}(w)$. Puisque $|w| < T$ on a $\left[\begin{smallmatrix} w \\ s \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} w' \\ s \end{smallmatrix}\right] < T$. Posons $n = \left[\begin{smallmatrix} w \\ s \end{smallmatrix}\right]$ et supposons que $s_{k-1}(w') \neq s$. Alors,

$$\sum_{a \in A} \begin{bmatrix} w \\ sa \end{bmatrix} = n - 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{a \in A} \begin{bmatrix} w' \\ sa \end{bmatrix} = n.$$

Mais ceci contredit l'hypothèse que $w \approx_{k,1,T} w'$, parce que dans ce cas $\left[\begin{smallmatrix} w \\ sa \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} w' \\ sa \end{smallmatrix}\right]$ pour tout $a \in A$. Donc, $s_{k-1}(w) = s_{k-1}(w')$ et l'affirmation est prouvée. Cela entraîne $w \sim_{k,1,t} w'$, puisque $t < T$, et nous pouvons conclure que $w' \in L$.

Par conséquent, on peut supposer $|w|, |w'| \geq T$. Comme $\left[\begin{smallmatrix} w \\ u \end{smallmatrix}\right] \equiv_{1,T} \left[\begin{smallmatrix} w' \\ u \end{smallmatrix}\right]$ pour tout mot u de longueur k (et donc $\left[\begin{smallmatrix} w \\ u \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} w' \\ u \end{smallmatrix}\right]$ seuil t), et comme $p_{k-1}(w) = p_{k-1}(w')$, les graphes $N_{k,t}(w)$ et $N_{k,t}(w')$ sont égaux, sauf peut-être en ce qui concerne leurs sommets finaux.

On note $f = s_{k-1}(w)$ et $f' = s_{k-1}(w')$, respectivement, les sommets finaux de $N_{k,t}(w)$ et de $N_{k,t}(w')$. Comme $N_{k,t}(w)$ et $N_{k,t}(w')$ ont le même sommet initial, f et f' sont dans une même t-composante d'après le lemme 7.2.5. Montrons que alors $\eta(w) \mathcal{R} \eta(w')$.

Nous avons, en particulier, que $w' \approx_{k,1,t} w'v$ pour un certain $v \in A^*$ tel que $s_{k-1}(w'v) = s_{k-1}(w)$. Comme $w \approx_{k,1,t} w'$ (et donc $w \approx_{k,1,t} w'v$) on déduit que

$$w \sim_{k,1,t} w'v.$$

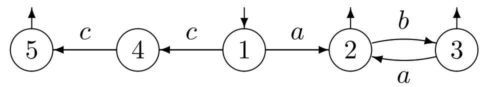
Alors, comme $\sim_{k,1,t}$ est une congruence qui sature L, nous avons, pour tous $r, s \in A^*$, $rws \sim_{k,1,t} rw'vs$ et donc $rws \in L$ si et seulement si $rw'vs \in L$. C'est-à-dire que $w \sim_L w'v$ d'où

$$\eta(w) = \eta(w')\eta(v).$$

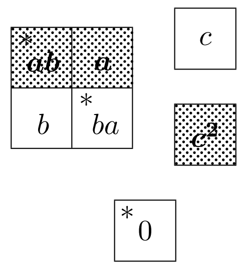
Par symétrie, on déduit que $\eta(w) \mathcal{R} \eta(w')$.

Maintenant, comme P est union de $\mathcal{R}$-classes on en déduit que $\eta(w') \in P$. Par conséquent, $w' \in L$ ce qui termine la preuve. $\square$

Exemple 7.2.7 *Soit* $A = \{a, b, c\}$ *et soit* $L = (ab)^+ \cup a(ba)^* \cup \{c^2\}$. *Alors,* L *est reconnu par l'automate suivant.*



Le semigroupe syntaxique $S(L)$ *a sept éléments et il est défini par les relations* $a^2 = ac = b^2 = bc = ca = cb = c^3 = 0$. *Sa structure en* $\mathcal{J}$*-classes est représentée par la figure suivante.*



Comme on peut le vérifier, $S(L) \in \mathbf{LJ}_1$. *D'autre part, l'image syntaxique de* L *est l'ensemble* $P = \{ab, a, c^2\}$. *Puisqu'il est union de* $\mathcal{R}$*-classes de* $S(L)$*,* L *est* $\mathcal{L}tp$. *En fait, on peut écrire*

$$L = \{a, c^2\}A^* \setminus A^*\{a^2, ac, b^2, bc, ca, cb, c^3\}A^*.$$

Notons que P *n'est pas union de* $\mathcal{L}$*-classes de* $S(L)$. *Donc,* L *n'est pas* $\mathcal{L}ts$. ■

Comme chaque $\mathcal{J}$-classe d'un semigroupe fini est une union de $\mathcal{R}$-classes (resp. de $\mathcal{L}$-classes), on a les conséquences suivantes des théorèmes antérieurs.

Corollaire 7.2.8 *Les suivantes égalités sont valides*

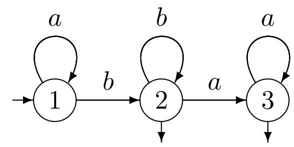
$$\begin{aligned} \mathcal{F}lt &= \mathcal{L}tp\text{-}s \cap \mathcal{L}ts = \mathcal{F}lt\text{-}s \cap \mathcal{L}ts = \mathcal{L}tp \cap \mathcal{L}ts \\ &= \mathcal{L}ts\text{-}s \cap \mathcal{L}tp = \mathcal{F}lt\text{-}s \cap \mathcal{L}tp \\ &= \mathcal{F}lt\text{-}s \cap \mathcal{L}t. \end{aligned}$$

Preuve. On montre seulement $\mathcal{F}lt = \mathcal{L}tp$-$s \cap \mathcal{L}ts$. Les autres égalités soit sont conséquences de celle-ci, soit se prouvent de façon similaire. Soit L un langage à la fois $\mathcal{L}tp$-s et $\mathcal{L}ts$. Alors, d'après le théorème 7.2.6, $S(L) \in \mathbf{LJ}_1$ et l'image syntaxique de L est à la fois une union de $\mathcal{R}$-classes et une union de $\mathcal{L}$-classes de $S(L)$. Par conséquent $S(L) \in \mathbf{LJ}_1$ et l'image syntaxique de L est une union de $\mathcal{J}$-classes de $S(L)$, ce qui montre que L est $\mathcal{F}lt$, d'après le théorème 7.2.4. □

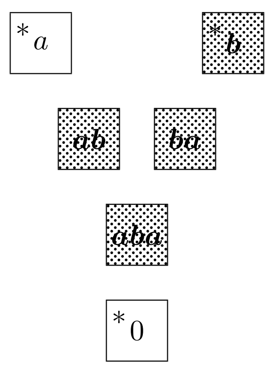
Corollaire 7.2.9 *Un langage reconnaissable* L *de* A^+ *est à la fois* $\mathcal{L}tp$-s *et* $\mathcal{L}ts$-s *si et seulement si* $S(L) \in (\mathbf{Com} * \mathbf{D}) \cap \mathbf{A}$ *et son image syntaxique est une union de* $\mathcal{J}$*-classes de* S. □

On remarque qu'un langage L peut être à la fois $\mathcal{L}tp$-s et $\mathcal{L}ts$-s sans être $\mathcal{F}lt$-s. C'est-à-dire que la classe $\mathcal{L}tp$-$s \cap \mathcal{L}ts$-s contient strictement la classe $\mathcal{F}lt$-s. Ceci est montré par l'exemple suivant.

Exemple 7.2.10 *Soit $A = \{a, b\}$ et soit $L = a^*b^+a^*$. Alors, L est reconnu par l'automate suivant.*



Le semigroupe syntaxique de L est défini par les relations $a^2 = a$, $b^2 = b$ et $bab = 0$. Sa structure en $\mathcal{J}$-classes est représentée par le diagramme suivant, où les boîtes grises représentent l'image syntaxique P de L.



On voit, donc, que P est une union de $\mathcal{J}$-classes de $S(L)$ et que L est $\mathcal{F}ltp$-s et $\mathcal{F}lts$-s. En effet, on peut écrire

$$L = b^+a^* \cup a^+b^+a^* = [bA^* \setminus L(ab, 1, 1, 1)] \cup [aA^* \cap L(ab, 1, 1, 2)],$$

et symétriquement

$$L = a^*b^+ \cup a^*b^+a^+ = [A^*b \setminus L(ba, 1, 1, 1)] \cup [A^*a \cap L(ba, 1, 1, 2)].$$

Vérifions maintenant que L n'est pas $\mathcal{F}lt$-s. Nous prouvons que P n'est pas union de J-classes. En effet, par définition de J, puisque a et b sont idempotents, on a $aabaa \, \mathsf{J} \, baaab$, c'est-à-dire que $aba \, \mathsf{J} \, 0$. Par conséquent P n'est pas union de J-classes puisque $aba \in P$ et $0 \notin P$.

Notons aussi que L n'est pas $\mathcal{L}t$, puisque $S(L) \notin \mathbf{LJ}_1$. En effet, par exemple, a est idempotent et aba ne l'est pas. ∎

7.3 Les variétés de langages engendrées

Dans cette section nous déterminons la plus petite (resp. la plus grande) variété de langages qui contient (resp. qui est contenue dans) chaque classe de langages considérée dans la dernière section.

Comme on a vu dans le théorème 7.2.3, les classes $\mathcal{L}t$, des langages localement testables, et $\mathcal{L}t$-s, des langages localement testables à seuil, sont des variétés de langages. Maintenant on prouve le résultat suivant.

Proposition 7.3.1 *La classe $\mathcal{L}t$ (resp. $\mathcal{L}t$-s) est la plus petite variété de langages qui contient les langages de la forme A^*wA^* (resp. $L(w,r,1,t)$) pour chaque alphabet A et chaque mot $w \in A^+$ (resp. et chaque paire d'entiers positifs (r,t)).*

Preuve. On donne la preuve pour le cas $\mathcal{L}t$. La preuve pour $\mathcal{L}t$-s en est une conséquence puisque $A^*wA^* = L(w,1,1,1)$. Soit $\mathcal{V}$ la plus petite variété de langages qui contient les langages de la forme A^*wA^*, où A est un alphabet quelconque et $w \in A^+$. D'abord il est clair que $\mathcal{V}$ est contenue dans $\mathcal{L}t$ puisque $\mathcal{L}t$ est une variété, et pour chaque alphabet A et $w \in A^+$, le langage A^*wA^* est localement testable.

Soit maintenant A un alphabet fixé. Comme les langages localement testables de A^+ sont des combinaisons booléennes de langages de la forme wA^*, A^*w et A^*wA^*, où $w \in A^+$, pour prouver l'inclusion $\mathcal{L}t(A^+) \subseteq \mathcal{V}(A^+)$ il suffit de montrer que les langages de la forme wA^* (resp. A^*w) sont dans $\mathcal{V}(A^+)$. Soit B l'alphabet obtenu de A par l'addition d'une nouvelle lettre b, c'est-à-dire que $B = A \cup \{b\}$. Le langage B^*bwB^* est dans $\mathcal{V}(B^+)$. Alors, le langage

$$b^{-1}(B^*bwB^*) = B^*bwB^* \cup wB^*$$

est aussi dans $\mathcal{V}(B^+)$, puisque $\mathcal{V}(B^+)$ est fermée par résiduel. Maintenant,

$$(B^*bwB^* \cup wB^*) \setminus B^*bB^* = wA^*$$

est aussi un langage de $\mathcal{V}(B^+)$, puisque $B^*bB^* \in \mathcal{V}(B^+)$ et $\mathcal{V}(B^+)$ est fermée par complément. Considérons maintenant le morphisme $\varphi : A^+ \to B^+$ donné par $\varphi(a) = a$ pour tout $a \in A$. On a $\varphi^{-1}(wA^*) = wA^*$, d'où wA^* est un langage de $\mathcal{V}(A^+)$, puisque $\mathcal{V}$ est fermée par image inverse de morphismes entre semigroupes libres. Que tout langage de la forme A^*w avec $w \in A^+$ est dans $\mathcal{V}(A^+)$ peut être prouvé de façon analogue. On déduit ainsi que $\mathcal{L}t(A^+) \subseteq \mathcal{V}(A^+)$. Comme ceci est vrai pour tout alphabet A, on conclut que $\mathcal{L}t \subseteq \mathcal{V}$. □

Corollaire 7.3.2 *La classe $\mathcal{L}t$ (resp. $\mathcal{L}t$-s) est la variété de langages engendrée par chacune des classes $\mathcal{F}lt$, $\mathcal{L}tp$ et $\mathcal{L}ts$ (resp. $\mathcal{F}lt$-s, $\mathcal{L}tp$-s et $\mathcal{L}ts$-s).* □

Ce résultat et la proposition 7.1.4 entraînent le suivant.

Corollaire 7.3.3 *La pseudo-variété $\mathbf{LJ}_1$ (resp. $(\mathbf{Com} * \mathbf{D}) \cap \mathbf{A}$, $\mathbf{Com} * \mathbf{D}$) est engendrée par les semigroupes syntaxiques des langages de la forme A^*wA^* (resp. $L(w,r,1,t)$, $L(w,r,n,t)$), où A est un alphabet et $w \in A^+$ (resp. et $r,t \in \mathbb{N}_0$ et $n \in \mathbb{N}$).* □

Maintenant nous allons considérer les variétés de langages contenues dans les classes de langages que nous étudions dans ce chapitre. Commençons par considérer la relation d'équivalence J définie immédiatement avant le théorème 7.2.3 et démontrons l'observation suivante.

Lemme 7.3.4 *Soit S un semigroupe fini. Alors, S est J-trivial si et seulement si S appartient à la pseudo-variété $\mathbf{J} = \mathbf{J} \cap [\![a^\omega bc^\omega da^\omega = c^\omega da^\omega bc^\omega]\!]$, où $\mathbf{J}$ dénote la pseudo-variété des semigroupes $\mathcal{J}$-triviaux.*

Preuve. Par définition de l'équivalence J, S est J-trivial si et seulement si S est $\mathcal{J}$-trivial (puisque $\mathcal{J}$ est contenue dans J) et, pour tous idempotents $e, f \in S$ et tous $r, s \in S$, $erfse = fserf$. Ceci signifie que S est J-trivial si et seulement si $S \in \mathbf{J}$ et S satisfait la pseudo-idéntité $a^\omega bc^\omega da^\omega = c^\omega da^\omega bc^\omega$, autrement dit, si et seulement si $S \in \mathbf{J}$. □

On termine ce chapitre avec le résultat annoncé.

Proposition 7.3.5 (1) *La classe $\mathcal{L}t \cap \mathcal{J}$ (resp. $\mathcal{L}t \cap \mathcal{R}$, $\mathcal{L}t \cap \mathcal{L}$) des langages $\mathcal{L}t$ et $\mathcal{J}$-triviaux (resp. $\mathcal{L}t$ et $\mathcal{R}$-triviaux, $\mathcal{L}t$ et $\mathcal{L}$-triviaux) est la plus grande variété de langages contenue dans la classe de langages $\mathcal{F}lt$ (resp. $\mathcal{L}tp$, $\mathcal{L}ts$).*

(2) *La classe $\mathcal{L}t$-$s \cap J$ (resp. $\mathcal{L}t$-$s \cap \mathcal{R}$, $\mathcal{L}t$-$s \cap \mathcal{L}$) des langages $\mathcal{L}t$-s et J-triviaux (resp. $\mathcal{L}t$-s et $\mathcal{R}$-triviaux, $\mathcal{L}t$-s et $\mathcal{L}$-triviaux) est la plus grande variété de langages contenue dans la classe de langages $\mathcal{F}lt$-s (resp. $\mathcal{L}tp$-s, $\mathcal{L}ts$-s).*

Preuve. On donne la preuve de (2) pour $\mathcal{L}t$-$s \cap J$. Les autres cas sont similaires. Soit $\mathcal{V}$ la plus grande variété de langages contenue dans la classe de tous les langages fortement localement testables à seuil, et soit $L \in \mathcal{L}t$-$s \cap J$. Alors, $S(L) \in (\mathbf{Com} * \mathbf{D}) \cap \mathbf{A}$ et l'image syntaxique de L est une union de J-classes de $S(L)$, puisqu'elles sont triviales. Alors, d'après le théorème 7.2.4, L est fortement localement testable à seuil. Ceci entraîne, par définition de $\mathcal{V}$, que $\mathcal{L}t$-$s \cap J \subseteq \mathcal{V}$.

Soit maintenant A un alphabet quelconque et soit $L \in \mathcal{V}(A^+)$. Alors, L est fortement localement testable à seuil et, donc, L est aussi localement testable à seuil. Il reste à prouver que L est J-trivial. Pour cela, d'après le lemme 7.3.4, on doit montrer que L est $\mathcal{J}$-trivial et que $S(L)$ satisfait la pseudo-identité $a^\omega bc^\omega da^\omega = c^\omega da^\omega bc^\omega$.

Supposons d'abord, par contradiction, que L n'est pas $\mathcal{J}$-trivial, c'est-à-dire, supposons que $S(L)$ ne verifie pas la pseudo-identité $(ab)^\omega = (ba)^\omega$. Alors, il existe $u, v \in A^+$ tels que $(uv)^n \not\sim_L (vu)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $r_n, s_n \in A^*$ tels que,

– soit $r_n(uv)^n s_n \in L$ et $r_n(vu)^n s_n \notin L$,

– soit $r_n(uv)^n s_n \notin L$ et $r_n(vu)^n s_n \in L$.

Autrement dit,

– soit $(uv)^n \in r_n^{-1} L s_n^{-1}$ et $(vu)^n \notin r_n^{-1} L s_n^{-1}$,

– soit $(uv)^n \notin r_n^{-1} L s_n^{-1}$ et $(vu)^n \in r_n^{-1} L s_n^{-1}$.

Soient $k, t \in \mathbb{N}$ et soit $n \geq kt$. On a $(uv)^n \equiv_{k,1,t} (vu)^n$. Alors, pour tous $k, t \in \mathbb{N}$, $r_n^{-1} L s_n^{-1}$ n'est pas saturé par l'équivalence $\equiv_{k,1,t}$. Ceci implique que $r_n^{-1} L s_n^{-1}$ n'est pas fortement localement testable à seuil. On arrive à une contradiction car $r_n^{-1} L s_n^{-1} \in \mathcal{V}(A^+)$ puisque $L \in \mathcal{V}(A^+)$ et $\mathcal{V}(A^+)$ est fermée par résiduel. Donc, L est $\mathcal{J}$-trivial.

Montrons maintenant que $S(L)$ satisfait la pseudo-identité $a^\omega bc^\omega da^\omega = c^\omega da^\omega bc^\omega$. Comme L est $\mathcal{F}lt$-s, $S(L)$ est apériodique d'après le théorème 7.2.3. Il existe, donc, un entier m tel que, pour tout $s \in S(L)$, $s^m = s^{m+1}$. Supposons que $S(L)$ ne vérifie pas la pseudo-identité $a^\omega bc^\omega da^\omega = c^\omega da^\omega bc^\omega$, c'est-à-dire, supposons qu'il existe $u, v, p, q \in A^+$ tels que $u^n pv^n qu^n \not\sim_L v^n qu^n pv^n$ pour tout $n \geq m$. Alors, sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe $r_n, s_n \in A^*$ tels que

$$r_n u^n p v^n q u^n s_n \in L \qquad \text{et} \qquad r_n v^n q u^n p v^n s_n \notin L.$$

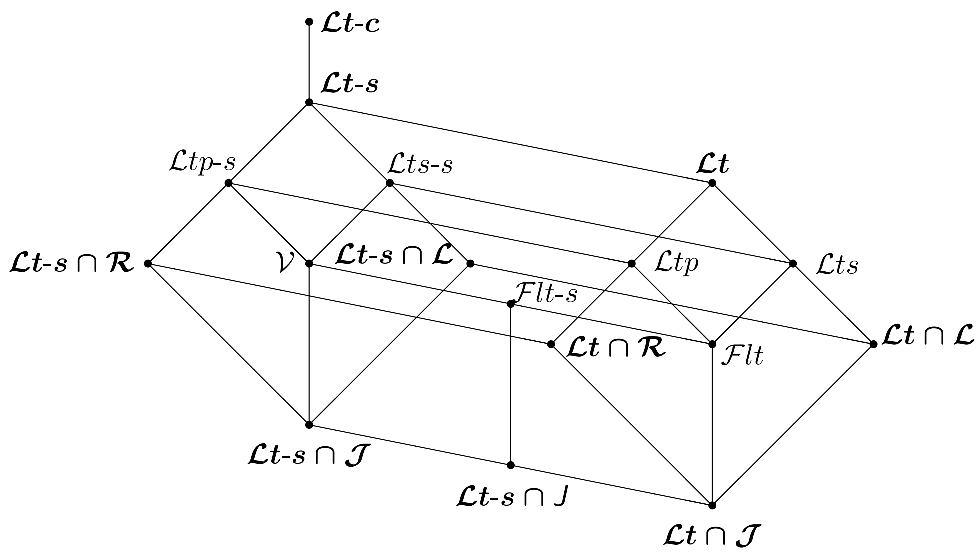
Dans ce cas,

$$u^n p v^n q u^n \in r_n^{-1} L s_n^{-1} \qquad \text{et} \qquad v^n q u^n p v^n \notin r_n^{-1} L s_n^{-1}.$$

Soient $k, t \in \mathbb{N}$ et soit $n \geq max\{kt, m\}$. On a $u^n p v^n q u^n \equiv_{k,1,t} v^n q u^n p v^n$ et, par conséquent, $r_n^{-1} L s_n^{-1}$ n'est pas fortement localement testable à seuil. Mais ceci est une contradiction par les mêmes raisons que ci-dessus et donc $S(L)$ doit satisfaire la pseudo-identité $a^\omega b c^\omega d a^\omega = c^\omega d a^\omega b c^\omega$.

On déduit donc du lemme 7.3.4 que L est J-trivial, ce qui prouve que $L \in (\mathcal{L}t\text{-}s \cap J)(A^+)$. On a ainsi démontré que $\mathcal{V}(A^+) \subseteq (\mathcal{L}t\text{-}s \cap J)(A^+)$ et comme ceci est vrai pour tout alphabet A on conclut que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{L}t\text{-}s \cap J$. $\square$

Nous résumons dans le diagramme suivant les relations d'inclusion énoncés dans les résultats de cette section. Les classes indiquées en caractères gras sont les variétés de langages et nous dénotons par $\mathcal{V}$ la classe $\mathcal{L}tp\text{-}s \cap \mathcal{L}ts\text{-}s$.



Quatrième partie

Opérations Implicites sur $\mathbf{LJ}_1$

Chapitre 8

Les Éléments de Type (2,1) de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$

Considérons une pseudo-variété $\mathbf{V}$ et un alphabet $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. On dit qu'un élément x de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ est une *opération implicite de type* $(2,1)$ si on peut construire x à partir des projections $a_1, \ldots, a_n$ en utilisant un nombre fini de fois deux opérations : l'opération binaire de multiplication et l'opération unaire $y \mapsto y^\omega$.

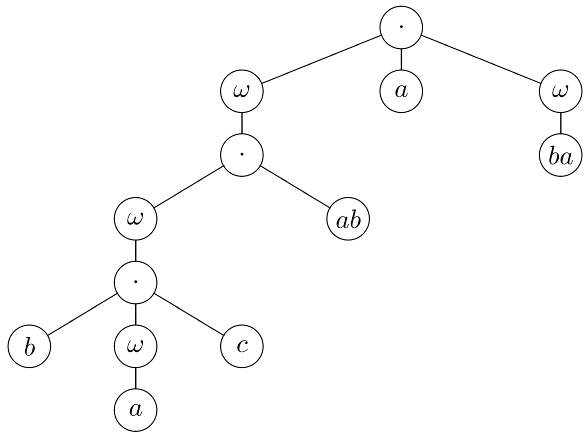
Nous avons mentionné, à la section 3.6.4, le cas de la pseudo-variété $\mathbf{J}$ des semigroupes $\mathcal{J}$-triviaux : Almeida [8, 9] a montré que tous les éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{J})$ sont de type $(2,1)$. Tel est le cas, donc, pour toutes les sous-pseudo-variétés de $\mathbf{J}$.

On remarque que normalement $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ n'est pas constitué seulement d'opérations implicites de type $(2,1)$. Cependant elles forment un sous-semigroupe important de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$. Il est, notamment, le plus utilisé dans la construction d'exemples.

Dans ce chapitre on montre qu'on peut décider effectivement l'égalité entre deux opérations implicites de type $(2,1)$ sur la pseudo-variété $\mathbf{LJ}_1$.

8.1 Préliminaires

Toute opération implicite de type $(2,1)$ peut être représentée par un arbre orienté dont les nœuds sont étiquetés dans $A^+ \cup \{\omega, \cdot\}$. Par exemple, l'opération implicite $((ba^\omega c)^\omega ab)^\omega a(ba)^\omega$ est représentée par l'arbre



Les nœuds étiquetés dans A^+ sont les feuilles et un nœud étiqueté '$\cdot$' est soit la racine, soit l'unique fils d'un nœud étiqueté ω.

Comme nous le verrons au prochain chapitre, le semigroupe $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ est très loin d'être constitué seulement d'opérations implicites de type $(2,1)$.

Le résultat que nous voulons démontrer dans ce chapitre est le suivant.

Théorème 8.1.1 *Chaque opération implicite $x \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ de type $(2,1)$ peut être écrite comme un produit*

$$x = u_0 x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_k^\omega u_k$$

où $k \in \mathbb{N}_0$, $u_0, \ldots, u_k \in A^*$, $u_0 \neq 1$ si $x = u_0$ et $x_1, \ldots, x_k \in A^+$.

En outre, si $y = v_0 y_1^\omega v_1 y_2^\omega \cdots y_m^\omega v_m$ est un autre produit du même type, alors $x = y$ si et seulement si ou bien $k = m = 0$ et $u_0 = v_0$, ou bien $k, m \geq 1$, $u_0 x_1^{+\infty} = v_0 y_1^{+\infty}$, $x_k^{-\infty} u_k = y_m^{-\infty} v_m$ et les ensembles

$$I_x = \{x_i^\infty, x_j^{-\infty} u_j x_{j+1}^{+\infty} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k-1\}$$

et

$$I_y = \{y_i^\infty, y_j^{-\infty} v_j y_{j+1}^{+\infty} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m-1\}$$

sont égaux. De plus, on peut décider effectivement si $x = y$.

Comme on peut le vérifier dans l'énoncé de ce résultat, les mots infinis (unilatères et biinfinis) *ultimement périodiques* jouent un rôle très important pour la description des opérations implicites de type $(2,1)$ sur $\mathbf{LJ}_1$. Tel est le cas aussi dans le cas général des opérations implicites (quelconques) sur $\mathbf{LJ}_1$, où les mots infinis unilatères et biinfinis (quelconques) sont fondamentaux, comme nous le verrons.

8.2 Facteurs des mots biinfinis

Nous exposons dans cette section quelques résultats sur les facteurs finis des mots biinfinis ultimement périodiques, que nous utiliserons plus tard dans la preuve du théorème 8.1.1.

Tout d'abord on rappelle un résultat classique [52, théorème 7.3].

Théorème 8.2.1 *Si x est un mot biinfini tel que $|\mathrm{Fact}_{k+1}(x)| = |\mathrm{Fact}_k(x)|$ pour un entier $k \in \mathbb{N}$, alors x est périodique.* $\square$

Maintenant on peut prouver les résultats suivants.

Lemme 8.2.2 *Soient $x, y \in A^{\tilde{\mathbb{Z}}}$ deux mots biinfinis ultimement périodiques tels que* $\mathrm{Fact}(x) \subseteq \mathrm{Fact}(y)$.

(1) *Si y est périodique, alors $x = y$.*

(2) *Si y n'est pas périodique, alors la forme canonique de y est du type $y = u^{-\infty}avw^{+\infty}$ et on a $x = y$, $x = u^{\infty}$ ou $x = w^{\infty}$.*

Preuve. Supposons d'abord que y est périodique, disons $y = u^{\infty}$. Comme $\mathrm{Fact}(x) \subseteq \mathrm{Fact}(y)$, on a pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $|\mathrm{Fact}_k(x)| \leq |\mathrm{Fact}_k(y)|$. Alors, le théorème 8.2.1 entraîne que x est aussi périodique, disons $x = v^{\infty}$. En particulier, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, v^k est facteur de y. Alors, si on choisit $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$|v^k| \geq |v| + |u| - pgcd(|v|, |u|),$$

il existe $r \in A^+$ conjugué de u, $r' \in A^*$ préfixe propre de r, et un entier $m \in \mathbb{N}$ tels que $v^k = r^m r'$. Par conséquent, on déduit de la proposition 1.5.3 que v et r sont puissances d'un même mot, disons s. Ceci entraîne $v^{\infty} = s^{\infty} = r^{\infty}$. D'ailleurs r est conjugué de u et, donc, $r^{\infty} = u^{\infty}$. Par conséquent, on a

$$x = v^{\infty} = r^{\infty} = u^{\infty} = y.$$

Supposons maintenant que y n'est pas périodique et que $y = u^{-\infty}avw^{+\infty}$ (avec $u, w \in A^+$, $a \in A$ et $v \in A^*$) est sa forme canonique. Rappelons que, en particulier, la première lettre de u est distincte de a. Si x est périodique, disons $x = r^{\infty}$, alors r^k est facteur de y pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. Comme la longueur de av est finie, on a que r^k est facteur soit de $u^{-\infty}$ soit de $w^{+\infty}$. Si on considère un k suffisamment grand, on peut prouver comme dans (1), que ceci implique $x = u^{\infty}$ ou $x = w^{\infty}$.

Supposons maintenant que x n'est pas périodique et soit $x = u_1^{-\infty}a_1v_1w_1^{+\infty}$ sa forme canonique, où $u_1, w_1 \in A^+$, $a_1 \in A$ et $v_1 \in A^*$ avec $p_1(u_1) \neq a_1$. Par hypothèse, $u_1^k a_1$ est facteur de y pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, pour k suffisamment grand, on déduit du corollaire 1.5.4 que $u_1^k a_1$ a une seule occurrence dans y. Plus précisément, $u_1^k a_1$ est suffixe de $u^{-\infty}a$.

$u^{-\infty}$	a	v	$w^{+\infty}$
u_1^k	a_1		

En effet si cela n'était pas le cas, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on aurait soit $u_1^m a_1$ comme facteur de $w^{+\infty}$, soit $u^m a$ comme facteur d'une puissance de u_1, ce qui contradit le corollaire 1.5.4.

On déduit ainsi que $s_r(u_1^{-\infty}a_1) = s_r(u^{-\infty}a)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$u_1^{-\infty}a_1 = u^{-\infty}a. \tag{8.1}$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, le mot $u_1^k a_1 p_k(v_1 w_1^{+\infty})$ est aussi facteur de y avec une seule occurrence. Alors, $p_k(v_1 w_1^{+\infty}) = p_k(v w^{+\infty})$ et donc

$$v_1 w_1^{+\infty} = v w^{+\infty}. \tag{8.2}$$

Pour terminer, on déduit de (8.1) et de (8.2) que

$$x = u_1^{-\infty} a_1 v_1 w_1^{+\infty} = u^{-\infty} a v w^{+\infty} = y. \square$$

Lemme 8.2.3 *Soient $x \in A^{\tilde{\mathbb{Z}}}$ et $y = uv^{+\infty} \in A^{\mathbb{N}}$ (resp. $y = v^{-\infty}u \in A^{-\mathbb{N}}$) deux mots ultimement périodiques avec $u \in A^*$ et $v \in A^+$. Si $\mathrm{Fact}(x) \subseteq \mathrm{Fact}(y)$, alors $x = v^{\infty}$.*

Preuve. Comme $\mathrm{Fact}(x) \subseteq \mathrm{Fact}(uv^{+\infty})$ on a $\mathrm{Fact}(x) \subseteq \mathrm{Fact}(w^{-\infty}uv^{+\infty})$ pour tout $w \in A^+$. D'après le lemme antérieur, cela entraîne nécessairement que $x = v^{\infty}$. $\square$

Enfin on a le résultat suivant.

Lemme 8.2.4 *Soit $x \in A^{\tilde{\mathbb{Z}}}$ un mot biinfini et soit B un sous-ensemble fini de $A^{\mathbb{N}} \cup A^{-\mathbb{N}} \cup A^{\tilde{\mathbb{Z}}}$. Si $\mathrm{Fact}(x) \subseteq \mathrm{Fact}(B)$, alors il existe $y \in B$ tel que $\mathrm{Fact}(x) \subseteq \mathrm{Fact}(y)$.*

Preuve. Soit $w = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un mot biinfini pointé représentant de x. Comme $\mathrm{Fact}(x) \subseteq \mathrm{Fact}(B)$, on a que $w_{[-k,k]} \in \mathrm{Fact}(B)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or B est fini et $w_{[-m,m]}$ est facteur de $w_{[-k,k]}$ pour tous $m, k \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq k$. Il existe donc un mot $y \in B$ tel que $w_{[-k,k]}$ est facteur de y pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $\mathrm{Fact}(x) = \mathrm{Fact}(w) \subseteq \mathrm{Fact}(y)$. $\square$

8.3 Quelques propriétés de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$

Pour la preuve du théorème 8.1.1, nous aurons besoin de quelques résultats généraux sur $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$.

Tout d'abord on montre une caractérisation fondamentale des opérations implicites sur $\mathbf{LJ}_1$. Comme $\mathbf{LI} \subseteq \mathbf{LJ}_1$, le semigroupe libre A^+ peut être vu comme un sous-semigroupe de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$. On notera $\mathrm{Fact}(x)$ l'ensemble de tous les mots $u \in A^+$ tels que u est un facteur de x, i.e., tels que $x = yuz$ pour des $y, z \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1$.

Proposition 8.3.1 *Soit A un alphabet fini et soient $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$. Alors, $x = y$ si et seulement si $\mathrm{Fact}(x) = \mathrm{Fact}(y)$ et $\mathbf{LI} \models x = y$.*

Preuve. Comme $\mathbf{LI}$ est une sous-pseudo-variété de $\mathbf{LJ}_1$ la condition nécessaire est immédiate. Supposons maintenant que $\mathrm{Fact}(x) = \mathrm{Fact}(y)$ et que $\mathbf{LI}$ satisfait $x = y$. On rappelle que l'algèbre de Boole de tous les langages $\mathbf{LJ}_1$-reconnaissables de A^+ est engendrée par l'ensemble $\mathcal{L} = \{wA^*, A^*w, A^*wA^* \mid w \in A^+\}$. L'ensemble des fermetures topologiques dans $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ des éléments de $\mathcal{L}$ est

$$\overline{\mathcal{L}} = \{w\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1, \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1 w, \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1 w \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1 \mid w \in A^+\}.$$

En fait, nous avons $wA^* \subseteq w\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1 \subseteq \overline{wA^*}$ puisque A^+ est dense dans $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$. Maintenant, comme $w\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1$ est fermé, on déduit que $w\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1 = \overline{wA^*}$. Le calcul de la fermeture de A^*w et de A^*wA^* est similaire.

Maintenant, nous affirmons que $\overline{\mathcal{L}}$ ne sépare pas x et y. Supposons d'abord que $x \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1 w \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1$. Cela signifie que w est un facteur de x. Donc, par hypothèse, w est aussi facteur de y. Autrement dit, $y \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1 w \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1$. Supposons maintenant que $x \in w\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1$. Cela signifie que w est un préfixe de la restriction de x à $\mathbf{K}$. Comme $\mathbf{LI}$ satisfait $x = y$, $\mathbf{K}$ satisfait aussi $x = y$. Par conséquent, w est aussi préfixe de la restriction de y à $\mathbf{K}$, ce qui veut dire que $y \in w\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1$. De façon analogue on montre que $x \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1 w$ implique $y \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1 w$, ce qui prouve l'affirmation. D'après la proposition 3.3.9, cela équivaut à dire que $x = y$. □

Quelques fois il est important de savoir quelles sont les suites de A^+ qui convergent dans $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$.

Proposition 8.3.2 *Une suite $(u_k)_k$ de A^+ converge dans $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ si et seulement si elle converge dans $\hat{F}_A(\mathbf{LI})$ et tout mot fini est facteur soit d'un nombre fini de termes soit de presque tous les termes de la suite.*

Preuve. Supposons que $(u_k)_k$ converge dans $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$. Comme $\mathbf{LI} \subseteq \mathbf{LJ}_1$ il est évident que la suite converge aussi dans $\hat{F}_A(\mathbf{LI})$. Considérons maintenant un mot $w \in A^+$. On sait que le langage A^*wA^* est $\mathbf{LJ}_1$-reconnaissable et donc, d'après le corollaire 3.3.8, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que

– soit $u_k \in A^*wA^*$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq m$,

– soit $u_k \notin A^*wA^*$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq m$.

On peut donc conclure que w est facteur, ou ne l'est pas, de tous les termes u_k à partir d'un certain rang.

D'après le corollaire 3.3.8, pour la preuve de la condition suffisante il suffit de montrer que si L est un langage de la forme wA^*, A^*w ou A^*wA^* avec $w \in A^+$, alors presque tous les termes de $(u_k)_k$ ou seulement un nombre fini d'entre eux sont dans L. En effet, si cela est le cas, il est facile à vérifier que la même propriété est vraie pour tous les langages qui sont dans l'algèbre de Boole engendrée par les langages de ces trois formes.

Si L est de la forme wA^* ou A^*w, alors L est un langage $\mathbf{LI}$-reconnaissable et comme, par hypothèse, $(u_k)_k$ converge dans $\hat{F}_A(\mathbf{LI})$, la condition énoncée ci-dessus est satisfaite, par le corollaire 3.3.8. Si $L = A^*wA^*$, comme par hypothèse w est facteur de presque tous ou seulement d'un nombre fini des termes de $(u_k)_k$, la condition est également satisfaite. □

Si $(u_k)_k$ est une suite de A^+ on notera

$$\mathrm{Fact}_\infty((u_k)_k) = \{w \in A^+ \mid \exists m \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq m \Rightarrow w \text{ est facteur de } u_k\}.$$

Autrement dit, $\mathrm{Fact}_\infty((u_k)_k)$ est l'ensemble des mots qui sont facteurs de presque tous les termes de la suite $(u_k)_k$. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la dernière proposition.

Corollaire 8.3.3 *Soit $(u_k)_k$ une suite de A^+ convergeant vers x dans $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$. Alors,* $\mathrm{Fact}(x) = \mathrm{Fact}_\infty((u_k)_k)$. □

Lemme 8.3.4 *Soit $x \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1) \setminus A^+$ et supposons que $x = u_0 x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_k^\omega u_k$ est une factorisation de x où $k \in \mathbb{N}$, $u_0, \ldots, u_k \in A^*$ et $x_1, \ldots, x_k \in A^+$. Alors,*

$$\mathrm{Fact}(x) = \mathrm{Fact}(u_0 x_1^{+\infty}) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \mathrm{Fact}(x_i^{-\infty} u_i x_{i+1}^{+\infty}) \right) \cup \mathrm{Fact}(x_k^{-\infty} u_k).$$

Preuve. Par continuité de la multiplication et comme, dans $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$, x_i^ω est la limite de la suite $(x_i^m)_m$, on a $x = \lim\limits_m v_m$ où

$$v_m = u_0 x_1^m u_1 x_2^m \cdots x_k^m u_k.$$

On sait, par le corollaire 8.3.3, que $\mathrm{Fact}(x) = \mathrm{Fact}_\infty((v_m)_m)$ et comme on peut le vérifier $\mathrm{Fact}_\infty((v_m)_m)$ est exactement l'ensemble annoncé. □

Le résultat qui suit est une conséquence simple de la proposition 4.1.3.

Lemme 8.3.5 *Soit $x \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ et supposons que x n'est pas explicite. Alors, $x^\omega = x^2$.*

Preuve. On sait de la proposition 4.1.3 que $x = yz^\omega w$ pour des $y, z, w \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$. Alors, comme $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ satisfait la pseudo-identité $a^\omega b a^\omega b a^\omega = a^\omega b a^\omega$ on a

$$\begin{aligned} (x^2)^2 &= (yz^\omega w)^4 \\ &= (yz^\omega w)^2 \\ &= x^2. \end{aligned}$$

Cela montre que x^2 est idempotent, c'est-à-dire que $x^\omega = x^2$. □

8.4 Démonstration du théorème 8.1.1

On peut finalement prouver la décidabilité de l'égalité entre deux opérations implicites de type $(2,1)$ sur $\mathbf{LJ}_1$.

Preuve du théorème 8.1.1. Comme x est de type $(2,1)$, on peut l'écrire sous la forme

$$x = w_0 z_1^\omega w_1 z_2^\omega \cdots z_m^\omega w_m$$

où $m \in \mathbb{N}_0$, $w_0, \ldots, w_m \in A^*$, et $z_1, \ldots, z_m \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ sont des opérations implicites de type $(2,1)$. D'après le lemme 8.3.5, on peut remplacer chaque facteur de x de la forme z_i^ω par z_i^2 dès lors que z_i n'est pas explicite. Par application successive de ce procédé on obtient,— à la fin d'un nombre fini de pas, puisqu'il existe seulement un nombre fini de ω dans l'écriture de x,— une factorisation de x comme dans l'énoncé. Notons que, de plus, cette factorisation est effectivement calculable.

Pour la preuve de l'unicité, supposons maintenant que

$$x = u_0 x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_k^\omega u_k$$

et

$$y = v_0 y_1^\omega v_1 y_2^\omega \cdots y_m^\omega v_m$$

sont des factorisations comme dans l'énoncé. Les autres cas étant immédiats, on va considérer seulement le cas $k, m \geq 1$. D'après la proposition 8.3.1, on a l'égalité $x = y$ si et seulement si $\mathrm{Fact}(x) = \mathrm{Fact}(y)$ et $\mathbf{LI} \models x = y$. Or, comme on peut se convaincre facilement, les restrictions de x et y à **LI** sont, respectivement,

$$(u_0 x_1^{+\infty}, x_k^{-\infty} u_k) \qquad \text{et} \qquad (v_0 y_1^{+\infty}, y_m^{-\infty} v_m).$$

En outre, on sait d'après le lemme 8.3.4 que $\mathrm{Fact}(x)$ est l'ensemble

$$F_x = \mathrm{Fact}(u_0 x_1^{+\infty}) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \mathrm{Fact}(x_i^{-\infty} u_i x_{i+1}^{+\infty}) \right) \cup \mathrm{Fact}(x_k^{-\infty} u_k)$$

et que $\mathrm{Fact}(y)$ est l'ensemble

$$F_y = \mathrm{Fact}(v_0 y_1^{+\infty}) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} \mathrm{Fact}(y_i^{-\infty} v_i y_{i+1}^{+\infty}) \right) \cup \mathrm{Fact}(y_m^{-\infty} v_m).$$

Nous pouvons en déduire donc que la condition $x = y$ entraîne $u_0 x_1^{+\infty} = v_0 y_1^{+\infty}$, $x_k^{-\infty} u_k = y_m^{-\infty} v_m$ et $F_x = F_y$. Montrons que cela implique $I_x = I_y$. Soit $w \in I_x$. Alors w soit est un mot biinfini ultimement périodique de la forme $w = x_i^\infty$ $(1 \leq i \leq k)$, soit il est de la forme $w = x_j^{-\infty} u_j x_{j+1}^{+\infty}$ $(1 \leq j \leq k-1)$. Posons

$$F'_y = \{v_0 y_1^{+\infty}, y_m^{-\infty} v_m\} \cup \{y_i^{-\infty} v_i y_{i+1}^{+\infty} \mid 1 \leq i \leq m-1\}.$$

Comme $\mathrm{Fact}(w) \subseteq F_x = F_y$, le lemme 8.2.4 montre que $\mathrm{Fact}(w) \subseteq \mathrm{Fact}(z)$ pour un certain $z \in F'_y$. Maintenant, les lemmes 8.2.2 et 8.2.3 permettent de conclure que $w \in I_y$, ce qui prouve l'inclusion $I_x \subseteq I_y$. Par symétrie on déduit que $I_x = I_y$.

Réciproquement, si $u_0 x_1^{+\infty} = v_0 y_1^{+\infty}$, $x_k^{-\infty} u_k = y_m^{-\infty} v_m$ et $I_x = I_y$ on déduit de la proposition 8.3.1 que $x = y$ puisque, en particulier, on a $F_x = F_y$. En effet, soit $w \in A^+$ un élément de F_x. Si w est un facteur de $u_0 x_1^{+\infty}$ ou de $x_k^{-\infty} u_k$ il est évident que $w \in F_y$. Sinon, w est facteur d'un mot biinfini $z = x_i^{-\infty} u_i x_{i+1}^{+\infty}$ pour un certain $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Or, $z \in I_x$ et donc $z \in I_y$ aussi. Par conséquent, soit

(1) $z = y_j^{-\infty} u_j y_{j+1}^{+\infty}$ pour un $j \in \{1, \ldots, m-1\}$

soit

(2) $z = y_j^\infty$ pour un $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Si z est du premier type, on déduit immédiatement que $w \in F_y$. Si $z = y_m^\infty$, alors w est facteur de $y_m^{-\infty} v_m$ ce qui entraîne aussi $w \in F_y$. Finalement, si $z = y_j^\infty$ avec $j \in \{1, \ldots, m-1\}$, alors w est aussi facteur de $y_j^{-\infty} u_j y_{j+1}^{+\infty}$ et donc $w \in F_y$. On a ainsi montré que $F_x \subseteq F_y$. Par symétrie on déduit que $F_x = F_y$ et, donc, que $x = y$.

Il nous reste a montrer que l'égalité $x = y$ est décidable. Comme on l'a prouvé, cela équivaut à la décidabilité des égalités $u_0 x_1^{+\infty} = v_0 y_1^{+\infty}$, $x_k^{-\infty} u_k = y_m^{-\infty} v_m$ et $I_x = I_y$.

Or, chacun des mots $w \in A^{\mathbb{N}} \cup A^{-\mathbb{N}} \cup A^{\tilde{\mathbb{Z}}}$ apparaissant dans ces égalités est un mot ultimement périodique et donc admet une forme canonique (voir section 1.5). De plus cette forme canonique est effectivement calculable parce que w est un mot déjà donné sous la forme

- $w = uv^{+\infty}$ ($u \in A^*$, $v \in A^+$) si w est un mot infini à droite ;
- $w = v^{-\infty}u$ ($u \in A^*$, $v \in A^+$) si w est un mot infini à gauche ;
- $w = v^{\infty}$ ou $w = v^{-\infty}ut^{+\infty}$ ($u \in A^*$, $v, t \in A^+$) si w est un mot biinfini.

Nous pouvons ainsi conclure que l'égalité $x = y$ est effectivement décidable, ce qui achève la preuve. □

On remarque que la factorisation d'une opération implicite de type $(2,1)$ décrite dans le théorème 8.1.1 n'est pas la plus "simple" possible. En effet, entre d'autres simplifications possibles, on pourrait, par exemple, exiger que les mots $v_1, \ldots, v_k$ soient primitifs. Cependant, cela n'était pas notre objectif.

Exemple 8.4.1 *Soit $x \in \hat{F}_{\{a,b\}}(\mathbf{LJ}_1)$ l'opération implicite de type $(2,1)$ donnée par*

$$x = ba^2ba^2(baba^2baba^2)^{\omega}b(((ab)^{\omega}b)^{\omega}(ba)^{\omega}b)^{\omega}.$$

Alors, on peut écrire x aussi dans les formes suivantes

$$\begin{aligned} x &= ba^2ba^2(baba^2baba^2)^{\omega}b((ab)^{\omega}b)^{\omega}(ba)^{\omega}b((ab)^{\omega}b)^{\omega}(ba)^{\omega}b \\ &= ba^2ba^2(baba^2baba^2)^{\omega}b(ab)^{\omega}b(ab)^{\omega}b(ba)^{\omega}b(ab)^{\omega}b(ab)^{\omega}b(ba)^{\omega}b. \end{aligned}$$

Si I_x est l'ensemble des mots biinfinis décrit dans le théorème 8.1.1, on a, avec les mots déjà dans leur forme canonique,

$$I_x = \{(ab)^{\infty}, (ababa)^{-\infty}b(ab)^{+\infty}, (ab)^{-\infty}b(ab)^{+\infty}, (ab)^{-\infty}b(ba)^{+\infty}\}.$$

Notons que $ba^2ba^2(baba^2baba^2)^{+\infty} = ba(aba^2b)^{+\infty}$ et que $(ba)^{-\infty}b = (ab)^{-\infty}$. Alors, comme on peut le vérifier facilement, x peut être écrit, par exemple, simplement

$$x = ba(aba^2b)^{\omega}(ab)^{\omega}(ba)^{\omega}b^3(ab)^{\omega}.\blacksquare$$

Chapitre 9

Les Éléments Quelconques de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$

Dans ce chapitre nous étudions les opérations implicites (quelconques) sur $\mathbf{LJ}_1$. Rappelons que $\mathbf{LJ}_1 = \mathbf{J}_1 * \mathbf{D}$. Or, Almeida et Weil [16] ont obtenu un résultat (le théorème 9.1.3 ci-dessous) qui donne une description des opérations implicites sur des produits semi-directs de la forme $\mathbf{J}_1 * \mathbf{V}$. Ce résultat est intéressant et leur a permis (voir le théorème 9.1.4 ci-dessous), par exemple, de décrire complétement la pseudo-variété $\mathbf{J}_1 * \mathbf{K}$ (qui, ils l'ont montré, est égale à $\mathbf{J}_1 * \mathbf{N}$).

Comme la pseudo-variété $\mathbf{D}$ est le dual de $\mathbf{K}$, on aurait pu espérer qu'une étude similaire serait possible pour donner la caractérisation des semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$. Néanmoins, cela n'est pas le cas puisque les graphes décrites dans le théorème 9.1.3 sont très simples dans le cas de $\mathbf{K}$ mais très complexes dans le cas de $\mathbf{D}$. Notre travail principal dans ce chapitre consiste donc dans la tentative (pas totalement réussie, il faut le dire...) de décrire les graphes du théorème 9.1.3 dans le cas $\mathbf{V} = \mathbf{D}$.

Rappelons qu'on dispose déjà d'une caractérisation des opérations implicites sur $\mathbf{LJ}_1$ (la proposition 8.3.1). Cependant, ce résultat est peu “raffiné” puisqu'une telle opération implicite est caractérisée, en particulier, par ses facteurs. Nous avons déjà vu au chapitre antérieur (mais seulement dans le cas des opérations implicites de type $(2, 1)$) une autre caractérisation en termes de certains mots infinis et biinfinis (à la place des facteurs). Dans ce chapitre nous donnons deux descriptions (qui sont essentiellement la même) des semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$, à partir du théorème d'Almeida et Weil. La première (théorème 9.2.2) en utilisant les mots infinis, et la deuxième (théorème 9.2.5) en utilisant aussi les mots biinfinis. Ces résultats qui sont encore peu satisfaisants nous permettront, cependant, de prouver quelques résultats non triviaux.

Par exemple, on sait [9, proposition 12.3.1] que, contrairement aux sous-pseudo-variétés de $\mathbf{DS}$, $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ n'a pas la *propriété de factorisation* (i.e., il y a des éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ qui ne s'écrivent pas comme un produit fini d'opérations explicites et d'éléments réguliers). Nous montrerons que, de plus, $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ est “très haut”, i.e., nous montrerons que $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ admet une chaîne croissante non dénombrable de $\mathcal{J}$-classes. Ce fait montre que les éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ ne jouissent pas de “bonnes” propriétés de factorisation et, par conséquent, ils ne sont pas “faciles” à décrire. En outre, nous montrerons que $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ est “très large”, plus précisément nous montrerons qu'il existe $2^{\aleph_0}$ éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ qui ne sont pas $\leq_{\mathcal{J}}$-comparables.

9.1 Préliminaires

Dans cette section on rappelle le théorème d'Almeida et Weil sur les opérations implicites sur des produits semi-directs de la forme $\mathbf{J}_1 * \mathbf{V}$. Ce théorème est une application d'un résultat plus général, que nous omettrons, sur les produits semi-directs de la forme $\mathbf{W} * \mathbf{V}$ quelconques. Pour décrire les opérations implicites sur $\mathbf{J}_1 * \mathbf{V}$ il faut introduire quelques notions et résultats empruntées de [16] auquel on pourra se reporter pour les preuves.

Un *morphisme de graphes* $\varphi : (V, E) \to (V', E')$ est donné par deux fonctions $\varphi_1 : V \to V'$ et $\varphi_2 : E \to E'$ telles que, pour tout $e \in E$,

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi_2(e)) &= \varphi_1(\alpha(e)) \\ \beta(\varphi_2(e)) &= \varphi_1(\beta(e)). \end{aligned}$$

Un *quotient* d'un graphe G est une image homomorphe de G.

Comme dans la section 3.1 où des algèbres totales ont été considérées, on définit *graphe profini* comme étant une limite projective de graphes finis. En particulier, dans un graphe profini, les sommets et les arêtes constituent des espaces topologiques compacts et totalement discontinus et les applications α et β sont continues.

Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe profini et soient v et w deux sommets de Γ. On dit que w est *profiniment acessible à partir de* v, et nous écrivons $v \preceq w$, si, dans chaque quotient continu fini de Γ, il existe un chemin orienté de l'image de v vers l'image de w. La relation $\preceq$ sur V est clairement un préordre. Les classes de la relation d'équivalence associée à $\preceq$, et les sous-graphes engendrés par ces classes sont appelés les *composantes profiniment fortement connexes* de Γ.

Soit A un ensemble profini et soit M un monoïde A-engendré, c'est-à-dire qu'il existe une application continue $\mu : A \to M$ telle que le sous-monoïde de M engendré par $\mu(A)$ est dense. Le *graphe de Cayley de M (associé à μ)* est le graphe orienté avec ensemble de sommets M et ensemble d'arêtes $M \times A$, où (m, a) est une arête de m vers $m\,\mu(a)$. La lettre a est appelée l'*étiquette* de l'arête (m, a). Remarquons que si M est fini, alors cette définition coïncide avec la définition usuelle du graphe de Cayley de M. Si $\mathbf{V}$ est une pseudo-variété de monoïdes, alors le graphe de Cayley de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ est noté $\Gamma_A(\mathbf{V})$ (où l'application de A sur $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ est l'application ι_A définie dans la section 3.2). Comme on peut le vérifier, $\Gamma_A(\mathbf{V})$ est la limite projective des graphes de Cayley des éléments A-engendrés de $\mathbf{V}$, donc $\Gamma_A(\mathbf{V})$ est un graphe profini. Si $\mathbf{V}$ est une pseudo-variété de semigroupes, on note aussi $\Gamma_A(\mathbf{V})$ le graphe de Cayley du monoïde $\hat{F}_A(\mathbf{V})^1$.

Soit $\Gamma = \Gamma_A(\mathbf{V})$ et soient $v, w \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ deux sommets de Γ. Alors, $v \preceq w$ si et seulement si, pour tout morphisme continu $\varphi : \hat{F}_A(\mathbf{V}) \to M$ sur un monoïde fini M (qui est donc dans $\mathbf{V}$), on a $\varphi(w) = \varphi(v)\varphi(u)$ pour un mot $u \in A^*$. Cela est du au fait que les images continues de $\Gamma_A(\mathbf{V})$ sont exactement les graphes de Cayley des monoïdes A-engendrés de $\mathbf{V}$. Par conséquent,

$$v \preceq w \qquad \text{si et seulement si} \qquad w \leq_{\mathcal{R}} v \text{ dans } \hat{F}_A(\mathbf{V}). \tag{9.1}$$

On remarque maintenant quelques propriétés simples de la relation $\preceq$.

Proposition 9.1.1 *Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe profini. La relation $\preceq$ sur Γ jouit des propriétés suivantes.*

(1) *$\preceq$ est un préordre fermé. C'est-à-dire que, si $v = \lim_n v_n$ et $w = \lim_n w_n$ dans V, et si $v_n \preceq w_n$ pour tout n, alors $v \preceq w$.*

(2) *Les composantes profiniment fortement connexes de Γ sont des graphes profinis.*

(3) *Dans l'ensemble ordonné des composantes profiniment fortement connexes de Γ, tout élément est dominé par un élément maximal (resp. domine un élément minimal).*

(4) *Soit Δ un autre graphe profini, et soit $\varphi : \Gamma \to \Delta$ un morphisme de graphes continu. Si $v \preceq w$ dans Γ, alors $\varphi(v) \preceq \varphi(w)$ dans Δ. De plus, si X est une composante profiniment fortement connexe de Γ, alors $\varphi(X)$ est un sous-graphe profini d'une composante profiniment fortement connexe de Δ.*

(5) *Si Γ est la limite projective d'un système projectif $(\Gamma_i)_{i \in I}$ de graphes profinis avec des morphismes canoniques $\pi_i : \Gamma \to \Gamma_i$, et si $v, w \in V$, alors $v \preceq w$ si et seulement si $\pi_i(v) \preceq \pi_i(w)$ pour tout i.* □

Un graphe profini $\Gamma = (V, E)$ est dit *profiniment prélinéaire* si le préordre $\preceq$ est *total* (i.e., pour tous $v, w \in V$, le préordre $\preceq$ satisfait $v \preceq w$ ou $w \preceq v$). Dans ce cas, Γ admet une seule composante profiniment fortement connexe $\preceq$-maximale (resp. $\preceq$-minimale), notée $\max(\Gamma)$ (resp. $\min(\Gamma)$). Cela signifie, dans le cas où Γ est fini, qu'il existe un chemin (dirigé) dans Γ qui visite tous les sommets.

Proposition 9.1.2 *Soit Γ un graphe profini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Γ est profiniment prélinéaire ;*

(2) *Les images homomorphes continues finies de Γ sont profiniment prélinéaires ;*

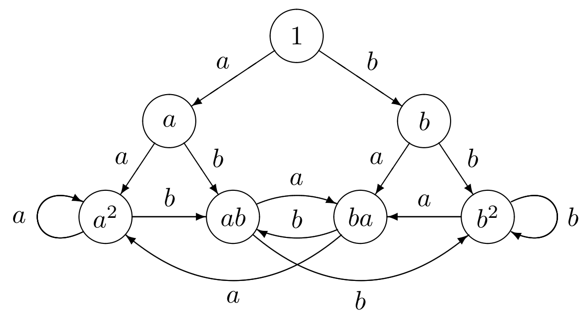
(3) *Les images homomorphes continues de Γ sont profiniment prélinéaires ;*

(4) *Γ est la limite projective d'un système projectif de graphes finis profiniment prélinéaires ;*

(5) *Γ est la limite projective d'un système projectif de graphes profiniment prélinéaires.* □

Exemple. Le graphe de Cayley $\Gamma_A(\mathbf{G})$ est profiniment prélinéaire, et admet une seule composante profiniment fortement connexe.

Par contre, $\Gamma_A(\mathbf{D})$ n'est pas profiniment prélinéaire. Par exemple, les sommets a et b (où a et b sont des lettres distinctes de A) sont $\preceq$-incomparables. En effet, posons $\mathbf{D}_k = [\![ba_1 \cdots a_k = a_1 \cdots a_k]\!]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et notons que $\hat{F}_A(\mathbf{D}_k) \in \mathbf{D}$. Le graphe de Cayley $\Delta = \Gamma_{\{a,b\}}(\mathbf{D}_2)$ est représenté dans la figure suivante.



Dans Δ on ne peut pas aller de a à b, ni de b à a, par un chemin dirigé. Comme Δ est une image continue de $\Gamma_A(\mathbf{D})$, cela montre que $\Gamma_A(\mathbf{D})$ n'est pas profiniment prélinéaire. ■

Remarquons que, pour un ensemble profini A, $\hat{F}_A(\mathbf{J}_1)$ est le demi-treillis $\bar{\mathcal{P}}(A)$ des parties fermées de A, muni de l'union. Le résultat annoncé est le suivant.

Théorème 9.1.3 *Soit* $\mathbf{V}$ *une pseudo-variété de monoïdes (resp. semigroupes) et soit* A *un ensemble profini. Alors,* $\hat{F}_A(\mathbf{J}_1 * \mathbf{V})$ *est isomorphe au sous-monoïde (resp. sous-semigroupe) de* $\bar{\mathcal{P}}(\hat{F}_A(\mathbf{V}) \times A) * \hat{F}_A(\mathbf{V})$ *qui consiste de tous les paires* (G, x) *où* $x \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ *et* G *est un sous-graphe profiniment prélinéaire fermé de* $\Gamma_A(\mathbf{V})$ *tel que* $1 \in \min(G)$ *et* $x \in \max(G)$. □

Comme application de ce résultat, Almeida et Weil [16] ont calculé les pseudo-variétés $\mathbf{J}_1 * \mathbf{N}$ et $\mathbf{J}_1 * \mathbf{K}$. Pour constituer un objet de comparaison avec le cas $\mathbf{J}_1 * \mathbf{D}$ on va exposer leurs conclusions.

Pour un alphabet profini A et un mot u (fini ou infini) sur A, on note $c(u)$ la clôture de l'ensemble des lettres de A qui apparaissent dans u. Si $u \in A^{\mathbb{N}} \cup A^{-\mathbb{N}}$, on note $c_\infty(u)$ l'ensemble des points d'accumulation dans A de la suite u. On remarque que, si A est fini, alors $c(u)$ est l'ensemble des lettres de A qui apparaissent dans u, et $c_\infty(u)$ est l'ensemble des lettres qui apparaissent une infinité de fois dans u.

Théorème 9.1.4 *On a les égalités suivantes,*

$$\mathbf{J}_1 * \mathbf{N} = \mathbf{J}_1 * \mathbf{K} = [\![a^\omega b = a^\omega b^2, a^\omega bc = a^\omega cb]\!].$$

De plus, pour tout ensemble profini A,

$$\hat{F}_A(\mathbf{J}_1 * \mathbf{N}) = A^+ \cup \{(v, B) \in A^{\mathbb{N}} \times \bar{\mathcal{P}}(A) \mid c_\infty(v) \subseteq B\},$$

et le produit est donné— pour tous $u, u' \in A^+$, *et tous* $(v, B), (v', B') \in A^{\mathbb{N}} \times \bar{\mathcal{P}}(A)$ *tels que* $c_\infty(v) \subseteq B$ *et* $c_\infty(v') \subseteq B'$*—, par*

$$\begin{aligned}
u \cdot u' &= uu' \\
u \cdot (v, B) &= (uv, B) \\
(v, B) \cdot u &= (v, B \cup c(u)) \\
(v, B) \cdot (v', B') &= (v, B \cup c(v') \cup B').
\end{aligned}$$

Dans le cas où A est fini, chaque élément $x \in \hat{F}_A(\mathbf{J}_1 * \mathbf{N})$ admet une factorisation de la forme $x = u_0$ ou $x = u_0 x_1 u_1$ où $u_0, u_1 \in A^*$, $u_0 \neq 1$ si $x = u_0$, x_1 est idempotent, si $u_0 \neq 1$ la dernière lettre de u_0 n'appartient pas à $c(x_1)$, le mot u_1 est linéaire, et $c(u_1) \cap c(x_1) = \emptyset$. De plus, cette factorisation est unique à une permutation de u_1 près.

Preuve. On sait que $\Gamma_A(\mathbf{K})$ est l'arbre de A^*, plus un ensemble de sommets en bijection avec $A^{\mathbb{N}}$ tel que chacun de ces sommets porte une boucle étiquetée par les lettres de A. En particulier, toutes les composantes profiniment fortement connexes de $\Gamma_A(\mathbf{K})$ sont des ensembles à un élément. Par conséquent, un sous-graphe profiniment prélinéaire fermé G de $\Gamma_A(\mathbf{K})$ tel que $1 \in \min(G)$ soit est un chemin fini avec étiquette $u \in A^+$ (et $\max(G) = \{u\}$), soit il est un chemin infini étiqueté $v \in A^{\mathbb{N}}$, plus le sommet v (qui est la limite des sommets du chemin infini) avec un ensemble fermé de boucles autour de v qui contient les boucles étiquetées $c_\infty(v)$. Dans ce cas $\max(G) = \{v\}$. Cela établit une bijection entre $\hat{F}_A(\mathbf{J}_1 * \mathbf{K})$ et l'ensemble $A^+ \cup \{(v, B) \in A^{\mathbb{N}} \times \bar{\mathcal{P}}(A) \mid c_\infty(v) \subseteq B\}$, et le produit induit sur cet ensemble est celui de l'énoncé du théorème.

On sait aussi que $\Gamma_A(\mathbf{N})$ est l'arbre de A^*, avec seulement un autre sommet de plus, et autour de ce sommet un ensemble de boucles étiquetées par les lettres de A. Les sous-graphes profiniment prélinéaires fermés G de $\Gamma_A(\mathbf{N})$ tels que $1 \in \min(G)$ sont en bijection avec ceux de $\Gamma_A(\mathbf{K})$ et cette bijection forme un homéomorphisme. Donc $\hat{F}_A(\mathbf{J}_1 * \mathbf{N}) = \hat{F}_A(\mathbf{J}_1 * \mathbf{K})$. Comme cela est vrai pour tous les alphabets finis A, on déduit que $\mathbf{J}_1 * \mathbf{N} = \mathbf{J}_1 * \mathbf{K}$.

Soit $\mathbf{V} = [\![a^\omega b = a^\omega b^2, a^\omega bc = a^\omega cb]\!]$. Pour prouver que $\mathbf{J}_1 * \mathbf{N} \subseteq \mathbf{V}$ il suffit de montrer que le semigroupe $\hat{F}_A(\mathbf{J}_1 * \mathbf{N})$, calculé ci-dessus, satisfait les deux pseudo-identités qui définissent $\mathbf{V}$. Cela est immédiat en notant que, pour tous $u \in A^+$, $v \in A^{\mathbb{N}}$ et $B \in \bar{\mathcal{P}}(A)$ tels que $c_\infty(v) \subseteq B$, on a $(v, B)^\omega = (v, B \cup c(v))$ et $u^\omega = (u^{+\infty}, c(u))$.

Maintenant, comme on peut le vérifier facilement, $\mathbf{V}$ est apériodique et satisfait la pseudo-identité $(ab)^\omega (ba)^\omega (ab)^\omega = (ab)^\omega$, et donc $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{DA}$. Alors, d'après le théorème 3.6.11 toute opération implicite $x \in \hat{F}_A(\mathbf{S})$ admet une factorisation de la forme $x = u_0 x_1 u_1 \cdots x_k u_k$ où $k \in \mathbb{N}_0$, chaque x_i est idempotent sur $\mathbf{V}$, $u_i \in A^*$ (si $k = 0$, alors $u_0 \neq 1$), et si $u_i \neq 1$, alors la dernière lettre de u_i n'appartient pas à $c(x_{i+1})$. Si $k \neq 0$, alors $\mathbf{V}$ satisfait

$$x = u_0 x_1 u_1 \cdots x_k u_k = u_0 x_1 v_1$$

où v_1 est un mot linéaire avec contenu $c(u_1 x_2 \cdots x_k u_k) \setminus c(x_1)$. Cela prouve l'existence de factorisations comme dans l'énoncé pour tous les éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$. De plus, $\mathbf{V}$ vérifie $x = u_0 x_1 v_1'$ pour toute permutation v_1' de v_1. On appelle *réduites* de telles factorisations.

Pour conclure la preuve, on considére, pour tout alphabet fini A, la projection canonique π de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ sur $\hat{F}_A(\mathbf{J}_1 * \mathbf{N})$. Si $x = u_0 x_1 u_1$ est une factorisation réduite de $x \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$, alors $\pi(x) = \pi(u_0)\pi(x_1)\pi(u_1) = u_0(v, c(v))u_1$ pour un $v \in A^{\mathbb{N}}$. Par conséquent, $\pi(x) = (u_0 v, c(v) \cup c(u_1))$. Réciproquement, étant donnés (v, B) de $A^{\mathbb{N}} \times \bar{\mathcal{P}}(A)$ et une factorisation réduite $u_0 x_1 u_1$ telle que $(v, B) = \pi(u_0 x_1 u_1)$, alors $c(u_1)$ est uniquement déterminé comme égal à $B \setminus c_\infty(v)$, u_0 est uniquement déterminé comme étant le plus petit préfixe u de v tel que $c(u^{-1}v) = c_\infty(v)$ et $\pi(x_1) = (u^{-1}v, c_\infty(v))$. Cela montre l'unicité des factorisations des éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$, et aussi que π est un isomorphisme. Comme A est un alphabet fini quelconque, cela montre que $\mathbf{V} = \mathbf{J}_1 * \mathbf{N} = \mathbf{J}_1 * \mathbf{K}$. $\square$

9.2 Le théorème principal

Dans la suite nous fixons un alphabet fini A, bien que la plupart des résultats soient valides pour des alphabets profinis.

Tout d'abord on introduit quelques notations sur les mots infinis et biinfinis que nous utiliserons fréquemment dans la suite. Soit B un sous-ensemble de $A^{\tilde{\mathbb{Z}}} \cup A^{-\mathbb{N}}$. On notera

$$\overleftarrow{B} = \{w \in A^{-\mathbb{N}} \mid wu \in B \text{ pour un certain mot } u \text{ sur } A\}$$

l'ensemble de tous les préfixes (sauf le mot vide) des éléments de B. Symétriquement, soit B un sous-ensemble de $A^{\tilde{\mathbb{Z}}} \cup A^{\mathbb{N}}$. On notera

$$\overrightarrow{B} = \{v \in A^{\mathbb{N}} \mid uv \in B \text{ pour un certain mot } u \text{ sur } A\}$$

l'ensemble de tous les suffixes (sauf le mot vide) des éléments de B. Finalement, pour un sous-ensemble B de $A^{-\mathbb{N}}$, on notera

$$\overleftrightarrow{B} = \{v \in A^{\tilde{\mathbb{Z}}} \mid \overleftarrow{\{v\}} \subseteq B\}.$$

Comme d'habitude, pour un mot x, nous écrirons simplement $\overleftarrow{x}$ (resp. $\overrightarrow{x}$, $\overleftrightarrow{x}$) à la fois de $\overleftarrow{\{x\}}$ (resp. $\overrightarrow{\{x\}}$, $\overleftrightarrow{\{x\}}$). Par exemple, si $B = \{a^{-\infty} b^n a^m \in A^{-\mathbb{N}} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, on a

$$\overleftarrow{B} = \{a^{-\infty}, a^{-\infty} b^n a^m \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0\} \qquad \text{et} \qquad \overleftrightarrow{B} = \{a^{-\infty} b^n a^{+\infty} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Maintenant, pour la description de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$, on va étudier le graphe de Cayley $\Gamma_A(\mathbf{D})$. Tout d'abord on remarque que $\Gamma_A(\mathbf{D})$ est le graphe avec ensemble de sommets $A^* \cup A^{-\mathbb{N}}$ tel que chaque sommet distinct du mot vide est le final d'un et seulement un arc : si $x = ya$, avec $a \in A$, alors

- x est le sommet final de l'arc $y \xrightarrow{a} x$ si $x \neq y$;
- x est le sommet final de la boucle $x \circlearrowright a$ si $x = y = a^{-\infty}$.

Si on compare les graphes $\Gamma_A(\mathbf{D})$ et $\Gamma_A(\mathbf{K})$ on vérifie qu'ils coïncident sur les sommets dans A^* mais ils sont complétement différents sur les autres sommets. En fait, dans $\Gamma_A(\mathbf{K})$ toutes les composantes profiniment fortement connexes sont des ensembles à un élément, tandis que dans $\Gamma_A(\mathbf{D})$ l'ensemble $A^{-\mathbb{N}}$ forme une seule composante profiniment fortement connexe. En fait, pour tout $w \in A^{-\mathbb{N}}$ et $v \in A^* \cup A^{-\mathbb{N}}$, dans $\hat{F}_A(\mathbf{D})$[1] on a $w \leq_{\mathcal{R}} v$ puisque $w = vw$. Par conséquent, d'après (9.1), $v \preceq w$.

Par conséquent, l'identification des sous-graphes profiniment prélinéaires fermés G tels que $1 \in \min(G)$ est facile dans $\Gamma_A(\mathbf{K})$, tandis qu'on ne peut pas dire la même chose dans $\Gamma_A(\mathbf{D})$. La suite de ce travail sera dédiée à l'étude de ces graphes.

Notons $\mathcal{SG}$ (resp. $\mathcal{SG}_i$) l'ensemble de tous les sous-graphes profiniment prélinéaires fermés (resp. infinis) G de $\Gamma_A(\mathbf{D})$ tels que $1 \in \min(G)$.

Proposition 9.2.1 *Soit $G = (V, E) \in \mathcal{SG}$ et soient $x, y \in V$ tels que $x = ya$ avec $a \in A$. Alors (y, a) est un arc de G. En particulier, si $x = y = a^{-\infty}$, alors la boucle $(a^{-\infty}, a)$ est un arc de G.*

Preuve. Si $x \in A^+$ l'assertion est triviale. Sinon, le graphe est infini et $x \in A^{-\mathbb{N}}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ soit $\pi_k : \Gamma_A(\mathbf{D}) \to \Gamma_A(\mathbf{D}_k)$ le morphisme canonique, c'est-à-dire que, pour tout $w \in A^* \cup A^{-\mathbb{N}}$,

$$\pi_k(w) = \begin{cases} w & \text{si } w \in A^{<k} \\ s_k(w) & \text{si } w \in A^{\geq k} \cup A^{-\mathbb{N}}. \end{cases}$$

Soit maintenant φ_k la restriction de π_k à G et posons $\Delta_k = \varphi_k(G)$. Comme Δ_k est un quotient continu fini de G et $1 \preceq x$ dans G, il existe un chemin dans Δ_k de $\varphi_k(1) = 1$ vers $\varphi_k(x) = s_k(x) = u_k a$, où $u_k = s_{k-1}(y)$. Clairement, le dernier arc de ce chemin est $bu_k \xrightarrow{a} u_k a$, pour une lettre $b \in A$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un arc (y_k, a) de G, tel que $s_{k-1}(y_k) = u_k = s_{k-1}(y)$. Comme la suite $(y_k, a)_k$ converge vers (y, a) dans $\Gamma_A(\mathbf{D})$ et G est fermé, on conclut que $(y, a) \in G$. $\square$

On déduit de ce résultat que, si un mot $w = \cdots w_{-3}w_{-2}w_{-1} \in A^{-\mathbb{N}}$ est un sommet d'un élément G de $\mathcal{SG}$, alors tous les préfixes $\cdots w_{i-1}w_i$ ($i \in -\mathbb{N}$) de w sont aussi des sommets de G. Autrement dit, $\overleftarrow{w} \subseteq G$.

Une autre conséquence de ce résultat est qu'un élément de $\mathcal{SG}$ est complétement défini par ses sommets. Ainsi, dans la suite nous identifierons les sous-graphes profiniment prélinéaires fermés G de $\Gamma_A(\mathbf{D})$ (même s'ils ne sont pas tels que $1 \in \min(G)$), contenant tous les boucles possibles (c'est-à-dire que, si $a^{-\infty}$ avec $a \in A$ est dans G, alors la boucle d'étiquette a l'est aussi) avec les ensembles de sommets correspondants.

Donc, un sous-graphe profiniment prélinéaire fermé G de $\Gamma_A(\mathbf{D})$ tel que $1 \in \min(G)$ est soit un chemin fini avec étiquette $u \in A^+$, soit un chemin infini étiqueté $v \in A^{\mathbb{N}}$, plus un certain ensemble de sommets dans $A^{-\mathbb{N}}$. Dans ce cas $G \in \mathcal{SG}_i$, et on appellera *segment initial de* G, noté $\mathrm{si}(G)$, le mot v. De plus, on notera $\hat{G} = G \setminus A^* = G \setminus \mathrm{Pref}(v)$. Notons que $\hat{G}$ est un sous-graphe profiniment prélinéaire fermé de $\Gamma_A(\mathbf{D})$. Comme conclusion des commentaires antérieurs et du théorème 9.1.3 on déduit le résultat suivant.

Théorème 9.2.2 *Soit A un ensemble fini. Alors $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ est l'ensemble*

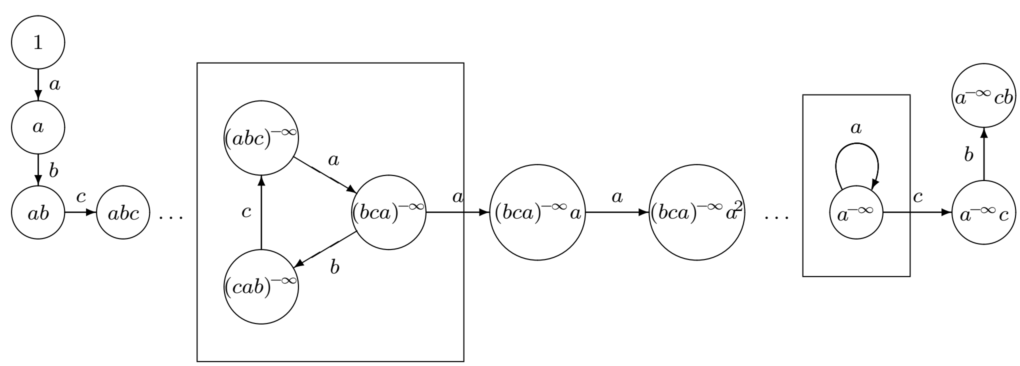
$$A^+ \cup \{(v, B, w) \in A^{\mathbb{N}} \times \mathcal{P}(A^{-\mathbb{N}}) \times A^{-\mathbb{N}} \mid \exists G \in \mathcal{SG}_i, v = \mathrm{si}(G), B = \hat{G}, w \in \max(G)\}$$

et le produit est donné— pour tous $u, u' \in A^+$, *et tous* $(v, B, w), (v', B', w') \in A^{\mathbb{N}} \times \mathcal{P}(A^{-\mathbb{N}}) \times A^{-\mathbb{N}}$ *tels que* $v = \mathrm{si}(G), v' = \mathrm{si}(G'), B = \hat{G}, B' = \hat{G}', w \in \max(G)$ *et* $w' \in \max(G')$ *pour des* $G, G' \in \mathcal{SG}_i$ *—, par*

$$\begin{aligned} u \cdot u' &= uu' \\ u \cdot (v, B, w) &= (uv, B, w) \\ (v, B, w) \cdot u &= (v, B \cup \overleftarrow{wu}, wu) \\ (v, B, w) \cdot (v', B', w') &= (v, B \cup \overleftarrow{wv'} \cup B', w'). \end{aligned}$$ □

On remarque que, dans le théorème antérieur, les composantes v et w d'un élément $x = (v, B, w)$ de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1) \setminus A^+$ sont, respectivement, les restrictions de x à $\mathbf{K}$ et à $\mathbf{D}$. Ainsi, la caracterisation de x donnée par ce dernier théorème différe de celle donnée par la proposition 8.3.1 seulement dans le remplacement de l'ensemble $\mathrm{Fact}(x)$ de mots finis par un certain ensemble B de mots infinis de $A^{-\mathbb{N}}$. Donc, le théorème 9.2.2 n'est pas apparemment une grande amélioration de la proposition 8.3.1, mais il a au moins (à part la simplification obtenue par le remplacement d'un ensemble par un autre plus petit) le mérite de permettre une visualisation (graphique) des opérations implicites sur $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$.

Exemple 9.2.3 *Soient* a, b *et* c *trois lettres distinctes de* A. *Comme on peut s'en convaincre facilement, l'opération implicite* $x = (abc)^\omega a^\omega cb$ *sur* $\mathbf{LJ}_1$ *est donnée par le sous-graphe profiniment prélinéaire fermé* G *de* $\Gamma_A(\mathbf{D})$ *suivant*



où $\max(G) = \{a^{-\infty}cb\}$. *C'est-à-dire que, avec la notation du théorème 9.2.2,*

$$(abc)^\omega a^\omega cb = ((abc)^{+\infty}, \overleftarrow{(abc)^{-\infty}a^{+\infty}} \cup \overleftarrow{a^{-\infty}cb}, a^{-\infty}cb).$$

Dans le graphe, chaque boîte est formée des points d'accumulation , dans $\hat{F}_A(\mathbf{D})$, *de la suite des sommets donnée par, disons, les points de suspension* ($\cdots$) *adjacents. Notons que, en général et d'après la proposition 9.1.1, chaque boîte ainsi obtenue est contenue dans une composante profiniment fortement connexe (dans ce graphe les deux boîtes forment des composantes, mais cela ne se vérifie pas en général).* ■

On note que (voir l'analogie avec le théorème 8.1.1) l'opération implicite x du dernier exemple est déterminée par trois types de chemins dans G :

- un chemin *infini à droite* (c'est-à-dire, une suite infinie à droite d'arcs consécutifs) d'origine 1, étiqueté $(abc)^{+\infty}$;
- un chemin *infini à gauche* (c'est-à-dire, une suite infinie à gauche d'arcs consécutifs) qui termine dans $a^{-\infty}cb$, étiqueté $a^{-\infty}cb$;
- un ensemble de chemins *biinfinis* (c'est-à-dire, des suites biinfinies d'arcs consécutifs), étiquetés $(abc)^{\infty}$, $(abc)^{-\infty}a^{+\infty}$ et a^{∞}.

En fait, cette situation est générique comme le montre le résultat suivant.

Proposition 9.2.4 *Soient $G \in \mathcal{SG}$ et $x \in G$, et supposons que* $\max(G) \neq \{x\}$*. Alors, il existe $a \in A$ tel que (x, a) est un arc de G.*

Preuve. Si $x \in A^+$ la assertion est triviale. Supposons, donc, que $x \in A^{-\mathbb{N}}$ et soit $y \in \max(G)$ tel que $x \neq y$. En particulier, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $s_k(x) \neq s_k(y)$. Pour tout entier $n \geq k$, soit φ_n la restriction à G du morphisme canonique de $\Gamma_A(\mathbf{D})$ sur $\Gamma_A(\mathbf{D}_n)$, et posons $\Delta_n = \varphi_n(G)$. Alors, comme $x \preceq y$ dans G, il existe un chemin non vide, dans Δ_n, de $\varphi_n(x) = s_n(x)$ vers $\varphi_n(y) = s_n(y)$. Supposons que $(s_n(x), a_n)$ est le premier arc de ce chemin. Alors, il existe un arc (x_n, a_n) de G, tel que $s_n(x_n) = s_n(x)$. Notons que, en particulier, la suite $(x_n)_{n\geq k}$ converge vers x. Comme l'ensemble des arcs de G est un espace topologique compact, la suite $(x_n, a_n)_{n\geq k}$ admet une sous-suite convergente, disons vers (x, a). De plus, comme G est fermé on conclut que (x, a) est un arc de G. □

Soit G un élément infini de $\mathcal{SG}$ et soit $w \in A^{-\mathbb{N}}$ un sommet de G. Nous avons vu à la proposition 9.2.1 que tous les éléments de $\overleftarrow{w}$ sont des sommets de G. C'est-à-dire que, à partir de w, il existe un chemin infini à gauche (étiqueté w). En outre, si $|\max(G)| \geq 2$, si $\max(G) = \{a^{-\infty}\}$ ($a \in A$) ou si $\max(G) = \{y\}$ et $w \notin \overleftarrow{y}$, alors il existe un chemin infini à droite à partir de w d'après la proposition 9.2.4. Par conséquent, il existe un chemin biinfini qui passe par w sauf dans le cas où $\max(G) = \{y\}$ et $w \in \overleftarrow{y}$ (tel est le cas, par exemple, pour $w = a^{-\infty}c$ et $y = a^{-\infty}cb$ dans l'exemple 9.2.3).

Cela montre que tout élément infini de $\mathcal{SG}$ avec un sommet $w \in \max(G)$ fixé est une union de trois types de chemins :

- un chemin infini à droite d'origine 1 ;
- un ensemble de chemins biinfinis ;
- un chemin infini à gauche qui termine dans w.

Ainsi, un élément (v, B, w) de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ peut être représenté alternativement dans la forme

$$[v, C, w]$$

où C est l'ensemble des étiquettes de tous les chemins biinfinis dans B. On note que

$$B = \overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{w} \qquad \text{et} \qquad C = \overleftrightarrow{B}.$$

De plus, si $x, y \in A^{\tilde{\mathbb{Z}}}$ sont deux éléments de C nous écrirons

$$x \preceq y \text{ si, pour tous } x' \in \overleftarrow{x} \text{ et } y' \in \overleftarrow{y}, \text{ on a } x' \preceq y' \text{ dans } B.$$

Ainsi, dans l'exemple 9.2.3 on a $(abc)^{\infty} \preceq (abc)^{-\infty}a^{+\infty} \preceq a^{\infty}$ et $a^{\infty} \not\preceq (abc)^{-\infty}a^{+\infty} \not\preceq (abc)^{\infty}$. Comme on peut le vérifier, la relation $\preceq$ sur C est un préordre total, et la relation d'équivalence associée à $\preceq$ admet une seule classe maximale (resp. minimale), notée $\max(C)$ (resp. $\min(C)$).

On peut donc réécrire le théorème 9.2.2 de la façon suivante. On remarque que dans cette version la symétrie de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ est plus évidente que dans la version antérieure.

Théorème 9.2.5 *Soit A un ensemble fini. Alors $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ est l'ensemble*

$$A^+ \cup \{[v, B, w] \in A^{\mathbb{N}} \times \mathcal{P}(A^{\tilde{\mathbb{Z}}}) \times A^{-\mathbb{N}} \mid \exists G \in \mathcal{SG}_i, v = \mathrm{si}(G), B = \overleftrightarrow{\hat{G}}, w \in \max(G)\}$$

et le produit est donné— pour tous $u, u' \in A^+$, et tous $[v, B, w], [v', B', w'] \in A^{\mathbb{N}} \times \mathcal{P}(A^{\tilde{\mathbb{Z}}}) \times A^{-\mathbb{N}}$ tels que $v = \mathrm{si}(G), v' = \mathrm{si}(G'), w \in \max(G), w' \in \max(G'), B = \overleftrightarrow{\hat{G}}$ et $B' = \overleftrightarrow{\hat{G}'}$ pour des $G, G' \in \mathcal{SG}_i$ —, par

$$\begin{aligned} u \cdot u' &= uu' \\ u \cdot [v, B, w] &= [uv, B, w] \\ [v, B, w] \cdot u &= [v, B, wu] \\ [v, B, w] \cdot [v', B', w'] &= [v, B \cup \{wv'\} \cup B', w']. \end{aligned}$$ □

Dans la suite nous utiliserons librement les notations données par les théorèmes 9.2.2 et 9.2.5. Ainsi, l'opération implicite $(abc)^{\omega}a^{\omega}cb$ de l'exemple 9.2.3 peut être representée soit par

$$((abc)^{+\infty}, \overleftarrow{(abc)^{-\infty}a^{+\infty}} \cup \overleftarrow{a^{-\infty}cb}, a^{-\infty}cb),$$

soit par

$$[(abc)^{+\infty}, \{(abc)^{\infty}, (abc)^{-\infty}a^{+\infty}, a^{\infty}\}, a^{-\infty}cb].$$

9.3 Les éléments réguliers

Dans cette section nous identifions les éléments réguliers de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$. Tout d'abord nous présentons quelques définitions.

Soit $u \in A^{-\mathbb{N}} \cup A^{\mathbb{N}}$ un mot infini sur A. On notera $F_{-\mathbb{N}}(u)$ l'ensemble des points d'accumulation dans $\hat{F}_A(\mathbf{D})$ de la suite $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivante :

- $(u_{[1,n]})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des préfixes de u, si $u \in A^{\mathbb{N}}$;
- $(u_{[-n,-1]})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des suffixes de u, si $u \in A^{-\mathbb{N}}$.

Notons que $F_{-\mathbb{N}}(u)$ est un sous-ensemble de $A^{-\mathbb{N}}$. De plus, un mot $w \in A^{-\mathbb{N}}$ est dans $F_{-\mathbb{N}}(u)$ si et seulement si il existe une sous-suite de $(u'_n)_n$ qui converge vers w.

Si $v \in A^{\mathbb{N}}$, on déduit facilement du point (1) de la proposition 9.1.1 que le sous-graphe $G = \mathrm{Pref}(v) \cup F_{-\mathbb{N}}(v)$ de $\Gamma_A(\mathbf{D})$ est un sous-graphe profiniment prélinéaire fermé de $\Gamma_A(\mathbf{D})$ tel que $1 \in \min(G)$ et $\max(G) = F_{-\mathbb{N}}(v)$.

On voit aussi que, pour tout $w \in A^{-\mathbb{N}}$, $G = F_{-\mathbb{N}}(w) \cup \overleftarrow{w}$ est un sous-graphe profiniment prélinéaire fermé de $\Gamma_A(\mathbf{D})$ tel que $\min(G) = F_{-\mathbb{N}}(w)$ et $w \in \max(G)$.

Notons de plus, pour un $u \in A^{-\mathbb{N}} \cup A^{\mathbb{N}}$, $F_{\tilde{\mathbb{Z}}}(u) = \overleftrightarrow{F_{-\mathbb{N}}(u)}$ l'ensemble des étiquettes de tous les chemins biinfinis dans $F_{-\mathbb{N}}(u)$.

Donc, pour tous $v \in A^{\mathbb{N}}$ et $w \in A^{-\mathbb{N}}$ tels que $F_{-\mathbb{N}}(v) \cap F_{-\mathbb{N}}(w) \neq \emptyset$,

$$(v, F_{-\mathbb{N}}(v) \cup F_{-\mathbb{N}}(w) \cup \overleftarrow{w}, w) \text{ — ou, alternativement, } [v, F_{\tilde{\mathbb{Z}}}(v) \cup F_{\tilde{\mathbb{Z}}}(w), w] \text{ —}$$

représente bien une opération implicite sur $\mathbf{LJ}_1$.

Finalement, remarquons que, si $[v, B, w]$ représente un élément de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$, alors $F_{\tilde{\mathbb{Z}}}(v) \subseteq \min(B)$ et $F_{\tilde{\mathbb{Z}}}(w) \subseteq \max(B)$.

On présente de suite la description des éléments réguliers de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$.

Proposition 9.3.1 *Soient $u \in A^+$ et $[v, B, w] \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1) \setminus A^+$. Alors*

(1) $u^\omega = [u^{-\infty}, u^\infty, u^{+\infty}]$.

(2) $[v, B, w]$ *est idempotent si et seulement si $wv \in B$.*

(3) $[v, B, w]$ *est régulier si et seulement si $v \in \overrightarrow{\max(B)}$ et $w \in \overleftarrow{B}$ (ce qui équivaut à dire que $w \in \overleftarrow{\max(B)}$).*

Preuve. Les points (1) et (2) sont évidents. Posons $x = [v, B, w]$. Alors, x est régulier si et seulement si il existe $y \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ tel que $xyx = x$ et $yxy = y$. De la deuxième égalité on déduit que y n'est pas explicite, disons $y = [v', B', w']$, et, en particulier, que $B \subseteq B'$. Donc,

$$xyx = [v, B, w][v', B', w'][v, B, w] = [v, B \cup \{wv', w'v\} \cup B', w]$$

est égal à x si et seulement si $wv', w'v \in B$ et $B' \subseteq B$.

Par conséquent, x est régulier si et seulement si il existe $y = [v', B, w'] \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ tel que $wv', w'v \in B$ (en particulier, $wv', w'v \in \max(B)$). Autrement dit, x est régulier si et seulement si $v \in \overrightarrow{\max(B)}$ et $w \in \overleftarrow{B}$. Notons que, si $v' \in A^{\mathbb{N}}$ et $w' \in A^{-\mathbb{N}}$ sont tels que $wv', w'v \in \max(B)$, alors $[v', B, w']$ représente bien une opération implicite sur $\mathbf{LJ}_1$ puisque, dans ce cas, $w' \in \overleftarrow{\max(B)}$, $\min(B) = \max(B) = B$ (car $v \in \overrightarrow{\max(B)}$ et $F_{\tilde{\mathbb{Z}}}(v) \subseteq \min(B)$), d'où $F_{\tilde{\mathbb{Z}}}(v') \subseteq \min(B)$. $\square$

Comme exemples des plus simples d'idempotents de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ nous avons les éléments de la forme $[v, A^{\tilde{\mathbb{Z}}}, w]$ avec $v \in A^{\mathbb{N}}$ et $w \in A^{-\mathbb{N}}$ quelconques. En fait, l'observation suivante est immédiate.

Lemme 9.3.2 *L'idéal minimal de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ est l'ensemble*

$$K = \{[v, A^{\tilde{\mathbb{Z}}}, w] \mid v \in A^{\mathbb{N}}, w \in A^{-\mathbb{N}}\}.$$

Les sous-ensembles de K de la forme

$$K_w = \{[v, A^{\tilde{\mathbb{Z}}}, w] \mid v \in A^{\mathbb{N}}\} \quad \text{et} \quad K_v = \{[v, A^{\tilde{\mathbb{Z}}}, w] \mid w \in A^{-\mathbb{N}}\}$$

où $w \in A^{-\mathbb{N}}$ et $v \in A^{\mathbb{N}}$, forment, respectivement, les idéaux minimaux à gauche et à droite de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$. □

On présente maintenant un autre exemple qui va être utile dans la suite.

Exemple 9.3.3 *Soit $A = \{a, b\}$ et soit $u = u_1 u_2 \cdots \in A^{\mathbb{N}}$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de tous les mots de A^+ en ordre lexicographique. Autrement dit*

$$\begin{aligned} u &= a\, b\, a^2\, ab\, ba\, b^2\, a^3\, a^2b\, aba\, ab^2\, ba^2\, bab\, b^2a\, b^3 \cdots \\ &= aba^3b^2ab^2a^5baba^2b^3a^2bab^3ab^3 \cdots \end{aligned}$$

En particulier, on vérifie facilement que $F_{\tilde{\mathbb{Z}}}(u) = A^{\tilde{\mathbb{Z}}}$. Soit maintenant $v \in A^{\mathbb{N}}$ le mot obtenu de u par le remplacement des facteurs a^i, avec $i \geq 3$, par le mot a^2. C'est-à-dire que

$$v = aba^2b^2ab^2a^2baba^2b^3 \cdots$$

et, comme on peut le vérifier facilement,

$$F_{\tilde{\mathbb{Z}}}(v) = A^{\tilde{\mathbb{Z}}} \setminus A^{-\mathbb{N}}a^3A^{\mathbb{N}}.$$

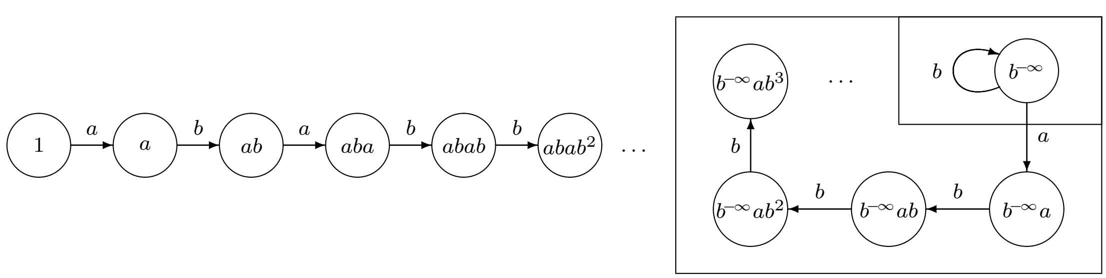
En outre, $[v, F_{\tilde{\mathbb{Z}}}(v), b^{-\infty}]$ est un idempotent de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ puisque $b^{-\infty}v \in F_{\tilde{\mathbb{Z}}}(v)$. Par contre, l'élément $x = [v, F_{\tilde{\mathbb{Z}}}(v), b^{-\infty}a^2]$ n'est pas idempotent puisque

$$b^{-\infty}a^2v = b^{-\infty}\boldsymbol{a^3}ba^2b^2 \cdots$$

admet a^3 comme facteur. Cependant, x est régulier parce que $v \in \overrightarrow{F_{\tilde{\mathbb{Z}}}(v)}$ (on rappelle que $\max(F_{\tilde{\mathbb{Z}}}(v)) = F_{\tilde{\mathbb{Z}}}(v)$) et $b^{-\infty}a^2 \in F_{-\mathbb{N}}(v)$. En fait on a $xbx = [v, F_{\tilde{\mathbb{Z}}}(v) \cup \{b^{-\infty}a^2bv\}, b^{-\infty}a^2] = x$. ■

Comme une application des résultats montrés jusqu'ici, on donne une preuve alternative à celle d'Almeida [9, proposition 12.3.1] du fait que $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ n'a pas la propriété de factorisation. Nous utilisons la même suite que la preuve d'Almeida.

Exemple 9.3.4 *Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (abab^2ab^3 \cdots ab^na)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, si on regarde les termes u_n comme des éléments de $\mathcal{SG}$, on voit sans difficulté que la suite $(u_n)_n$ converge vers le graphe*



De plus, dans $\hat{F}_A(\mathbf{LI})$, la suite converge vers $(v,w) = (abab^2ab^3a\cdots, b^{-\infty}a)$. Donc, si on pose $B = \{b^\infty, b^{-\infty}ab^{+\infty}\}$, on vérifie que la suite converge dans $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ vers $x = [v,B,w]$. Montrons que x n'a pas la propriété de factorisation. Supposons que x admet une factorisation de la forme

$$x = u_0x_1u_1\cdots x_nu_n$$

où les u_i sont des opérations explicites et les x_i sont des éléments réguliers de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$. En particulier, x_1 est de la forme $[z,C,t]$ avec $u_0z = v$ et $C \subseteq B$. Comme x_1 est régulier, $z \in \overrightarrow{C}$, d'après la proposition 9.3.1. Mais cela est impossible puisque $C \subseteq B$ et $v \notin \overrightarrow{B}$ (et donc $z \notin \overrightarrow{B}$ non plus). Cela montre que x n'a pas la propriété de factorisation. ■

9.4 Les relations de Green

On peut maintenant caractériser les relations de Green sur $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$.

Proposition 9.4.1 *Soit $x = [v,B,w] \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$. On a*

$$R_x = \begin{cases} \{[v,B,w'] \mid w' \in \overleftarrow{\max(B)}\} & \text{si } w \in \overleftarrow{B} \\ \{x\} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$L_x = \begin{cases} \{[v',B,w] \mid v' \in \overrightarrow{\min(B)}\} & \text{si } v \in \overrightarrow{B} \\ \{x\} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$H_x = \{x\}$$

$$J_x = \begin{cases} \{[v',B,w'] \mid v' \in \overrightarrow{\min(B)}, w' \in \overleftarrow{\max(B)}\} & \text{si } v \in \overrightarrow{B} \text{ et } w \in \overleftarrow{B} \\ L_x & \text{si } v \in \overrightarrow{B} \text{ et } w \notin \overleftarrow{B} \\ R_x & \text{si } v \notin \overrightarrow{B} \text{ et } w \in \overleftarrow{B} \\ H_x & \text{si } v \notin \overrightarrow{B} \text{ et } w \notin \overleftarrow{B}. \end{cases}$$

Preuve. Notons d'abord que si $[v',B',w'] \in J_x$ alors $B' = B$. En effet, $[v',B',w'] \in J_x$ si et seulement si $[v,B,w] = y[v',B',w']z$ et $[v',B',w'] = y'[v,B,w]z'$ pour des $y,y',z,z' \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1$. De la première égalité on peut conclure que $B' \subseteq B$ et de la deuxième que $B \subseteq B'$. Comme R_x, L_x et H_x sont des sous-ensembles de J_x, on déduit aussi que tous les éléments de R_x, L_x et H_x sont de la forme $[v',B,w']$.

On prouve d'abord l'égalité pour R_x. Soit $[v',B,w']$ un élément de R_x. Alors,

$$[v,B,w] = [v',B,w']y \qquad \text{et} \qquad [v',B,w'] = [v,B,w]z$$

pour des $y,z \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1$. En particulier,

$$v = v', \qquad [v,B,w] = [v,B,w](zy)^\omega \qquad \text{et} \qquad [v',B,w'] = [v',B,w'](yz)^\omega.$$

Supposons que $w \neq w'$. Alors $y,z \neq 1$ et donc il existe dans B deux chemins infinis à droite à partir de w et de w', respectivement. Cela montre que $w,w' \in \overleftarrow{\max(B)}$. Par conséquent, on déduit en particulier que,

– $R_x = \{x\}$ si $w \notin \overleftarrow{B}$;
– $R_x \subseteq \{[v, B, w'] \mid w' \in \overleftarrow{\max(B)}\}$ si $w \in \overleftarrow{B}$.

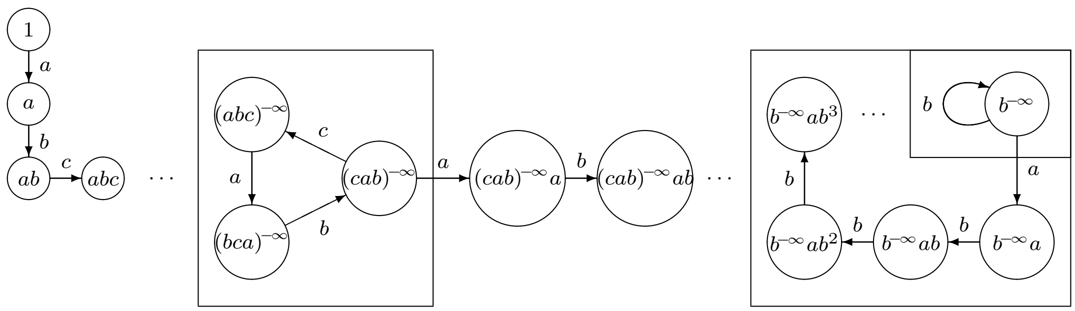
Supposons maintenant que $w \in \overleftarrow{B}$ et soit $w' \in \overleftarrow{\max(B)}$. En particulier, $wz, w'z' \in \max(B)$ pour des $z, z' \in \overrightarrow{\max(B)}$. Alors,

$$[v, B, w] = [v, B, w'][z', \max(B), w] \qquad \text{et} \qquad [v, B, w'] = [v, B, w][z, \max(B), w'],$$

ce qui montre que R_x contient l'ensemble $\{[v, B, w'] \mid w' \in \overleftarrow{\max(B)}\}$, et termine la preuve pour R_x.

La preuve pour la relation $\mathcal{L}$ est analogue. Comme $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ est compact on a $\mathcal{J} = \mathcal{D} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ et donc le calcul de J_x est une conséquence des calculs antérieurs. Pour conclure la preuve il faut seulement noter que $H_x = R_x \cap L_x = \{x\}$.□

Exemple 9.4.2 *Considérons la limite $x \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ de la suite $(abab^2ab^3 \cdots ab^na)_{n\in\mathbb{N}}$ (cf. l'exemple 9.3.4), et soit $y = (abc)^\omega x$. L'élément de $\mathcal{SG}$ qui correspond à y est le suivant*



Soit $v \in A^{\mathbb{N}}$ le mot $abab^2ab^3a \cdots$, et posons $C = \{(abc)^\infty, (abc)^{-\infty}v, b^\infty, b^{-\infty}ab^{+\infty}\}$. Notons que $\min(C) = \{(abc)^\infty\}$ *et* $\max(C) = \{b^\infty, b^{-\infty}ab^{+\infty}\}$. *Alors,*

$$y = [(abc)^{+\infty}, C, b^{-\infty}a] \quad \textit{et} \quad J_y = \{[v', C, w'] \mid v' \in \overrightarrow{(abc)^\infty} \textit{ et } w' \in \overleftarrow{b^{-\infty}ab^{+\infty}}\},$$

qui on peut représenter comme suit

$[(abc)^{+\infty}, C, b^{-\infty}]$	$[(abc)^{+\infty}, C, b^{-\infty}a]$	$[(abc)^{+\infty}, C, b^{-\infty}ab]$	$[(abc)^{+\infty}, C, b^{-\infty}ab^2]$	$\cdots$
$[(cab)^{+\infty}, C, b^{-\infty}]$	$[(cab)^{+\infty}, C, b^{-\infty}a]$	$[(cab)^{+\infty}, C, b^{-\infty}ab]$	$[(cab)^{+\infty}, C, b^{-\infty}ab^2]$	$\cdots$
$[(bca)^{+\infty}, C, b^{-\infty}]$	$[(bca)^{+\infty}, C, b^{-\infty}a]$	$[(bca)^{+\infty}, C, b^{-\infty}ab]$	$[(bca)^{+\infty}, C, b^{-\infty}ab^2]$	$\cdots$

■

Nous avons vu à la proposition 9.4.1 que la $\mathcal{J}$-classe d'un élément $[v, B, w] \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ est formée d'éléments de la forme $[\ \_\ , B,\ \_\ ]$. Voyons maintenant comme tous les éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ "construits à partir de B" se comparent entre eux par la relation $\leq_{\mathcal{J}}$.

Proposition 9.4.3 *Soient* $[v, B, w], [v', B, w'] \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$. *Alors,* $[v', B, w'] \leq_{\mathcal{J}} [v, B, w]$ *si et seulement si* $v \in \overrightarrow{B} \cup \overrightarrow{v'}$ *et* $w \in \overleftarrow{B} \cup \overleftarrow{w'}$.

Preuve. Supposons que $[v', B, w'] \leq_{\mathcal{J}} [v, B, w]$. Alors,

$$[v', B, w'] = x[v, B, w]y$$

pour des $x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)^1$. Supposons d'abord que $x \in A^*$, d'où $v' = xv$ et donc $v \in \overrightarrow{v'}$. Si $y \in A^*$, on a $w' = wy$ et donc $w \in \overleftarrow{w'}$. Si $y \notin A^*$, alors $y = [z, B', w']$ pour un $B' \subseteq B$ et un $z \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $wz \in B$. Par conséquent $w \in \overleftarrow{B}$. Le cas $x \notin A^*$ est dual.

La réciproque est immédiate. Par exemple, si $v \in \overrightarrow{B}$ et $w \in \overleftarrow{w'}$, alors il existe $z \in A^{-\mathbb{N}}$ et $u \in A^*$ tels que $zv \in B$ (d'où $zv \in \min(B)$) et $w' = wu$. Par conséquent, $[v', B, w'] = [v', \min(B), z][v, B, w]u$, ce qui montre que $[v', B, w'] \leq_{\mathcal{J}} [v, B, w]$. □

On résume dans le corollaire suivant quelques observations qui sont des conséquences immédiates des résultats de cette section et de la section antérieure.

Corollaire 9.4.4 *Considérons la* $\mathcal{J}$*-classe* $J_B = \{[v, B, w] \mid v \in \overrightarrow{B} \text{ et } w \in \overleftarrow{B}\}$. *Alors,*

(1) J_B *est* $\leq_{\mathcal{J}}$*-maximale parmi les* $\mathcal{J}$*-classes de* $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ *construites à partir de* B.

(2) J_B *est une* $\mathcal{J}$*-classe régulière si et seulement si* $\max(B) = B$. *Toutes les autres* $\mathcal{J}$*-classes de* $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ *construites à partir de* B *sont des* $\mathcal{R}$*-classes et des* $\mathcal{L}$*-classes irrégulières.* □

Nous pouvons prouver de ce pas que $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ est “très large”.

Proposition 9.4.5 *Il existe un ensemble non dénombrable d'éléments de* $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ *qui ne sont pas* $\leq_{\mathcal{J}}$*-comparables.*

Preuve. En fait, comme nous le verrons, il suffit de considérer des éléments construits à partir d'un seul B.

Soit $v = aba^2b^2ab^2a^2baba^2b^3 \cdots \in A^{\mathbb{N}}$ le mot de l'exemple 9.3.3, et soit $B = F_{\tilde{\mathbb{Z}}}(v) = A^{\tilde{\mathbb{Z}}} \setminus A^{-\mathbb{N}}a^3A^{\mathbb{N}}$. Notons que $\max(B) = B$, $\overrightarrow{B} = A^{\mathbb{N}} \setminus A^*a^3A^{\mathbb{N}}$ et $\overleftarrow{B} = A^{-\mathbb{N}} \setminus A^{-\mathbb{N}}a^3A^*$. Notons qu'en particulier $\overleftarrow{B}$ n'est pas dénombrable. Soit maintenant

$$C = \{[v, B, wba^3] \mid w \in \overleftarrow{B}\}.$$

On remarque que les éléments de C sont bien définis (quoique wba^3 n'appartient pas à $\overleftarrow{B}$). On a $|C| = |\overleftarrow{B}| = 2^{\aleph_0}$. De plus, pour toute paire x et y d'éléments distincts de C, x et y sont $\leq_{\mathcal{J}}$-incomparables. Cela est une conséquence de la proposition 9.4.3 et du fait que, pour tous $w, w' \in \overleftarrow{B}$ avec $w \neq w'$, on a $wba^3, w'ba^3 \notin \overleftarrow{B}$, $wba^3 \notin \overleftarrow{w'ba^3}$ et $w'ba^3 \notin \overleftarrow{wba^3}$. □

9.5 La "hauteur" de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$

Dans cette section nous donnons un exemple d'une chaîne croissante non dénombrable de $\mathcal{J}$-classes de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$. Cette chaîne est construite en utilisant des mots sturmiens (ainsi nommés par Morse et Hedlund dans [53],— auquel on pourra se reporter pour les détails et les preuves omises) qu'on introduit de suite.

Dans la suite l'alphabet A désignera toujours l'alphabet à deux lettres $A = \{a, b\}$. Pour deux mots $u, v \in A^+$ de même longueur, on définit

$$\delta(u,v) = \big||u|_a - |v|_a\big| = \big||u|_b - |v|_b\big|.$$

Un mot $x \in A^{-\mathbb{N}} \cup A^{\mathbb{N}} \cup A^{\tilde{\mathbb{Z}}}$ est dit *sturmien* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $u, v \in \mathrm{Fact}_n(x)$, $\delta(u,v) \leq 1$. Par exemple, les mots biinfinis $a^{-\infty}ba^{+\infty}$ et a^{∞} sont sturmiens. De plus, ils sont les uniques mots biinfinis dont la lettre b n'apparaît pas un nombre infini de fois (à gauche et à droite).

Il est clair que, si $x \in A^{-\mathbb{N}} \cup A^{\tilde{\mathbb{Z}}}$ (resp. $x \in A^{\mathbb{N}} \cup A^{\tilde{\mathbb{Z}}}$) est un mot sturmien, alors tous les éléments de $\overleftarrow{x}$ (resp. $\overrightarrow{x}$) sont aussi des mots sturmiens. De plus (voir [53]), si $x \in A^{-\mathbb{N}}$ (resp. $x \in A^{\mathbb{N}}$) est un mot sturmien infini, alors il existe un mot sturmien biinfini $y \in A^{\tilde{\mathbb{Z}}}$ tel que $x \in \overleftarrow{y}$ (resp. $x \in \overrightarrow{y}$). Autrement dit, tout mot sturmien infini peut être "prolongé" dans un mot sturmien biinfini.

On associe à chaque mot sturmien x ayant au moins deux occurrences de la lettre a (ce qui équivaut à dire que x a un nombre infini d'occurrences de a) un nombre réel positif $\alpha(x)$, nommé sa *fréquence*, de la manière suivante. Tout d'abord, pour tout entier n, on appelle *n-chaîne* un mot de la forme

$$ab^{k_1}ab^{k_2}\cdots b^{k_n}a$$

avec $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$. Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on fixe une n-chaîne $u = ab^{k_1}\cdots b^{k_n}a$ quelconque de x (i.e., telle que u est un facteur de x) et on pose

$$b(x)_n = |u|_b = k_1 + k_2 + \cdots + k_n.$$

On remarque que le nombre de b dans deux n-chaînes de x différent de au plus 1. De plus, comme on peut le vérifier, la suite $(\frac{b(x)_n}{n})_n$ tend vers une limite finie, notée $\alpha(x)$. Pour les mots sturmiens ayant au plus une occurrence de la lettre a on pose $\alpha(x) = +\infty$. Ces mots sont appelés *spéciaux*.

Morse et Hedlund [53] ont montré que, pour tout réel positif r, il existe un mot sturmien de fréquence r. Par exemple,

- $\alpha(a^{\infty}) = \alpha(a^{-\infty}ba^{+\infty}) = 0$;
- $\alpha((ba^3)^{\infty}) = \alpha((ba^3)^{-\infty}a(ba^3)^{+\infty}) = \alpha((ba^3)^{-\infty}ba^2(ba^3)^{+\infty}) = \frac{1}{3}$;
- $\alpha((ab)^{\infty}) = \alpha((ab)^{-\infty}b(ab)^{+\infty}) = \alpha((ba)^{-\infty}a(ba)^{+\infty}) = 1$;
- $\alpha(\boldsymbol{f}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

où

$$\boldsymbol{f} = abaababaabaababaababa \cdots \in A^{\mathbb{N}}$$

est le mot de Fibonacci, le mot sturmien le plus fameux. On rappelle que $\boldsymbol{f}$ est la limite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$f_1 = a, \qquad f_2 = ab \qquad \text{et} \qquad f_{k+1} = f_k f_{k-1} \ (k \geq 2).$$

Notons que $\boldsymbol{f} = abf_1f_2f_3\cdots$. De plus, un mot sturmien a comme fréquence un nombre rationnel si et seulement si il est ultimement périodique.

Un mot $u \in A^+$ qui est facteur d'un mot sturmien sera dit aussi *sturmien.* Si u est une n-chaîne, pour tout $k \leq n$ on note aussi $b(u)_k$ le nombre de b dans une k-chaîne quelconque de u. Pour une n-chaîne sturmienne u on définit

$$\alpha'(u) = \max\left\{\frac{b(u)_k}{k} - \frac{1}{k} \mid k \leq n\right\}, \qquad \alpha''(u) = \min\left\{\frac{b(u)_k}{k} + \frac{1}{k} \mid k \leq n\right\}.$$

Par exemple,

- $\alpha'(aba) = 0$ et $\alpha''(aba) = 2$;
- $\alpha'(a^2ba^2ba^2) = \max\{-1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\} = \frac{1}{3}$ et $\alpha''(a^2ba^2ba^2) = \min\{1, 2, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}\} = \frac{3}{5}$.

On groupe dans le théorème suivant (constitué du théorème 2.3 et du lemme 5.1 de [53]) quelques propriétés des mots sturmiens.

Théorème 9.5.1 *Un mot (fini, infini ou biinfini) x sur A est sturmien non-spécial si et seulement si il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ telle que l'une des conditions suivantes est vérifiée, pour tout n,*

(1) $n\alpha - 1 < b(x)_n \leq n\alpha + 1$.

(2) $n\alpha - 1 \leq b(x)_n < n\alpha + 1$.

Si x est un mot sturmien infini ou biinfini, α est sa fréquence.

De plus, si x est une chaîne sturmienne, les conditions (1) *ou* (2) *sont vérifiées si et seulement si $\alpha'(x) \leq \alpha \leq \alpha''(x)$, les égalités gauche et droite étant vérifiées au plus quand $\alpha = \alpha'(x)$ et $\alpha = \alpha''(x)$, respectivement. Si x est une chaîne sturmienne et ses n-chaînes vérifient à la fois* (1) *et* (2) *(c'est-à-dire que $n\alpha - 1 < b(x)_n < n\alpha + 1$), alors x est une chaîne d'un mot sturmien infini (resp. biinfini) de fréquence α.* □

Ce théorème permet, en particulier, de vérifier si une certaine chaîne sturmienne peut être facteur d'un mot sturmien infini (ou biinfini) donné. Par exemple, la chaîne $a^2ba^2ba^2$ considérée ci-dessus n'est pas facteur du mot de Fibonacci puisque $\frac{\sqrt{5}-1}{2} > \alpha''(a^2ba^2ba^2) = \frac{3}{5}$. Par contre, pour tout réel $\frac{1}{3} < r < \frac{3}{5}$, $a^2ba^2ba^2$ est facteur d'un mot sturmien de fréquence r.

Il est aussi important de noter le suivant.

Proposition 9.5.2 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mots sturmiens de $A^{-\mathbb{N}}$ convergente dans $\hat{F}_A(\mathbf{D})$ vers x. Alors, x est un mot sturmien et $\alpha(x) = \lim_n \alpha(x_n)$.*

Preuve. Soit $k \in \mathbb{N}$ et soient $u, v \in \mathrm{Fact}_k(x)$. Alors, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq i$, $u, v \in \mathrm{Fact}_k(x_n)$. Par conséquent, comme x_n est sturmien, $\delta(u, v) \leq 1$. Cela montre que x est sturmien. Par ailleurs, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$,

$$|\alpha(x) - \alpha(x_n)| \leq \left|\alpha(x) - \tfrac{b(x)_k}{k}\right| + \left|\tfrac{b(x)_k}{k} - \alpha(x_n)\right|.$$

De plus, $|\alpha(x) - \frac{b(x)_k}{k}| \xrightarrow[k]{} 0$ par définition de $\alpha(x)$, et $|\frac{b(x)_k}{k} - \alpha(x_n)| \xrightarrow[n]{} 0$ puisque toute k-chaîne de x est une k-chaîne de x_n, pour tout n suffisamment grand. Par conséquent,

$$|\alpha(x) - \alpha(x_n)| \xrightarrow[n]{} 0,$$

ce qui montre que $\alpha(x) = \lim_n \alpha(x_n)$. $\square$

Considérons maintenant l'*ensemble de Cantor* $\mathcal{C}$, formé des nombres réels de l'intervalle $[0, 1]$ qui n'ont pas besoin d'utiliser le nombre 1 dans son développement en base 3. Autrement dit, $\mathcal{C}$ est l'ensemble des nombres de la forme

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{3^i} \qquad \text{où } n_i \in \{0, 2\} \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}.$$

Notons que $\mathcal{C}$ est en bijection avec l'ensemble de toutes les suites dans $\{0, 2\}$, d'où $|\mathcal{C}| = 2^{\aleph_0}$.

L'ensemble de Cantor peut être décrit géométriquement de la façon suivante. Divisons l'intervalle $[0, 1]$ en trois parties égales, et enlevons le tiers ouvert médian $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$.

On élimine ainsi tous les nombres réels de l'intervalle $[0, 1]$ qui utilisent $n_1 = 1$ dans leur développement en base 3. Dans le deuxième pas on enlève le tiers ouvert médian de chacun des deux intervalles qui sont restés, $[0, \frac{1}{3}]$ et $[\frac{1}{3}, 1]$,

en éliminant ainsi tous les nombres qui utilisent $n_2 = 1$ dans leur développement en base 3. À la troisième étape on obtient

En procédant de façon similaire, on retire à la k-ème étape l'union I_k des tiers ouverts médians des 2^{k-1} intervalles qui sont restés après l'étape précédente. On obtient ainsi

$$\mathcal{C} = [0, 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Soient c et d deux éléments de $\mathcal{C}$. On dira que d est un *successeur* de c (et que c est un *prédécesseur* de d), et on écrira $d = \mathrm{s}(c)$, si $c < d$ et s'il n'existe pas un autre élément $e \in \mathcal{C}$ tel que $c < e < d$. Le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ formé des éléments ayant un successeur sera noté $\mathcal{C}_{\mathrm{s}}$. Par exemple,

- $\frac{1}{3} = \sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^i}$ a comme successeur $\frac{2}{3}$;
- $\frac{2}{3} + \frac{1}{3^3} = \frac{2}{3} + \sum\limits_{i=4}^{\infty} \frac{2}{3^i}$ a comme successeur $\frac{2}{3} + \frac{2}{3^3}$;
- $\frac{2}{3}$ n'a pas un successeur.

Observons la propriété suivante sur la relation de successeur dans $\mathcal{C}$.

Lemme 9.5.3 *Soit $c = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{3^i} \in \mathcal{C}$. Alors, c a un successeur si et seulement si il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $n_k = 0$ et $n_i = 2$ pour tout $i > k$. Dans ce cas, $c = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{n_i}{3^i} + \frac{1}{3^k}$ et son successeur est $\mathrm{s}(c) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{n_i}{3^i} + \frac{2}{3^k}$.*

Preuve. Supposons que c a un successeur d. Alors, tout l'intervalle $]c, d[$ a été retiré à une certaine étape, disons la k-ème. Alors, c est de la forme $c = \sum\limits_{i=1}^{k-1} \frac{n_i}{3^i} + \frac{1}{3^k}$ et $d = \sum\limits_{i=1}^{k-1} \frac{n_i}{3^i} + \frac{2}{3^k}$. Autrement dit $c = \sum\limits_{i=1}^{k-1} \frac{n_i}{3^i} + \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i}$ d'où $n_k = 0$ et $n_i = 2$ pour tout $i > k$. La réciproque est immédiate. □

Considérons maintenant, pour chaque nombre réel r dans l'intervalle $[0, 1]$, l'ensemble $\mathcal{S}_r \subseteq A^{-\mathbb{N}}$ formé de tous les mots sturmiens infinis à gauche de fréquence r. On remarque que $\mathcal{S}_r$ est un sous-ensemble fermé de $\hat{F}_A(\mathbf{D})$ tel que $\overleftarrow{\mathcal{S}_r} = \mathcal{S}_r$. En particulier, on peut regarder $\mathcal{S}_r$ comme un sous-graphe fermé (et donc profini) de $\Gamma_A(\mathbf{D})$. De plus, on sait de [53] que deux éléments quelconques de $\mathcal{S}_r$ ont un nombre infini de facteurs communs (si r est irrationnel ils ont les mêmes facteurs). Cela implique que $\mathcal{S}_r$ est un sous-graphe (profiniment prélinéaire fermé) de $\Gamma_A(\mathbf{D})$ avec une seule composante profiniment fortement connexe.

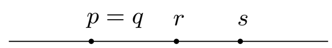
Soient $r, s \in [0, 1]$. Remarquons que, si $r \neq s$, alors les ensembles $\mathcal{S}_r$ et $\mathcal{S}_s$ ont seulement un nombre fini de chaînes (et de facteurs) en commun puisque, sinon, ils auraient un élément commun (obtenu, par exemple, en considérant une suite de facteurs communs de longueur croissante). On peut, donc, définir une application λ de $[0, 1] \times [0, 1]$ sur $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de la façon suivante

$$\lambda(r, s) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N} \mid \ \mathcal{S}_r \text{ et } \mathcal{S}_s \text{ ont une } k\text{-chaîne en commun}\} & \text{si } r \neq s \\ \infty & \text{si } r = s. \end{cases}$$

On remarque que, en particulier, si $\lambda(r, s) = n$, alors $\mathcal{S}_r$ et $\mathcal{S}_s$ ont un facteur de longueur n en commun, i.e., $\mathrm{Fact}_n(\mathcal{S}_r) \cap \mathrm{Fact}_n(\mathcal{S}_s) \neq \emptyset$. L'application λ jouit de la propriété suivante.

Lemme 9.5.4 *Soient $p, q, r, s \in [0, 1]$ tels que $p \leq q < r \leq s$. Alors, $\lambda(p, s) \leq \lambda(q, r)$.*

Preuve. On va considérer le cas $p = q$ et $r \neq s$. Les autres cas sont analogues.



Supposons que $\lambda(p, s) = n$. C'est-à-dire qu'il existe une n-chaîne u, avec n maximal, telle que u est une chaîne (sturmienne) de $\mathcal{S}_r$ et de $\mathcal{S}_s$. En particulier, on déduit du théorème 9.5.1 que $\alpha'(u) \leq p$ et que $s \leq \alpha''(u)$. Alors, comme $p < r < s$ on a $\alpha'(u) < r < \alpha''(u)$, et donc, encore par le théorème 9.5.1, on déduit que u est une chaîne d'un mot sturmien de fréquence r. C'est-à-dire que $\lambda(p, s) \leq \lambda(p, r) = \lambda(q, r)$. $\square$

Une autre observation qui va être utile est la suivante.

Lemme 9.5.5 *Soient $r < s$ deux réels de l'intervalle $[0, 1]$, soit $\varepsilon = s - r$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $0 \leq i < k$,*

$$\lambda(r + \tfrac{i}{k}\,\varepsilon, r + \tfrac{i+1}{k}\,\varepsilon) \geq n.$$

Preuve. Le lemme est vrai car, par contradiction, on trouverait une suite $([r_m, s_m])_{m\in\mathbb{N}}$ de sous-intervalles de l'intervalle $[r, s]$ telle que $|s_m - r_m| \xrightarrow[m]{} 0$, $[r_{m+1}, s_{m+1}] \subseteq [r_m, s_m]$ et $\lambda(r_m, s_m) < n$ pour tout m, ce qui est clairement impossible par le théorème 9.5.1. $\square$

Pour chaque $c \in \mathcal{C}_{\mathrm{s}}$, fixons un mot $w_c \in \mathcal{S}_c$, et un mot $v_c \in A^{\mathbb{N}}$ de fréquence $\mathrm{s}(c)$. Finalement, soit

$$E = \Big(\bigcup_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{S}_c\Big) \cup \{\overleftarrow{w_c v_c} \mid c \in \mathcal{C}_{\mathrm{s}}\}.$$

On peut regarder E comme le sous-graphe de $\Gamma_A(\mathbf{D})$ formé de tous les mots infinis (à gauche) de fréquence dans l'ensemble de Cantor avec, de plus, des chemins infinis (à droite) qui “lient” les sous-ensembles du type $\mathcal{S}_c$, avec $c \in \mathcal{C}_{\mathrm{s}}$, aux ensembles $\mathcal{S}_{\mathrm{s}(c)}$.

Proposition 9.5.6 *Le graphe E est un sous-graphe profiniment prélinéaire fermé de $\Gamma_A(\mathbf{D})$ avec un nombre non dénombrable de composantes profiniment fortement connexes.*

Preuve. Comme il est facile de le vérifier, E est un sous-graphe fermé de $\Gamma_A(\mathbf{D})$, et donc il est profini. Prouvons maintenant que E est prélinéaire. On sait déjà que tous les éléments de chaque $\mathcal{S}_c$ sont dans la même composante profiniment fortement connexe. Pour montrer que E est prélinéaire il suffit donc de montrer que, si $c < d$ sont deux éléments de $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{S}_c \preceq \mathcal{S}_d$ dans E.

Soient alors $c, d \in \mathcal{C}$ avec $c < d$. Notons tout d'abord que, si $c \in \mathcal{C}_{\mathrm{s}}$ et $d = \mathrm{s}(c)$, et puisqu'il existe un chemin infini (à droite) de “$\mathcal{S}_c$ vers $\mathcal{S}_{\mathrm{s}(c)}$” (i.e., le sommet initial est dans $\mathcal{S}_c$ et tous les points d'accumulation des sommets de ce chemin sont dans $\mathcal{S}_{\mathrm{s}(c)}$), alors on déduit immédiatement que $\mathcal{S}_c \preceq \mathcal{S}_d$ dans E.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\pi_n : \Gamma_A(\mathbf{D}) \to \Gamma_A(\mathbf{D}_n)$ le morphisme canonique. C'est-à-dire que, pour tout $w \in A^* \cup A^{-\mathbb{N}}$,

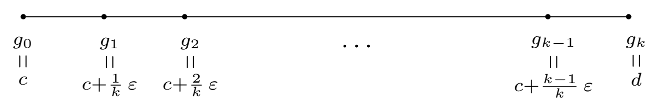
$$\pi_n(w) = \begin{cases} w & \text{si } w \in A^{<n} \\ s_n(w) & \text{si } w \in A^{\geq n} \cup A^{-\mathbb{N}}. \end{cases}$$

Soit maintenant φ_n la restriction de π_n à E, et posons $E^n = \varphi_n(E) = \mathrm{Suff}_n(E)$ et $\mathcal{S}_r^n = \varphi_n(\mathcal{S}_r) = \mathrm{Suff}_n(\mathcal{S}_r)$ $(r \in \mathcal{C})$. Comme $E = \varprojlim E^n$ (puisque $\Gamma_A(\mathbf{D}) = \varprojlim \Gamma_A(\mathbf{D}_n)$), pour montrer que $\mathcal{S}_c \preceq \mathcal{S}_d$ dans E, il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_c^n \preceq \mathcal{S}_d^n$ dans E^n (ce qu'on notera $\mathcal{S}_c \preceq_n \mathcal{S}_d$).

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\varepsilon = d - c$. D'après le lemme 9.5.5 il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $0 \leq i < k$,

$$\lambda(c + \tfrac{i}{k}\,\varepsilon, c + \tfrac{i+1}{k}\,\varepsilon) \geq n.$$

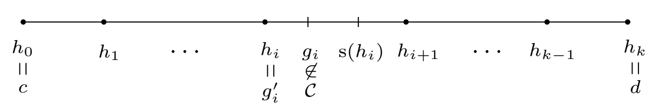
Posons $g_i = c + \frac{i}{k}\,\varepsilon$ pour tout $0 \leq i \leq k$.



On a donc, $\lambda(g_i, g_{i+1}) \geq n$ pour tout $0 \leq i < k$. Il se peut qu'un ou plusieurs des g_i n'appartiennent pas à $\mathcal{C}$. Dans ce cas, si $g_i \notin \mathcal{C}$, il existe un élément g_i' de $\mathcal{C}$ qui est le plus grand des éléments de $\mathcal{C}$ qui sont plus petits que g_i. Notons que $g_i' \in \mathcal{C}_{\mathrm{s}}$.

Pour tout $0 \leq i \leq k$, on définit donc

$$h_i = \begin{cases} g_i & \text{si } g_i \in \mathcal{C} \\ g_i' & \text{sinon.} \end{cases}$$



Pour montrer que $\mathcal{S}_c \preceq_n \mathcal{S}_d$, nous montrerons que $\mathcal{S}_{h_i} \preceq_n \mathcal{S}_{h_{i+1}}$ pour tout $0 \leq i < k$. Soit donc $0 \leq i < k$. On a quatre possibilités.

Premier cas Supposons d'abord que $g_i, g_{i+1} \in \mathcal{C}$ (d'où, $h_i = g_i$ et $h_{i+1} = g_{i+1}$). Comme $\lambda(h_i, h_{i+1}) = \lambda(g_i, g_{i+1}) \geq n$, $\mathcal{S}_{h_i}$ et $\mathcal{S}_{h_{i+1}}$ ont un facteur commun de longueur n, et donc $\mathcal{S}_{h_i}^n$ et $\mathcal{S}_{h_{i+1}}^n$ ont un élément commun. Par conséquent, il est clair que $\mathcal{S}_{h_i}^n$ et $\mathcal{S}_{h_{i+1}}^n$ sont contenus dans la même composante fortement connexe de E^n, et, en particulier, que $\mathcal{S}_{h_i} \preceq_n \mathcal{S}_{h_{i+1}}$.

Deuxième cas Supposons maintenant que $g_i \in \mathcal{C}$ et $g_{i+1} \notin \mathcal{C}$ (d'où, $h_i = g_i$ et $h_{i+1} = g_{i+1}'$). Dans ce cas, on a $g_i = h_i \leq h_{i+1} < g_{i+1}$. D'après le lemme 9.5.4, $\lambda(h_i, h_{i+1}) \geq \lambda(g_i, g_{i+1}) \geq n$ et il s'ensuit, comme dans le cas antérieur, que $\mathcal{S}_{h_i} \preceq_n \mathcal{S}_{h_{i+1}}$.

Troisième cas Supposons que $g_i \notin \mathcal{C}$ et $g_{i+1} \in \mathcal{C}$ (d'où, $h_i = g_i'$ et $h_{i+1} = g_{i+1}$). Alors, $h_i < g_i < \mathrm{s}(h_i) \leq h_{i+1} = g_{i+1}$ et donc $\lambda(\mathrm{s}(h_i), h_{i+1}) \geq \lambda(g_i, g_{i+1}) \geq n$. Par conséquent $\mathcal{S}_{\mathrm{s}(h_i)} \preceq_n \mathcal{S}_{h_{i+1}}$, et comme $\mathcal{S}_{h_i} \preceq_n \mathcal{S}_{\mathrm{s}(h_i)}$ on déduit par transitivité que $\mathcal{S}_{h_i} \preceq_n \mathcal{S}_{h_{i+1}}$.

Quatrième cas Supposons finalement que $g_i, g_{i+1} \notin \mathcal{C}$ (d'où, $h_i = g'_i$ et $h_{i+1} = g'_{i+1}$). Si g_{i+1} est dans l'intervalle $[h_i, \mathrm{s}(h_i)[$ — d'où $h_i = h_{i+1}$ — la conclusion est immédiate. Sinon, on a $h_i < g_i < \mathrm{s}(h_i) \leq h_{i+1} < g_{i+1}$ et la suite est analogue au troisième cas.

On a ainsi prouvé que E est prélinéaire.

Pour conclure la preuve, il reste à montrer que E a un nombre non dénombrable de composantes profiniment fortement connexes. Pour cela, nous montrerons que chaque $\mathcal{S}_c$, avec $c \in \mathcal{C}$, forme une composante profiniment fortement connexe de E. L'assertion suit du fait que $|\mathcal{C}| = 2^{\aleph_0}$.

Commençons par noter que, si $c \in \mathcal{C}_{\mathrm{s}}$,— et comme $\mathcal{C}$ ne contient pas aucun nombre de l'intervalle $]c, \mathrm{s}(c)[$,— alors $\mathcal{S}_{\mathrm{s}(c)} \not\preceq \mathcal{S}_c$ dans E. En effet, soit r un réel de l'intervalle $]c, \mathrm{s}(c)[$ et soit k un entier tel que,

$$\text{pour toute } k\text{-chaîne } x \text{ de } \mathcal{S}_{\mathrm{s}(c)},\ \alpha'(x) > r. \tag{9.2}$$

Notons qu'un tel k existe puisque la valeur $\alpha'(x)$ d'une k-chaîne x de $\mathcal{S}_{\mathrm{s}(c)}$ tend vers $\mathrm{s}(c)$ quand k tend vers l'infini. Maintenant soit, par exemple, $n = 12k$ et soit u un élément de $\mathcal{S}^n_{\mathrm{s}(c)}$. Alors $u \not\preceq_n \mathcal{S}^n_c$, i.e., il n'existe pas un chemin dans E^n de u vers un élément $u' \in \mathcal{S}^n_c$. En fait, supposons par contradiction qu'il existe un chemin

$$u_0 \xrightarrow{a_1} u_1 \xrightarrow{a_2} u_2 \quad \cdots \quad u_{p-1} \xrightarrow{a_p} u_p$$

dans E^n de sommet initial $u_0 = u$ et de sommet final $u_p = u'$. Par définition de E, pour tout $0 \leq i \leq p$, soit

(1) u_i est sturmien, et donc il est facteur de $\mathcal{S}_{g_i}$, pour un certain $g_i \in \mathcal{C}$,

soit

(2) u_i n'est pas sturmien, et donc il est facteur du mot $w_{h_i} v_{h_i} \in A^{\tilde{\mathbb{Z}}}$, pour un certain $h_i \in \mathcal{C}_{\mathrm{s}}$.

Si tous les u_i sont du premier type, il est clair d'après la définition de k et de n que tous les g_i sont $\geq \mathrm{s}(c)$, et donc $u_p \notin \mathcal{S}^n_c$ ce qui est impossible puisque $u_p = u'$. Sinon, pour tout $0 \leq i \leq p$, posons

$$u_i = u_{i,1} u_{i,2} u_{i,3}$$

avec $|u_{i,1}| = |u_{i,2}| = |u_{i,3}| = \frac{n}{3} = 4k$. Comme on travaille avec des facteurs de mots sturmiens de fréquence ≤ 1, le facteur b^2 apparaît au plus une fois dans un facteur de E. Donc, chaque $u_{i,j}$ ($0 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq 3$) contient au moins une k-chaîne $x_{i,j}$. De plus, d'après (1) et (2), pour un i fixé, au plus une des k-chaînes $x_{i,1}$, $x_{i,2}$ et $x_{i,3}$ n'est pas sturmienne. En outre,

- si $x_{i,3}$ n'est pas sturmienne, alors x_i est de type (2), et $x_{i,1}$ et $x_{i,2}$ sont sturmiennes. En particulier, le mot $x_{i,1}x_{i,2}$ est facteur d'un mot w_{h_i} de fréquence h_i.
- si $x_{i,2}$ n'est pas sturmienne (et donc x_i est de type (2), et $x_{i,1}$ et $x_{i,3}$ sont sturmiennes), alors $x_{i,1}$ est facteur d'un mot w_{h_i} et $x_{i,3}$ est facteur de v_{h_i}. Par conséquent, si $h_i \geq \mathrm{s}(c)$, $x_{i,1}$ et $x_{i,3}$ sont telles que $\alpha'(x_{i,1}), \alpha'(x_{i,3}) > r$.

- si $x_{i,1}$ n'est pas sturmienne, alors x_i est de type (2), et $x_{i,2}$ et $x_{i,3}$ sont sturmiennes. En particulier, le mot $x_{i,2}x_{i,3}$ est facteur d'un mot v_{h_i} de fréquence $\mathrm{s}(h_i)$.

D'après ces trois points et d'après le choix de k, il est clair que —, puisqu'on part de $u = u_0$,— toutes les k-chaînes x des mots u_i sont telles que $\alpha'(x) > r$. Mais cela est impossible puisque $u' = u_p$ contient au moins une k-chaîne y et donc $\alpha'(y) \leq c < r$. C'est-à-dire que le chemin ci-dessus n'existe pas, et donc que $\mathcal{S}_{\mathrm{s}(c)} \not\preceq \mathcal{S}_c$ dans E.

Soient, maintenant, c et d deux éléments quelconques de $\mathcal{C}$ avec $c < d$. D'après la construction de $\mathcal{C}$, il est facile de vérifier qu'il existe $g \in \mathcal{C}_{\mathrm{s}}$ tel que

$$c \leq g < \mathrm{s}(g) \leq d.$$

Par conséquent, $\mathcal{S}_d \not\preceq \mathcal{S}_c$ dans E, puisque sinon,— comme $\mathcal{S}_c \preceq \mathcal{S}_g$ et $\mathcal{S}_{\mathrm{s}(g)} \preceq \mathcal{S}_d$,— on aurait $\mathcal{S}_{\mathrm{s}(g)} \preceq \mathcal{S}_g$ ce qui n'est pas vrai. Cela montre que, pour tout $c \in \mathcal{C}$, $\mathcal{S}_c$ est une composante profiniment fortement connexe de E, ce qui termine la preuve. □

Ce résultat fournit le graphe que nous utiliserons pour construire la chaîne annoncée.

Théorème 9.5.7 *Soit A un alphabet fini non trivial. Le semigroupe $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ admet une chaîne croissante non dénombrable de $\mathcal{J}$-classes.*

Preuve. Soient a et b deux éléments distincts de A, et soit $G = \mathrm{Pref}(a^{+\infty}) \cup E$. La proposition 9.5.6 montre immédiatement que G est un sous-graphe profiniment prélinéaire fermé de $\Gamma_A(\mathbf{D})$, avec un nombre non dénombrable de composantes profiniment fortement connexes, telles que $1 \in \min(G)$. Pour tout $c \in \mathcal{C}$, soit G_c le sous-graphe (profiniment prélinéaire fermé tel que $1 \in \min(G_c)$) de G défini par

$$\begin{aligned} G_c &= \{x \in G \mid x \preceq \mathcal{S}_c\} \\ &= \mathrm{Pref}(a^{+\infty}) \cup \Big(\bigcup_{\substack{d \in \mathcal{C} \\ d \leq c}} \mathcal{S}_d\Big) \cup \{\overleftarrow{w_d v_d} \mid d \in \mathcal{C}_{\mathrm{s}}, d < c\}. \end{aligned}$$

Maintenant, soit x_c l'élément de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ définit par

$$x_c = (a^{+\infty}, \hat{G}_c, z_c)$$

où $z_c \in \max(G_c) = \mathcal{S}_c$. Il est clair que, pour tous $c, d \in \mathcal{C}$ avec $c < d$, on a $x_d \leq_{\mathcal{J}} x_c$ (plus precisement, $x_d \leq_{\mathcal{R}} x_c$) puisque

$$x_d = x_c(y, H, z_d)$$

où y est l'étiquette d'un chemin infini à droite de sommet initial z_c dans $\mathcal{S}_c$ (d'où y est un mot sturmien infini à droite de fréquence c) et $H = \big(G_d \setminus G_c\big) \cup \mathcal{S}_c$. Par contre, $x_c \not\leq_{\mathcal{J}} x_d$ puisque $\hat{G}_d \nsubseteq \hat{G}_c$. La famille $(x_c)_{c \in \mathcal{C}}$ forme donc une chaîne croissante non dénombrable d'éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$, d'où le résultat. □

Cinquième partie

Annexes

Annexe A

Prolongements Possibles

On termine cette thèse avec quelques commentaires sur notre travail, et en évoquant quelques prolongements possibles.

Chapitre 4

Soit $\mathbf{W}$ une pseudo-variété quelconque, et soit $\Sigma_{\mathbf{W}}$ un ensemble de $\mathbf{S}$-pseudo-identités définissant $\mathbf{W}$. Les pseudo-variétés $\mathbf{LI} \vee \mathbf{W}$, $\mathbf{K} \vee \mathbf{W}$ et $\mathbf{D} \vee \mathbf{W}$ admettent comme des majorants, respectivement, les pseudo-variétés

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{\mathbf{LI}\vee\mathbf{W}} &= [\![a^\omega bxcd^\omega = a^\omega bycd^\omega \mid x = y \in \Sigma_{\mathbf{W}}]\!] \\
\mathbf{U}_{\mathbf{K}\vee\mathbf{W}} &= [\![a^\omega bx = a^\omega by \mid x = y \in \Sigma_{\mathbf{W}}]\!] \\
\mathbf{U}_{\mathbf{D}\vee\mathbf{W}} &= [\![xba^\omega = yba^\omega \mid x = y \in \Sigma_{\mathbf{W}}]\!].
\end{aligned}$$

En certains cas il est connu que $\mathbf{V} \vee \mathbf{W} = \mathbf{U}_{\mathbf{V}\vee\mathbf{W}}$, avec $\mathbf{V}$ l'une de $\mathbf{LI}$, $\mathbf{K}$ ou $\mathbf{D}$. Par exemple, nous avons les égalités suivantes, déjà mentionnées à la section 4.2,

- $\mathbf{LI} \vee \mathbf{Com} = \mathbf{U}_{\mathbf{LI}\vee\mathbf{Com}}$ et $\mathbf{K} \vee \mathbf{Com} = \mathbf{U}_{\mathbf{K}\vee\mathbf{Com}}$, avec $\Sigma_{\mathbf{Com}} = \{ab = ba\}$;
- $\mathbf{LI} \vee \mathbf{J} = \mathbf{U}_{\mathbf{LI}\vee\mathbf{J}}$ et $\mathbf{K} \vee \mathbf{J} = \mathbf{U}_{\mathbf{K}\vee\mathbf{J}}$, avec $\Sigma_{\mathbf{J}} = \{(ab)^\omega = (ba)^\omega, a^{\omega+1} = a^\omega\}$;
- $\mathbf{K} \vee \mathbf{MN} = \mathbf{U}_{\mathbf{K}\vee\mathbf{MN}}$, avec $\Sigma_{\mathbf{MN}} = \{a^\omega b = ba^\omega, a^{\omega+1} = a^\omega\}$;
- $\mathbf{D} \vee \mathbf{MK} = \mathbf{U}_{\mathbf{D}\vee\mathbf{MK}}$, avec $\Sigma_{\mathbf{MK}} = \{a^\omega ba = a^\omega b\}$.

En vu de ces résultats, on peut se demander si on a d'autres égalités du même type. Par exemple, si

$$\mathbf{LI} \vee \mathbf{ZE} = \mathbf{U}_{\mathbf{LI}\vee\mathbf{ZE}} \qquad \text{ou si} \qquad \mathbf{LI} \vee \mathbf{ECom} = \mathbf{U}_{\mathbf{LI}\vee\mathbf{ECom}}.$$

On rappelle que, comme nous l'avons prouvé dans le théorème 4.3.1, dans le cas des sous-pseudo-variétés $\mathbf{W}$ de $\mathbf{T}$ nous avons les égalités suivantes

$$\mathbf{LI} \vee \mathbf{W} = \mathbf{U}_{\mathbf{LI}\vee\mathbf{W}} \cap \mathbf{T} \quad \text{et} \quad \mathbf{K} \vee \mathbf{W} = \mathbf{U}_{\mathbf{K}\vee\mathbf{W}} \cap \mathbf{T}.$$

Chapitre 5 (et 6)

Un problème proche de ceux résolus dans ce chapitre, et qui reste ouvert, est la description des semigroupes de la forme

$$\hat{F}_A(\mathbf{V} \cap \mathbf{LDG})$$

où $\mathbf{V} \in \{\mathbf{DOH}, \mathbf{DRH}, \mathbf{DH}\}$ et $\mathbf{H}$ est une pseudo-variété de groupes non triviale. Rappelons que nous avons résolu ce problème dans les cas apériodiques $\mathbf{V} = \mathbf{DA}$ et $\mathbf{V} = \mathbf{R}$ (le cas $\mathbf{V} = \mathbf{J}$, et donc $\mathbf{V} \cap \mathbf{LDG} = \mathbf{J}$, a été étudié par Almeida).

La difficulté principale des cas non apériodiques tient à la (encore) petite connaissance qu'on a des groupes profinis libres (notamment l'existence de factorisations canoniques).

Un autre problème qui est resté ouvert (principalement faute de temps, je crois) est l'étude des semigroupes de la forme

$$\hat{F}_A(\mathbf{V} \cap \mathbf{LCom})$$

avec $\mathbf{V}$ comme d'habitude. Ce problème est très proche du problème analogue avec $\mathbf{Com} * \mathbf{D}$ à la place de $\mathbf{LCom}$ résolu dans la section 5.5. Il semble raisonnable de penser que, dans le cas $\mathbf{V} = \mathbf{DH}$ par exemple, étant donnés deux éléments de $\hat{F}_A(\mathbf{DH} \cap \mathbf{LCom})$ écrits en forme “normale” (définie exactement comme pour $\mathbf{Com} * \mathbf{D}$), ces éléments sont égaux si et seulement si on peut passer d'une forme normale à l'autre en utilisant un nombre fini de fois les trois “régles de réécriture” suivantes

$$x_1[B,g_1]x_2[B,g_2]x_3[B,g_3]x_4 \mapsto x_1[B,g_1]x_3[B,g_2]x_2[B,g_3]x_4$$
$$x_1[B,1]x_2[B,g]x_3 \mapsto x_1[B,g]x_2[B,1]x_3$$
$$x_1[B,g]x_2[B,1]x_3 \mapsto x_1[B,1]x_2[B,g]x_3$$

données par la proposition 5.5.1. Notons que pour $\mathbf{Com} * \mathbf{D}$ (voir la suite de la preuve du théorème 5.5.4) on avait ces mêmes régles plus une quatrième

$$x_1[B,g_1]x_2[C,h_1]x_3[B,g_2]x_4[C,h_2]x_5 \mapsto x_1[B,g_1]x_4[C,h_1]x_3[B,g_2]x_2[C,h_2]x_5.$$

Chapitre 7

Dans ce chapitre nous avons mentionné le résultat de Beauquier et Pin (théorème 7.2.3(2) ci-dessus) qui caractérise les langages $\mathcal{L}t$-s. Ces langages, rappelons-le, sont les langages qui sont combinaisons booléennes de langages de la forme wA^*, A^*w et $L(w,r,1,t)$ avec A un alphabet fini, $w \in A^+$ et $r, t \in \mathbb{N}_0$.

Les langages de A^+ qui sont combinaisons booléennes de langages de la forme wA^*, A^*w et $L(w,r,n,0)$ avec $w \in A^+$, $r \in \mathbb{N}_0$ et $n \in \mathbb{N}$, sont appelés de *localement testables à module*, et notés $\mathcal{L}t$-m. Ils sont caractérisés par le résultat suivant.

Théorème A.0.8 ([78, 77]) *Un langage reconnaissable L est $\mathcal{L}t$-m si et seulement si* $S(L) \in (\mathbf{Com} * \mathbf{D}) \cap \mathbf{LG}$. □

La caractérisation des langages $\mathcal{L}t\text{-}c$ (obtenue dans le théorème 7.2.3(3)) — qui, rappelons-le, sont les langages qui sont combinaisons booléennes de langages de la forme wA^*, A^*w et $L(w,r,n,t)$ avec $w \in A^+$, $r,t \in \mathbb{N}_0$ et $n \in \mathbb{N}$ — est une suite naturelle de ces résultats et, donc, il semble raisonnable de penser qu'elle existe déjà dans la littérature. Cependant, si elle existe nous n'en connaissons aucune référence.

Il est important de noter aussi que nous nous sommes intéressé seulement à présenter des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un langage L donné soit dans une classe de langages localement testables donnée, sans chercher à estimer les *ordres de locale testabilité* (i.e., sans chercher à estimer les plus petits indices tels que L soit saturé par une congruence du type $\theta_{k,n,t}$, avec $\theta \in \{\sim, \equiv, \approx\}$ — voir la définition 7.1.2). Des recherches dans cette direction sont présentes dans le travail d'auteurs comme Kim, McCloskey, McNaughton et Trahtman [45, 46, 82, 83].

Chapitres 8 et 9

On remarque que le théorème 8.1.1 serait plus facile à prouver en utilisant la caractérisation de $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ donnée par le théorème 9.2.5 à la place de celle donnée par la proposition 8.3.1 que nous avons utilisée. Une partie serait même immédiate puisque, si

$$x = u_0 x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_k^\omega u_k \quad \text{et} \quad y = v_0 y_1^\omega v_1 y_2^\omega \cdots y_m^\omega v_m$$

où $k,m \in \mathbb{N}$, $u_0,\ldots,u_k,v_0,\ldots,v_m \in A^*$ et $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_m \in A^+$, alors

$$x = [u_0 x_1^{+\infty}, I_x, x_k^{-\infty} u_k] \quad \text{et} \quad y = [v_0 y_1^{+\infty}, I_y, y_m^{-\infty} v_m]$$

où I_x et I_y sont les ensembles de mots biinfinis définis dans le théorème 8.1.1. Donc, $x = y$ si et seulement si $u_0 x_1^{+\infty} = v_0 y_1^{+\infty}$, $I_x = I_y$ et $x_k^{-\infty} u_k = y_m^{-\infty} v_m$.

Cela constitue, par conséquent, un exemple de ce qu'on peut "gagner" avec le théorème 9.2.5 (notamment avec la "représentation graphique" des opérations implicites sur $\mathbf{LJ}_1$ qu'il permet).

Les questions,— résolues dans le chapitre 9,— sur la "largeur" et la "hauteur" des semigroupes $\hat{F}_A(\mathbf{LJ}_1)$ ont été posées par Almeida.

Annexe B

Variétés de Langages (Tableaux Comparatifs)

Dans cet annexe nous présentons des tableaux comparatifs, contenant quelques-unes des caractérisations syntaxiques de variétés de langages obtenues dans ce travail ainsi que d'autres déjà connues. Nous nous restreindrons aux langages apériodiques.

B.1 Générateurs du type $A_0^* a_1 A_1^* a_2 \cdots a_n A_n^*$

On commence par rappeler quelques variétés de langages dont les éléments (dans A^+, pour un alphabet A) sont décrits par des générateurs de la forme

$$A_0^* a_1 A_1^* a_2 \cdots a_n A_n^*$$

où $n \in \mathbb{N}_0$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ et $A_0, \ldots, A_n \subseteq A$. Ces variétés sont décrites, de plus, par l'imposition de certaines conditions sur les a_i et les A_i.

Pseudo-variété	Conditions	Ref.
DA	Produit non ambigu	[67]
R	$a_i \notin A_{i-1}$	[34]
J	$A_0 = \cdots = A_n = A$	[72]
PJ	Aucune condition	[61]
$\mathbf{J} \cap \mathbf{ECom}$	$a_i \notin A_{i-1} \cup A_i$	[19]
$\mathbf{J} \cap \mathbf{LJ}_1 \cap \mathbf{ECom}$	$a_i \notin A_{i-1} \cup A_i$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$	[70]
$\mathbf{J} \cap \mathbf{LZE} \cap \mathbf{ECom}$	$a_i \notin A_{i-1} \cup A_i$ $A_i = A_j$ ou $A_i \cap A_j = \emptyset$	chap. 6

B.2 Générateurs du type $u_0A_1^*u_1A_2^*u_2\cdots A_n^*u_n$

On résume maintenant dans le tableau suivant quelques variétés de langages dont les éléments sur un alphabet A sont des combinaisons booléennes de langages de la forme

$$u_0A_1^*u_1A_2^*u_2\cdots A_n^*u_n$$

où $n \in \mathbb{N}_0$, $u_0,\ldots,u_n \in A^*$ avec $u_i \neq 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$ et $\emptyset \neq A_1,\ldots,A_n \subseteq A$.

Pseudo-variété	**Conditions**	**Ref.**
$\mathbf{J} * \mathbf{LI}$	$A_1 = \cdots = A_n = A$ et $u_0,\ldots,u_n \in A^+$	[71, 48]
$\mathbf{DA} \cap \mathbf{LECom}$	$c(u_i) \not\subseteq A_i, A_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$	chap. 6
$\mathbf{DA} \cap \mathbf{LZE}$	$c(u_i) \not\subseteq A_i, A_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$ $A_i = A_j$ ou $A_i \cap A_j = \emptyset$	chap. 6
$\mathbf{DA} \cap \mathbf{LJ}_1$	$c(u_i) \not\subseteq A_i, A_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$ (*) $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$	[33] chap. 6
$\mathbf{R} \cap \mathbf{LECom}$	$p_1(u_i) \notin A_i$ $(1 \leq i \leq n)$ $s_1(u_i) \in A_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$ si $c(u_i) \subseteq A_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$, alors $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$	chap. 6
$\mathbf{R} \cap \mathbf{LZE}$	$p_1(u_i) \notin A_i$ $(1 \leq i \leq n)$ si $c(u_i) \subseteq A_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$, alors $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$ $A_i = A_j$ ou $A_i \cap A_j = \emptyset$	chap. 6
$\mathbf{R} \cap \mathbf{LJ}_1$	$p_1(u_i) \notin A_i$ $(1 \leq i \leq n)$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$	[33] chap. 6

(*) Cette condition peut être supprimée.

B.3 Générateurs du type $u_0A_1^+u_1A_2^+u_2\cdots A_n^+u_n$

On présente pour terminer les variétés de langages associées à des sous-pseudo-variétés de **J**. Les langages dans A^+ de ces variétés sont décrites comme des combinaisons booléennes de langages de la forme

$$u_0A_1^+u_1A_2^+u_2\cdots A_n^+u_n$$

où $n \in \mathbb{N}_0$, $u_0, \ldots, u_n \in A^*$, $\emptyset \neq A_1, \ldots, A_n \subseteq A$, et pour tout $1 \leq i \leq n$ tel que u_i (resp. u_{i-1}) n'est pas le mot vide, la première (resp. dernière) lettre de u_i (resp. u_{i-1}) n'appartient pas à A_i.

Pseudo-variété	**Conditions**	**Ref.**
$\mathbf{J} \cap \mathbf{LECom}$	si $u_i = 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$, alors $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$	chap. 6
$\mathbf{J} \cap \mathbf{LZE}$	si $u_i = 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$, alors $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$ $A_i = A_j$ ou $A_i \cap A_j = \emptyset$	chap. 6
$\mathbf{J} \cap \mathbf{LJ}_1$	$A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$	[69, 33] chap. 6
$\mathbf{J} \cap \mathbf{LZE} \cap \mathbf{ECom}$	$u_i \neq 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$ $A_i = A_j$ ou $A_i \cap A_j = \emptyset$	chap. 6
$\mathbf{J} \cap \mathbf{LJ}_1 \cap \mathbf{ECom}$	$u_i \neq 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$	[70] chap. 6

Bibliographie

[1] D. Albert, R. Baldinger et J. Rhodes. Undecidability of the identity problem for finite semigroups, *J. Symbolic Logic* **57** (1992) 179-192.

[2] J. Almeida. Power pseudovarieties of semigroups I, *Semigroup Forum* **33** (1986) 357-373.

[3] J. Almeida. Power pseudovarieties of semigroups II, *Semigroup Forum* **33** (1986) 375-390.

[4] J. Almeida. Some pseudovariety joins involving the pseudovariety of finite groups, *Semigroup Forum* **37** (1988) 53-57.

[5] J. Almeida. The algebra of implicit operations, *Algebra Universalis* **26** (1989) 16-72.

[6] J. Almeida. Equations for pseudovarieties, dans J.-E. Pin (Ed.), *Formal properties of finite automata and applications*, Lect. Notes in Comp. Sci. **386**, Springer, Berlin (1989) 148-164.

[7] J. Almeida. Residually finite congruences and quasi-regular sets in uniform algebras, *Portugaliæ Mathematica* **46** (1989) 313-328.

[8] J. Almeida. Implicit operations on finite $\mathcal{J}$-trivial semigroups and a conjecture of I. Simon, *J. Pure and Applied Algebra* **69** (1990) 205-218.

[9] J. Almeida. *Finite semigroups and universal algebra*, World Scientific, Singapore, 1994.

[10] J. Almeida et A. Azevedo. Implicit operations on certain classes of semigroups, dans S. Goberstein et P. Higgins (Eds.), Proc. of Chico Conf., *Semigroups and their applications*, D. Reidel (1987) 1-11.

[11] J. Almeida et A. Azevedo. The join of the pseudovarieties of $\mathcal{R}$-trivial and $\mathcal{L}$-trivial semigroups, *J. Pure and Applied Algebra* **60** (1989) 129-137.

[12] J. Almeida et A. Azevedo. On regular implicit operations, *Portugaliæ Mathematica* **50** (1993) 35-61.

[13] J. Almeida, A. Azevedo et M. Zeitoun. Pseudovariety joins involving $\mathcal{J}$-trivial semigroups and completely regular semigroups, *Int. J. Algebra and Computation*, à paraître.

[14] J. Almeida et P. Weil. Reduced factorizations in free profinite groups and join decompositions of pseudovarieties, *Int. J. Algebra and Computation* **4** (1994) 375-403.

[15] J. Almeida et P. Weil. Relatively free profinite monoids : an introduction and examples, dans J. Fountain (Ed.), *Semigroups, formal languages and groups*, Kluwer (1995) 73-117.

[16] J. Almeida et P. Weil. Free profinite semigroups over semidirect products, *Izvestiya VUZ Matem.* **39** (1995) 3-31. Version anglaise *Russian Matem. (Iz. VUZ)* **39** (1995) 1-28.

[17] J. Almeida et P. Weil. Free profinite $\mathcal{R}$-trivial semigroups, *Int. J. Algebra and Computation* **7** (1997) 625-671.

[18] C. J. Ash. Finite semigroups with commuting idempotents, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **43** (1987) 81-90.

[19] C. J. Ash, T. E. Hall et J.-E. Pin. On the varieties of languages associated to some varieties of finite monoids with commuting idempotents, *Information and Computation* **86** (1990) 32-42.

[20] A. Azevedo. Operations preserving homomorphisms on the class of finite semigroups **DS**, dans J. Almeida (Ed.), *Actas II Encontro de Algebristas Portugueses*, Universidade do Porto (1987) 33-43.

[21] A. Azevedo. *Operações implícitas sobre pseudovariedades de semigrupos. Aplicações*, Thèse de doctorat, Universidade do Porto, 1989.

[22] A. Azevedo. The join of the pseudovariety **J** with permutative pseudovarieties, dans J. Almeida et al (Eds.), *Lattices, Semigroups and Universal Algebra*, Plenum, New York (1990) 1-11.

[23] A. Azevedo et M. Zeitoun. Three examples of join computations, *Semigroup Forum* **57** (1998) 249-277.

[24] B. Banachewski. The Birkhoff theorem for varieties of finite algebras, *Algebra Universalis* **17** (1983) 360-368.

[25] D. Beauquier et J.-E. Pin. Factors of words, dans *Lecture Notes in Computer Science* **372**, Springer, Berlin (1989) 63-79.

[26] D. Beauquier et J.-E. Pin. Languages and scanners, *Theoretical Computer Science* **84** (1991) 3-21.

[27] J. C. Birget, S. Margolis et J. Rhodes. Finite semigroups whose idempotents commute or form a subsemigroup, dans S. Goberstein et P. Higgins (Eds.), Proc. of Chico Conf., *Semigroups and their applications*, D. Reidel (1987) 25-34.

[28] P. A. Birjukov. Varieties of idempotent semigroups, *Algebra i Logika* **9** (1970) 255-273 (Russian).

[29] M. Branco. *Le produit de concaténation et ses variantes*, Thèse de doctorat, Université de Paris 6, 1997.

[30] J. Brzozowski et I. Simon. Characterization of locally testable events, *Discrete Mathematics* **4** (1973) 243-271.

[31] N. Chomsky. Three models for the description of language, *IRE Trans. Inf. Th.* **2** (1956).

[32] N. Chomsky et M. Schützenberger. The algebraic theory of context-free languages, dans P. Brafford et D. Hirschberg (Eds.), *Computer Programming and Formal Systems*, North Holland, Amsterdam (1963) 118-161.

[33] J. Costa. Free profinite $\mathcal{R}$-trivial, locally idempotent and locally commutative semigroups, *Semigroup Forum*, à paraître.

[34] S. Eilenberg. *Automata, languages and machines*, vol. B, Academic Press, New York, 1976.

[35] S. Eilenberg et P. Schützenberger. On pseudovarieties, *Advances in Mathematics* **19** (1976) 413-418.

[36] T. Evans. Some connections between residual finiteness, finite embeddability and word problem, *J. London Math. Soc. (2)* **1** (1969) 399-403.

[37] C. F. Fennemore. All varieties of bands, I, II, *Math. Nachr.* **50** (1971) 237-252 et 253-262.

[38] J. A. Gerhard. The lattice of equational classes of idempotent semigroups, *J. Algebra* **15** (1970) 195-224.

[39] J. A. Gerhard. Semigroups with an idempotent power I. Word problems, *Semigroup Forum* **14** (1977) 137-141.

[40] J. A. Gerhard et M. Petrich. Varieties of bands revisited, *Proc. London Math. Soc.* **58** (1989) 323-350.

[41] D. Gildenhuys et L. Ribes. Profinite groups and Boolean graphs, *J. Pure Appl. Alg.* **12** (1978) 21-47.

[42] J. A. Green. On the structure of semigroups, *Annals of Math.* **54** (1951) 163-172.

[43] J. A. Green et D. Rees. On semigroups in which $x^r = x$. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **48** (1952) 35-40.

[44] J. M. Howie. *An introduction to semigroup theory*, Academic Press, London, 1976.

[45] S. Kim, R. McCloskey et R. McNaughton. A polynomial time algorithm for the local testability problem of deterministic finite automata, *IEEE Trans. Comp.* **40** (1991) 1087-1093.

[46] S. Kim et R. McNaughton. Computing de order of locally testable automaton, *SIAM J. Comput.* **6** (1994) 1143-1205.

[47] S. C. Kleene. Representation of events in nerve nets and finite automata, dans C. E. Shannon (Ed.), *Automata studies*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1956) 3-41.

[48] R. Knast. A semigroup characterization of dot-depth one languages, *RAIRO Inform. Théor.* **17** (1983) 321-330.

[49] Lothaire. *Combinatorics on words*, Addison-Wesley Publishing Company, 1983.

[50] R. McNaughton. Algebraic decision procedures for local testability, *Math. Systems and Theory* **8** (1974) 60-76.

[51] Y. Medvedev. On the class of events representable in a finite automaton, traduit du russe dans F. Moore (Ed.), *Sequential Machines-Selected Papers*, Addison-Wesley (1964) 215-227.

[52] M. Morse et G. A. Hedlund. Symbolic dynamics, *Amer. J. Math.* **60** (1938) 815-866.

[53] M. Morse et G. A. Hedlund. Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories, *Amer. J. Math.* **62** (1940) 1-42.

[54] D. Perrin. Sur certains semigroupes syntaxiques, *Séminaires INRIA, Logique et automates* (1971) 169-177.

[55] D. Perrin et J.-E. Pin. Mots infinis, *Rapport LITP 97/04* (1997).

[56] J.-E. Pin. *Variétés de langages et variétés de semigroupes*, Thèse d'État, Université de Paris VI, 1981.

[57] J.-E. Pin. *Variétés de langages formels*, Masson, Paris, 1984.

[58] J.-E. Pin. Topologies for the free monoid, *J. Algebra* **137** (1991) 297-337.

[59] J.-E. Pin. The expressive power of existential first order sentences of Büchi's sequential calculus, dans *Proc.* 23^{rd} *ICALP*, Lecture Notes in Computer Science **1099**, Springer, Berlin (1996) 300-311.

[60] J.-E. Pin. Syntactic semigroups, Chap. 10 dans *Handbook of language theory*, Vol. I, G. Rozenberg et A. Salomaa (Eds.), Springer Verlag, 1997, 679-746.

[61] J.-E. Pin et H. Straubing. Monoids of upper triangular matrices, *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, Semigroups, Szeged* **39** (1981) 259-272.

[62] J.-E. Pin et P. Weil. Profinite semigroups, Mal'cev products and identities, *J. Algebra* **182** (1996) 604-626.

[63] J.-E. Pin et P. Weil. Polinomial closure and unambiguous product, *Math. Systems Theory*,

[64] N. R. Reilly et S. Zhang. Complete endomorphisms of the lattice of pseudovarieties of finite semigroups, *Bull. Austral. Math. Soc.* **55** (1997) 207-218.

[65] J. Reiterman. The Birkhoff theorem for finite algebras, *Algebra Universalis* **14** (1982) 1-10.

[66] M. Schützenberger. On finite monoids having only trivial subgroups, *Inform. and Control* **8** (1965) 190-194.

[67] M. Schützenberger. Sur le produit de concatenation non ambigu, *Semigroup Forum* **13** (1976) 47-75.

[68] C. Selmi. *Langages et semigroups testables*, Thèse de doctorat, Université de Paris VII, 1994.

[69] C. Selmi. Over testable languages, *Theoret. Computer Science* **161** (1996) 157-190.

[70] C. Selmi. Strongly locally testable semigroups with commuting idempotents and associated languages, *Informatique Théorique et Applications*, à paraître.

[71] I. Simon. Hierarchies of events with dot-depth one, Thèse de doctorat, University of Waterloo, 1972.

[72] I. Simon. Piecewise testable events, *Proc.* 2^{nd} *GI Conf.*, Lecture Notes in Computer Science **33**, Springer, Berlin (1975) 214-222.

[73] H. Straubing. Families of recognizable sets corresponding to certain varieties of finite monoids, *J. Pure Appl. Algebra* **15** (1979) 305-318.

[74] H. Straubing. Aperiodic homomorphisms and the concatenation product of recognizable sets, *J. Pure Appl. Algebra* **15** (1979) 319-327.

[75] H. Straubing. Semigroups and languages of dot-depth two, *Theor. Comp. Sci.* **58** (1988) 361-378.

[76] H. Straubing. Finite semigroup varieties of the form $\mathbf{V} * \mathbf{D}$, *J. Pure Appl. Algebra* **36** (1985) 53-94.

[77] H. Straubing. *Finite automata, formal logic and circuit complexity*, Birkhäuser, Boston, 1994.

[78] H. Straubing, D. Thérien et W. Thomas. Regular languages defined with generalized quantifiers, dans *Proc.* 15^{th} *ICALP*, Lecture Notes in Computer Science **317**, Springer, Berlin (1988) 561-575.

[79] D. Thérien. Classification of finite monoids : the language approach, *Theor. Comp. Sci.* **14** (1981) 195-208.

[80] D. Thérien et A. Weiss. Graph congruences and wreath products, *J. Pure Appl. Algebra* **36** (1985) 205-215.

[81] A. Thue. Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen, *Norske Vid. Selsk. Skr. I. Mat-nat. Kl., Christiana no.* **1** (1912) 1-67.

[82] A. N. Trahtman. The varieties of testable semigroups, *Semigroup Forum* **27** (1983) 309-318.

[83] A. N. Trahtman. Precise upper bound on the order of local testability of finite auglobal maximum $k-2$ for an Impl. Automata, Univ. of Western Ontario, Canada (1997).

[84] P. Trotter et M. Volkov. The finite basis problem in the pseudovariety joins of aperiodic semigroups with groups, *Semigroup Forum* **52** (1996) 83-91.

[85] P. Trotter et P. Weil. The lattice of pseudovarieties of idempotent semigroups and a non-regular analogue, *Algebra Universalis* **37** (1997) 491-526.

[86] A. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math. Soc.* **42** (1936) 230-265.

[87] M. Volkov. On a class of semigroup pseudovarieties without finite pseudoidentity basis, *Int. J. Algebra and Computation* **5** (1995) 127-135.

[88] P. Weil. Inverse monoids of dot-depth two, *Theoret. Comput. Sci.* **66** (1989) 233-245.

[89] P. Weil. Products of languages with counter, *Theoret. Comput. Sci.* **76** (1990) 251-260.

[90] P. Weil. Implicit operations on pseudovarieties : an introduction, dans J. Rhodes (Ed.), *Monoids and semigroups with applications*, World Scientific, Singapore, 1991.

[91] P. Weil. Closure of varieties of languages under products with counter, *J. Computer and System Sciences* **45** (1992) 316-339.

[92] P. Weil. Some results on the dot-depth hierarchy, *Semigroup Forum* **46** (1993) 352-370.

[93] T. Wilke. Locally threshold testable languages of infinite words, dans *STACS 93*, Lecture Notes in Computer Science **665**, Springer, Berlin (1993) 607-616.

[94] Y. Zalcstein. Locally testable languages, *J. Computer and System Sciences* **6** (1972) 151-167.

[95] Y. Zalcstein. Locally testable semigroups, *Semigroup Forum* **5** (1973) 216-227.

[96] M. Zeitoun. *Opérations implicites et variétés de semigroupes finis*, Thèse de doctorat, Université de Paris VII, 1993.

[97] M. Zeitoun. The join of the pseudovarieties of idempotent semigroups and locally trivial semigroups, *Semigroup Forum* **50** (1995) 367-381. Corrigendum, *Semigroup Forum* **52** (1996) 249.

[98] M. Zeitoun. On the join of two pseudovarieties, dans J. Almeida et al (Eds.), *Semigroups, automata and languages*, World Scientific (1996) 281-288.

Index des Auteurs

Index des Notations

Index Alphabétique