

Teta, zeta, e os números primos

Salvatore Cosentino
Departamento de Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

Braga, 16 de fevereiro de 2013

Resumo

Esta palestra é uma tentativa de ilustrar a beleza e a unidade da matemática. O pretexto é o mistério da distribuição dos números primos, o conflito entre aleatoriedade e ordem que é possível observar no mundo dos números, das intuições de Gauss até a simetria da função zeta descoberta por Riemann.

Números e primos

Os números

1, 2, 3, 4, 5, ... 10, ... 46, ... 6×10^{23} , ... 10^{80} , ...

que usamos para contar dedos, anos, moléculas, bariões, ...

... podem ser construídos multiplicando *(números) primos*

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... 47, ...

Tijolos

De facto, cada número é um produto finito único ¹

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

de potências inteiras de alguns primos p_1, p_2, \dots, p_k

Por exemplo,

$$666 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37$$

[http://math-it.org/Mathematik/Zahlentheorie/Zahl/
ZahlApplet.html](http://math-it.org/Mathematik/Zahlentheorie/Zahl/ZahlApplet.html)

¹Hardy and Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 1938.

Porque gostamos

“317 is prime, not because we think so, or because our minds are shaped in one way rather than another, but because it is so, because mathematical reality is built that way.”

Godfrey Harold Hardy, *A Mathematician's Apology*, 1940.



Outra opinião

“... Signor Sarsi, la cosa non istà così. La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.”

Galileo Galilei, *Il Saggiatore*, 1623.



Os primos podem ser selecionados pela Natureza

As *Magicicadas*² vivem

13 ou 17 anos

escondidas na terra como ninfas,
e saem durante poucas semanas de vida adulta
(para acasalar e morrer!).



²Stephen Jay Gould, *Ever Since Darwin: Reflections in Natural History*, 1977

Quantos são os primos?

Teorema de Euclides (Euclides, *Elementos*, Proposição 20, Livro IX)

Οἱ πρωτοὶ ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ
προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν

uma maneira elegante e esperta de dizer que

“existem infinitos números primos”

De facto, se $2, 3, 5, \dots, p$ fossem todos os primos, então

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \dots p + 1$$

seria um número sem divisores primos
(o resto da divisão por $2, 3, 5, \dots, p$ é sempre um!).

Onde estão colocados os primos?

appletviewer Primes.html

`http:
//w3.math.uminho.pt/~scosentino/bestiario/primes.html`

“secrets of creation”

“I hope you will agree that there is no apparent reason why one number is prime and another not. To the contrary, upon looking at these numbers one has the feeling of being in the presence of one of the inexplicable secrets of creation.”

Don Zagier, *The first 50 million prime numbers*, 1977.



Buracos

O raciocínio de **Euclides** pode ser usado também para mostrar que os primos deixam buracos arbitrariamente grandes.

De facto, se N é o produto dos primeiros n números primos

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p_n$$

então todos os números entre

$$N + 2 \quad \text{e} \quad N + p_n$$

são divisíveis por um dos $2, 3, 5, \dots, p_n$,
e portanto não podem ser primos!

Por exemplo, não encontramos primos entre

$$2310 + 2 \quad \text{e} \quad 2310 + 11$$

Podemos tirar fotografias

Não conseguimos achar cada um dos primos (ainda?),
mas podemos tirar uma série de fotografias de grupo,



ou seja, definir uma função que descreve uma paisagem
moldada pelo conjunto de todos os números primos.

Sistemas complexos

appletviewer Beatles.html

[http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/bestiario/
cockroaches.html](http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/bestiario/cockroaches.html)

Função de partição

Os físicos usam a seguinte ideia para compreender a estatística de um sistema complexo. Definem uma **função de partição**

$$Z(\beta) := e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2} + e^{-\beta E_3} + \dots$$

onde E_1, E_2, E_3, \dots são os níveis de **energia** do sistema, e

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

é o inverso da **temperatura absoluta** vezes a **constante de Boltzmann**
 $k_B \simeq 1.38 \times 10^{-23}$ J/K.

A função $Z(\beta)$, ou melhor,

$$\log Z(\beta)$$

contém informações sobre a “termodinâmica” do sistema.

A paisagem da série harmónica

Os matemáticos observam com mística a **série harmónica**

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Diverge, portanto não representa nenhum número.

As coisas melhoram se cada número $2, 3, 4, 5, \dots$ for pesado usando um expoente

$$\beta > 1$$

(uma temperatura $T \sim 1/\beta$ pequena!)

Então é possível calcular a soma, ou seja, definir a **função zeta**

$$\begin{aligned}\zeta(\beta) &:= 1 + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\beta} + \frac{1}{4^\beta} + \dots \\ &= e^{-\beta \log 1} + e^{-\beta \log 2} + e^{-\beta \log 3} + e^{-\beta \log 4} + \dots\end{aligned}$$

O produto de Euler

A unicidade da decomposição em fatores primos foi traduzida por **Euler**³ na fórmula do **produto de Euler**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

se $s > 1$.

Por exemplo,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{49}{48} \cdot \frac{121}{120} \dots$$

e, incidentalmente, o próprio **Euler** calculou a soma ou produto:

$$\frac{\pi^2}{6}$$

³Leonhardo Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum*, 1748. 

Ainda o teorema de Eucildes

A divergência da série harmónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \infty$$

implica (o teorema de **Euclides** sobre) a infinidade dos primos, pois caso contrário

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$$

seria um produto finito, e portanto um número finito!

... **Dirichlet**, adaptando o raciocínio, mostrou que existem infinitos primos em cada progressão aritmética

$$a + nb$$

com a e b relativamente primos.

Mas quanto infinitos são os primos?

Observando que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{x} \simeq \log x$$

e calculando logaritmos na sua fórmula do produto, Euler “estimou”

$$\sum_p \frac{1}{p} = \log \log \infty$$

o que sugere que esta soma cresce até ao infinito muito, mas mesmo muito, devagar!

Por exemplo, a soma dos inversos dos primos até o maior primo

$$p \leq 10^{80}$$

é apenas

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{p} \simeq 5.2$$

Contar os primos

Gauss, ao 15 anos⁴,
teve a ideia de olhar os primos “de longe”,

ou seja, contar, para cada x , o número

$$\pi(x) := \text{Card}\{ \text{primos } p \leq x \}$$


de primos p inferiores ou iguais a x .

Por exemplo,

$$\pi(10) = 4$$

$$\pi(100) = 25$$

... e comparar os quocientes $\frac{x}{\pi(x)}$ com uma tabela de logaritmos no seu livro.

⁴Carl Friedrich Gauss, *Letter to Hencke*, 24 December 1849. 

A curva dos números primos

Esta é a curva observada por Gauss:

appletviewer PNT.html

[http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/bestiario/
primenumbertheorem.html](http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/bestiario/primenumbertheorem.html)

Ainda a opinião de Don Zagier

“For me, the smoothness with which this curve climbs is one of the most astonishing facts in mathematics”

Don Zagier, *The first 50 million prime numbers*, 1977.



Uma tabela moderna

n	$\pi(n)$	$n/\pi(n)$
10	4	2.5
100	25	4.0
1,000	168	6.0
10,000	1,229	8.1
100,000	9,592	10.4
1,000,000	78,498	12.7
10,000,000	664,579	15.0
100,000,000	5,761,455	17.4
1,000,000,000	50,847,535	19.7
10,000,000,000	455,052,511	22.0
100,000,000,000	4,118,054,813	24.3
1,000,000,000,000	37,607,912,018	26.6
\vdots	\vdots	\vdots
10^{24}	18,435,599,767,349,200,867,866	54.2

O teorema dos números primos

Gauss escreveu

“Primzahlen unter a ($= \infty$) a/la ”

que nós traduzimos:

Teorema dos números primos (PNT)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

Heurística de Gauß

Gauss melhorou a sua estimacão usando a seguinte ideia:

um número x é primo “com probabilidade”

$$\text{Prob}(x \text{ ser primo}) \sim \frac{1}{\log x}$$

ou seja, o n -ésimo número primo é

$$p_n \sim n \log n$$

e portanto

$$\begin{aligned} \pi(x) &\sim \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} + \cdots + \frac{1}{\log x} \\ &\sim \text{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} \end{aligned}$$

Li e pi

Esta é a curva conjecturada por Gauss:

appletviewer PNTLi.html

[http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/bestiario/
primenumbertheoremLi.html](http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/bestiario/primenumbertheoremLi.html)

A fórmula exacta!

Riemann descobriu uma “fórmula exacta” ⁵:

$$\pi(x) = \text{Ri}(x) - \sum_{\rho} \text{Ri}(x^{\rho}) - \frac{1}{\log x} + \frac{1}{\pi} \arctan(\pi/\log x)$$



⁵Bernhard Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, 1859.

A função de Riemann

onde a *função de Riemann* é

$$\begin{aligned}\operatorname{Ri}(x) &:= \sum_n \frac{\mu(n)}{n} \operatorname{Li}(\sqrt[n]{x}) \\ &= \operatorname{Li}(x) - \frac{1}{2}\operatorname{Li}(\sqrt{x}) - \frac{1}{3}\operatorname{Li}(\sqrt[3]{x}) - \frac{1}{5}\operatorname{Li}(\sqrt[5]{x}) \\ &\quad + \frac{1}{6}\operatorname{Li}(\sqrt[6]{x}) - \frac{1}{7}\operatorname{Li}(\sqrt[7]{x}) + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \zeta(n+1)} \frac{(\log x)^n}{n!}\end{aligned}$$

e os ρ são os zeros “não triviais” da *função zeta de Riemann*.

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

A função zeta de Riemann

O primeiro passo de **Riemann** foi substituir o argumento da função zeta ⁶

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

por um número complexo

$$s = x + iy$$

com parte real $\Re(s) = x > 1$.

Os **números complexos** são pontos do plano: as operações $+$ e \times têm significados geométricos de acordo com a **fórmula de Euler**

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

⁶Harold Edwards, *Riemann's Zeta Function*, 1974.

A paisagem da função zeta

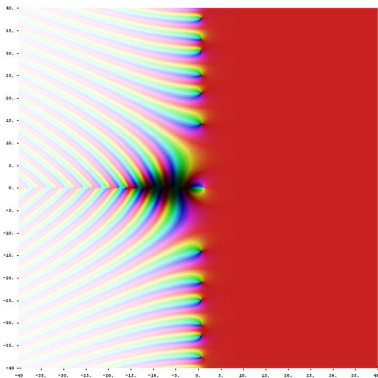
Assim, **Riemann** conseguiu ver a paisagem bidimensional moldada pelos números primos por cima do semi-plano $\Re(s) > 1$.



(http://en.wikipedia.org/wiki/File:Spelterini_Matterhorn_1910.jpg)

Atravessar a fronteira

Depois, **Riemann** atravessou a fronteira $\Re(s) = 1$,
e observou a paisagem completa da função zeta



[http:](http://math-it.org/Mathematik/Riemann/RiemannApplet.html)

[//math-it.org/Mathematik/Riemann/RiemannApplet.html](http://math-it.org/Mathematik/Riemann/RiemannApplet.html)

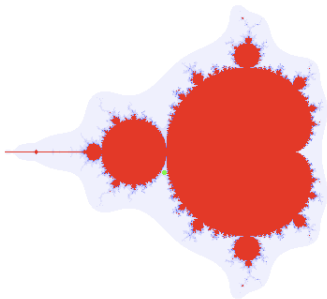
A rede de Indra

“There is an endless net of threads throughout - the Universe - The horizontal threads are in space - The vertical threads are in time - At the crossing of the threads - There is an individual - And every individual is a crystal bead - And every crystal bead reflects - Not only the light from every - Other crystal in the net but - Also every other reflection - Throughout the entire universe.”



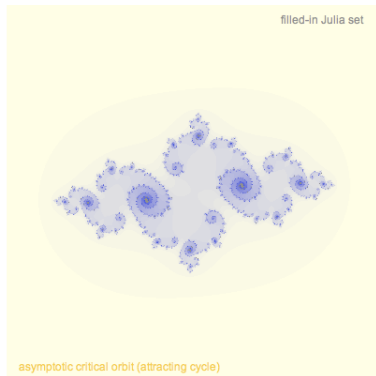
Auto-similaridade

Mandelbrot set



parameter $c = -0.7645 - i * 0.1595$

filled-in Julia set



asymptotic critical orbit (attracting cycle)

<http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/bestiario/julia.html>

A continuação analítica da função zeta

Por exemplo, **Ramanujan** calculou

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 \cdots = -\frac{1}{12}$$



A simetria

Além da fronteira $\Re(s) = 1$,
Riemann encontrou uma simetria inesperada.

Se a função zeta é multiplicada pelo **fator gama**

$$\Gamma_{\infty}(s) := \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$$

acontece um milagre:

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

o que quer dizer que há um **espelho** colocado na reta vertical

$$\Re(s) = 1/2$$

Ciclos



Estrelas fixas



... descrevem circunferências

As **circunferências** são as curvas desenhadas por

$$\rho e^{2\pi i \omega t} = \rho (\cos(2\pi \omega t) + i \sin(2\pi \omega t))$$

ao variar o **tempo** t .

The fundamental functions on the real line \mathbb{R} , or in general on the Euclidean space \mathbb{R}^n , are the *characters*

$$\begin{aligned} e_{\xi}(x) &:= e^{2\pi i \xi \cdot x} \\ &= \cos(2\pi \xi \cdot x) + i \sin(2\pi \xi \cdot x) \end{aligned}$$

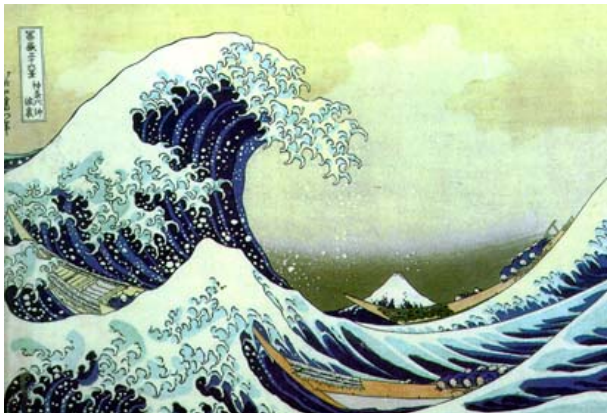
with $\xi \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$, which form what mathematicians call *Pontryagin dual* $\widehat{\mathbb{R}^n}$ of the (locally compact) topological abelian group \mathbb{R}^n .

Ondas planas

As *ondas planas*

$$E(t, x) \sim e^{2\pi i(\omega t - \xi \cdot x)}$$

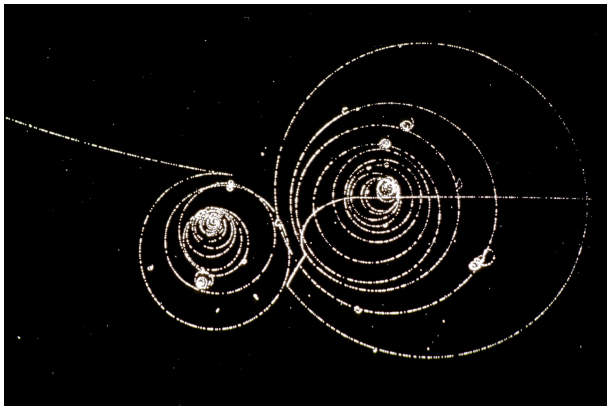
viajam na direção do *vetor de onda* ξ
e oscilam com *frequência* ω .



Funções de onda

A *função de onda* de uma partícula livre de *energia* E e *momento* p é

$$\psi(t, x) \sim e^{2\pi i(Et - p \cdot x)/\hbar}$$



Estrelas vagantes



Epíclis

Sobreposições de movimentos circulares uniformes

$$\rho_1 e^{2\pi i \omega_1 t} + \rho_2 e^{2\pi i \omega_2 t} + \rho_3 e^{2\pi i \omega_3 t} + \dots$$

podem aproximar movimentos quase-periódicos.

Esta é a ideia⁷ dos sistemas planetários de **Hiparco** e **Ptolemeu**, usando um número suficiente de **epíclis**.

appletviewer Epicycles.html

<http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/bestiario/epicycles.html>

⁷Giovanni Gallavotti, Quasi periodic motions from Hipparchus to Kolmogorov, 2001 (<http://arxiv.org/abs/chao-dyn/9907004>)

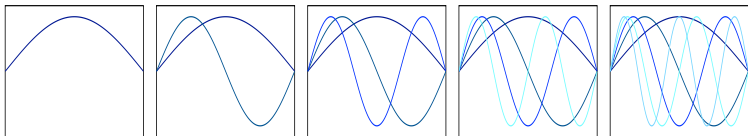
Harmónicas

Os instrumentos musicais produzem **sobreposições** de tons puros.

Por exemplo, a segunda corda de um violino vibra com frequências

440 Hz, 880 Hz, 1320 Hz, 1760 Hz, 2200 Hz, ...

que correspondem (mais ou menos) a A4, A5, E6, A6, C#7, ...



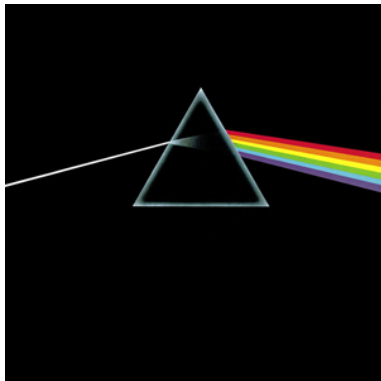
appletviewer String.html

<http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/bestiario/string.html>

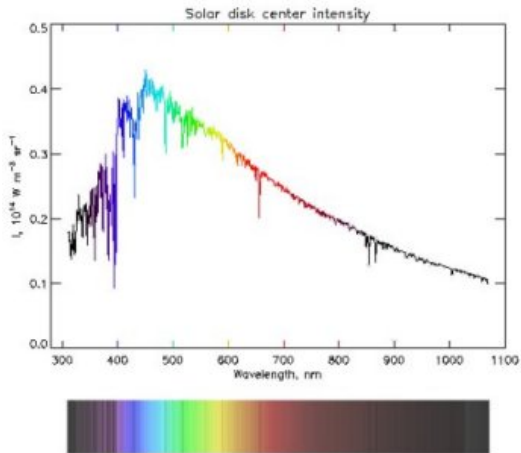
Transformada de Fourier

$$f(t) = \int_{\widehat{\mathbb{R}}} (\mathcal{F}f)(\xi) e^{i2\pi\xi \cdot t} d\xi$$

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i2\pi\xi \cdot t} dt$$



O espectro do Sol



Transformada de Mellin

In multiplicative notation, with

$$x = e^t \quad \text{so that} \quad dt = d(\log x) = \frac{dx}{x}$$

we get for the function $g(x) = f(\log x)$ the representation

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (\mathcal{M}g)(s) x^{-s} ds$$

where the Mellin transform is

$$(\mathcal{M}g)(s) := \int_0^\infty g(x) x^s \frac{dx}{x}$$

Thus, formally $(\mathcal{M}g)(s) = (\mathcal{F}f)(-is)$, or $(\mathcal{F}f)(\xi) = (\mathcal{M}g)(i\xi)$.

Fórmula de Poisson

A fórmula de Poisson diz que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)(n)$$

ou, também,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)(n/\lambda)$$

periods versus eigenvalues (of the Laplacian on a torus)

Shannon-(Nyquist) sampling theorem

(a band-limited ($\omega < B$) signal can be reconstructed from its sampling with spacing $\varepsilon < 1/(2B)$)

non-commutative context, **Selberg trace formula**

connecting the periods of closed geodesics and the eigenvalues of the Laplacian (energy levels of a free particle) on a Riemann surface.

algebraic-geometric context, **Riemann-Roch theorem**

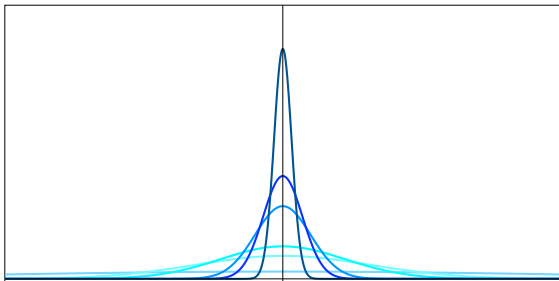
Gaussiana

A **gaussiana** é a função

$$g(x) := e^{-\pi x^2}$$

É auto-dual, pois

$$(\mathcal{F}g)(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$$



Teta

A função teta de Jacobi é a soma de gaussianas

$$\begin{aligned}\vartheta(\tau) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi\tau n^2} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}\end{aligned}$$

sobre os inteiros $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

A soma converge se τ está no semi-plano superior

$$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \text{ s.t. } \Im(\tau) > 0\}$$

ou seja, se $q = e^{i\pi\tau}$ está no disco unitário

$$\mathbb{D} := \{q \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |q| < 1\}$$

Teta e física: calor

A função teta com

$$\tau = it$$

é a função de Green

$$G(x, y; t) \simeq \sum_n e^{-\lambda_n t} \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)}$$

da equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

na circunferência $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, onde

$$\phi_n(x) = e^{inx} \quad \text{e} \quad \lambda_n = n^2$$

com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, são as autofunções e os autovalores do laplaciano Δ , ou seja,

$$\Delta \varphi = -\lambda \varphi$$

Teta e física: propagator

A função teta com

$$\tau = t \in \mathbb{R}$$

é o **propagator**

$$\begin{aligned} C(t) &:= \langle \psi(t) | \psi(0) \rangle \\ &= \sum_n |\psi_n|^2 e^{-\frac{i}{\hbar} \lambda_n t} \end{aligned}$$

de uma partícula livre na circunferência $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$,
cuja dinâmica é modelada pela **equação de Schrödinger**

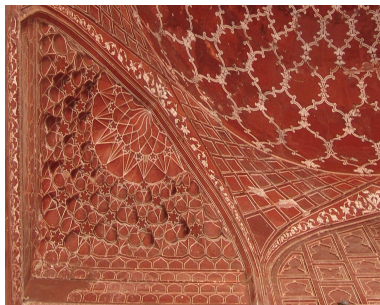
$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Arabescos

Se $\tau \in \mathbb{R} \subset \partial\mathbb{H}$, as *somas teta*

$$S_\tau(N) := \sum_{1 \leq n \leq N} e^{i\pi\tau n^2}$$

desenham “arabescos” no plano.



appletviewer Theta.html

[http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/bestiario/
thetacurlicues.html](http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/bestiario/thetacurlicues.html)

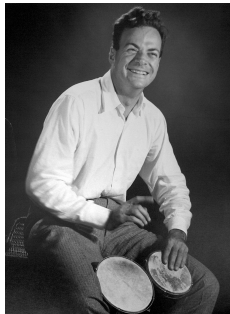
Somas exponenciais e física

Os “path integrals” de Dirac e Feynman ⁸

$$\int e^{i\frac{S[x]}{\hbar}} Dx$$

são somas exponenciais,

onde $S[x] = \int_0^T L(x, \dot{x}) dt$ é a ação do caminho $t \mapsto x(t)$.



⁸Richard Feynman, *QED: The Strange Theory of Light and Matter*, 1985.

Simetrias da função teta

A translação

$$\tau \mapsto \tau + 2$$

deixa invariante a função teta.

A “inversão”

$$\tau \mapsto -1/\tau$$

transforma a função teta de acordo com a **equação funcional**

$$\theta(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \theta(1/\tau)$$

consequência da fórmula de Poisson.

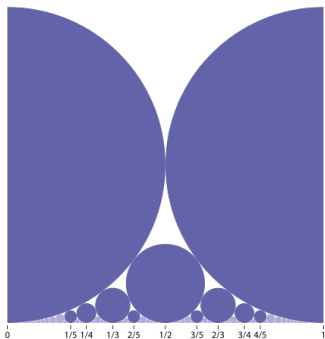
Teta e grupo modular

Assim, as simetrias da função teta formam um subgrupo do grupo modular

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$$

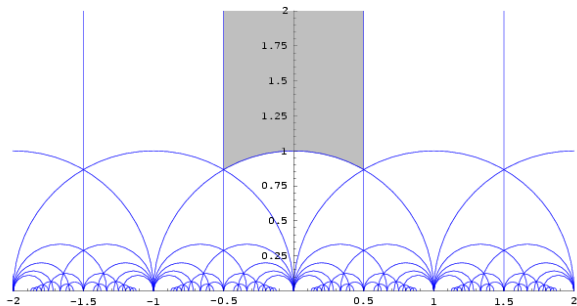
o grupo das isometrias do plano hiperbólico \mathbb{H} gerado por

$$\tau \mapsto \tau + 1 \quad \text{e} \quad \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$$



Grupo e superfície modular

Esta é uma imagem da **superfície modular**



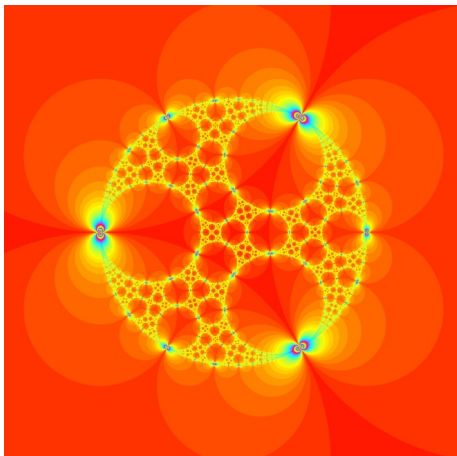
(from **Wikipedia**)

e podem querer saber que o volume do (fibrado tangente unitário) da superfície modular é ...

$$\frac{\pi^2}{6}$$

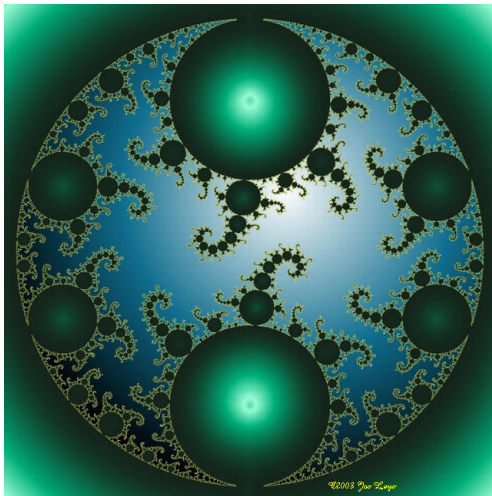
Indra, mais uma vez

Esta é a imagem de um grupo kleiniano.



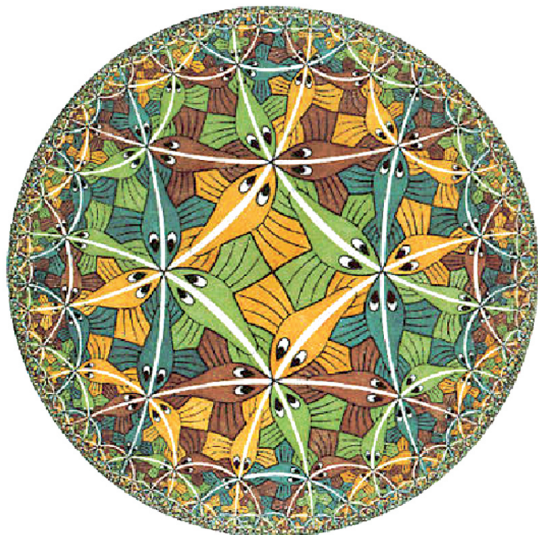
(from David Mumford, Caroline Series and David Wright,
Indra's pearls, the vision of Felix Klein, 2002.)

Desenhos bonitos



(by **Jos Leys**, *Mathematical Imagery*)

Com mais poesia



Ainda mais bonitos



Theta, Heisenberg and symplectic group

Theta functions, the Heisenberg group and the symplectic group are companions!

Hermann Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 1928
explains Heisenberg's quantum mechanics to mathematicians,
finite fields toy model

Carl Ludwig Siegel, *Symplectic Geometry*, 1943
Siegel's upper half-space $\mathbb{H}^g = \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})/U_{2g}(\mathbb{C})$,
... higher dimensional modular forms

André Weil, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, 1964
vector spaces over local and global fields or adèle ring,
metaplectic representation
... applications to number theory

References:

David Mumford, *Tata Lectures on Theta*, 1983.

Jerry Folland, *Harmonic analysis in phase space*, 1989.

Gama, teta e zeta

A mudança de variável $x = \pi n^2 t$ no integral (de Euler!) que define a função gama

$$\Gamma(s/2) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s/2} \frac{dx}{x}$$

e depois a soma sobre $n = 1, 2, 3, \dots$, mostra que a função zeta vezes o “fator gama” (a transformada de Mellin da gaussiana!)

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) = \int_0^{\infty} e^{-\pi x^2} x^s \frac{dx}{x}$$

é a transformada de Mellin

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \int_0^{\infty} \psi(t) t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

da função psi

$$\psi(t) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$$

A equação funcional

Mas a equação funcional para ζ implica que

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \int_1^\infty \psi(t) \left(t^{s/2} + t^{(1-s)/2} \right) \frac{dt}{t}$$

Portanto, a *função Xi de Riemann*

$$\Xi(s) := \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$$

verifica a *equação funcional*

$$\Xi(1-s) = \Xi(s)$$

Produto de Euler e função Pi

A fórmula do produto de **Euler** implica que

$$\log \zeta(s) = \sum_p p^{-s} + \frac{1}{2} \sum_p p^{-2s} + \frac{1}{3} \sum_p p^{-3s} + \dots$$

Riemann deduziu que

$$\frac{1}{s} \log \zeta(s) = \int_1^{\infty} \Pi(x) x^{-s} \frac{dx}{x}$$

onde a **função Pi** é

$$\Pi(x) := \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt[2]{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{4}\pi(\sqrt[4]{x}) + \dots$$

Inversão de Fourier

Portanto, usando a fórmula de inversão de Mellin (ou seja, Fourier) **Riemann** conseguiu escrever

$$\begin{aligned}\Pi(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \log \zeta(s) x^s \frac{ds}{s} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left(\frac{\log \zeta(s)}{s} \right) x^s \frac{ds}{s}\end{aligned}$$

com $c > 1$.

Este integral depende das “singularidades” de $\log \zeta(s)$:

o pólo em $s = 1$
e os zeros de $\zeta(s)$

pólos e zeros de zeta

Assim como os polinómios, as funções “inteiras” podem ser reconstruídas a partir das suas raízes.

Em particular, a **função xi de Riemann** fatoriza

$$\begin{aligned}\xi(s) &:= \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) \\ &= \xi(0) \cdot \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)\end{aligned}$$

onde os ρ são os zeros não-triviais de $\zeta(s)$.

Portanto,

$$\log \zeta(s) = -\log(s-1) + \sum_{\rho} \log \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) + \text{outros termos}$$

A fórmula de Riemann

Ao substituir a última expressão para $\log \zeta(s)$ na fórmula integral para $\Pi(x)$, e depois de estimar alguns integrais, **Riemann** produziu a fórmula

$$\Pi(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\rho} \text{Li}(x^{\rho}) + \text{coisas pequenas}$$

A relação entre Π e π pode ser invertida, e o resultado é a famosa **fórmula de Riemann**

$$\pi(x) = \text{Ri}(x) - \sum_{\rho} \text{Ri}(x^{\rho}) + \text{coisas pequenas}$$

Observem que o termo principal é

$$\text{Ri}(x) \sim \text{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

compatível com o PNT.

Ondas dos zeros

O segundo termo, a soma

$$\sum_{\rho} \text{Ri}(x^{\rho})$$


converge apenas se ordenada convenientemente,
e portanto não é evidente que representa uma correção pequena ao termo principal!

Riemann calculou os primeiros zeros, e observou que parecem estar todos na reta vertical $\Re(s) = 1/2$. Cada par de raízes

$$\rho = \frac{1}{2} \pm i\omega$$

produz uma “onda” ⁹

$$\text{Ri}(x^{\rho}) + \text{Ri}(x^{\bar{\rho}}) \sim \sqrt{x} \cos(\omega \log x)$$

⁹Marcus du Sautoy, *The music of primes*, 2003. 

Espetro e ondas de Riemann

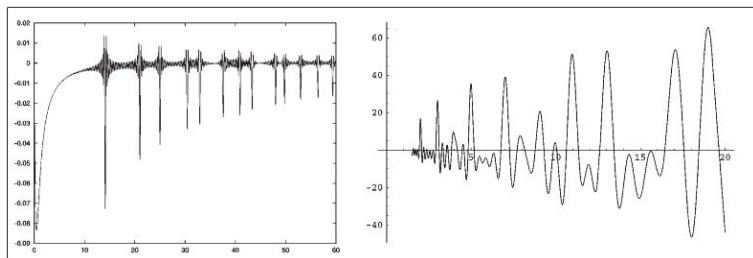


Figure 6. Duality: The Fourier transform of the error term in the Prime Number Theorem (note the spikes at ordinates of zeros) and the sum over zeros $-\sum x^\rho$ with $|\rho| < 100$ (note the peaks at primes and prime powers).

(J.Brian Conrey, *The Riemann Hypothesis*, *Notices of the AMS* 50 (2003), 341-353)

A hipótese de Riemann

Riemann escreveu que achava

“muito provável”

que todos os zeros de $\zeta(s)$ estivessem sobre a reta crítica $\Re(s) = 1/2$.

Esta é a hipótese de Riemann, e é equivalente à estimacão

$$\pi(x) - \text{Ri}(x) = \mathcal{O}(\sqrt{x} \log x)$$

pelo erro no teorema dos números primos.

“in the opinion of many mathematicians . . . the most important open problem in pure mathematics today”.¹⁰

¹⁰ Enrico Bombieri, *The Riemann Hypothesis*, Clay Mathematics Institute

A hipótese de Riemann segundo Bombieri

“Pensate di andare a un concerto e di ascoltare i musicisti che suonano tutti insieme in perfetta armonia. Poi all'improvviso interviene una grossa tuba che emette un suono fortissimo e sommerge tutto il resto.”



propósitos para o ano novo

- 1 To prove the Riemann hypothesis,
- 2 To make a brilliant play in a crucial cricket match,
- 3 To prove the nonexistence of God,
- 4 To be the first man atop Mount Everest,
- 5 To be proclaimed the first president of the U.S.S.R., Great Britain, and Germany, and
- 6 To murder Mussolini.



Fim

Obrigado.

Mais um,

para chegar a um número primo,

73.