MAT - 2002/03
Topologia e elementos de análise funcional

Salvatore Cosentino
Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho
Campus de Gualtar, 4710 Braga - PORTUGAL
gab B.4023, tel 253 604086
e-mail scosentino@math.uminho.pt
url http://w3.math.uminho.pt/~scosentino

13 de Dezembro de 2002

Resumo

Isto não é um livro! Estas páginas contêm as minhas notas das aulas de topologia leccionadas no ano letivo 2012/03, e portanto foram escritas de maneira sintética, esquemática e por vezes informal.

Conteúdo

1 Espaços métricos

Espaços métricos. Seja X um conjunto não vazio. Uma *métrica* em X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que para todos $x, x', x'' \in X$

$$\begin{aligned} &d(x,x') \geqslant 0, \text{ e } d(x,x') = 0 \text{ sse } x = x' \\ &d(x,x') = d(x',x) \\ &d(x,x') \leqslant d(x,x'') + d(x'',x') \end{aligned}$$

A última propriedade é dita desigualdade do triângulo.

Um *espaço métrico* é um par (X, d), um conjunto não vazio X munido de uma métrica d. Os elementos de X são ditos pontos do espaço métrico, e o número não negativo $d(x, x')$ é dito distância entre os pontos x e x'.

Distâncias distintas em X definem espaços métricos distintos. Por razões de economia é usual escrever "o espaço métrico X" em vez de "o espaço métrico (X, d)", quando a métrica particular não é importante, ou quando está implícita no contexto.

eg **Métrica discreta.** Seja X um conjunto não vazio. A *métrica discreta,* ou *métrica zero-um*, em X é a métrica definida por $d(x, x') = 1$ se $x \neq x'$. Em particular, todo conjunto não vazio admite uma métrica.

eg **Recta real e recta complexa.** A função $(x, x') \mapsto |x - x'|$ define uma métrica na recta real $\mathbb{R}$. A função $(z, z') \mapsto |z - z'|$ define uma métrica em $\mathbb{C}$.

eg **Espaços normados.** Se V é um espaço vectorial real ou complexo, e $|\cdot|$ é uma norma em V, então d, definida por $d(x, x') := |x - x'|$, é uma métrica em V.

eg **Espaços euclidianos.** Se V é um espaço vectorial sobre os reais, e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em V, então $|\cdot|$, definida por $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, é uma norma em V (a desigualdade do triângulo sendo uma consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz $|\langle x, x' \rangle| \leqslant |x|\,|x'|$), e portanto d, definida por

$$d(x, x') := \sqrt{|x - x'|^2}$$

é uma métrica em V. Espaços euclidianos e espaços normados são exemplos de espaços métricos.

eg **Métrica euclidana em $\mathbb{R}^n$.** Um caso particular da construção acima é a *métrica euclidiana* em $\mathbb{R}^n$, definida por

$$d_2(x, x') := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i')^2}$$

que é a métrica induzida pelo produto interno euclidiano $\langle x, x' \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot x_i'$. A seguir, a menos de indicação contrária, o espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ será implicitamente considerado munido da métrica euclidiana.

eg **Espaço de Hilbert.** O *espaço de Hilbert* estandard $\ell^2(\mathbb{C})$, o espaço das sucessões (palavras infinitas) $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tais que

$$\|x\|_2 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

munido do produto interno

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \, \overline{y_n}$$

eg **Métrica do máximo e métrica da soma.** Outras normas em $\mathbb{R}^n$ são a *norma do máximo*, definida por

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

e a *norma da soma*, definida por

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

As métricas induzidas, d_∞ e d_1 respectivamente, são ditas *métrica do máximo* e *métrica da soma*.

eg **Norma e métrica do sup.** Sejam X um conjunto não vazio, e $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ o espaço das funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$ (uma função f é limitada se existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in X$). $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ é um espaço linear sobre os reais, se $f+g$ é definido por $x \mapsto f(x)+g(x)$ e λf, com $\lambda \in \mathbb{R}$, é definido por $x \mapsto \lambda \cdot f(x)$. A *norma do sup*, ou *norma da convergência uniforme*, em $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ é definida por

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

A métrica induzida, $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$, é dita *métrica do sup*.

ex Prove que d_2, d_1 e d_∞ são métricas em $\mathbb{R}^n$.

ex Sejam d e d' duas métricas definidas em X. Mostre que $\max\{d,d'\}$ e $d+d'$ são métricas, e que $\min\{d,d'\}$ pode não ser uma métrica.

ex Seja $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ o espaço das funções $x : \mathbb{N} \to \{0,1\}$. Então

$$d(x,x') = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - x'_i|}{2^i}$$

é uma métrica em X.

Métricas produto. Sejam (X,d_X) e (Y,d_Y) dois espaços métricos. Então $\max\{d_X,d_Y\}$ e d_X+d_Y, definidas por

$$\max\{d_X,d_Y\}((x,y),(x',y')) := \max\left\{d_X(x,x'),d_Y(y,y')\right\}$$

e

$$(d_X+d_Y)((x,y),(x',y')) := d_X(x,x') + d_Y(y,y')$$

são métricas no produto $X \times Y$. Enuncie e prove um resultado análogo para productos finitos de espaços métricos.

Pseudométricas. Uma *pseudométrica* no conjunto X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que

i) $d(x,x') \geqslant 0$, e $d(x,x') = 0$ se $x = x'$
ii) $d(x,x') = d(x',x)$
iii) $d(x,x') \leqslant d(x,x'') + d(x'',x')$

para todos $x,x',x'' \in X$. Seja $\sim$ a relação de equivalência definida por: $x \sim x'$ sse $d(x,x') = 0$. O espaço quociênte $X/\sim$ é de forma natural um espaço métrico, se a distância entre duas classes está definida como a distância entre dois representantes em X.

Subespaços, imersões isométricas e isometrias. Sejam (X, d) um espaço métrico e S um subconjunto não vazio de X. A restrição da função d a $S \times S$ define uma métrica d_S em S, dita *métrica induzida*. O conjunto S, munido da métrica induzida, é dito *subespaço (métrico)* do espaço métrico X. Portanto, subconjuntos de espaços métricos são de maneira natural espaços métricos.

Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) dois espaços métricos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é uma *imersão isométrica* se preserva as distâncias, i.e. se

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$$

para todos $x, x' \in X$. Toda imersão isométrica é injetiva.

Uma imersão isométrica bijetiva $f : X \to Y$ é dita *isometria*, e neste caso os espaços X e Y são ditos *isométricos*. É imediato ver que:

a identidade $\mathrm{id} : X \to X$ é um isometria,
se $f : X \to Y$ é uma isometria então $f^{-1} : Y \to X$ também é uma isometria,
se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são isometrias, então $g \circ f : X \to Z$ é uma isometria.

Portanto, a existência de uma isometria entre dois espaços métricos é uma relação de equivalência. As propriedades comuns às classes de espaços isométricos são ditas *propriedades métricas*.

eg **Métrica induzida por uma injeção.** Sejam (Y, d_Y) um espaço métrico e X um conjunto não vazio. Uma aplicação injetiva $f : X \to Y$ induz uma métrica d_X em X, definida por $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$, que torna f uma imersão isométrica.

Grupos de isometrias. Seja X um espaço métrico. O conjunto $\mathrm{Isom}(X)$ das isometrias $g : X \to X$ é um grupo, dito grupo das isometrias de X, com respeito à lei de composição.

eg **Isometrias de $\mathbb{R}^n$.** As translações $x \mapsto x + a$, com $a \in \mathbb{R}^n$, são isometrias do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Em particular, $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico homogéneo: dados $x, x' \in \mathbb{R}^n$ existe uma isometria $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ tal que $g(x) = x'$. As isometrias de $\mathbb{R}^n$ que fixam a origem $0 \in \mathbb{R}^n$ são as transformações lineares $x \mapsto T(x)$ com $T \in O(n)$. O grupo das isometrias do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é, portanto,

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = \{x \mapsto T(x) + a \text{ com } T \in O(n) \text{ e } a \in \mathbb{R}^n\}$$

ex Sejam $a, b \in \mathbb{R}^n$ com $|b| = 1$. A aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, definida por $t \mapsto a + tb$, é uma imersão isométrica.

Diâmetro e distância entre conjuntos. Um subconjunto não vazio S do espaço métrico X é *limitado* se existe $M > 0$ tal que $d(x, x') < M$ para todos $x, x' \in S$. O diâmetro do subconjunto não vazio S é

$$\mathrm{diam}(S) := \sup_{x, x' \in S} d(x, x')$$

Ou seja, um subconjunto de um espaço métrico é limitado sse tem diâmetro finito.

A distância entre dois subconjuntos não vazios S e T de X é definida por

$$d(S, T) := \inf_{x \in S, x' \in T} d(x, x')$$

A distância de um ponto $x \in X$ a um subconjunto não vazio S de X é definida por

$$d(x, S) := \inf_{x' \in S} d(x, x')$$

ex Um subconjunto S de um espaço métrico X é limitado sse está contido numa bola, i.e. se existem $x \in X$ e $R > 0$ tais que $S \subset \{x' \in X \text{ t.q. } d(x, x') < R\}$.

ex A reunião de uma família finita de subconjuntos limitados de um espaço métrico é um conjunto limitado.

ex Sejam X um espaço métrico, $x, x' \in X$ e $S \subset X$ um subconjunto não vazio. Então

$$\left| d(x,S) - d(x',S) \right| \leqslant d(x,x')$$

Bolas e conjuntos abertos. Seja (X,d) um espaço métrico. A *bola aberta* de centro x e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos de X a distância menor que r de x, i.e.

$$B_r(x) = \left\{ x' \in X \text{ t.q. } d(x,x') < r \right\}$$

Um subconjunto A do espaço métrico X é *aberto* em X se para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$, i.e. se (é vazio ou se) todo ponto de A é centro de uma bola aberta contida em A.

"Ser aberto" é uma propriedade relativa. Pode acontecer que um subconjunto $A \subset X$ não seja aberto no espaço métrico (X,d), mas seja aberto no espaço métrico (Y,d_Y), onde Y é um subconjunto de X munido da métrica induzida d_Y. Por razões de economia, é costume dizer que um subconjunto A de X "é aberto" em vez de "é aberto em X", desde que seja claro o espaço ambiente (X,d).

O conjunto vazio $\emptyset$ e o espaço todo X são abertos em X. Uma observação trivial mas crucial é que as bolas abertas de um espaço métrico são subconjuntos abertos, pois, se $x' \in B_r(x)$ e $s = d(x,x') < r$, então a desigualdade do triângulo implica que $B_{r-s}(x') \subset B_r(x)$.

Teorema 1.1 (um aberto é uma reunião de bolas abertas)**.** *Um subconjunto de um espaço métrico é aberto sse é uma reunião de bolas abertas.*

Demonstração. $\Rightarrow$ Seja A um aberto do espaço métrico X. Para todo $x \in A$ existe $\varepsilon(x) > 0$ tal que $B_{\varepsilon(x)}(x) \subset A$. Portanto $A = \bigcup_{x\in A} B_{\varepsilon(x)}(x)$.

$\Leftarrow$ Seja $A = \cup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha$ uma reunião de bolas abertas B_α do espaço métrico X. Se $x \in A$ existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $x \in B_\alpha$. Sendo B_α aberta, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset B_\alpha \subset A$. $\square$

Teorema 1.2 (propriedades dos abertos)**.** *Toda reunião de subconjuntos abertos é aberta. A interseção de dois (e portanto toda interseção finita de) subconjuntos abertos é aberta.*

Demonstração. Seja $A = \cup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$, onde os A_α são abertos no espaço métrico X e $\mathcal{A}$ é um conjunto arbitrário. Se $x \in A$ então existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A_\alpha$. Sendo A_α aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A_\alpha \subset A$.

Sejam A e A' dois abertos no espaço métrico X, e $x \in A \cap A'$. Então existem $\varepsilon > 0$ e $\varepsilon' > 0$ tais que $B_\varepsilon(x) \subset A$ e $B_{\varepsilon'}(x) \subset A'$. Portanto, a bola aberta $B_{\min\{\varepsilon,\varepsilon'\}}(x)$ está contida em $A \cap A'$. $\square$

ex Sejam x e x' dois pontos distintos do espaço métrico X. Então existem duas bolas abertas disjuntas B e B' que contêm respectivamente x e x'.

ex O intervalo $[0,1[$ é aberto em $[0,2]$, mas não é aberto na recta $\mathbb{R}$.

ex Diga se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ euclidiano são abertos em $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$,	$\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$,	$\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$
$\{(x_1,x_2) \text{ t.q. } x_1 = x_2\}$ em $\mathbb{R}^2$,	$\{(x_1,x_2) \text{ t.q. } x_1 \cdot x_2 \neq 0\}$ em $\mathbb{R}^2$,	$\{(x_1,x_2) \text{ t.q. } x_1 > 0\}$ em $\mathbb{R}^2$
$\{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \lvert x\rvert \leqslant 1\}$ em $\mathbb{R}^n$,	$\{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \lvert x\rvert = 1\}$ em $\mathbb{R}^n$,	$\{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \lvert x\rvert \neq 0\}$ em $\mathbb{R}^n$

ex Uma interseção de subconjuntos abertos de um espaço métrico pode não ser aberta.

eg **Bolas em espaços ultramétricos.** Uma métrica d definida no conjunto X é dita ultramétrica se

$$d(x,x') \leqslant \max\left\{ d(x,x''), d(x'',x') \right\}$$

para todos $x, x', x'' \in X$. Mostre que se $x' \in B_r(x)$ então $B_r(x') = B_r(x)$, i.e. todo ponto de uma bola aberta é um seu centro.

Abertos e continuidade. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) dois espaços métricos. A aplicação $f : X \to Y$ é *contínua no ponto* $x \in X$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ se $d(x, x') < \delta$. Isto quer dizer que para toda bola aberta $B_\varepsilon(f(x)) \subset Y$ centrada em $f(x)$ existe uma bola aberta $B_\delta(x) \subset X$ centrada em x tal que

$$f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$$

A aplicação $f : X \to Y$ é *contínua* se é contínua em todos os pontos de X. A relação entre continuidade e abertos é contida na seguinte observação.

Teorema 1.3 (f contínua $\Leftrightarrow f^{-1}(\text{aberto}) = \text{aberto}$)**.** *Uma aplicação $f : X \to Y$ entre os espaços métricos X e Y é contínua sse a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de todo aberto A de Y é aberta em X.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sejam f contínua, A um subconjunto aberto e não vazio de Y, e $x \in f^{-1}(A)$. Como A é aberto e $f(x) \in A$, existe uma bola aberta $B_\varepsilon(f(x))$ contida em A. Pela continuidade de f em x, existe uma bola aberta $B_\delta(x)$ tal que $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Portanto, a bola aberta $B_\delta(x)$ está contida em $f^{-1}(A)$. Isto prova que $f^{-1}(A)$ é aberto em X.

($\Leftarrow$) Seja $x \in X$. A bola $B_\varepsilon(f(x))$ é aberta em Y, portanto a sua imagem inversa $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ é aberta em X. Como $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$, existe uma bola aberta $B_\delta(x)$ contida em $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$, logo $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Isto prova que f é contínua em x. □

Este teorema mostra que a única estrutura de um espaço métrico que joga um papel na definição de continuidade é a família dos conjuntos abertos, dita topologia. Portanto, espaços métricos que têm os mesmos abertos são domínios ou contradomínios das mesmas funções contínuas.

eg **Aplicações lipschitzianas.** Uma aplicação $f : X \to Y$ entre os espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) é *lipschitziana* se existe $\lambda > 0$ (dita constante de Lipschitz de f) tal que

$$d_Y(f(x), f(x')) \leqslant \lambda \cdot d_X(x, x')$$

para todos $x, x' \in X$. Uma aplicação lipshitziana é contínua (basta pôr $\delta = \varepsilon/\lambda$ na definição com ε e δ).

eg **Imersão de Kuratowski.** Sejam (X, d) um espaço métrico, $x \in X$, e $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ o espaço das funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$ munido da métrica do sup. A aplicação $f_x : X \to \mathbb{R}$ definida por $f_x(x') = d(x, x')$ é contínua. A aplicação $\varphi : X \to \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ definida por $x' \mapsto f_{x'} - f_x$ é uma imersão isométrica. Portanto, todo espaço métrico é de maneira natural um subespaço de um espaço normado.

Homeomorfismos. Uma aplicação $f : X \to Y$ entre os espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) é um *homeomorfismo* se é bijectiva, contínua e tem inversa contínua. Dois espaços métricos são *homeomorfos* se existe um homeomorfismo entre eles.

Toda isometria é um homeomorfismo, mas um homeomorfismo pode não ser uma isometria.

eg Por exemplo, $x \mapsto \exp(x)$ é un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}_+$, mas não é uma isometria (para as métricas euclidianas de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+$).

ex Sejam X um espaço métrico, $x' \in X$ e S um subconjunto não vazio de X. A aplicação $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto d(x, x')$ é contínua. A aplicação $\phi : X \to \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto d(x, S)$ é contínua. A aplicação $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por $(x, x') \mapsto d(x, x')$ é contínua, se $X \times X$ é munido da métrica produto.

ex Seja X um espaço métrico discreto e Y é um espaço métrico arbitrário. Toda função $f : X \to Y$ é contínua.

ex Uma aplicação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é contínua.

ex Uma função constante $f : X \to Y$ (i.e. tal que $f(x) = y$ para todo $x \in X$) entre dois espaços métricos é contínua.

ex Se Y é um subconjunto do espaço métrico X, munido da métrica induzida, então a inclusão $i : Y \to X$, definida por $i(y) = y$, é contínua.

ex Imersões isométricas e isometrias são aplicações contínuas.

ex Uma aplicação $f : X \to Y$ entre os espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) é hölderiana se existem $\alpha > 0$ e $\mu > 0$ tais que

$$d_Y(f(x), f(x')) \leqslant \mu \cdot d_X(x, x')^\alpha$$

para todos $x, x' \in X$. Uma aplicação hölderiana é contínua.

ex Existe um homeomorfismo entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$?

Métricas equivalentes. É possível que métricas distintas no espaço X definam os mesmos subconjuntos abertos, neste caso as métricas são ditas *topologicamente equivalentes*. As métricas d e d' em X são equivalentes sse, para todo $x \in X$, toda bola aberta $B_\varepsilon(x)$ para a métrica d contém uma bola aberta $B'_{\varepsilon'}(x)$ para a métrica d' e vice-versa.

eg **Normas equivalentes num espaço vetorial de dimensão finita.** No espaço vectorial $\mathbb{R}^n$, as métricas euclidiana, do máximo e da soma são topologicamente equivalentes. Isto vem das desigualdades

$$d_\infty(x, x') \leqslant d_2(x, x') \leqslant d_1(x, x') \leqslant n \cdot d_\infty(x, x')$$

que implicam

$$B^\infty_{\varepsilon/n}(x) \subset B^1_\varepsilon(x) \subset B^2_\varepsilon(x) \subset B^\infty_\varepsilon(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $\varepsilon > 0$.

De facto, todas as normas num espaço vetorial de dimensão finita são equivalentes!

ex A métrica discreta e a métrica euclidiana em $\mathbb{R}$ não são equivalentes.

ex Se d é uma métrica em X e $\lambda > 0$, a métrica d_λ definida por $d_\lambda(x, x') = \lambda \cdot d(x, x')$ é equivalente a d (observe que as bolas de (X, d) são também bolas de (X, d_λ) e vice-versa).

ex Seja (X, d) um espaço métrico. Então d', definida por

$$d'(x, x') := \frac{d(x, x')}{1 + d(x, x')}$$

é uma métrica em X, equivalente a d. Observe que o espaço métrico (X, d') é limitado, i.e. tem diâmetro finito, independentemente de X ser limitado ou não.

ex Sejam d e d' duas métricas equivalentes em X. A aplicação identidade $\mathrm{id} : X \to X$ é um homeomorfismo entre (X, d) e (X, d').

2 Espaços topológicos

Espaços topológicos. Seja X um conjunto não vazio. Uma *topologia* em X é uma família não vazia τ de subconjuntos de X, ditos *abertos* (da topologia), tal que

i) $\varnothing$ e X são abertos,
ii) toda reunião de abertos é um aberto,
iii) a interseção de dois abertos é um aberto.

A última propriedade é equivalente a "toda interseção finita de abertos é um aberto".

Um *espaço topológico* é um par (X, τ), um conjunto não vazio X munido de uma topologia τ. Os elementos de X são ditos pontos do espaço topológico, os elementos de τ são ditos abertos do espaço topológico.

Topologias distintas em X definem espaços topológicos distintos. Por razões de economia é usual escrever "o espaço topológico X" em vez de "o espaço topológico (X, τ)", quando a topologia particular não é importante, ou quando está implicita no contexto. É também usual dizer que um subconjunto A de X "é aberto" em vez de utilizar a expressão correcta "é um aberto do espaço topológico (X, τ)", desde que seja claro qual é o espaço ambiente X e qual é a topologia τ.

eg **Topologia trivial.** A família $\{\varnothing, X\}$ é uma topologia no conjunto X, dita *topologia trivial*. Um conjunto X munido da topologia trivial é dito *espaço (topológico) trivial*.

Espaços topológicos metrizáveis. Seja (X, d) um espaço métrico. A família formada pelas reuniões das bolas abertas de X é uma topologia, dita *topologia induzida* da métrica d. Portanto, todo espaço métrico é de maneira natural um espaço topológico. Métricas equivalentes induzem a mesma topologia.

Um espaço topológico (X, τ) é dito metrizável se o conjunto X admite uma métrica d que induz a topologia τ. A seguir, portanto, as expressões "seja (X, τ) um espaço topológico metrizável" ou simplesmente "seja X um espaço metrizável" serão sinónimos de "seja (X, τ) um espaço topológico tal que a topologia τ é induzida por uma métrica d definida em X". A razão desta definição está no facto da métrica particular d, que evidentemente não é única, não jogar nenhum papel nas propriedades de X em quanto espaço topológico.

eg **Topologia euclidiana.** A *topologia euclidiana* em $\mathbb{R}^n$ é a topologia induzida pela métrica euclidiana d_2, ou pelas métricas equivalentes d_1 e d_∞. A seguir, a menos de indicação contrária, o espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ será implicitamente considerado munido da topologia euclidiana.

eg **Topologia discreta.** A família $\mathcal{P}(X)$, as partes de X, é uma topologia em X, dita *topologia discreta*. É a topolgia induzida pela métrica discreta em X. Um conjunto X munido da topologia discreta é dito *espaço (topológico) discreto*.

eg **Topologia cofinita.** A *topologia cofinita* em X é a família $\mathcal{K}$ formada pelo conjunto vazio e pelos conjuntos cujos complementares têm cardinalidade finita, i.e.

$$\mathcal{K} = \{\varnothing\} \cup \{A \subset X \text{ t.q. } X \backslash A \text{ é finito}\}$$

eg **Topologia de Sierpinsky.** Se X é um conjunto finito, toda métrica em X induz a topologia discreta. Portanto, uma topologia diferente da topologia discreta em um conjunto finito não é metrizável. Um exemplo é a *topologia de Sierpinsky* em $X = \{a, b\}$, definida por $\tau = \{\varnothing, \{a\}, X\}$.

Topologia relativa. Sejam (X, τ) um espaço topológico e Y um subconjunto não vazio de X. A família

$$\tau_Y = \{A \cap Y \text{ com } A \in \tau\}$$

é uma topolgia em Y, dita *topologia relativa*. O conjunto Y, munido da topologia relativa, é dito *subespaço (topológico)* do espaço topológico X. Portanto, os aberto de Y são os subconjuntos $B \subset Y$ tais que existe um aberto A de X tal que $B = A \cap Y$.

Se d é uma métrica em X e $Y \subset X$ é munido da métrica induzida d_Y, então as bolas abertas de (Y, d_Y) são da forma $B_r(x) \cap Y$ onde $B_r(x)$ é uma bola aberta de (X, d) e $x \in Y$. Portanto, se τ é a topologia induzida pela métrica d, a topologia relativa τ_Y coincide com a topologia induzida pela métrica d_Y em Y.

ex Determine todas as possíveis topologias de $X = \{a, b, c\}$.

ex (metrizável e finito $\Rightarrow$ discreto) A topologia de um espaço metrizável finito é a topologia discreta.

ex (metrizável $\Rightarrow$ Hausdorff) Seja X um espaço topológico metrizável. Prove que, dados dois pontos distintos x e x' de X, existem dois abertos disjuntos A e B de X tais que $x \in A$ e $x' \in B$.

ex Seja X um conjunto não vazio, e $x \in X$. Prove que $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X \text{ t.q. } x \in A\}$ é uma topologia em X. Prove que, se $X \neq \{x\}$, a topologia τ não é metrizável.

Comparação entre topologias. Sejam τ e τ' duas topologias no conjunto X. A topologia τ' é *mais fina* do que a topologia τ (ou, a topologia τ é menos fina do que a topologia τ') se $\tau \subset \tau'$, i.e. se todo aberto de (X, τ) é também um aberto de (X, τ'). Observe que esta é apenas uma ordem parcial no espaço das topologias definidas num conjunto fixado X, e que duas topologias distintas podem não ser comparáveis.

ex A topologia discreta em X é mais fina do que toda topologia em X.

ex Toda topologia em X é mais fina do que a topologia trivial em X.

Bases. Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma *base* da topologia τ é uma família $\mathcal{B}$ de abertos tal que todo aberto de X é uma reunião de elementos de $\mathcal{B}$. Isto é equivalente a dizer que para todo $A \in \tau$ e todo $x \in A$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$.

Evidentemente, τ é uma base da topologia τ. A importância desta definição consiste na possibilidade de definir uma topologia à custa de uma família particular de abertos.

eg **Base de uma topologia metrizável.** As bolas abertas de um espaço métrico são uma base da topologia induzida pela métrica, porque todo aberto é uma reunião de bolas abertas. .

eg **Base da topologia discreta.** A família $\{\{x\}$ com $x \in X\}$ é uma base da topologia discreta em X.

Teorema 2.1 (caracterização das bases). *Seja Xum conjunto não vazio, e $\mathcal{B}$ uma família de subconjuntos de X tal que*

i) $\mathcal{B}$ é uma cobertura de X, i.e. $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$
ii) se $B, C \in \mathcal{B}$ então $B \cap C$ é uma reunião de elementos de $\mathcal{B}$

Então existe uma (única) topolgia $\tau_{\mathcal{B}}$ em X tal que $\mathcal{B}$ é uma sua base.

Demonstração. A unicidade é evidente, uma vez provada a existência. Pois, $\tau_{\mathcal{B}}$ tem que conter todas as reuniões de elementos de $\mathcal{B}$, e, vice-versa, todo elemento de $\tau_{\mathcal{B}}$ tem que ser uma reunião de elementos de $\mathcal{B}$.

Seja $\tau_{\mathcal{B}}$ a família formada pelas reuniões de elementos de $\mathcal{B}$. Os subconjuntos $\emptyset$ e X pertencem a $\tau_{\mathcal{B}}$, o conjunto vazio porque é a reunião da família vazia de elementos de $\mathcal{B}$, e X porque $\mathcal{B}$ é uma cobertura de X, a condição i).

Sejam $V_\alpha = \bigcup_{\beta\in I_\alpha} B_\beta$, com $B_\beta \in \mathcal{B}$ e $\alpha \in J$, uns elementos arbitrários de $\tau_{\mathcal{B}}$. Então a reunião

$$\bigcup_{\alpha\in J} V_\alpha = \bigcup_{\alpha\in J}\left(\bigcup_{\beta\in I_\alpha} B_\beta\right) = \bigcup_{\alpha\in J}\bigcup_{\beta\in I_\alpha} B_\beta$$

também pertence a $\tau_{\mathcal{B}}$, porque é reunião de elementos de $\mathcal{B}$. Por outro lado, uma interseção de dois elementos

$$V_\alpha \bigcap V_{\alpha'} = \left(\bigcup_{\beta\in I_\alpha} B_\beta\right)\bigcap\left(\bigcup_{\beta'\in I_{\alpha'}} B_{\beta'}\right) = \bigcup_{\beta\in I_\alpha,\beta\in I_{\alpha'}} \left(B_\beta \bigcap B_{\beta'}\right)$$

também pertence a $\tau_{\mathcal{B}}$ pela condição ii). □

eg A família $\{B_r(x) =]x-r, x+r[\text{ com } x \in \mathbb{Q} \text{ e } r \in \mathbb{Q}_+\}$ das bolas abertas de centro e raio racionais é uma base, enumerável, da topologia euclidiana de $\mathbb{R}$.

eg $\{[a,b] \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b\}$ não é base de nenhuma topologia na recta real.

eg Base enumerável da topologia euclidiana. A família $\mathcal{B} = \{B_r(x) \text{ com } x \in \mathbb{Q}^n \text{ e } r \in \mathbb{Q}_+\}$ é uma base, enumerável, da topologia euclidiana de $\mathbb{R}^n$. Portanto, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ admite uma base enumerável (satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade).

ex Um espaço topológico discreto não enumerável não admite uma base enumerável.

ex A família $\tau_e = \{]-\infty, x[\text{ com } x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ é uma topologia em $\mathbb{R}$, menos fina do que a topologia euclidiana. A subfamília $\mathcal{B} = \{]-\infty, r[\text{ com } r \in \mathbb{Q}\}$ é uma base desta topologia.

Produtos finitos de espaços topológicos. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dois espaços topológicos. A família

$$\mathcal{B} = \{A \times B \text{ com } A \in \tau_X \text{ e } B \in \tau_Y\}$$

é uma base de uma topologia no produto cartesiano $X \times Y$ (porque é uma cobertura, e a interseção de dois elementos de $\mathcal{B}$ é ainda um elemento de $\mathcal{B}$), dita *topologia produto*. O espaço $X \times Y$, munido desta topologia, é dito *produto topológico* dos espaços X e Y.

Se (X, d_X) e (Y, d_Y) são espaços métricos munidos da topologia induzida, então a topologia producto em $X \times Y$ é a topologia induzida pela métrica produto, por exemplo $\max\{d_X, d_Y\}$, em $X \times Y$.

De maneira análoga é possivel definir produtos topológicos de uma família finita de espaços topológicos.

Topologia produto. Sejam (X_α, τ_α) espaços topológicos, com $\alpha \in \mathcal{A}$ (um conjunto não necessariamente finito nem enumerável), e

$$X = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha := \left\{x : \mathcal{A} \to \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha \text{ t.q. } x_\alpha \in X_\alpha \text{ para todos } \alpha \in \mathcal{A}\right\}$$

o produto cartesiano dos X_α (onde utilizamos a notação $x(\alpha) = x_\alpha$ para a "coordenada" α-ésima do ponto x). Um *cilindro aberto* de X é um conjunto C formado da seguinte maneira: existem um conjunto finito de índices $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathcal{A}$ e uns abertos $C_{\alpha_i} \subset X_{\alpha_i}$ para $i = 1, 2, ..., n$ tais que

$$C = \{x = (x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in X \text{ tais que } x_{\alpha_i} \in C_{\alpha_i} \text{ para todo } i = 1, 2, ..., n\}$$

A família $\mathcal{C}$ formada pelos cilindros abertos de X satisfaz as condições do teorema 2.1, portanto é base de uma topologia em X, dita *topologia produto*.

ex A topologia produto em $\mathbb{R}^n$, onde cada cópia de $\mathbb{R}$ é munida da topologia euclidiana, é a topologia euclidiana (observe que, tratando-se de um produto finito, e sendo os cilindros abertos produtos de abertos dos factores, a família dos cilindros abertos contém as bolas abertas do espaço $\mathbb{R}^n$ munido da métrica d_∞).

Vizinhanças. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $x \in X$. Uma *vizinhança* de x é um subconjunto $N \subset X$ tal que existe um aberto A que contém o ponto x e que está contido em N, i.e. $x \in A \subset N$.

Evidentemente, todo aberto que contém x é uma vizinhança de x.

ex Seja x um ponto de um espaço topológico X. Se A e B são vizinhanças de x, então $A \cap B$ é uma vizinhança de x. Se A é uma vizinhança de x e $A \subset B$, então B é uma vizinhança de x.

Teorema 2.2 (abertos e vizinhanças)**.** *Um subconjunto A de um espaço topológico é aberto sse é uma vizinhança de todos os seus pontos.*

Demonstração. $\Rightarrow$ Trivial.

$\Leftarrow$ Para todo $x \in A$, sendo A uma vizinhança de x, existe um aberto A_x tal que $x \in A_x \subset A$. Isto implica que $A = \cup_{x \in A} A_x$, e portanto é aberto. □

Base local. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $x \in X$. Uma *base local*, ou *sistema fundamental de vizinhanças*, em x é uma família $\mathcal{B}_x$ de vizinhanças de x tal que todo aberto A que contém x também contém um elemento de $\mathcal{B}_x$.

eg **Espaços metrizáveis admitem bases locais enumeráveis.** Sejam X um espaço métrico e $x \in X$. A família $\{B_r(x) \text{ com } r > 0\}$ é uma base local em x do espaço métrico X. As famílias $\{B_r(x) \text{ com } r \in \mathbb{Q}_+\}$ e $\left\{B_{1/n}(x) \text{ com } n \in \mathbb{N}\right\}$ são bases locais, enumeráveis, em x do espaço métrico X. Portanto, todo espaço metrizável admite uma base local enumerável em todos os seus pontos (satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade).

Sucessões. Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma *sucessão* em X é uma aplicação $f : \mathbb{N} \to X$. É costume designar por x_n o valor da sucessão no ponto $n \in \mathbb{N}$, e por (x_n) a sucessão. O conjunto $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ é a imagem da sucessão.

A sucessão (x_n) é *convergente* para o ponto $x \in X$ se para toda vizinhança V de x existe um natural $\overline{n}$ tal que $x_n \in V$ se $n > \overline{n}$. Se isto acontecer, diz-se que x é um limite da sucessão, e escreve-se

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \qquad \text{ou} \qquad x_n \to x$$

Uma *subsucessão* de $f : \mathbb{N} \to X$ é uma aplicação da forma $f \circ k$, onde $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função estritamente crescente. Se (x_n) denota a sucessão f e k_n o valor de k em n, então (x_{k_n}) denota a subsucessão $f \circ k$. Em particular, a imagem $\{x_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ da subsucessão é um subconjunto de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

eg Se X é um espaço topológico trivial (e portanto a única vizinhança de um ponto x é X) então toda sucessão converge para todo ponto x de X. Isto mostra que, num espaço topológico arbitrário, o limite de uma sucessão pode não ser único.

Limites em espaços métricos e metrizáveis. Sejam (X, d) um espaço métrico e (x_n) uma sucessão em X. A sucessão é covergente para $x \in X$ sse para todo $\varepsilon > 0$ existe um natural $\overline{n}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ se $n > \overline{n}$. A sucessão é covergente para $x \in X$ sse para todo $k \in \mathbb{N}$ existe um natural $\overline{n}$ tal que $d(x_n, x) < 1/k$ se $n > \overline{n}$.

Se X é um espaço topológico metrizável e (x_n) é uma sucessão convergente, então o limite é único (porque pontos distintos de um espaço métrico admitem vizinhanças disjuntas).

3 Noções topológicas

Interior, exterior e fronteira. Sejam X um espaço topológico e S um subconjunto de X.

Um ponto $x \in X$ é *interior* a S se existe uma vizinhança N de x tal que $N \subset S$. O *interior* de S é o conjunto rmint(S) dos pontos interiores a S.

Um ponto $x \in X$ é *exterior* a S se existe uma vizinhança N de x tal que $N \subset X \backslash S$, ou seja se é interior ao complementar de S. O *exterior* de S é o conjunto $\text{ext}(S)$ dos pontos exteriores a S.

A *fronteira* de S é o conjuntos $\text{fr}(S)$ (ou ∂S) dos pontos que não são nem interiores nem exteriores a S, ou seja o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que toda vizinhança N de x intersecta quer S quer $X \backslash S$.

Sendo estas três condições mutuamente exclusivas, temos que X é a reunião disjunta

$$X = \text{int}(S) \cup \text{ext}(S) \cup \text{fr}(S)$$

Das definições segue que

$$\text{int}(S) \subset S \qquad \text{ext}(S) = \text{int}(X \backslash S) \qquad \text{ext}(S) \cap S = \varnothing \qquad \text{fr}(S) = \text{fr}(X \backslash S)$$

Teorema 3.1 (o interior de S é o "maior" aberto contido em S)**.** *Seja S um subconjunto do espaço topológico X. Então* $\text{int}(S)$ *é a reunião dos abertos contidos em S.*

Demonstração. Seja A um aberto contido em S. Se $x \in A$ então $x \in \text{int}(S)$, porque A é uma vizinhança de x. Isto prova que todo aberto contido em S está contido em $\text{int}(S)$.

Para todo $x \in \text{int}(S)$ existe uma vizinhança N_x de x tal que $x \in N_x \subset S$, e portanto existe um aberto A_x tal que $x \in A_x \subset S$. Pela observação acima $A_x \subset \text{int}(S)$, e portanto $\text{int}(S) = \bigcup_{x \in \text{int}(S)} A_x$ é um aberto, por ser uma reunião de abertos. □

Teorema 3.2 (caracterização dos abertos)**.** *Seja S um subconjunto do espaço topológico X. As seguintes propriedades são equivalentes:*

a) S é aberto
b) $S = \text{int}(S)$
c) $S \cap \text{fr}(S) = \varnothing$

Demonstração. a⇒b Se A é aberto, contém todos os abertos contidos em A, e portanto $A = \text{int}(S)$.

b⇒c Se $S = \text{int}(S)$ então $S \cap \text{fr}(S) = \varnothing$, porque a fronteira de S é disjunta do interior de S.

c⇒a Se $S \cap \text{fr}(S) = \varnothing$ então todo ponto $x \in S$ tem uma vizinhança N tal que $N \subset S$, e portanto S é aberto. □

Subconjuntos fechados. Um subconjunto S do espaço topológico X é *fechado* se o seu complementar $X \backslash S$ é aberto.

A família dos subconjuntos fechados de um espaço topológico satisfaz propriedades duais aos axiomas de uma topologia, ou seja

i) $\varnothing$ e X são fechados,
ii) toda interseção de fechados é um fechado,
iii) a reunião de dois fechados é um fechado.

Definir uma topologia, ou seja a família dos subconjuntos abertos, em X é equivalente a definir a família dos subconjuntos fechados, i.e. uma família de subconjuntos de X que satisfaz as três propriedades acima.

Teorema 3.3 (caracterização dos fechados)**.** *Seja S um subconjunto do espaço topológico X. As seguintes propriedades são equivalentes:*

a) *S é fechado*

b) $S = \mathrm{int}(S) \cup \mathrm{fr}(S)$

c) $\mathrm{fr}(S) \subset S$.

Demonstração. É a proposição 3.2 para o conjunto $X \backslash S$. □

Aderência. Seja S subconjunto do espaço topológico X . O *fecho* $\overline{S}$, ou *aderência*, de S é a interseção dos subconjuntos fechados de X que contêm S, i.e. o "menor" conjunto fechado que contém S. Em particular, $S \subset \overline{S}$. Sendo $\mathrm{ext}(S)$ a reunião dos abertos contidos em $X \backslash S$, é imediato ver que

$$\overline{S} = X \backslash \mathrm{ext}(S) = \mathrm{int}(S) \cup \mathrm{fr}(S)$$

e portanto S é fechado sse $S = \overline{S}$.

Os pontos de $\overline{S}$ são ditos *pontos de aderência* de S. Do facto de ser $\overline{S} = X \backslash \mathrm{ext}(S)$ segue que $x \in X$ é um ponto de aderência de S sse $N \cap S \neq \varnothing$ para toda vizinhança N de x.

Teorema 3.4 (pontos de aderência em espaços metrizáveis)**.** *Seja S um subconjunto do espaço metrizável X. Então $x \in \overline{S}$ sse existe uma sucessão (x_n) de elementos de S que converge para x.*

Demonstração. $\Leftarrow$ Seja (x_n) uma sucessão de elementos de S que converge para x. Para toda vizinhança N de x existe um elemento x_n da sucessão tal que $x_n \in N$, e portanto $N \cap S \neq \varnothing$ (esta parte da prova não depende do facto de X ser metrizável).

$\Rightarrow$ Sejam d uma métrica que induz a topologia em X, e $x \in \overline{S}$. As bolas abertas centradas em x são vizinhanças de x, portanto para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um ponto $x_n \in S$ tal que $x_n \in B_{1/n}(x)$. Isto implica que a sucessão (x_n) converge para x, porque a família das bolas abertas de centro x e raios $1/n$ com n natural é uma base local da topologia em x. □

ex Sejam S e T subconjuntos do espaço topológico X. Então

$$\mathrm{int}(S) \cap \mathrm{int}(T) = \mathrm{int}(S \cap T) \qquad \mathrm{int}(S) \cup \mathrm{int}(T) \subset \mathrm{int}(S \cup T) \qquad \mathrm{fr}(S \cup T) \subset \mathrm{fr}(S) \cup \mathrm{fr}(T)$$

$$\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T} \qquad \overline{S \cap T} \subset \overline{S} \cap \overline{T}$$

Dê exemplos tais que as inclusões acima são estrictas.

ex Sejam S e T subconjuntos do espaço topológico X tais que $S \subset T$. Então $\overline{S} \subset \overline{T}$. Dê um exemplo tal que $\mathrm{fr}(S)$ não esteja contido em $\mathrm{fr}(T)$.

ex A fronteira de um subconjunto arbitrário de um espaço topológico é um conjunto fechado.

ex A fronteira de um subconjunto aberto ou fechado de um espaço topológico tem interior vazio.

ex Se (X, d) é um espaço métrico e $S \subset X$, então $\overline{S} = \{x \in X \text{ t.q. } d(x, S) = 0\}$.

ex Seja X um espaço topológico discreto. Todo subconjunto $S \subset X$ tem fronteira vazia.

ex Se (X, d) é um espaço métrico, $x \in X$ e $r > 0$, a bola fechada $B_r[x] = \{x' \in X \text{ t.q. } d(x, x') \leqslant r\}$ é um conjunto fechado.

ex Dê um exemplo de um espaço métrico (X, d) tal que o fecho da bola aberta $B_r(x)$ não é a bola fechada $B_r[x] = \{x' \in X \text{ t.q. } d(x, x') \leqslant r\}$.

ex Dê um exemplo de uma família de subconjuntos fechados de um espaço topológico tal que a reunião deles não é um conjunto fechado.

ex Seja $\mathbb{R}$ munido da topologia cofinita. Prove que os subconjuntos fechados são os conjuntos finitos e $\mathbb{R}$. Prove que, se $S =]a, b[$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, então $\mathrm{int}(S) = \emptyset$, $\overline{S} = \mathbb{R}$ e $\mathrm{fr}(S) = \mathbb{R}$.

Pontos limites e pontos isolados. Seja S um subconjunto do espaço topológico X . Um ponto $x \in X$ é *ponto de acumulação*, ou *ponto limite*, de S se toda vizinhança N de x contém pelo menos um ponto de S diferente de x, i.e. se

$$(N \backslash \{x\}) \cap S \neq \emptyset \text{ para toda vizinhança } N \text{ de } x$$

O conjunto *derivado* de S é o conjunto S' dos pontos de acumulação de S. Um conjunto S é dito *perfeito* se $S = S'$, i.e. se todo seu ponto é um ponto de acumulação.

Teorema 3.5. *Seja S um subconjunto do espaço topológico X. Então $\overline{S} = S \cup S'$.*

Demonstração. Da definição conclui-se que $S' \cap \mathrm{ext}(S) = \emptyset$, logo $S \cup S' \subset \overline{S}$. Por outro lado, se $x \in \overline{S}$ e $x \notin S$, então $x \in \mathrm{fr}(S)$, e portanto toda vizinhança N de x tem interseção não vazia com $S \backslash \{x\}$. Logo $\overline{S} \subset S \cup S'$. □

Seja S um subconjunto do espaço topológico X . Um ponto $x \in S$ é dito ponto isolado de S se $x \notin S'$, i.e. se existe uma vizinhança N de x tal que $N \cap S = \{x\}$. O conjunto S é dito discreto se todo seu ponto é um ponto isolado.

Da proposição 3.5 segue que o fecho de um subconjunto S do espaço topológico X é a reunião disjunta do conjunto dos pontos isolados de S e do conjunto dos pontos de acumulação de S.

ex **Discreto em $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ enumerável.** Seja S um subconjuntos discreto do espaço $\mathbb{R}^n$ euclidiano. Então S é enumerável (lembre-se que a topologia euclidiana de $\mathbb{R}^n$ admite uma base enumerável).

ex **Finito em espaço metrizável $\Rightarrow$ discreto.** Um subconjunto finito de um espaço metrizável é discreto.

ex Determine $\mathbb{Q}'$ em $\mathbb{R}$.

Teorema 3.6 (pontos limites em espaços metrizáveis)**.** *Seja S um subconjunto do espaço metrizável X. Então $x \in S'$ sse existe uma sucessão (x_n) de elementos de $S \backslash \{x\}$ que converge para x. Em particular, se $x \in S'$ então toda vizinhança de x contém infinitos pontos de S.*

Demonstração. Seja d uma métrica que induz a topologia em X. Sejam $x \in S'$ e $B_1 = B_1(x)$. Sendo B_1 uma vizinhança de x, existe um ponto $x_1 \in (B_1 \backslash \{x\}) \cap S$. Dados B_n e $x_n \in (B_n \backslash \{x\}) \cap S$, sejam $B_{n+1} = B_{d(x,x_n)/2}(x)$ e x_{n+1} um ponto da interseção $(B_{n+1} \backslash \{x\}) \cap S$. É imediato verificar que os pontos x_n são distintos, a sucessão (x_n) é convergente e $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. □

ex Seja (x_n) uma sucessão de pontos de X, e $S = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a sua imagem. Se $x \in S'$ então (x_n) admite uma subsucessão convergente para x.

eg **Conjunto de Cantor.** Seja $\varphi : \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ a aplicação sobrejetiva definida por

$$(x_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$$

(a representação em base 3 dos reais entre 0 e 1). O *conjunto de Cantor* standard (o "middle-third Cantor set") é

$$K := \varphi\left(\{0,2\}^{\mathbb{N}}\right) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \text{ com } x_n \in \{0,2\} \right\}$$

i.e. o conjuntos dos reais entre 0 e 1 cujas representações em base 3 não contêm a letra "1". É imediato verificar que $\varphi\Big|_{\{0,2\}^{\mathbb{N}}}$ é uma bijecção de $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ sobre K.

Outra definição é $K = [0,1] \backslash \cup_{k=1}^{\infty} I_k$, onde os intervalos abertos I_k são definidos iterativamente da seguinte maneira: I_1 é o terço central $]1/3, 2/3[$ de $[0,1]$, I_2 e I_3 são os terços centrais dos intervalos de $[0,1] \backslash I_1$, a saber $]1/9, 2/9[$ e $]7/9, 8/9[$, ... etc.

Mais uma definição do conjunto de Cantor é $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, onde a família decrescente dos fechados $\dots \subset K_{n+1} \subset K_n \subset \dots$ é definida por

$$K_n = [0,1] \backslash \bigcup_{k=1}^{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}} I_k \,.$$

Os fechados K_n são formados por 2^n intervalos fechados e disjuntos, cada um de diâmetro 3^{-n}. Em particular, o comprimento de K_n é $|K_n| = (2/3)^n$, e converge para zero no limite quando $n \to \infty$. Ou seja, K é um conjunto de medida (de Lebesgue) nula! .

O conjunto de Cantor é fechado em $[0,1]$, sendo uma interseção de conjuntos fechados.

O conjunto de Cantor tem interior vazio, porque nenhum intervalo aberto de diâmetro $\varepsilon > 0$ está contido em K_n se $3^{-n} < \varepsilon$.

O conjunto de Cantor é perfeito. De facto, se $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \in K$, então a sucessão $\left(x_{(k)}\right)$ de pontos de K definida por

$$x_{(k)} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{x_n}{3^n} + \frac{x_k + 2 \pmod 4}{3^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$$

converge para x, sendo $\left|x - x_{(k)}\right| = 2/3^k$.

A aplicação $\psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, definida por

$$(y_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}$$

é sobrejetiva (é a representação binária dos números reais entre 0 e 1). Por outro lado, a aplicação $\phi : \{0,2\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, definida por $(x_n) \mapsto (x_n/2)$, é bijetiva, e portanto $\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1} : K \to [0,1]$ é sobrejetiva. Isto mostra que o conjunto de Cantor tem a cardinalidade da recta real, em particular não é enumerável.

Subconjuntos densos. Seja S um subconjunto do espaço topológico X . O conjunto S é *denso* em X se $\overline{S} = X$.

Teorema 3.7 (caracterização dos subconjuntos densos)**.** *Seja S um subconjunto do espaço topológico X. As seguintes propriedades são equivalentes:*

a) S é denso em X

b) $\mathrm{int}(X \backslash S) = \varnothing$

c) todo aberto não vazio de X tem interseção não vazia com S

d) existe uma base $\mathcal{B}$ da topologia de X tal que todo elemento não vazio de $\mathcal{B}$ tem interseção não vazia com S.

Demonstração. a⇒b Se $X = \overline{S} = \text{int}(S) \cup \text{fr}(S)$ então $\text{int}(X\backslash S) = \text{ext}(S) = \emptyset$.

b⇒c Seja A um aberto não vazio de X tal que $A \cap S \neq \emptyset$. Então $A \subset X\backslash S$, e portanto $\text{int}(X\backslash S)$ não é vazio, porque contém A.

c⇒d A topologia τ é uma base da topologia τ.

d⇒a Seja $x \in X\backslash S$. Para toda vizinhança N de x existe um elemento B da base $\mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset N$. A condição $B \cap S \neq \emptyset$ e o facto de ser $x \in X\backslash S$ implicam que $(N\backslash\{x\}) \cap S \neq \emptyset$, ou seja que $x \in S'$. Isto mostra que $X = S \cup S' = \overline{S}$. □

eg O conjunto $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. O conjunto $\mathbb{Q}^n$ é denso em $\mathbb{R}^n$. Portanto, os espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ admitem subconjuntos densos enumeráveis (são ditos *espaços separáveis*).

ex Seja S um subconjunto denso no espaço topológico X, e A um aberto de X. Então

$$A \subset \overline{S \cap A}$$

ex Caracterização dos abertos da recta real. Todo aberto da recta real é uma reunião enumerável de intervalos abertos.

(Seja A um aberto de $\mathbb{R}$. Para $x \in A$, seja A_x a reunião de todos os intervalos abertos B tais que $x \in B \subset A$. Prove que A_x é um intervalo aberto. Prove que se $x, x' \in A$ então ou $A_x = A_{x'}$ ou $A_x \cap A_{x'} = \emptyset$. Prove que a função $f : \mathbb{Q} \to \{A_x \text{ com } x \in A\}$, definida por $f(r) = A_x$ se $r \in A_x$, é sobrejectiva, e deduza que A é uma reunião enumerável de intervalos abertos).

ex Determine interior, exterior, aderência, fronteira e derivado dos seguintes subconjuntos da recta real:

$$[-1, 0[\cup]0, 1[\qquad [0, 1[\qquad \mathbb{Q} \qquad \mathbb{Z} \qquad \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \qquad \left\{\frac{n}{n+1} \text{ com } n \in \mathbb{N}\right\}$$

ex Dê exemplos, se existirem, de subconjuntos $S \subset \mathbb{R}$ tais que

$\text{fr}(S) = \emptyset$	$\text{int}(S) = \emptyset$	$\overline{\mathbb{R}\backslash S} = \mathbb{R}$	$S' = \emptyset$	S' é aberto
$\overline{S} = \text{fr}(S)$	$S = S'$	$S' \cap S = \emptyset$	$\overline{S} = \text{int}(S)$	$\text{fr}(S) \neq \text{fr}(\text{fr}(S))$

4 Aplicações contínuas

Aplicações contínuas. Sejam X e Y dois espaços topológicos. A aplicação $f : X \to Y$ é *contínua em* $x \in X$ se para toda vizinhança N de $f(x) \in Y$ existe uma vizinhança M de $x \in X$ tal que $f(M) \subset N$.

A aplicação $f : X \to Y$ é *contínua* se é contínua em todos os pontos de X.

ex Seja S um subconjunto do espaço topológico X, e $\mathbf{1}_S : X \to \mathbb{R}$ a função característica de S, definida por $\mathbf{1}_S(x) = 1$ se $x \in S$ e $\mathbf{1}_S(x) = 0$ se $x \notin S$. Prove que $\mathbf{1}_S$ é contínua em $x \in X$ sse $x \notin \text{fr}(S)$.

ex Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua entre os espaços métricos X e Y. Se (x_n) é uma sucessão convergente em X, então $(f(x_n))$ é uma sucessão convergente em Y e

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

Teorema 4.1 (f contínua ⇔ f^{-1}(aberto) = aberto)**.** *Sejam X e Y dois espaços topológicos, e $f : X \to Y$ uma aplicação. As propriedades seguintes são equivalentes:*

a) f é contínua,

b) $f^{-1}(A)$ é aberto em X para todo A aberto em Y,

c) $f^{-1}(F)$ é fechado em X para todo F fechado em Y.

Demonstração. a⇒b Sejam A um subconjunto aberto e não vazio de Y, e $x \in f^{-1}(A)$. Sendo aberto, A é uma vizinhança de $f(x)$. Pela continuidade de f em x, existe uma vizinhança M de x tal que $f(M) \subset A$. Portanto, M está contido em $f^{-1}(A)$. Isto prova que $f^{-1}(A)$ é aberto em X.

b⇒a Sejam $x \in X$ e N uma vizinhança de $f(x)$. N contém um aberto A tal que $x \in A \subset N$. Se a imagem inversa $f^{-1}(A)$ é aberta em X, então $f^{-1}(A)$ é uma vizinhança de x tal que $f\left(f^{-1}(A)\right) \subset A \subset N$. Isto prova que f é contínua em x.

A equivalência entre b) e c) é evidente. □

ex Sejam τ e τ' topologias em X, com $\tau \subset \tau'$. Então a função identidade $\mathrm{id} : X \to X$ é uma aplicação contínua de (X, τ') sobre (X, τ), mas a inversa pode não ser contínua.

Teorema 4.2 (contínua ∘ contínua = contínua)**.** *Sejam X, Y e Z espaços topológicos, $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ duas aplicações. Se f é contínua em $x \in X$ e g é contínua em $f(x) \in Y$, então $g \circ f$ é contínua em $x \in X$. Se f e g são contínuas, então $g \circ f$ é contínua.*

Demonstração. Exercício. □

Topologia induzida por uma aplicação. Sejam (X, τ) um espaço topológico, Y um conjunto não vazio e $f : Y \to X$ uma aplicação. A família

$$f^{-1}(\tau) = \left\{f^{-1}(A) \text{ com } A \in \tau\right\}$$

é uma topologia em Y, dita topologia induzida pela aplicação f. É a menos fina das topologias em X tais que $f : Y \to X$ é contínua.

Topologia quociente. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\sim$ uma relação de equivalência definida em X. Existe uma projeção natural $\pi : X \to \widetilde{X}$ do conjunto X sobre o conjunto das classes de equivalência $\widetilde{X} = X/\sim$, definida por $x \mapsto [x] =$"a classe de x". A família

$$\pi(\tau) = \left\{A \subset \widetilde{X} \text{ tais que } \pi^{-1}(A) \in \tau\right\}$$

é uma topologia em $\widetilde{X}$, dita *topologia quociente*. É a mais fina das topologias em $\widetilde{X}$ tais que a projeção $\pi : X \to \widetilde{X}$ é contínua.

eg **Espaços projetivos reais.** O espaço projetivo real $\mathbb{RP}^n = \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ é o espaço dos subespaços vectoriais de dimensão um (as rectas que passam pela origem) de $\mathbb{R}^{n+1}$. Toda recta de $\mathbb{R}^{n+1}$que passa pela origem intersecta a esfera unitária $S^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ t.q. } |x| = 1\right\}$ em dois pontos antipodais. Portanto, $\mathbb{RP}^n$ é o quociente da esfera S^n pela relação de equivalência $x \sim -x$. A topologia natural no espaço projetivo $\mathbb{RP}^n$ é a topologia quociente, induzida pela projeção $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$, definida por $x \mapsto$"a recta de $\mathbb{R}^{n+1}$ passante por x e 0".

Topologia relativa e continuidade. Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Se $Z \subset X$ é munido da topologia relativa, então a aplicação $f|_Z : Z \to Y$ é uma aplicação contínua. Se $f(X) \subset Y$ é munido da topologia relativa, então a aplicação $\widetilde{f} : X \to f(X)$, definida por $\widetilde{f}(x) = f(x)$, é também uma aplicação contínua.

eg **Projeções em $\mathbb{R}^n$.** As projeções $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definidas por $\pi_i((x_1, x_2, ..., x_n)) = x_i$, são aplicações contínuas, pois são lineares.

Uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua sse as "componentes" $\pi_i \circ f$ são contínuas para todos $i = 1, 2, ..., m$.

ex Prove que a aplicação $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida por $t \mapsto (t^2, t^3)$, é contínua e que a sua imagem $\varphi(\mathbb{R})$ é fechada em $\mathbb{R}^2$.

ex Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas definidas no espaço topológico X. Prove que são contínuas as seguintes funções

$$\begin{array}{l} |f| : X \to \mathbb{R}, \text{ definida por } x \mapsto |f(x)| \\ \lambda f : X \to \mathbb{R}, \text{ definida por } x \mapsto \lambda \cdot f(x) \text{ com } \lambda \in \mathbb{R} \\ f+g : X \to \mathbb{R}, \text{ definida por } x \mapsto f(x)+g(x) \\ fg : X \to \mathbb{R}, \text{ definida por } x \mapsto f(x) \cdot g(x) \\ 1/f : X \backslash f^{-1}\{0\} \to \mathbb{R}, \text{ definida por } x \mapsto 1/f(x) \end{array}$$

ex Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ funções contínuas definidas no espaço topológico X. Prove que são contínuas as seguintes funções

$$\begin{array}{l} |f| : X \to \mathbb{R}, \text{ definida por } x \mapsto |f(x)| \\ \lambda f : X \to \mathbb{R}^n, \text{ definida por } x \mapsto \lambda \cdot f(x) \text{ com } \lambda \in \mathbb{R} \\ f+g : X \to \mathbb{R}^n, \text{ definida por } x \mapsto f(x)+g(x) \end{array}$$

ex Seja $M_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas reais, identificado ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n^2}$ por meio da bijeção

$$M_n(\mathbb{R}) \ni A = (a_{ij}) \mapsto (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, a_{21}, ..., a_{2n}, ..., a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$$

Prove que a aplicação $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definida por $A \mapsto \det(A)$, é contínua. Deduza que o conjunto $GL_n(\mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$ invertíveis é um aberto em $M_n(\mathbb{R})$.

eg **Conjuntos de nível.** Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua e $a \in \mathbb{R}$. Então $\{x \in X \text{ t.q. } f(x) < a\}$ é aberto em X, pois é a imagem inversa do aberto $]a, \infty[$ da recta real, e $\{x \in X \text{ t.q. } f(x) \leqslant a\}$ é fechado em X, pois é a imagem inversa do fechado $[a, \infty[$ da recta real. O conjunto de nível $f^{-1}\{a\} = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) = a\}$ é fechado em X, pois é a imagem inversa do fechado $\{a\}$ da recta real.

Em geral, se $f : X \to Y$ é contínua, e se os pontos de Y são fechados em Y, os conjuntos de nível $f^{-1}\{y\}$ são fechados em X para todo $y \in Y$.

eg **Subespaços afins.** Seja $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma aplicação linear diferente da aplicação nula. Os conjuntos de nível $L^{-1}\{a\}$, com $a \in \mathbb{R}$, são hiperplanos afins de $\mathbb{R}^n$. Dois hiperplanos $L^{-1}\{a\}$ e $L^{-1}\{b\}$ definidos pela mesma aplicação linear são paralelos.

Em geral, se $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear e $a \in \mathbb{R}^m$, o conjunto de nível $L^{-1}\{a\}$ é um subespaço afim se $\mathbb{R}^n$, o conjunto das soluções da equação linear $L(x) = a$. O conjunto de nível $L^{-1}\{0\} = \ker(L)$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$, o conjunto das soluções da equação linear homogénea $L(x) = 0$. Portanto,

$$L^{-1}\{a\} = L^{-1}\{0\} + a = \left\{x + a \text{ com } x \in L^{-1}\{0\}\right\}$$

Os subespaços afins de $\mathbb{R}^n$ são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$.

eg **Gráficos.** Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua entre os espaços métricos X e Y, e seja $X \times Y$ munido da métrica produto $\max\{d_X, d_Y\}$. O gráfico de f, definido por

$$\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y \text{ com } x \in X\}$$

é fechado em $X \times Y$, pois é igual ao conjunto $\varphi^{-1}\{0\}$, onde $\varphi : X \times Y \to \mathbb{R}$ é a função contínua definida por $(x, y) \mapsto d_Y(f(x), y)$.

Aplicações abertas. Sejam X e Y dois espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é dita *aberta* se $f(A)$ é aberto em Y para todo A aberto em X.

As projeções $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são abertas.

A função $x \mapsto x^2$ definida na recta real não é aberta, mesmo sendo contínua, pois $f(\mathbb{R}) = [0, \infty[$.

Aplicações fechadas. Sejam X e Y dois espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é dita *fechada* se $f(F)$ é fechado em Y para todo F fechado em X.

As inclusões $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definidas por $i((x_1, x_2, ..., x_n)) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ..., 0)$ para $n \leqslant m$, são aplicações fechadas.

As projeções $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ não são fechadas, desde que $n > 1$. Por exemplo, o conjunto $G = \mathrm{graph}\,(\arctan x)$, onde $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é fechado em $\mathbb{R}^2$, mas $\pi_2(G) =]-\pi/2, \pi/2[$ não é fechado na recta real.

ex A composição de duas funções abertas é aberta. A composição de duas funções fechadas é fechada.

Continuidade uniforme. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) dois espaços métricos. A aplicação $f : X \to Y$ é *uniformemente contínua* se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ se $d_X(x, x') < \delta$.

Uma aplicação uniformemente contínua é contínua.

ex **Lipschitz $\Rightarrow$ uniformemente contínua.** Uma aplicação lipschitziana é uniformemente contínua.

ex A função $x \mapsto \sqrt{x}$, definida em $\mathbb{R}_+$, é uniformemente contínua mas não é lipschitziana.

ex A função $x \mapsto x^2$ é uniformemente contínua em todos os intervalos limitados $[a, b]$ da recta real, mas não é uniformemente contínua na recta $\mathbb{R}$.

ex A função $x \mapsto 1/x$, definida em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, é contínua mas não é uniformemente contínua.

Homeomorfismos. Sejam X e Y dois espaços topológicos. A aplicação $f : X \to Y$ é um *homeomorfismo*, ou uma *equivalência topológica*, se é contínua, bijetiva, e se a inversa $f^{-1} : Y \to X$ é contínua.

Os espaços topológicos X e Y são ditos homeomorfos, ou *topologicamente equivalentes*, se existe um homeomorfismo $f : X \to Y$. É imediato ver que:

a identidade $\mathrm{id} : X \to X$ é um homeomorfismo,
se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo então $f^{-1} : Y \to X$ também é um homeomorfismo,
se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são homeomorfismos, então $g \circ f : X \to Z$ é um homeomorfismo.

Portanto, a equivalência topológica é uma relação de equivalência entre espaços topológicos. Uma notação para indicar que os espaços X e Y são homeomorfos é $X \approx Y$. As propriedades comuns às classes de espaços homeomorfos são ditas propriedades topológicas.

Por exemplo, ser um espaço discreto, ser um espaço trivial, ter um subconjunto denso enumerável, admitir uma base enumerável, são propriedades topológicas.

eg **Projeções.** Seja $X \times Y$ o produto topológico dos espaços topológicos X e Y. A projeção

$$\pi_X : X \times Y \to X$$

definida por $(x, y) \mapsto x$, é uma aplicação contínua, aberta e sobrejetiva. Em particular, se $y \in Y$, a aplicação

$$\pi_X \big|_{X \times \{y\}} : X \times \{y\} \to X$$

é um homeomorfismo.

eg **Gráficos.** Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua entre os espaços topológicos X e Y. A aplicação $x \mapsto (x, f(x))$ é um homeomorfismo de X sobre $\mathrm{graph}(f)$, cuja inversa é a restrição $\pi_X \big|_{\mathrm{graph}(f)}$ da projeção $\pi_X : X \times Y \to X$. Portanto, o gráfico de uma aplicação contínua é homeomorfo ao domínio.

eg Grupos de homeomorfismos. Seja X um espaço topológico. O conjunto $\mathrm{Hom}(X)$ dos homeomorfismos $g : X \to X$ é um grupo, dito grupo dos homeomorfismos de X, com respeito à lei de composição.

eg Homeomorfismos de $\mathbb{R}^n$. Os grupos $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ são subgrupos de $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$. Em particular, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é um espaço topológico *homogéneo*: dados dois pontos arbitrários x e x' existe um homeomorfísmo $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ tal que $g(x) = x'$.

eg Projeção estereográfica. Sejam $\mathbb{S}^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ t.q. } |x| = 1\right\}$ a esfera unitária de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $p = (0, .., 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ o seu "pólo norte". Dado $x \in \mathbb{S}^n \backslash \{p\}$, a recta que passa por x e p intersecta o hiperplano $\{x_{n+1} = 0\} \approx \mathbb{R}^n$ num único ponto

$$\pi_p(x) := (x + \mathbb{R}(p - x)) \cap \{x_{n+1} = 0\} .$$

A *projeção estereográfica* $\pi_p : \mathbb{S}^n \backslash \{p\} \to \mathbb{R}^n$, definida por $x \mapsto \pi_p(x)$, é um homeomorfismo. Em geral, se $x \in \mathbb{S}^n$, o espaço $\mathbb{S}^n \backslash \{x\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

ex Uma aplicação $f : X \to Y$ contínua e bijetiva é um homeomorfismo sse é aberta ou fechada.

ex Determine um homeomorfismo entre as bolas $B_r(x)$ e $B_{r'}(x')$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ (por exemplo uma transformação afim).

ex Determine um homeomorfismo entre a recta real e o intervalo $]0, 1[$.

ex Prove que a aplicação $x \mapsto x/|x|^2$ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

ex Prove que a aplicação

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1 + |x|^2}}$$

define um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } |x| < 1\}$.

ex Determine uns homeomorfismos entre as "esferas"

$$\mathbb{S}_2^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } |x|_2 = 1\} , \quad \mathbb{S}_1^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } |x|_1 = 1\} \quad \text{e} \quad \mathbb{S}_\infty^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } |x|_\infty = 1\}$$

ex Determine um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ e o cilindro $C = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}$. Deduza que, se x e x' são dois pontos distintos da esfera $\mathbb{S}^2$, então $\mathbb{S}^2 \backslash \{x, x'\}$ é homeomorfo ao cilindro C.

ex Diga se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ são fechados, abertos, e determine as suas fronteiras:

$$\begin{array}{l}
\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } |x|_2 = 1\} \\
\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } |x|_2 < 1\} \\
\mathbb{H}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } x_n > 0\} \\
\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x - y^2 > 0\right\} \\
\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 - y^2 = 1\right\} \\
\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } xy < 0\right\} \\
\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } z - x^2 - y^2 = 0\right\}
\end{array}$$

5 Espaços compactos

Espaços compactos. Sejam X um espaço topológico e S um subconjunto de X. Uma *cobertura aberta* de S é uma família $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de abertos de X tal que $\cup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha \supset S$. Uma subfamília $\{A_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$, com $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, de $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ é dita *subcobertura* se é ainda é uma cobertura de S.

O espaço topológico X é *compacto* se toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura finita, i.e. composta por um número finito de elementos.

Um subconjunto S do espaço topológico X é *compacto* se toda cobertura aberta de S admite uma subcobertura finita, ou seja se, munido da topologia relativa, é um espaço topológico compacto.

ex Um espaço topológico trivial é compacto.

ex Um espaço topológico discreto é compacto sse é finito.

ex A recta real $\mathbb{R}$ não é compacta. Por exemplo, a cobertura aberta $\{]-n, n[\text{ com } n \in \mathbb{N}\}$ não admite subcoberturas finitas.

ex A bola aberta $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ não é compacta. Por exemplo, a cobertura aberta $\{B_{r'}(x) \text{ com } r' < r\}$ não admite subcoberturas finitas.

ex Prove que o subconjunto $S = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ da recta real não é compacto (se $\mathbb{N} \ni n \mapsto r_n \in S$ é uma enumeração dos pontos de S, considere a cobertura aberta $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde $B_n = B_{\varepsilon_n/2}(r_n)$ e os números positivos ε_n satisfazem $\sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n < 1$ ...).

ex Seja X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base da topologia. Prove que X é compacto sse toda cobertura aberta de X composta por elementos da base admite uma subcobertura finita

eg **Teorema de Heine-Borel-Lebesgue.** Um intervalo fechado e limitado $[a, b]$ da recta real é compacto.

De facto, seja $\{A_\alpha\}$ uma cobertura de $[a, b]$ composta por abertos da recta real, e

$$X = \{x \in [a, b] \text{ t.q. } [a, x] \text{ é coberto por um número finito dos } A_\alpha\}$$

Não é difícil ver que: X não é vazio, é um intervalo, é aberto e é fechado em $[a, b]$. Mas o único subconjunto não vazio, aberto e fechado de $[a, b]$ é o próprio intervalo $[a, b]$.

Teorema 5.1 (fechado $\subset$ compacto $\Rightarrow$ compacto)**.** *Um subconjunto fechado de um espaço topológico compacto é compacto.*

Demonstração. Sejam X um espaço topológico compacto e F um subconjunto fechado de X. Seja $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ uma cobertura aberta de F. A família $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \cup \{X\backslash F\}$ é uma cobertura aberta de X, e portanto admite uma subcobertura finita $\{A_{\alpha_i}\}_{i=1,\ldots,n} \cup \{X\backslash F\}$. Então $\{A_{\alpha_i}\}_{i=1,\ldots,n}$ é uma subcobertura finita de F. $\square$

Teorema 5.2 (compacto $\subset$ metrizável $\Rightarrow$ fechado)**.** *Um subconjunto compacto de um espaço metrizável é fechado.*

Demonstração. Sejam (X, d) um espaço métrico, $K \subset X$ um subconjunto compacto e $x' \in X\backslash K$. Para todo $x \in K$ existem abertos disjuntos A_x e B_x tais que $x \in A_x$ e $x' \in B_x$. A família $\{A_x \text{ com } x \in K\}$ é uma cobertura aberta de K, logo admite uma subcobertura finita $\{A_{x_1}, A_{x_2}, \ldots, A_{x_n}\}$. Isto implica que o aberto $B = B_{x_1} \cap B_{x_2} \cap \ldots \cap B_{x_n}$ é uma vizinhança de x' tal que $B \subset X\backslash K$, e portanto $x' \in \text{ext}(K)$. Isto mostra que $X\backslash K$ é aberto. $\square$

eg **Teorema de Heine-Borel-Lebesgue.** Um subconjunto da recta real é compacto sse é fechado e limitado.

De facto, seja $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Então K é fechado, por ser um subconjunto compacto de um espaço métrico. A família $\{]-n, n[\text{ com } n \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura aberta de K, e toda reunião de um número finito dos seus elementos é um conjunto limitado.

Por outro lado, seja $K \subset \mathbb{R}$ fechado e limitado. Então K está contido num intervalo compacto $[-M, M]$, e é fechado em $[-M, M]$. Mas um subconjunto fechado de um compacto é compacto.

ex **. Compacto $\subset$ métrico $\Rightarrow$.fechado e limitado)** Um subconjunto compacto de um espaço métrico é fechado e limitado.

ex **Discreto e fechado $\subset$ compacto $\Rightarrow$ finito.** Um subconjunto discreto e fechado de um espaço compacto é finito.

ex **Compacto $\cup$ compacto $=$ compacto.** A reunião de dois subconjuntos compactos de um espaço topológico é compacta. Dê um exemplo de uma reunião (infinita) de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ que não seja compacta.

ex **$\cap$ compactos $=$ compacto.** Sejam K_α subconjuntos compactos do espaço metrizável X. Prove que $\cap_\alpha K_\alpha$ é compacto.

ex **Conjunto de Cantor.** O conjunto de Cantor $K \subset [0, 1]$ é compacto. Se $k \in K$, o espaço $K \backslash \{k\}$ é compacto?

Teorema 5.3 (f contínua $\Rightarrow$ f(compacto) $=$ compacto)**.** *A imagem de um espaço compacto por uma aplicação contínua é compacta.*

Demonstração. Sejam $f : X \to Y$ uma aplicação contínua e $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ uma cobertura aberta de $f(X) \subset Y$. Então $\left\{f^{-1}(A_\alpha)\right\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ é uma cobertura aberta de X. Se X é compacto, existe uma subcobertura finita $\left\{f^{-1}(A_{\alpha_i})\right\}_{i=1,\dots,n}$ de X. Logo

$$f(X) = f\left(\cup_{i=1}^n f^{-1}(A_{\alpha_i})\right) \subset \cup_{i=1}^n A_{\alpha_i}$$

i.e. $\{A_{\alpha_i}\}_{i=1,\dots,n}$ é uma subcobertura finita de $f(X)$. □

Em particular, "ser compacto" é uma propriedade topológica: se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo e X é compacto então Y é compacto.

eg A esfera $\mathbb{S}^1 = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } |x| = 1\right\}$ é compacta. De facto, é a imagem $\varphi([0, 2\pi])$ do intervalo compacto $[0, 2\pi]$ pela função contínua $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

ex Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua do espaço compacto X no espaço métrico Y. Prove que f é limitada, i.e. $f(X)$ é um subconjunto limitado de Y.

ex **Teorema de Weierstrass.** Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida no espaço compacto X. Então f é limitada e atinge seus valores máximos e mínimos em X.

ex Seja (X, d) um espaço métrico e $K \subset X$ um subconjunto compacto. Mostre que existem $x, x' \in K$ tais que $d(x, x') = \operatorname{diam}(K)$.

ex Sejam (X, d) um espaço métrico, K um subconjunto compacto de X e F um subconjunto fechado de X. Prove que

$$d(K, F) = 0 \text{ sse } K \cap F \neq \varnothing$$

Dê um exemplo de dois subconjuntos fechados e disjuntos F e G de um espaço métrico, tais que $d(F, G) = 0$.

ex . Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua do espaço compacto X no espaço metrizável Y. Prove que f é uma aplicação fechada.

ex Seja $f : X \to Y$ uma aplicação bijectiva e contínua do espaço compacto X no espaço metrizável Y. Prove que f é um homeomorfismo.

ex Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ é dita própria se a imagem inversa $f^{-1}(K)$ de todo compacto $K \subset Y$ é um subconjunto compacto de X. Prove que toda aplicação contínua de um espaço compacto X num espaço metrizável Y é própria.

Propriedade da interseção finita. Uma família de subconjuntos de um conjunto não vazio tem a *propriedade da interseção finita* se toda subfamília finita tem interseção não vazia.

Teorema 5.4. *Um espaço topológico é compacto sse toda família de subconjuntos fechados com a propriedade da interseção finita tem interseção não vazia.*

Demonstração. Uma família de subconjuntos abertos é uma cobertura aberta sse a família dos complementares (que são subconjuntos fechados) tem interseção vazia. □

Teorema 5.5 (compacto × compacto = compacto)**.** *O produto topológico de uma família finita de espaços compactos é compacto.*

Demonstração. (no caso do produto de dois espaços topológicos) Sejam X e Y espaços compactos, e seja $\{A_\alpha \times B_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ uma cobertura aberta de $X \times Y$, onde os A_α são abertos de X e os B_α são abertos de Y. Dado $x \in X$, o espaço $\{x\} \times Y$ é homeomorfo a Y, portanto é compacto. Logo existe um subconjunto finito $\mathcal{A}_x \subset \mathcal{A}$ tal que

$$\{x\} \times Y \subset \cup_{\alpha\in\mathcal{A}_x} A_\alpha \times B_\alpha \qquad \text{e } x \in A_\alpha \text{ se } \alpha \in \mathcal{A}_x$$

Cada aberto $N_x = \cap_{\alpha\in\mathcal{A}_x} A_\alpha$ é uma vizinhança de x, logo $\{N_x \text{ com } x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X. Sendo X compacto, existe um subconjunto finito $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$ tal que $X \subset \cup_{i=1}^n N_{x_i}$. Podemos escolher, para cada $i = 1, 2, ..., n$, um elemento $\alpha_i \in \mathcal{A}_{x_i}$. Então

$$X \times Y \subset \cup_{i=1}^n \cup_{\alpha\in\mathcal{A}_{x_i}} A_{\alpha_i} \times B_\alpha$$

Isto prova que a cobertura aberta $\{A_\alpha \times B_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ admite uma subcobertura finita. □

Teorema 5.6 (Heine-Borel-Lebesgue)**.** *Um subconjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é compacto sse é fechado e limitado.*

Demonstração. $\Rightarrow$ Um subconjunto compacto de um espaço métrico é fechado e limitado.

$\Leftarrow$ Se K é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$, então $K \subset I^n$ onde $I = [-R, R]$ com R suficientemente grande. Pelo teorema anterior I^n é compacto. Se K é fechado em $\mathbb{R}^n$, é também fechado em I^n, e portanto é compacto. □

ex Diga se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ são compactos:

$$S^{n-1} \qquad D^n \qquad \overline{D^n} \qquad \overline{D^n}\backslash\{0\}$$

$$S^{n-1}\backslash\{(1, 0, ..., 0)\} \qquad [0, 1]^n \qquad \mathbb{R}^n\backslash S^{n-1}$$

Compacidade enumerável e sequencial. O espaço topológico X é *enumeravelmente compacto* (ou satisfaz a propriedade de Bolzano-Weierstrass) se todo subconjunto infinito S de X tem um ponto de acumulação em X.

O espaço topológico X é *seqüencialmente compacto* se toda sucessão em X admite uma subsucessão convergente.

ex **Compacto $\Rightarrow$ enumeravelmente compacto.** Um espaço topologico compacto é enumeravelmente compacto.

ex **Seqüencialmente compacto $\Rightarrow$ enumeravelmente compacto.** Um espaço topológico seqüencialmente compacto é enumeravelmente compacto.

Coberturas e número de Lebsegue. Seja $\{A_\alpha\}$ uma cobertura do espaço métrico X. Um número $\lambda > 0$ é dito *número de Lebesgue* da cobertura $\{A_\alpha\}$ se todo subconjunto S de X tal que $\text{diam}(S) < \lambda$ está contido num dos A_α da cobertura.

Teorema 5.7. *Seja X um espaço métrico seqüencialmente compacto. Então toda cobertura aberta de X possui um número de Lebesgue.*

Demonstração. Seja $\{A_\alpha\}$ uma cobertura aberta de X. Para todo $x \in X$, seja $\varepsilon(x) > 0$ o supremo dos $r > 0$ tais que a bola aberta $B_r(x)$ está contida num dos A_α. Seja $\varepsilon = \inf_{x\in X} \varepsilon(x)$. Se $\varepsilon > 0$, então $\lambda = \varepsilon/2$ é um número de Lebesgue da cobertura. Por absurdo, assumimos que $\varepsilon = 0$. Então existe uma sucessão (x'_n) tal que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon(x'_n) = 0$. Sendo X seqüencialmente compacto, existe uma subsucessão convergente (x_n) tal que ainda $\lim_{n\to\infty} \varepsilon(x_n) = 0$. Seja $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Existe $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon(x)/2$ se $n > \overline{n}$. Isto implica que $\varepsilon(x_n) > \varepsilon(x)/2$ para todo $n > \overline{n}$ (porque, se existe um elemento A_α da cobertura que contém $B_{\varepsilon(x)}(x)$, ele também contém $B_{\varepsilon(x)/2}(x_n)$), o que contradiz o facto de ser $\lim_{n\to\infty} \varepsilon(x_n) = 0$. $\square$

Teorema 5.8 (caracterização dos espaços metrizáveis compactos)**.** *Seja X um espaço metrizável. As seguintes propriedades são equivalentes:*

a) X é compacto,

b) X é enumeravelmente compacto,

c) X é seqüencialmente compacto.

Demonstração. (a$\Rightarrow$b) Seja S um subconjunto infinito do espaço compacto X. Se S não tem pontos limites em X então é fechado, e portanto é compacto. Por outro lado, a topologia relativa em S é a topologia discreta, portanto S é um espaço discreto infinito, logo não é compacto.

(b$\Rightarrow$c) Seja (X, d) um espaço métrico enumeravelmente compacto. Seja (x_n) uma sucessão em X. Se a imagem $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é finita, então (x_n) admite uma subsucessão constante, portanto convergente. Se a imagem $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é finita, então admite um ponto de acumulação x em X. Isto implica que, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k+1} > n_k$ e $d(x_{n_k}, x) < 1/k$. Portanto, a subsucessão (x_{n_k}) é convergente.

(c$\Rightarrow$a) Seja (X, d) um espaço métrico. Se X não é compacto, existe uma cobertura aberta $\{A_\alpha\}$ de X que não admite subcoberturas finitas. Seja $\lambda > 0$ um seu número de Lebesgue, e seja $0 < \varepsilon < \lambda/2$. A família das bolas abertas $\{B_\varepsilon(x) \text{ com } x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X tal que todo $B_\varepsilon(x)$ está contido num dos A_α, portanto ela também não admite subcoberturas finitas. Isto implica que é possível escolher uma sucessão (x_n) de pontos de X tal que $x_{n+1} \in X\backslash(\cup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A sucessão (x_n) não admite subsucessões convergentes, porque $d(x_n, x_m) > \varepsilon$ para todos $n \neq m$. Portanto, X não é seqüencialmente compacto. $\square$

ex **Teorema de Bolzano-Weierstrass.** Todo subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}^n$ tem um ponto de acumulação em $\mathbb{R}^n$.

ex **Teorema de Bolzano-Weierstrass.** Toda sucessão limitada em $\mathbb{R}^n$ admite uma subsucessão convergente.

ex Um subconjunto limitado S de $\mathbb{R}^n$ tal que $S' = \emptyset$ é finito.

ex Sejam $I_n = [a_n, b_n]$ intervalos fechados da recta real tais que $I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$$

Prove que $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ não é vazia e é constituida por um único ponto.

ex Seja (x_n) uma sucessão convergente para x no espaço métrico X. Prove que o subespaço

$$\{x_n \text{ com } n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

é compacto.

ex Seja X um espaço métrico compacto infinito. Prove que existe $x \in X$ tal que $X \backslash \{x\}$ não é compacto.

6 Espaços métricos completos

Sucessões fundamentais. Seja (X, d) um espaço métrico. Uma sucessão (x_n) em X é uma *sucessão de Cauchy*, ou *fundamental*, se para todo $\varepsilon > 0$ existe um tempo $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ se $n, m > \overline{n}$.

ex **Convergente $\Rightarrow$ fundamental.** Uma sucessão convergente é de fundamental.

ex **fundamental $\Rightarrow$ limitada.** Uma sucessão de Cauchy é limitada.

ex **Fundamental + subsucessão convergente $\Rightarrow$ convergente.** Uma sucessão de Cauchy que possui uma subsucessão convergente é convergente.

Espaços completos. O espaço métrico X é completo se toda sucessão fundamental em X é convergente.

eg **A recta real é completa.** A recta real é um espaço métrico completo. De facto, seja (x_n) uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$. Sejam X_n os conjuntos encaixados definidos por $X_n = \{x_k \text{ com } k \geqslant n\}$. Os X_n são limitados, portanto o axioma do supremo implica que existem os números $a_n = \inf X_n$. A sucessão (a_n) é não decrescente e limitada, portanto existe $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ (basta pôr $a = \sup\{a_n \text{ com } n \in \mathbb{N}\}$). Não é difícil construir uma subsucessão de (x_n) convergente para a, o que implica que (x_n) é convergente e tem limite a.

eg **O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é completo.** Uma sucessão (x_n) em $\mathbb{R}^n$ é convergente sse são convergentes as sucessões $(\pi_i(x_n))$ das suas coordenadas, para $i = 1, ..., n$. De consequência, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é completo.

eg O subespaço $\mathbb{Q}$ da recta real não é completo. Por exemplo, as somas parciais da série $\sum_{n\geqslant 0} 1/n!$ formam uma sucessão de Cauchy de números racionais, mas a soma da série não é racional.

eg **Ser completo não é uma propriedade topológica!** Por exemplo, a recta real, que é completa, é homeomorfa ao intervalo aberto $]0, 2[$, que não é completo (a sucessão $n \mapsto 1/n$ é de Cauchy mas não é convergente em $]0, 2[$).

ex **Completo $\subset$ completo $\Leftrightarrow$ fechado $\subset$ completo.** Seja X um espaço métrico completo, e S um subespaço de X. Então S é completo sse é fechado em X.

ex **Um subespaço S de $\mathbb{R}^n$ é completo sse é fechado.**

Caracterização dos espaços completos. Um espaço métrico X é *totalmente limitado* se, para todo $\varepsilon > 0$, pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ε, i.e. existe um número finito de pontos $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ tais que

$$X \subset B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2) \cup ... \cup B_\varepsilon(x_n)$$

eg **Ser totalmente limitado não é uma propriedade topológica!** Por exemplo, a recta real não é totalmente limitada, mas o intervalo aberto $]0,1[$, homeomorfo a recta, é totalmente limitado.

ex **Totalmente limitado $\Rightarrow$ separável.** Um espaço métrico totalmente limitado é separável, ou seja contém um subconjunto enumerável denso.

Teorema 6.1 (compacto $\Leftrightarrow$ completo e totalmente limitado)**.** *Um espaço métrico é compacto sse é completo e totalmente limitado.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja (X,d) um espaço métrico compacto. Para todo $\varepsilon > 0$, a cobertura aberta $\{B_\varepsilon(x)\}_{x\in X}$ admite uma subcobertura finita. Isto prova que X é totalmente limitado. Seja (x_n) uma sucessão de Cauchy em X. Como X é seqüencialmente compacto, (x_n) admite uma subsucessão convergente. Mas uma sucessão de Cauchy que admite uma subsucessão convergente é convergente, logo X é completo.

($\Leftarrow$) Seja (X,d) um espaço métrico completo e totalmente limitado. Seja (x_n) uma sucessão de pontos de X. Dado $k \in \mathbb{N}$, o espaço X admite uma cobertura finita composta por bolas abertas de raio $1/k$. Portanto, é possível encontrar, para todo $k \in \mathbb{N}$, um subconjunto infinito N_k dos naturais e uma bola aberta B_k de raio $1/k$ tais que

$$... \subset N_{k+1} \subset N_k \subset ... \subset \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad x_n \in B_k \text{ se } n \in N_k$$

Escolhendo um natural n_k para cada k, de forma tal que $n_{k+1} > n_k$, as propriedades acima implicam que a subsucessão (x_{n_k}) é de Cauchy, logo convergente porque X é completo. Portanto, X é seqüencialmente compacto. □

Teorema 6.2 (da interseção de Cantor)**.** *Seja X um espaço métrico completo, e seja $\{F_n$ com $n \in \mathbb{N}\}$ uma família decrescente*

$$\cdots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$$

de subconjuntos fechados e não vazios de X tais que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0\,.$$

Então existe um ponto $x \in X$ tal que $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um ponto $x_n \in F_n$. É imediato ver que a sucessão (x_n) é uma sucessão de Cauchy. Seja $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. O ponto x é um ponto de aderência de $\{x_n$ com $n \in \mathbb{N}\}$, e também um ponto aderência de $\{x_n$ com $n \geqslant k\}$. Mas F_k contém $\{x_n$ com $n \geqslant k\}$, e, sendo fechado, contém os seus pontos de aderência. Logo x pertence a todos os F_k. Por outro lado, o diâmetro de $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ não pode ser positivo, porque $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, logo a interseção dos F_n não pode conter dois pontos distintos. □

ex Retire, uma de cada vez, as hipóteses no teorema da interseção de Cantor e dê contraexemplos.

Teorema 6.3 (Baire)**.** *Seja X um espaço métrico completo. A interseção de uma família enumerável de subconjuntos abertos e densos em X é densa em X.*

Demonstração. Sejam A_n, com $n \in \mathbb{N}$, subconjuntos abertos e densos no espaço métrico completo X. Seja A um subconjunto aberto e não vazio de X. Como A_1 é denso, existem um ponto $x_1 \in X$ e um número positivo $\varepsilon_1 < 1$ tais que

$$\overline{B_{\varepsilon_1}(x_1)} \subset A_1 \cap A$$

Indutivamente, utilizando a densidade dos A_n, dados x_n e ε_n, podemos encontrar um ponto $x_{n+1} \in X$ e um número positivo $\varepsilon_{n+1} < 1/(n+1)$ tais que

$$\overline{B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})} \subset A_{n+1} \cap B_{\varepsilon_n}(x_n)$$

Pelo teorema da interseção de Cantor, existe um ponto x na interseção dos $\overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)}$, e por construção x pertence a A e a todos os A_n. □

ex **Ccompleto + perfeito ⇒ não enumerável.** Um espaço métrico completo sem pontos isolados não é enumerável (observe que, se X é um espaço métrico completo tal que $X' = X$, e $x \in X$, então $X\backslash\{x\}$ é aberto e denso em X).

ex Seja X um espaço enumerável infinito munido da métrica discreta. Prove que X é completo, é limitado, mas não é compacto.

eg **O espaço de Hilbert ℓ^2.** Seja $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{R})$ o espaço das sucessões $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que $\sum_{n=1}^\infty x_n^2 < \infty$ munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^\infty x_n \cdot y_n$. O espaço ℓ^2, munido da métrica induzida d, é completo. A esfera unitária $\mathbb{S}^\infty = \left\{x \in \ell^2 \text{ t.q. } \|x\| = 1\right\}$ é um subespaço fechado e limitado de ℓ^2, mas não é compacto. Por exemplo, a sucessão $e_{(1)} = (1,0,0,0,...)$, $e_{(2)} = (0,1,0,0,...)$, $e_{(3)} = (0,0,1,0,...)$ ... é composta de pontos à distância $\sqrt{2}$ uns dos outros, e portanto não admite subsucessões convergentes. Aliás, a esfera unitária em ℓ^2 não é totalmente limitada.

Aproximações sucessivas e princípio das contrações. Sejam (X,d) um espaço métrico, e (x_n) uma sucessão tal que existe $0 < \lambda < 1$ tal que

$$d(x_{n+1}, x_n) < \lambda \cdot d(x_n, x_{n-1})$$

para todo $n \geqslant 2$. Então (x_n) é uma sucessão fundamental. De facto, utilizando k vezes a desigualdade do triângulo, a desigualdade acima e a convergência da série geométrica de razão λ, temos

$$d(x_{n+k}, x_n) \leqslant \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda} \cdot d(x_2, x_1)$$

De consequência, se X é completo, a sucessão é convergente. Também, da estimação acima segue que a velocidade de convergência da sucessão para o seu limite $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ é exponencial, i.e. existe uma constante positiva c tal que $d(x_n, x) \leqslant c \cdot \lambda^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja (X,d) um espaço métrico. Uma aplicação $f : X \to X$ é chamada *contração* se existe $0 < \lambda < 1$ tal que

$$d(f(x), f(x')) < \lambda \cdot d(x, x')$$

para todos $x, x' \in X$ (ou seja se é Lipschitz e tem constante de Lipschitz < 1).

Um *ponto fixo* de uma aplicação $f : X \to X$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Teorema 6.4 (princípio das contrações/teorema de ponto fixo de Banach)**.** *Uma contração de um espaço métrico completo tem um ponto fixo, e este ponto fixo é único.*

Demonstração. Sejam $x_1 \in X$ e (x_n) a sucessão definida indutivamente por

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ se } n \in \mathbb{N}$$

Então $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) < \lambda \cdot d(x_n, x_{n-1})$ para todo $n \geqslant 2$. A observação acima mostra que (x_n) é uma sucessão de Cauchy, logo convergente porque X é completo. Seja $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. A aplicação f é contínua, porque é lipschitziana, portanto

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$$

Se x e x' são pontos fixos de f, então $d(x, x') = d(f(x), f(x')) \leqslant \lambda \cdot d(x, x')$, e $\lambda < 1$ implica que $d(x, x') = 0$. □

ex **Método dos babilónios para "calcular" raízes quadradas.** Seja $x_1 > 0$ e (x_n) a sucessão de números reais definida indutivamente por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + 2/x_n\right)$$

se $n > 1$. Prove que a sucessão é convergente e $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

Extensões de funções contínuas. Sejam X e Y dois conjuntos não vazios, S um subconjunto de X, e $f : S \to Y$ uma função. Uma *extensão* de f é uma função $g : T \to Y$, definida num conjunto T que contém S, tal que $g|_S = f$.

Se X e Y são espaços topológicos, e f é contínua, f pode não admitir extensões contínuas em todos os conjuntos que contêm S.

ex A função contínua $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, definida por $x \mapsto \sin(1/x)$, não admite nenhuma extensão contínua à recta real.

ex Seja $f : X \to Y$ uma aplicação uniformemente contínua entre os espaços métricos X e Y. Se (x_n) é uma sucessão de Cauchy em X, então $(f(x_n))$ é uma sucessão de Cauchy em Y.

Teorema 6.5. *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua entre os espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y). Se X é compacto então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Para todo $x \in X$ existe $\delta(x) > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon/2$ se $d_X(x, x') < \delta(x)$. A cobertura aberta $\{B_{\delta(x)/2}(x) \text{ com } x \in X\}$ admite uma subcobertura finita, ou seja existem $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ tais que

$$B_{\delta(x_1)/2}(x_1) \cup B_{\delta(x_2)/2}(x_2) \cup ... \cup B_{\delta(x_n)/2}(x_n) = X$$

Seja $\delta = \min_{i=1,...,n} \delta(x_i)/2 > 0$. Se x e x' têm distância $d_X(x, x') < \delta$, então pertencem os dois a uma das n bolas que cobrem X, por exemplo $B_{\delta(x_i)}(x_i)$, e portanto

$$d_Y(f(x), f(x')) \leqslant d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), f(x')) < \varepsilon$$

□

Teorema 6.6. *Seja $f : S \to Y$ uma aplicação uniformemente contínua, onde S é um subconjunto do espaço métrico X, e Y é um espaço métrico completo. Então existe uma única extensão contínua $\overline{f} : \overline{S} \to Y$ de f, e $\overline{f}$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Se $x \in \overline{S}$ então existe uma sucessão (x_n) em S tal que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. A sucessão $(f(x_n))$ é uma sucessão de Cauchy em Y, logo convergente porque Y é completo. É fácil verificar que se (x_n) e (x'_n) são duas sucessões convergentes para x, então $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$, portanto

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in S \\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) & \text{se } x \in S' \backslash S \text{ e } x = \lim_{n\to\infty} x_n \end{cases}$$

define uma extensão $\overline{f} : \overline{S} \to Y$ de f. Seja $\varepsilon > 0$. Pela continuidade uniformemente de f existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon/2$ se $d_X(x, x') < \delta$ e $x, x' \in S$. Sejam x e x' dois pontos de $\overline{S}$ tais que $d_X(x, x') < \delta$, e sejam (x_n) e (x'_n) duas sucessões em S tais que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ e $x' = \lim_{n\to\infty} x'_n$. Existe $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(x_n, x'_n) < \delta$ se $n > \overline{n}$, e portanto

$$d_Y(\overline{f}(x), \overline{f}(x')) = \lim_{n\to\infty} d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Isto prova que $\overline{f}$ é também uniformemente contínua. □

ex Sejam $f, g : X \to Y$ aplicações uniformemente contínuas do espaço métrico X no espaço métrico completo Y, e seja S um subconjunto denso em X. Se $f|_S = g|_S$ então $f = g$.

Convergência uniforme. Sejam X um espaço topológico e (Y, d_Y) um espaço métrico. Seja $\mathcal{B}(X, Y)$ o espaço das funções limitadas $f : X \to Y$ munido da métrica do sup, definida por

$$d(f, g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$$

A topologia induzida por d em $\mathcal{B}(X, Y)$ é dita *topologia da convergência uniforme.*

Uma sucessão (f_n) de funções limitadas $f_n : X \to Y$ *converge uniformemente* para a função f se converge na topologia da convergência uniforme.

eg **Convergência pontual e convergência uniforme.** Sejam X e Y dois espaços métricos, e Y^X o espaço das funções $f : X \to Y$. A sucessão (f_n) em Y^X converge pontualmente para $f \in Y^X$ se, para todo $x \in X$, a sucessão dos valores $(f_n(x))$ converge para $f(x)$.

O limite pontual de uma sucessão de funções contínuas pode não ser uma função contínua. Por exemplo, a sucessão das funções contínuas $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = \exp(-n|x|)$, converge pontualmente para a função característica de $\{0\}$, que não é contínua.

A convergência uniforme implica a convergência pontual.

Teorema 6.7. *Se Y é um espaço métrico completo, então $\mathcal{B}(X, Y)$ é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja (f_n) uma sucessão de Cauchy em $\mathcal{B}(X, Y)$. Então para todo $x \in X$ a sucessão dos valores $(f_n(x))$ é uma sucessão de Cauchy em Y, porque $d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leqslant d(f_n, f_m)$. Seja $f : X \to Y$ a função definida por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n, f_m) < \varepsilon/2$ se $n, m > \overline{n}$. Então, para todo $x \in X$, se $n > \overline{n}$

$$d_Y(f_n(x), f(x)) = \lim_{m\to\infty} d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Isto implica que $d(f_n, f) < \varepsilon$ se $n > \overline{n}$, ou seja que (f_n) é convergente para f. □

Seja $\mathcal{C}^0_b(X, Y)$ o espaço das funções contínuas e limitadas $f : X \to Y$, munido da métrica do sup. O seguinte teorema diz que $\mathcal{C}^0_b(X, Y)$ é um subespaço fechado, e portanto completo, de $\mathcal{B}(X, Y)$. Em outras palavras, o limite uniforme de uma sucessão de funções contínuas é una função contínua.

Teorema 6.8. *Se Y é um espaço métrico completo, então $\mathcal{C}^0_b(X, Y)$ é um subespaço fechado, portanto completo, de $\mathcal{B}(X, Y)$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{B}(X, Y)$ o limite uniforme da sucessão (f_n) de funções contínuas e limitadas $f_n : X \to Y$. Seja $x \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n, f) < \varepsilon$ se $n > \overline{n}$. Pela continuidade de f_n, existe uma vizinhança V de x tal que $d_Y(f_n(x), f_n(x')) < \varepsilon$ se $x' \in V$. Portanto, se $x' \in V$ e $n > \overline{n}$

$$d_Y(f(x), f(x')) \leqslant d_Y(f(x), f_n(x')) + d_Y(f_n(x), f_n(x')) + d_Y(f_n(x'), f(x')) < 3\varepsilon$$

□

7 Conexidade

Espaços conexos. O espaço topológico X é *conexo* se os únicos subconjuntos de X que são simultaneamente abertos e fechados são $\varnothing$ e X. O espaço topológico X é *desconexo* se não é conexo, ou seja, se admite um subconjunto próprio (i.e. não vazio e distinto de X) que é aberto e fechado.

Teorema 7.1 (caracterização dos conexos)**.** *Seja X um espaço topológico. As seguintes propriedades são equivalentes:*
a) X é conexo,
b) X não é a reunião disjunta de dois subconjuntos abertos e não vazios,
c) não existe uma função contínua e sobrejectiva de X sobre o espaço discreto $\{0, 1\}$.

Demonstração. (a⇒b) Se $X = A \cup B$ e os subconjuntos A e B são disjuntos, abertos e não vazios, então A é um subconjunto próprio, aberto e fechado de X.

(b⇒c)Seja $\varphi : X \to \{0, 1\}$ uma função contínua e sobrejectiva. Os subconjuntos $\varphi^{-1}\{0\}$ e $\varphi^{-1}\{1\}$ de X são não vazios, abertos e disjuntos, e $X = \varphi^{-1}\{0\} \cup \varphi^{-1}\{1\}$.

(c⇒a) Seja A um subconjunto próprio, aberto e fechado de X. O complementar de A é não vazio, aberto e fechado, portanto $\varphi : X \to \{0, 1\}$, definida por $\varphi(x) = 0$ se $x \in A$ e $\varphi(x) = 1$ se $x \in X \backslash A$, é uma função contínua e sobrejectiva. □

Cisões. Se X é um espaço topológico desconexo, então existem dois abertos não vazios A e B tais que $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = X$. Os subconjuntos A e B são também fechados, sendo um o complementar do outro, e portanto na propriedade b) da proposição acima pode-se substituir a palavra "abertos" pela palavra "fechados". Uma representação de X como reunião disjunta de dois abertos não vazios é dita uma *cisão* de X.

Subconjuntos conexos. Um subconjunto S do espaço topológico X é conexo se, munido da topologia relativa, é um espaço topológico conexo. Em particular, um subconjunto S do espaço topológico X é desconexo se existem A e B abertos em X tais que $A \cap S \neq \varnothing$, $B \cap S \neq \varnothing$, $A \cap B \cap S = \varnothing$ e $A \cup B \supset S$.

Teorema 7.2 (f contínua ⇒ f(conexo)=conexo)**.** *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Se X é conexo, então $f(X)$ 'e conexo.*

Demonstração. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua entre os espaços topológicos X e Y. Se $f(X)$ não é conexo, existe uma função contínua e sobrejectiva $\varphi : f(X) \to \{0, 1\}$. A função $f \circ \varphi : X \to \{0, 1\}$ é contínua e sobrejectiva, e portanto X não é conexo. □

Em particular, "ser conexo" é uma propriedade topológica: se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo e X é conexo então Y é conexo.

eg **Conexo $\subset \mathbb{R} \Leftrightarrow$ intervalo.** Um subconjunto da recta real é conexo sse é um intervalo. Em particular, a recta real é conexa.

De facto, se $X \subset \mathbb{R}$ não é um intervalo, então existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$a < c < b \; , \qquad a, b \in X \qquad \text{e} \qquad c \in \mathbb{R} \backslash X$$

Portanto $(]-\infty, c[\cap X) \cup (]c, \infty[\cap X)$ é uma cisão de X.

Por outro lado, seja X um intervalo da recta. Seja $X = A \cup B$, onde os subconjuntos A e B são não vazios e fechados em X. Sejam $a \in A$ e $b \in B$, com, por exemplo, $a < b$. Como X é um intervalo, $[a, b] \subset X$. Seja $c = \sup [a, b] \cap A$. Então $c \in A$, porque A é fechado em X. Se $c = b$, então $A \cap B$ não é vazio. Se $c < b$, então $c + \varepsilon \in B$ para todo $0 < \varepsilon < b - c$, e portanto $c \in B$, porque B é fechado em X, logo $A \cap B$ não é vazio. Isto prova que X não é a reunião disjunta de dois subconjunts fechados e não vazios, ou seja que X é conexo.

ex O subconjunto $\mathbb{Q}$ da recta real é desconexo.

ex Seja X um intervalo da recta real. Prove que $X \backslash \{x\}$ é desconexo se $x \in \text{int}(X)$.

ex Um espaço discreto que contém pelo menos dois pontos não é conexo.

ex Um espaço topológico X é conexo sse todo subconjunto próprio e não vazio de X tem fronteira não vazia.

Teorema 7.3. *Sejam X um espaço topológico, e C e D dois subconjuntos tais que $C \subset D \subset \overline{C}$. Se C é conexo, então D é conexo. Em particular, a aderência de um subconjunto conexo é conexa.*

Demonstração. Seja $S \subset D$ um subconjunto aberto e fechado em D. Então existem um subconjunto aberto $A \subset X$ e um subconjunto fechado $F \subset X$ tais que $S = A \cap D = F \cap D$. O subconjunto $S \cap C$ é aberto e fechado em C, portanto, se C é conexo, ou $S \cap C = \emptyset$ ou $S \cap C = C$.

Se $S \cap C = \emptyset$, então $\emptyset = S \cap C = A \cap D \cap C = A \cap C = A \cap \overline{C}$ (porque A é aberto em X), e portanto $S = A \cap D \subset A \cap \overline{C}$ é vazio.

Se $S \cap C = C$, então $C = S \cap C = F \cap D \cap C = F \cap C$. Em particular, $C \subset F$, e portanto $\overline{C} \subset F$ (porque F é fechado em X). Então $S = F \cap D \supset D$, ou seja, $S = D$. □

ex Se o espaço topológico X admite um subconjunto denso conexo, então X é conexo.

ex Dê um exemplo de um subconjunto desconexo S de um espaço topólogico tal que $\overline{S}$ seja conexo.

Componentes conexas. Seja X um espaço topológico. Os dois pontos x e x' de X são *conexos em* X, ou *pertencem à mesma componente conexa*, se existe um subconjunto conexo $C \subset X$ tal que $x, x' \in C$.

Teorema 7.4. *Sejam C e D dois subconjuntos conexos do espaço topológico X. Se $C \cap D \neq \emptyset$ então $C \cup D$ é conexo.*

Demonstração. Seja A um subconjunto não vazio, aberto e fechado em $C \cup D$. O subconjunto A tem interseção não vazia com C ou com D. Se $A \cap C \neq \emptyset$, então $A \cap C = C$, porque C é conexo. Como $C \cap D \neq \emptyset$, então também $A \cap D \neq \emptyset$, logo $A \cap D = D$ porque D é conexo. Portanto, $A = C \cup D$. □

Teorema 7.5. *Um espaço topológico X é conexo sse todo par de pontos x e x' de X são conexos em X.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Trivial.

($\Leftarrow$) Se X não é conexo, admite um subconjunto próprio A que é aberto e fechado. Sejam $x \in A$ e $x' \in X \backslash A$. Se x e x' fossem conexos em X, existiria um subconjunto conexo $C \subset X$ tal que $x, x' \in C$. Então $A \cap C$ seria um subconjunto próprio de C, aberto e fechado em C, o que contradiz o facto de C ser conexo. □

Teorema 7.6. *Se $\{C_\alpha\}$ é uma familia de subconjuntos conexos de um espaço topológico tal que $\cap_\alpha C_\alpha \neq \emptyset$, então $\cup_\alpha C_\alpha$ é conexo.*

Demonstração. Sejam x e x' dois pontos de $\cup_\alpha C_\alpha$. Exitem C_α e $C_{\alpha'}$ tais que $x \in C_\alpha$ e $x' \in C_{\alpha'}$. A interseção $C_\alpha \cap C_{\alpha'}$ não é vazia, portanto $C_\alpha \cup C_{\alpha'}$ é conexo, e pela proposiçao anterior x e x' são conexos em $\cup_\alpha C_\alpha$. □

As três proposições acima justificam e provam o que se segue.

Seja X um espaço topológico. "Ser conexos em X" é uma relação de equivalência entre os pontos de X. As classes de equivalência são ditas *componentes conexas* do espaço topológico X. A *componente conexa* de x, o conjunto

$$\mathcal{C}(x) = \left\{ x' \in X \text{ t.q. } x \text{ e } x' \text{ são conexos em } X \right\} ,$$

é a reunião dos subconjuntos conexos de X que contêm x, i.e. o "maior" subconjunto conexo de X que contém o ponto x.

As componentes conexas de X definem portanto uma partição de X composta por subconjunto conexos maximais. O número das componentes é um invariante topológico de X. O espaço topológico X é conexo sse possui uma única componente conexa.

O espaço topológico X é dito *totalmente desconexo* se a componente conexa de todo ponto $x \in X$ é $\{x\}$.

Cada componente conexa $\mathcal{C}(x)$ de X é um subconjunto fechado de X, porque a aderência de um subconjunto conexo é conexa. Um subconjunto não vazio, fechado, aberto e conexo do espaço topológico X é uma componente conexa de X.

eg As componentes conexas de um espaço topológico podem não ser abertas. Por exemplo, a componente conexa de $r \in \mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$ é $\{r\}$, que não é um subconjunto aberto de $\mathbb{Q}$.

ex Um espaço discreto é totalmente desconexo (se o espaço só contém um ponto, é também conexo!).

ex Um espaço métrico enumeravel é totalmente desconexo.

ex O subconjunto $\mathbb{Q}$ da recta real é totalmente desconexo.

ex O conjunto de Cantor $K \subset [0, 1]$ é totalmente desconexo.

Teorema 7.7 (conexo$\times$ conexo = conexo)**.** *O produto topológico de uma família finita de espaços conexos é conexo.*

Demonstração. Sejam X e Y espaços topológicos conexos. Sejam (x, y) e (x', y') dois pontos arbitrários do produto $X \times Y$. O subespaço $C = \{x\} \times Y$ é homeomorfo a Y, e portanto é conexo. O subespaço $D = X \times \{y'\}$ é homeomorfo a X, e portanto é conexo. A interseção $C \cap D = \{(x, y')\}$ não é vazia, logo (x, y) e (x', y') pertencem à mesma componente conexa. O teoema segue por indução. □

ex Se o produto topológico $X \times Y$ é conexo então X e Y são conexos.

ex $\mathbb{R}^n$ e $[0,1]^n$ são conexos.

eg Subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$. Um subconjunto S do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é *convexo* se, dados $x, x' \in S$, o segmento

$$\overline{xx'} = \{(1-t)x + tx' \text{ com } t \in [0,1]\}$$

está contido em S.

Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é convexo sse é conexo.

Um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ é conexo.

Dê um exemplo de um subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ que não seja convexo.

ex Se $n \geqslant 2$, o espaço $\mathbb{R}^n \backslash \{x_n = 0\}$ não é conexo, e o espaço $\mathbb{R}^n \backslash \{x_{n-1} = x_n = 0\}$ é conexo. Utilize a transitividade do grupo afim $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ no espaço dos subespaços afins de $\mathbb{R}^n$ para deduzir que, se V é um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$, o espaço $\mathbb{R}^n \backslash V$ é conexo sse $n - \dim(V) > 1$.

eg Grupo linear. O grupo linear $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ é um subconjunto desconexo de $\mathbb{R}^{n^2}$. De facto, a função contínua

$$A \mapsto \frac{\det A}{|\det A|}$$

envia $GL_n(\mathbb{R})$ sobre o espaço discreto $\{-1, 1\}$. O mesmo argumento prova que o grupo ortogonal $\mathrm{O}(n)$ é desconexo.

eg Curvas. Sejam X um espaço topológico, e I um intervalo da recta real. A imagem $\varphi(I)$ de uma função contínua $\varphi : I \to X$ é um subconjunto conexo de X.

Por exemplo, a esfera $\mathbb{S}^1$ é um subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$. Se $x \in S^1$, então também $S^1 \backslash \{x\}$ é conexo.

eg Gráficos. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua do espaço conexo X no espaço topológico Y. O gráfico de f,

$$\mathrm{graph}(f) = \{(x, y) \in X \times Y \text{ t.q. } f(x) = y\}$$

é um subconjunto conexo do produto topológico $X \times Y$. De facto, é a imagem da aplicação $x \mapsto (x, f(x))$, que é um homeomorfismo de X sobre $\mathrm{graph}(f)$.

ex Teorema do valor intermédio. A imagem $f(X)$ de uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ definida no espaço conexo X é um intervalo.

ex Teorema de ponto fixo. Seja I um intervalo compacto da recta real, e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(I) \subset I$. Então f tem um ponto fixo.

ex Seja $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ uma função real contínua definida na circunferência $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } |x| = 1\}$. Prove que existe um ponto $x \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

eg Esferas. Seja $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ t.q. } |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária de dimensão $n \geqslant 1$. A aplicação $f : \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{S}^n$, definida por $x \mapsto x/|x|$, é contínua e sobrejectiva. Portanto, a esfera $\mathbb{S}^n$ é conexa se $n \geqslant 1$.

Uma demonstração alternativa é a seguinte. Dado $x \in \mathbb{S}^n$, o espaço $\mathbb{S}^n \backslash \{x\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, que é conexo. Portanto $\mathbb{S}^n$, a aderência de $\mathbb{S}^n \backslash \{x\}$ em $\mathbb{S}^n$, é conexo.

Por outro lado, a esfera $\mathbb{S}^0 = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |x| = 1\} = \{-1, 1\}$ não é conexa.

eg Espaços projetivos reais. O espaço projetivo real $\mathbb{RP}^n$ é conexo. De facto, é a imagem da esfera S^n pela aplicação quociente $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ definida por $x \mapsto \pi(x) =$"recta passante por 0 e x em $\mathbb{R}^{n+1}$".

eg Intervalos homeomorfos. Um intervalo não trivial da recta real é homeomorfo a um, e só um, dos três "modelos" seguintes:

$$]0,1[\simeq \mathbb{R} \qquad [0,1] \qquad]0,1] \simeq \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

Os intervalos abertos da recta real são homeomorfos a recta real. Por exemplo, $x \mapsto \arctan x$ é um homeomorfismo da recta sobre $]-1,1[$, $x \mapsto$
$expx$ é um homeomorfismo da recta sobre $]0,\infty[$, e $t \mapsto (1-t)a+tb$ é um homeomorfismo de $]0,1[$ sobre $]a,b[$.

Um intervalo compacto, ou seja fechado e limitado, da recta é um intervalo trivial, i.e. um ponto, ou é homeomorfo a $[0,1]$ (o homeomorfismo pode ser uma aplicação afim).

Um intervalo não aberto (em $\mathbb{R}$) e não compacto da recta real é homeomorfo a $]0,1]$. De facto, $x \mapsto \log x$ é um homeomorfismo de $]0,1]$ sobre $]-\infty,0]$, e as outras possibilidades podem ser verificadas por meio de homeomorfismos afins.

Falta provar que os três modelos são distintos.

$\mathbb{R}$ e $]0,1]$ não são homeomorfos a $[0,1]$, porque não são compactos. Por outro lado, se $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ fosse um homeomorfismo, a restrição $f\big|_{]0,1]\backslash\{1\}}$ seria um homeomorfismo do espaço conexo $]0,1[$ sobre o espaço desconexo $]-\infty,f(1)[\cup]f(1),\infty[$.

eg O problema do homeomorfismo. Um dos problemas da topologia é decidir se dois espaços topológico são homeomorfos. Propriedades e invariantes topológicos, como a compacidade, a conexidade e o número das componentes conexas, permitem, por vezes, provar que dois espaços não são homeomorfos.

O intervalo $I = [0,1]$ não é homeomorfo a esfera $\mathbb{S}^1$, embora os dois espaços sejam conexos e compactos. Pois, se $\varphi : I \to \mathbb{S}^1$ fosse um homeomorfismo, a restrição $\varphi\big|_{I\backslash\{0.5\}} : I\backslash\{0.5\} \to \mathbb{S}^1\backslash\{\varphi(0.5)\}$ seria um homeomorfismo de um espaço desconexo sobre um espaço conexo.

A recta real $\mathbb{R}$ não é homeomorfa ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ se $n > 1$. De facto, ao retirar um ponto, a recta real fica desconexa, e isto não acontece aos espaços euclidianos de dimensão superior.

ex Seja H_λ a hipérbole $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x_1x_2 = \lambda\right\}$. Diga para que valores de λ é conexa e para que valores de λ é homeomorfa a $\mathbb{R}$.

ex Diga se os seguinte subconjuntos do plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ são conexos:

$$X = B_1((-1,0)) \cup B_1((1,0)) \qquad X \cup \{(0,0)\} \qquad \overline{X}$$

$$Y = \mathbb{R}^2\backslash\left\{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x_2 = 0\right\} \qquad Y \cup \{(0,0)\}$$

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}^2\backslash\mathbb{S}^1$$

ex A recta real $\mathbb{R}$ não é homeomorfa ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ se $n > 1$.

ex A esfera $\mathbb{S}^1$ não é homeomorfa a esfera $\mathbb{S}^n$ se $n > 1$ (observe que, se $x \in \mathbb{S}^n$, então $\mathbb{S}^n\backslash\{x\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$).

ex Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua e bijectiva tal que $f\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) = \mathbb{S}^{n-1}$, então $f\left(B_1(0)\right) = B_1(0)$.

ex Seja X a reunião das esferas de raio 1 e centros $(-1,0)$ e $(0,1)$ no plano euclidiano. Prove que X não é homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ nem a $[0,1]$.

ex Prove que o cilindro $X = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}$ e o cone $Y = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\right\}$ em $\mathbb{R}^3$ não são homeomorfos.

ex **Flores.** Seja F_n a "flor com n pétalas", o subespaço do plano euclidiano definido por $F_n = \varphi([0,\pi])$ onde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é a função

$$t \mapsto (|\sin(nt)| \cos 2t \ , \ |\sin(nt)| \sin 2t)$$

Prove que F_n não é homeomorfo a F_m se $n \neq m$.

Conexidade local. O espaço topológico X é *localmente conexo em* $x \in X$ se toda vizinhança de x contém uma vizinhança conexa de x. O espaço topológico X é *localmente conexo* se é localmente conexo em todos os seus pontos.

eg Um espaço discreto é localmente conexo, mas não é conexo se contém mais do que um ponto.

ex Seja X o subespaço da recta real definido por

$$X = \{1/n \text{ com } n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

Prove que X é totalmente desconexo. Prove que X não é localmente conexo, e que $X \backslash \{0\}$ é localmente conexo.

eg **Um espaço conexo que não é localmente conexo.** Existem espaços conexos que não são localmente conexos. O exemplo standard é o subconjunto $X = A \cup B$ do plano euclidiano, onde

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x_1 > 0 \text{ e } x_2 = \sin(1/x_1)\right\} \text{ e } B = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x_1 = 0 \text{ e } -1 \leqslant x_2 \leqslant 1\right\}$$

O espaço X é conexo, porque é igual ao fecho de A, e A é o gráfico da função contínua $t \mapsto \sin(1/t)$ definida no intervalo $]0, \infty[$. Toda bola aberta suficientemente pequena centrada, por exemplo, em $0 \in X$ é desconexa, portanto X não é localmente conexo em 0.

Conexidade por arcos. Seja X um espaço topológico. Um *arco* (ou *caminho*) entre os pontos x e x' de X é uma aplicação contínua $\varphi : [0,1] \to X$ tal que $\varphi(0) = x$ e $\varphi(1) = x'$.

O espaço topológico X é *conexo por arcos* se para todos $x, x' \in X$ existe um arco entre x e x'.

Teorema 7.8 (conexo por arcos $\Rightarrow$ conexo)**.** *Um espaço topológico conexo por arcos é conexo.*

Demonstração. A imagem $\varphi([0,1])$ do arco $\varphi : [0,1] \to X$ é um subconjunto conexo de X que contém $\varphi(0)$ e $\varphi(1)$. Portanto, todos os pontos de um espaço conexo por arcos pertencem à mesma componente conexa. □

Teorema 7.9 (f contínua $\Rightarrow$ f(conexo por arcos) = conexo por arcos)**.** *Seja $f : X \to Y$ um aplicação contínua. Se X é conexo por arcos, então $f(X)$ é conexo por arcos.*

Demonstração. Sejam y e y' dois pontos de $f(X)$, e sejam $x \in f^{-1}\{y\}$ e $x' \in f^{-1}\{y'\}$. Se $\varphi : [0,1] \to X$ é um arco entre $x = \varphi(0)$ e $x' = \varphi(1)$, então $f \circ \varphi : [0,1] \to Y$ é um arco entre $y = f \circ \varphi(0)$ e $y' = f \circ \varphi(1)$. □

Em particular, "ser conexo por arcos" é uma propriedade topológica: se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo e X é conexo por arcos então Y é conexo por arcos.

Componentes conexas por arcos. Se $\varphi : [0,1] \to X$ é um arco entre os pontos x e x', e $\phi : [0,1] \to X$ é um arco entre os pontos x' e x'', então é possível definir um arco entre os pontos x e x'', por exemplo a aplicação $\phi * \varphi : [0,1] \to X$, definida por

$$t \mapsto \begin{cases} \varphi(2t) & \text{se } t \in [0,1/2] \\ \phi(2t-1) & \text{se } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

Por outro lado, se $\varphi : [0,1] \to X$ é um arco entre os pontos x e x', então $\overline{\varphi} : [0,1] \to X$, definido por $t \mapsto \varphi(1-t)$, é um arco entre os pontos x' e x. Evidentemente, um arco entre x e x existe, por exemplo um arco constante. Portanto, a existência de um arco entre x e x' é uma relação de equivalência em X. Em particular, a reunião de uma família de subconjuntos de X conexos por arcos é conexo por arcos se a interseção não é vazia.

As classes de equivalência definem uma partição de X em subconjuntos conexos por arcos, ditas componentes conexas por arcos. A componente conexa por arcos do ponto $x \in X$, o conjunto

$$\mathcal{C}_a(x) = \left\{x' \in X \text{ t.q. existe um arco entre } x \text{ e } x' \text{ em } X\right\} ,$$

é o "maior" subconjunto de X conexo por arcos que contém o ponto x. O espaço topológico X é conexo por arcos sse possui uma única componente conexa por arcos.

ex **Conexo por arcos × conexo por arcos = conexo por arcos.** Prove que o produto topológico $X \times Y$ é conexo por arcos sse X e Y são conexos por arcos.

ex **Convexo ⇒ conexo por arcos.** Um subconjunto convexo do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é conexo por arcos. Em particular, $\mathbb{R}^n$ e as bolas de $\mathbb{R}^n$ são conexos por arcos.

Dê um exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ conexo por arcos que não seja convexo.

ex Um subconjunto aberto e conexo do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é conexo por arcos. (se A é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, e $x \in A$, considere o conjunto $B = \{x' \in A \text{ t.q. existe um arco entre } x \text{ e } x' \text{ em } A\}$, e utilize a convexidade das bolas abertas para provar que B e $A \backslash B$ são abertos em A).

ex A esfera $\mathbb{S}^n$ é conexa por arcos se $n \geqslant 1$.

ex O espaço projetivo real $\mathbb{RP}^n$ é conexo por arcos.

ex Seja $X = \cup_{\alpha \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{0\}} L_\alpha$ a reunião das rectas

$$L_\alpha = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0\right\}$$

no plano euclidiano. Diga se X é conexo, conexo por arcos, localmente conexo. Diga se $X \backslash \{x_2 = 0\}$ é conexo, conexo por arcos, localmente conexo.

eg **Um espaço conexos por arcos que não é localmente conexo.** O "pente" é o subconjunto do plano euclidiano definido por $X = Y \cup (\cup_{n \in \mathbb{N}} Z_n)$, onde

$$Y = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 0 \leqslant x_1 \leqslant 1 \text{ e } x_2 = 0\right\} \text{ e } Z_n = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x_1 = 1/n \text{ e } 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\right\}$$

O espaço X é conexo por arcos, logo conexo, e é localmente conexo. O fecho de X no plano, o conjunto $X \cup \left\{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x_1 = 0 \text{ e } 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\right\}$, é conexo por arcos mas não é localmente conexo.

eg **Um espaço conexo que não é conexo por arcos.** A reunião $X \cup \{x\}$ do pente X com o "piolho" $\{x = (0,1)\}$ é conexo, porque contém X e está contida em $\overline{X}$, mas não é conexo por arcos. De facto, não existe nenhum arco entre x e um ponto de X, pois toda função contínua $\varphi : [0,1] \to X \cup \{x\}$ tal que $\varphi(0) = x$ é constante (todo ponto $x' \in X$ numa vizinhança V suficentemente pequena de x em $X \cup \{x\}$ é desconexo de x em V).

Referências

[CR48] R. Courant and H. Robbins, *What is Mathematics?*, Oxford University Press, London 1948.

[Li93] E.L. Lima, *Espaços métricos*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro 1993.

[Mu75] J.R. Munkres, *Topology, A First Course*, Prentice-Hall, Englewood Cliff, N.Y. 1975.

[Se94] E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, Torino 1994.

[Si63] G.F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, Singapore 1963.

[ST67] I.M. Singer and J.A. Thorpe, *Lecture notes on elementary topology and geometry*, Springer-Verlag, New York, 1967.

Braga, 13 de Dezembro de 2002
sal.