

BREVE INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRAFOS

Pedro Patrício

2006, 2007, 2008

Conteúdo

1	Introdução	2
2	Conceitos iniciais	2
3	Representação com matrizes	5
4	Famílias de grafos	10
5	Caminhos e conexidade	15
5.1	Em grafos	15
5.2	Em digrafos	19
6	Grafos orientáveis	26
7	Grafos planares	27
8	Árvores e florestas	30
9	Grafos eulerianos e grafos hamiltonianos	31
10	Colorações	35
	Referências bibliográficas	35
	Anexo	37
10.1	Maxima	37
10.2	SAGE	38

1 Introdução

Os grafos são uma forma conveniente de representar um fluxo de um certo bem. Imagine uma empresa transportadora que tem a seu cargo o fornecimento de um certo bem a várias localidades (ou filiais, deixo à sua imaginação). Obviamente que a empresa tem como alvo efectuar o serviço de forma competente, reduzindo os custos. Intuitivamente, associa-se cada filial a um vértice, desenhando uma aresta entre dois vértices (aka filiais) se estes estiverem ligados de alguma forma conveniente – por auto-estrada, por exemplo. Claro que a cada aresta podemos associar um peso, relativo ao custo de tomar essa estrada (combustível, portagens, horas a serem pagas ao motorista, por exemplo). Podemos também assumir que existem estradas de “sentido único”, obtendo assim um digrafo ou grafo dirigido, ou que existem vários caminhos possíveis, e neste caso temos um multigrafo. Os grafos tornam-se então numa representação gráfica de possíveis fluxos de bens, o que não significa que constituam um mapa. De facto, não existe obrigatoriedade qualquer em relação a orientação, posição nem distância relativa.

2 Conceitos iniciais

Definição 2.1. Um digrafo \mathcal{D} é um par ordenado $(\mathcal{V}, \mathcal{A})$, onde \mathcal{V} é um conjunto não vazio finito e \mathcal{A} é um subconjunto de $\{(U, V) : U, V \in \mathcal{V}\}$.

Os elementos de \mathcal{V} chamam-se vértices de \mathcal{D} e os elementos de \mathcal{A} as arestas de \mathcal{D} .

Note-se que acima não está contemplado o caso dos multigrafos. Esta classe de objectos pode ser definida indexando cada aresta a um conjunto de índices. Ou seja, para $I \neq \emptyset$ conjunto de índices, o conjunto das arestas é um subconjunto do produto cartesiano $V \times V \times I$.

Iremos autorizar a existência de lacetes, ou *loops*, isto é, $(U, U) \in \mathcal{A}$, mas não iremos considerar multigrafos.

Para se representar graficamente um grafo (com um número finito de vértices e de arestas), tomamos pontos do plano, correspondendo ao vértices do digrafo, V_1, \dots, V_n , e desenhamos um arco (dirigido) entre V_i e V_j se $(V_i, V_j) \in \mathcal{A}$.

Dada uma aresta $(U, V) \in \mathcal{A}$, o vértice U diz-se *extremidade inicial* e o vértice V *extremidade final*.

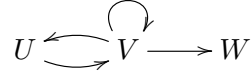
Dizemos que os vértices U e V são *adjacentes*, $U \leftrightarrow V$, se $(U, V) \in \mathcal{A}$ ou $(V, U) \in \mathcal{A}$. Em qualquer um destes casos, diz-se que o vértice U é *vizinho* do vértice V . Esta aresta diz-se *incidente* em cada um desses vértices. O conjunto dos vizinhos de U denota-se por $\Gamma(U)$. Duas arestas ℓ_1, ℓ_2 são *adjacentes* se existir $X \in \mathcal{V}$ tal que ℓ_1, ℓ_2 incidem em X .

Os *antecessores* [resp. *sucessores*] de um vértice V são os elementos do conjunto $\Gamma^-(V) = \{U \in \mathcal{V} : (U, V) \in \mathcal{A}\}$ [resp. $\Gamma^+(V) = \{U \in \mathcal{V} : (V, U) \in \mathcal{A}\}$].

O *grau* (ou *valência*) de um vértice V , denotado por $deg(V)$ ou por $\partial(V)$, é o número de arestas próprias (ou seja, que não sejam lacetes) incidentes em V adicionado ao dobro do

número¹ de laços em V . O *grau interior* de V , $\partial^-(V)$, é o número de arestas da forma $(*, V)$, e o *grau exterior* de V , $\partial^+(V)$, é o número de arestas da forma $(V, *)$. Ou seja, $\partial^-(V) = \#\Gamma^-(V)$ e $\partial^+(V) = \#\Gamma^+(V)$.

A título de exemplo, considere a representação gráfica do digrafo seguinte



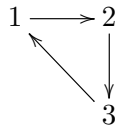
Temos, então, $\mathcal{V} = \{U, V, W\}$, $\mathcal{A} = \{(U, V), (V, U), (V, V), (V, W)\}$. Neste digrafo, $\partial^-(U) = \partial^+(U) = \partial^-(W) = 1, \partial^+(W) = 0, \partial^+(V) = \partial^-(V) = 2$.

Um digrafo $(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ é

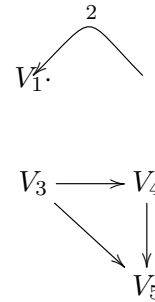
1. um n -digrafo se $\#\mathcal{V} = n$
2. um (p, q) -digrafo se $\#\mathcal{V} = p, \#\mathcal{A} = q$
3. simples se $\forall V \in \mathcal{V} (V, V) \notin \mathcal{A}$
4. reflexivo se $\forall V \in \mathcal{V} (V, V) \in \mathcal{A}$
5. completo se *todas* as possíveis arestas estão presentes (inclusive os lacetes)
6. simétrico se $(U, V) \in \mathcal{A} \Rightarrow (V, U) \in \mathcal{A}$
7. transitivo se $(U, V) \in \mathcal{A}, (V, W) \in \mathcal{A} \Rightarrow (U, W) \in \mathcal{A}$
8. de torneio se $\forall U, V \in \mathcal{V}$ se tem $(U, V) \in \mathcal{A}$ xor $(V, U) \in \mathcal{A}$



(a)



(b)



(c)

Figura 1: Tente classificar cada um destes digrafos.

Note-se que, dado um digrafo simétrico, se $(U, V) \in \mathcal{A}$ então $\{(U, V), (V, U)\} \subseteq \mathcal{A}$. Podemos, portanto, identificar este par de arestas com $\{U, V\}$. Esta aresta é representada simplesmente por um segmento de recta que une os dois vértices em que incide.

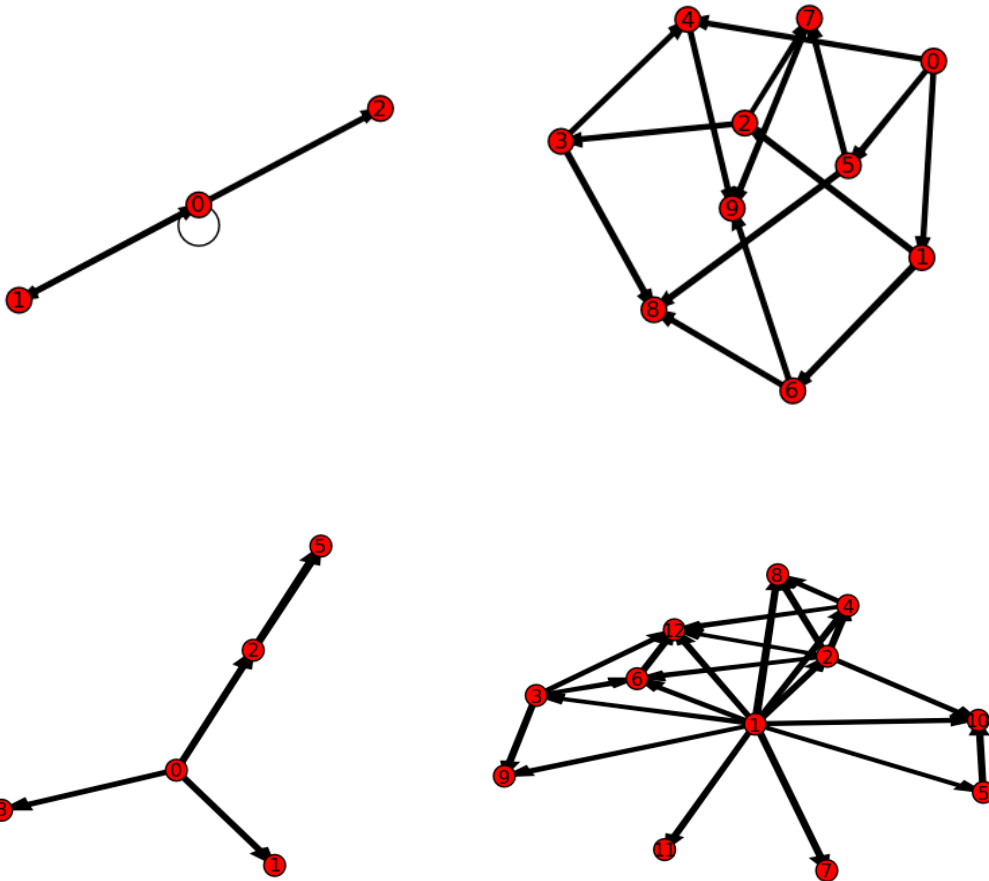


Figura 2: Digrafo simétrico e correspondente grafo

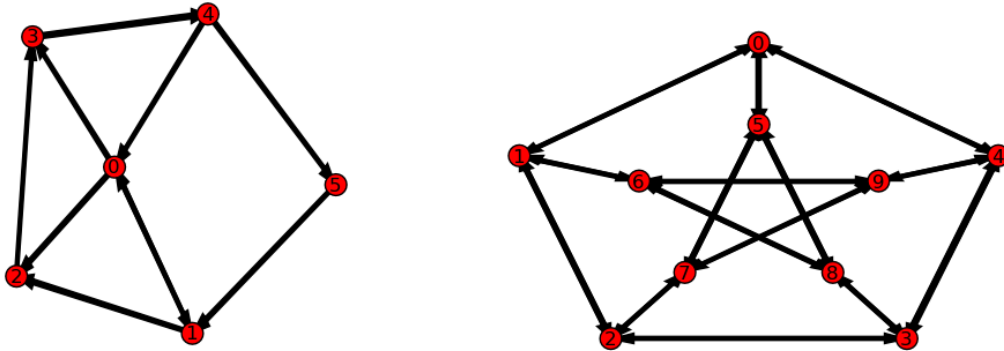
Esta identificação leva-nos à definição de grafo não dirigido, ou simplesmente *grafo*.

Definição 2.2. Um grafo (não dirigido) G é um par ordenado $(\mathcal{V}, \mathcal{A})$, onde \mathcal{V} é um conjunto não vazio finito e \mathcal{A} é um subconjunto de $\{\{U, V\} : U, V \in \mathcal{V}\}$.

Exercício 2.3. Para os grafos representados nas figuras, encontre os graus interior e exterior de cada vértice:



¹que no nosso caso pode ser 0 ou 1.



3 Representação com matrizes

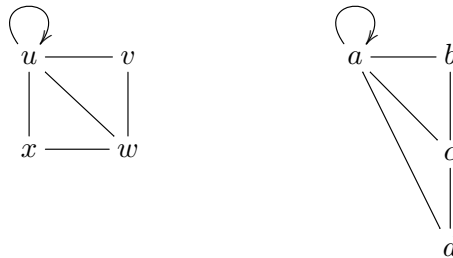
A um (p, q) -grafo \mathcal{G} podemos associar, de forma única, uma matriz $p \times p$, $A_G = A(\mathcal{G})$, denominada *matriz de adjacência* de \mathcal{G} , cujas linhas e colunas estão indexadas da mesma forma a uma ordenação dos elementos de \mathcal{V} , definida por

$$A_{[u,v]} = \begin{cases} \text{número de arestas entre } u \text{ e } v & \text{se } u \neq v \\ \text{número de lacetes em } u & \text{se } u = v \end{cases}$$

onde $u, v \in \mathcal{V}$.

Claro que ao apenas considerarmos grafos ao invés de multigrafos, então as entradas da matriz de adjacência podem apenas tomar os valores 0 e 1.

Considere os grafos



Ordenando os vértices do primeiro grafo da forma (u, v, w, x) , a matriz de adjacência é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como exercício, calcule a matriz de adjacência do segundo grafo, ordenando os vértices como (a, b, c, d) .

Como é óbvio, a matriz de adjacência de um grafo (não dirigido) é simétrica.

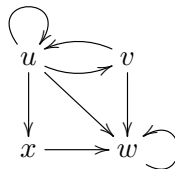
Vejamos agora o caso dos digrafos.

Nas mesmas condições da definição para grafos, a *matriz de adjacência de um digrafo* $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ é a matriz $A_{\mathcal{D}}$ definida por

$$A_{\mathcal{D}}[u, v] = \begin{cases} \text{número de arestas entre } u \text{ e } v & \text{se } u \neq v \\ \text{número de lacetes em } u & \text{se } u = v \end{cases}$$

onde $u, v \in \mathcal{V}$.

Como exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz de adjacência do digrafo



considerando a ordenação dos vértices como (u, v, w, x) .

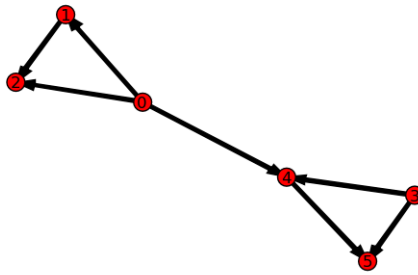
Repare que a linha correspondente ao vértice u diz-nos que de u é extremidade inicial de todas as arestas, e que a coluna correspondente ao vértice w diz-nos que w é extremidade final de todas as arestas. Voltaremos mais tarde a esta noção de alcance.

Exercício 3.1. 1. *As matrizes*

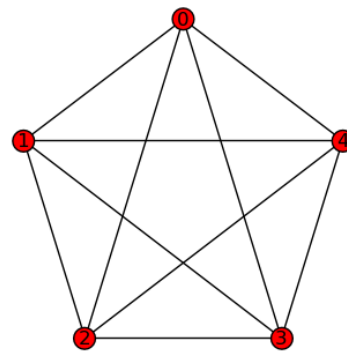
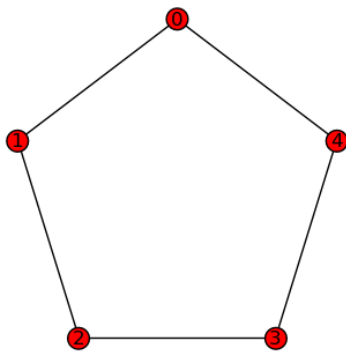
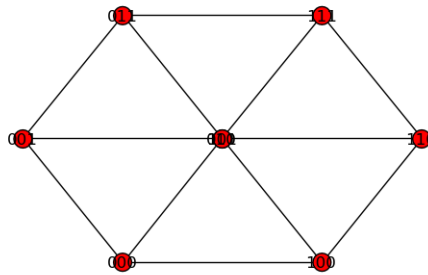
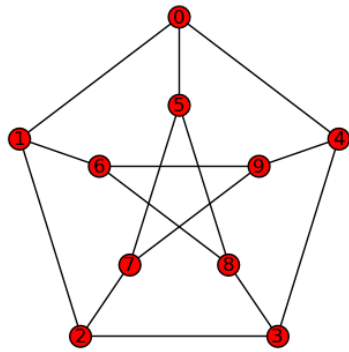
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

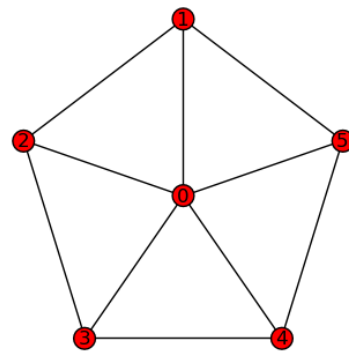
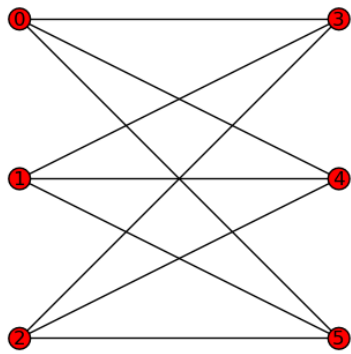
são de adjacência de cada um dos digrafos. Faça a correspondência.



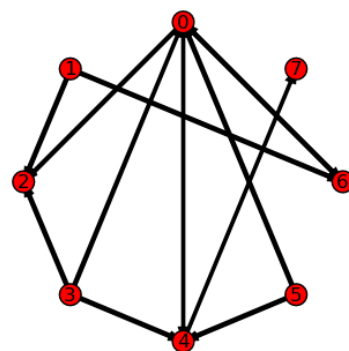
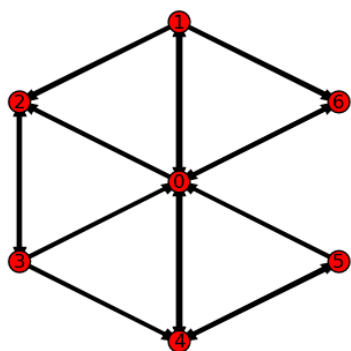
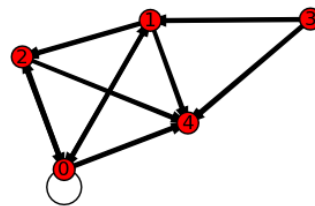
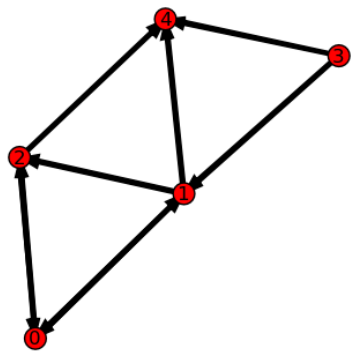


2. Encontre a matriz de adjacência de cada um dos grafos seguintes, fixando uma ordem para os vértices.





3. Determine as matrizes de adjacência dos digrafos seguintes, fixando previamente uma ordem para os vértices.

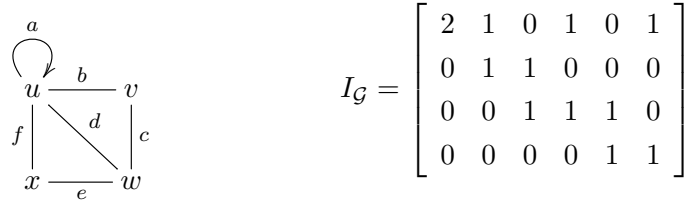


A um grafo \mathcal{G} podemos associar uma matriz, a *matriz de incidência*, para uma certa ordenação dos vértices (a que se farão corresponder as linhas) e das arestas (a que se farão corresponder as colunas) fixa previamente, da seguinte forma:

$$I_{\mathcal{G}}[v, e] = \begin{cases} 0 & \text{se } e \text{ não incide em } v \\ 1 & \text{se } e \text{ incide em } v \text{ e } e \text{ não é lacete em } v \\ 2 & \text{se } e \text{ é lacete em } v \end{cases}$$

onde $v \in \mathcal{V}$ e $e \in \mathcal{A}$.

Calculemos a matriz de incidência do grafo já visto anteriormente, ordenando os vértices como (u, v, w, x) e as arestas como (a, b, c, d, e, f) :



$$I_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como é fácil de verificar, uma outra ordenação dos vértices leva a troca de linhas da matriz de incidência, e uma outra ordenação das arestas a troca de colunas da matriz de incidência.

Proposição 3.2. *A soma das entradas de uma qualquer linha da matriz de incidência é igual ao grau do vértice respectivo.*

Demonstração. Considere um vértice v do grafo de forma arbitrária, bem como as arestas das quais v é extremidade, mas que não são lacete em v . Estas são em número igual ao número de 1's na linha correspondente ao vértice v na matriz de incidência. Ora um lacete f (caso exista) contribui com 2 unidades no cálculo de $\partial(v)$, e 2 é a entrada na linha correspondente ao vértice v e na coluna correspondente à aresta f . \square

Proposição 3.3. *A soma das entradas de uma qualquer coluna da matriz de incidência é igual a 2.*

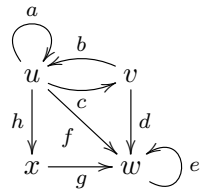
Demonstração. Se a aresta e incide em dois vértices distintos, digamos u e v , então as entradas correspondentes a u, e e v, e são iguais a 1. Uma aresta incide no máximo em dois vértices, pelo que as outras entradas dessa coluna valem 0. Se e é lacete, então incide num só vértice e a entrada correspondente é 2, sendo as restantes nulas. \square

A matriz de incidência de um digrafo é definida de forma análoga. Dado o digrafo $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$, e para uma ordenação dos elementos de \mathcal{V} e dos elementos de \mathcal{A} fixa previamente, a matriz de incidência $I_{\mathcal{D}}$ de \mathcal{D} é dada por

$$I_{\mathcal{D}}[v, e] = \begin{cases} 0 & \text{se } e \text{ não incide em } v \\ -1 & \text{se } v \text{ é extremidade inicial de } e \text{ e } e \text{ não é lacete em } v \\ 1 & \text{se } v \text{ é extremidade final de } e \text{ e } e \text{ não é lacete em } v \\ 2 & \text{se } e \text{ é lacete em } v \end{cases}$$

onde $v \in \mathcal{V}$ e $e \in \mathcal{A}$.

Por exemplo, no digrafo seguinte, ordenando os vértices como (u, v, w, x) e as arestas como (a, b, c, d, e, f, g, h) ,



$$I_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposição 3.4. Num digrafo sem lacetes, a soma das entradas de uma coluna da matriz de incidência é zero.

Demonstração. Exercício. □

4 Famílias de grafos

Nesta secção, consideramos apenas grafos. Recorde que um grafo \mathcal{G} é um par ordenado $(\mathcal{V}, \mathcal{A})$, onde \mathcal{V} é um conjunto não vazio finito e \mathcal{A} é um subconjunto de $\{\{U, V\} : U, V \in \mathcal{V}\}$.

Os grafos \mathcal{G} e \mathcal{H} são isomorfos, $\mathcal{G} \cong \mathcal{H}$ se existir uma bijecção $f : V_{\mathcal{G}} \rightarrow V_{\mathcal{H}}$ tal que $u \leftrightarrow v \Leftrightarrow f(u) \leftrightarrow f(v)$. Ou seja, existe uma bijecção entre o conjunto dos vértices dos dois grafos de tal forma que a incidência é preservada. Na prática, significa que se toma outra indexação para os vértices. Se φ for o isomorfismo, então escrever-se-á $\mathcal{G} \cong_{\varphi} \mathcal{H}$.

Proposição 4.1. Se $\mathcal{G} \cong_{\varphi} \mathcal{H}$ então

1. $\#\mathcal{V}_{\mathcal{G}} = \#\mathcal{V}_{\mathcal{H}}$
2. $\#\mathcal{A}_{\mathcal{G}} = \#\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$
3. para $v \in \mathcal{V}_{\mathcal{G}}$, $\deg(v) = \deg(\varphi(v))$.

Dados dois grafos, uma forma possível de se testar o isomorfismo é percorrer **todas** as bijecções entre os dois conjuntos de vértices (repare que por (1) da proposição estes são necessariamente equipotentes) até se encontrar uma que preserva a vizinhança. Suponha que $\#\mathcal{V}_{\mathcal{G}} = \#\mathcal{V}_{\mathcal{H}} = n$. Então existem $n!$ bijecções possíveis, o que se para grafos com poucos vértices é realizável, torna-se num algoritmo pouco prático para outros grafos. Tal suscita o chamado *Problema do Isomorfismo de Grafos*, que pode ser exposto, de uma forma ingénua assim:

- apresentar um algoritmo que, de forma “prática”, encontra o isomorfismo ou mostra que não existe;

- em alternativa ao ponto anterior, mostrar que tal algoritmo “prático” não existe.

Existem formas imediatas de teste de *não isomorfismo*, nomeadamente fazendo uso da proposição anterior. Em primeiro lugar, existe a condição de equipotência tratada nos pontos (1) e (2) da proposição. Por exemplo, não são isomorfos



O facto de (1) e (2) da proposição serem satisfeitos não implica que os grafos sejam isomorfos. Mostre por que não são isomorfos, usando (3) da proposição,



Vejamos como se relacionam as matrizes de adjacência de dois grafos isomorfos. Para tal, dizemos que duas matrizes A, B , quadradas com a mesma ordem, são *permutacionalmente semelhantes*, $A \approx_{per} B$, se existir uma matriz permutação P (ou seja, é obtida da matriz identidade fazendo trocas de linhas) tal que $A = PBP^T$.

Proposição 4.2. *Sejam A_G e A_H matrizes de adjacência dos grafos \mathcal{G} e \mathcal{H} , respectivamente. Então*

$$\mathcal{G} \cong \mathcal{H} \Leftrightarrow A_G \approx_{per} A_H.$$

Um grafo \mathcal{G} está contido num grafo \mathcal{H} , $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$, se $\mathcal{V}_G \subseteq \mathcal{V}_H$ e $\mathcal{A}_G \subseteq \mathcal{A}_H$. \mathcal{G}' é subgrafo de \mathcal{G} se $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$.

Um subgrafo \mathcal{G}' de \mathcal{G} é *gerador* se $\mathcal{V}_{G'} = \mathcal{V}_G$. Ou seja, tem exactamente o mesmo conjunto de vértices.

Para $S \subseteq \mathcal{V}_G$, o subgrafo induzido por S , $\langle S \rangle$, é o subgrafo maximal \mathcal{G}' de \mathcal{G} com $\mathcal{V}_{G'} = S$. Este subgrafo é denotado por \mathcal{G}_S .

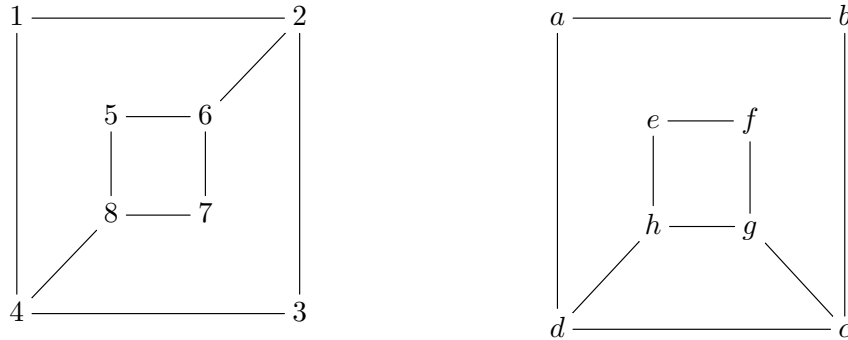
A proposição seguinte dá-nos outra forma de mostrar o não isomorfismo entre grafos (ou seja, fornece mais uma condição necessária do isomorfismo de grafos).

Proposição 4.3. *Se $\mathcal{G} \cong_{\varphi} \mathcal{H}$ e $S \subseteq \mathcal{V}_G$ então*

$$\mathcal{G}_S \cong \mathcal{H}_{\varphi(S)}.$$

Demonstração. Exercício. □

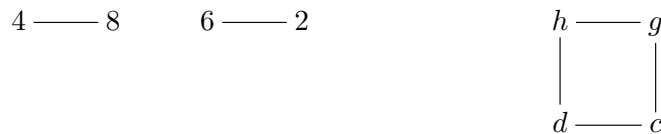
Mostremos o não isomorfismo entre os grafos seguintes, denotados respectivamente por \mathcal{G} e \mathcal{H} :



Suponha, por absurdo, que tal isomorfismo φ existe. Os vértices de grau 3 são 2,4,6 e 8 do primeiro grafo e c, d, g e h do segundo. Portanto, e como os graus são preservados, φ aplica $\{2, 4, 6, 8\}$ de alguma forma em $\{c, d, g, h\}$; ou seja, $\varphi(\{2, 4, 6, 8\}) = \{c, d, g, h\}$. Fazendo uso da proposição anterior, segue que

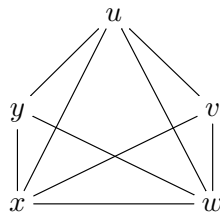
$$\mathcal{G}_{\{2,4,6,8\}} \cong_{\varphi} \mathcal{H}_{\{c,d,g,h\}}.$$

Mas tal não é verdade, já que se representam, respectivamente, por

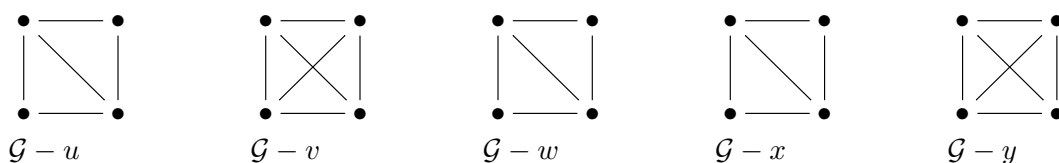


Um problema que se coloca é, de alguma forma, o recíproco da proposição. Por outras palavras, se certo tipo de subgrafos induzidos são isomorfos então serão os grafos isomorfos? Vejamos que tipo de subgrafos induzidos nos interessam.

Para $v_i \in \mathcal{V}_{\mathcal{G}}$, $\mathcal{G} - v_i$ é o subgrafo de \mathcal{G} induzido por $\mathcal{V}_{\mathcal{G}} \setminus \{v_i\}$. Ou seja, $\mathcal{G} - v_i$ denota $\mathcal{G}_{\mathcal{V}_{\mathcal{G}} \setminus \{v_i\}}$. A lista de subgrafos de vértice eliminado é a representação dos subgrafos $\mathcal{G} - v_i$, onde v_i percorre o conjunto dos vértices. Por exemplo, o grafo



a que voltaremos um pouco mais adiante, tem a seguinte lista de subgrafos de vértice eliminado:



O *Problema da Reconstrução do Grafo* consiste em decidir se dois grafos não isomorfos com 3 ou mais vértices podem ter a mesma lista de subgrafos de vértice eliminado.

Conjectura 4.4 (P.J. Kelly & S.M. Ulam (1941)). *Sejam \mathcal{G}, \mathcal{H} grafos com*

$$\mathcal{V}_{\mathcal{G}} = \{v_1, \dots, v_n\}, \mathcal{V}_{\mathcal{H}} = \{u_1, \dots, u_n\}, n \geq 3.$$

Sejam ainda

$$\mathcal{G}_i = \mathcal{G} - v_i, \mathcal{H}_i = \mathcal{H} - u_i.$$

Se, para $i = 1, \dots, n$,

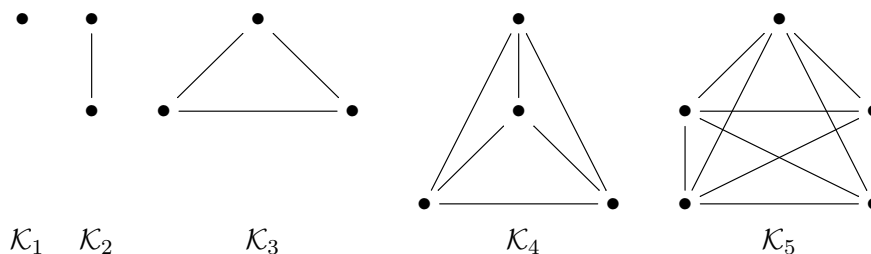
$$\mathcal{G}_i \cong \mathcal{H}_i,$$

então

$$\mathcal{G} \cong \mathcal{H}.$$

Acrescente-se que, de forma independente, em 1977 foi mostrado por B. McKay e por A. Nijenhuis, recorrendo a computadores, que um possível contra-exemplo da conjectura teria que ter, pelo menos, 10 vértices.

Recorde a definição de digrafo completo. Ao se considerarem grafos (ou seja, digrafos simétricos), a noção de grafo completo é a induzida pelo digrafo, com a *nuance* de se assumir que o digrafo é simples. Ou seja, um grafo simples (isto é, sem lacetes), diz-se *completo* de quaisquer dois vértices são vizinhos um do outro. Um n -grafo completo é denotado por \mathcal{K}_n .



Um *bigrafo* ou *grafo bipartido* $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ é tal que $\mathcal{V}_{\mathcal{G}} = V_1 \cup V_2$, com $V_1, V_2 \neq \emptyset$ mas $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, e $\forall x \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}} x \subseteq V_1 \cup V_2$. Ou seja, toda a aresta é incidente com um vértice de V_1 e um vértice de V_2 . Portanto, existe uma partição do conjunto dos vértices de tal forma que dois vértices na mesma componente da partição não são vizinhos.

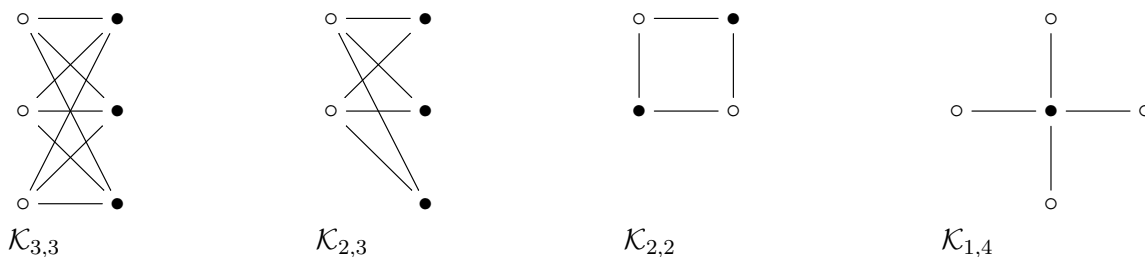
Proposição 4.5. *Todo o grafo bipartido é simples.*

Um bigrafo é *completo* se tiver todas as arestas possíveis incidentes com um vértice de V_1 e um de V_2 . De outra forma,

$$((v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_2) \vee (v_1 \in V_2 \wedge v_2 \in V_1)) \Leftrightarrow \{v_1, v_2\} \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}}.$$

Ou ainda, quaisquer dois vértices $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$ são vizinhos.

Se $\#V_1 = m, \#V_2 = n$ então com grafo bipartido completo com $V_1 \cup V_2$ como vértices denota-se por $\mathcal{K}_{m,n}$. Por exemplo,



O grafo bipartido completo $\mathcal{K}_{1,n}$ chama-se, por razões óbvias, *estrela*.

Note-se que $\#\mathcal{A}_{\mathcal{K}_{m,n}} = mn$.

Teorema 4.6 (Teorema de Euler). *Seja G um (p, q) -grafo. Então*

$$\sum_{v_i \in V_G} \deg(v_i) = 2q.$$

Demonstração. A demonstração é feita por indução sobre o número de arestas.

Prove-se o resultado para grafos $(p, 1)$. Ou seja, o grafo tem p vértices e 1 aresta ($p \geq 2$). Tem-se então que existem apenas 2 vértices v_i, v_j incidentes. Ou seja, $\deg(v_i) = \deg(v_j) = 1$ e $\deg(v_k) = 0$, para $k \neq i, j$. A igualdade do teorema de Euler é satisfeita de forma imediata.

Suponhamos agora que a igualdade é válida para grafos (p, q) . Pretende-se que tal é suficiente para a validade da igualdade em grafos $(p, q + 1)$. Seja, então, G um grafo com p vértices e $q + 1$ arestas. Sejam x_i uma aresta de G fixa arbitrariamente e $G' = (V_G, A_G \setminus \{x_i\})$. Ora G' é um grafo (p, q) , pelo que a hipótese de indução mostra que

$$\sum_{v_i \in V_{G'}} \deg(v_i) = 2q.$$

Ao incluirmos a aresta x_i , esta contribui com 2 unidades na soma total dos graus dos vértices de G . Logo, e recordando que $V_G = V_{G'}$,

$$\sum_{v_i \in V_G} \deg(v_i) = 2q + 2 = 2(q + 1).$$

□

Corolário 4.7. *O número de vértices de um grafo com grau ímpar é par.*

Dado G um grafo simples (p, q) , então

$$\forall v \in V_G, 0 \leq \deg(v) \leq p - 1.$$

Denota-se por

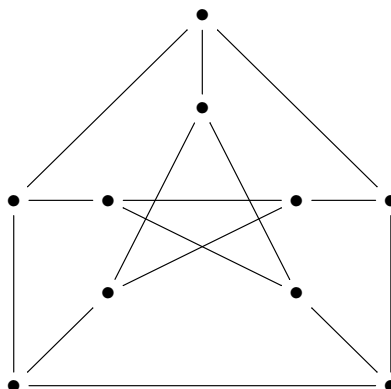
$$\min \deg G = \delta(G) = \min_{v \in V_G} \deg(v),$$

$$\max \deg G = \Delta(G) = \max_{v \in V_G} \deg(v).$$

Se $\delta(G) = \Delta(G) = r$, então $\deg(v) = r, \forall v \in V_G$. Neste caso, diz-se que o grafo é regular com grau r , ou que o grafo é k -regular.

Um grafo G regular com $\deg(G) = 3$ chama-se um grafo cúbico.

Os grafos platónicos são os correspondentes² aos cinco sólidos platónicos³. Saliente-se, no entanto, que um grafo cúbico não é necessariamente o cubo. Como exemplo, repare no grafo de Petersen:



Corolário 4.8. *Todo o grafo cúbico tem um número par de vértices.*

5 Caminhos e conexidade

5.1 Em grafos

Um caminho⁴ num grafo G é uma sucessão de vértices e arestas

$$v_0, x_1, v_1, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n,$$

com $v_i \in V_G$, tais que $x_i = \{v_{i-1}, v_i\}$. Ou seja, $v_{i-1} \leftrightarrow v_i$. Num digrafo, as arestas são tais que $x_i = (v_{i-1}, v_i)$, ou seja, a extremidade inicial de x_i é v_{i-1} e a final é v_i .

Visto não considerarmos multigrafos, esse caminho é denotado por $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$, ou mais simplesmente

$$v_0 v_1 v_2 \dots v_n,$$

e dizemos que existe um caminho $v_0 - v_n$. Neste caso, v_n é alcançável de v_0 . Um caminho diz-se trivial se só tiver um vértice, sem lacete.

Definições análogas podem ser dadas para digrafos, como veremos mais adiante.

Um caminho é

- *fechado* se $v_0 = v_n$, e *aberto* caso contrário;

²Da forma natural, os vértices [resp. arestas] do grafo são os vértices [resp. arestas] do sólido.

³A saber: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

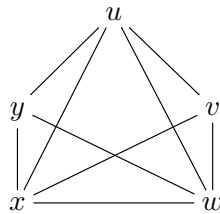
⁴*walk*, em inglês.

- *simples*⁵ se $x_i \neq x_j$, para $i \neq j$;
- *elementar*⁶ se $v_i \neq v_j$, para $i \neq j$, excepto possivelmente o inicial e o final.

Note-se com um caminho elementar é simples, mas que o contrário é falso.

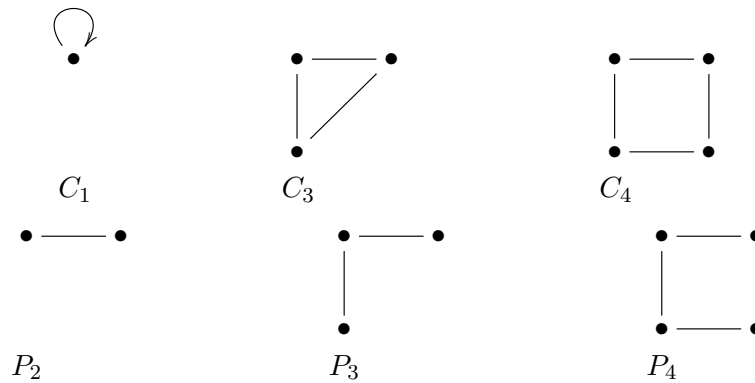
Um *ciclo*⁷ é um caminho fechado elementar não trivial. Um *circuito*⁸ é um caminho fechado simples não trivial.

Recuperamos um grafo que apresentámos atrás:



Um caminho $u - v$ é, por exemplo, $uwxyuv$. Repare que este caminho repete um vértice mas não repete nenhuma aresta. Portanto, é um caminho simples que não é elementar. Já $xvux$ é um ciclo e $xvuxywx$ é um circuito.

Um grafo que é um ciclo com n vértices denota-se por C_n , e um grafo que é um caminho elementar com n vértices denota-se por P_n . C_3 é usualmente denominado *triângulo*.



Um grafo é *conexo* se, para quaisquer vértices v_i, v_j distintos, existe um caminho $v_i - v_j$. Portanto, um grafo é conexo se quaisquer dois vértices forem alcançáveis um do outro.

Dado um grafo \mathcal{G} , podemos definir a seguinte relação em $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$, que é de equivalência:

$$v_i \rho v_j \text{ se existe um caminho } v_i - v_j.$$

⁵ *trail*, em inglês.

⁶ *path*, em inglês.

⁷ *cycle*, em inglês.

⁸ *circuit*, em inglês.

As componentes conexas (ou simplesmente componentes) são os subgrafos induzidos pelas classes de equivalência. Ou seja, uma componente conexa é um subgrafo maximal conexo de G .

O comprimento $\ell(\gamma)$ de um caminho γ é o número de arestas desse caminho. Denota-se por $\Gamma_{i,j}^k$ o conjunto de todos os caminhos de comprimento k do vértice V_i para o vértice V_j , e por Γ_{uv} o conjunto de todos os caminhos $u - v$. Se $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ contiver um caminho fechado $\omega = (v_k, \dots, v_k)$, uma redução ϕ do caminho γ , $\gamma - \omega$, é o caminho obtido de γ a que se retirou todas as arestas e vértices de ω à exceção de v_k . De forma recíproca, a concatenação de dois caminhos $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_k), \omega = (v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ é o caminho $\gamma \circ \omega = (v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$.

Proposição 5.1. *Todo o caminho não fechado γ contém um caminho elementar.*

Demonstração. Se γ é caminho elementar, então não há nada a provar. Suponhamos então que γ não é um caminho elementar. Ou seja, existe um vértice v_k repetido em γ ,

$$\gamma = v_0 v_1 \cdots v_{i-1} v_k v_{i+1} \cdots v_{j-1} v_k v_{j+1} \cdots v_n.$$

Sejam $\omega = v_k v_{i+1} \cdots v_{j-1} v_k$ e $\gamma' = \gamma - \omega$. Se γ é um caminho elementar, então a prova está concluída; caso contrário, repete-se o processo até se obter um caminho elementar. \square

A distância $d(u, v)$ entre os vértices u e v distintos é o comprimento do menor caminho elementar que os une; caso não exista um tal caminho, $d(u, v) = \infty$. Assume-se que $d(u, u) = 0$. Note-se que:

1. $d(u, v) \geq 0$ e $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$;
2. $d(u, v) = d(v, u)$;
3. $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

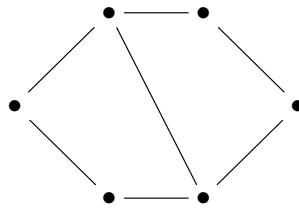
Uma geodésica entre u e v é um caminho elementar minimal $u - v$. O diâmetro $d(G)$ de um grafo conexo G é o comprimento da maior geodésica.

Proposição 5.2. *Um n -grafo \mathcal{G} , com $n \geq 2$, é bipartido se e só se não tiver ciclos de comprimento ímpar.*

Demonstração. Suponhamos que no grafo bipartido \mathcal{G} (sendo $\{V_1, V_2\}$ a partição do conjunto dos vértices de \mathcal{G} na definição de grafo bipartido) existe um ciclo $\gamma = v_0 \cdots v_n v_0$ tal que $\ell(\gamma)$ é ímpar, ou seja, que tem um número ímpar de arestas. Ou seja, o ciclo tem um número ímpar de vértices, já que é um caminho fechado e nenhum vértice surge repetido. Então $v_0, v_n \in V_1$ ou em alternativa $v_0, v_n \in V_2$. Se $v_n \in V_1$ e como $\{v_n, v_0\}$ é aresta de γ , segue que $v_0 \in V_2$ e portanto $v_0 \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$. O caso $v_n \in V_2$ é análogo.

Suponhamos agora que \mathcal{G} é um n -grafo, com $n \geq 2$, sem ciclos de comprimento ímpar. Sem perda de generalidade, assume-se com \mathcal{G} é conexo. Fixemos $u \in V_{\mathcal{G}}$ e definamos os conjuntos $V_1 = \{v \in V_{\mathcal{G}} : d(u, v) \text{ é par}\}$ e $V_2 = \{v \in V_{\mathcal{G}} : d(u, v) \text{ é ímpar}\}$. Como é óbvio, $\{V_1, V_2\}$ é uma partição de $V_{\mathcal{G}}$. Resta-nos mostrar que vértices no mesmo elemento da partição não são vizinhos. Por absurdo, vamos supor que existe $e = \{w, v\}$ com $w, v \in V_1$ (o caso de ambos pertencerem a V_2 é análogo). Sendo o grafo conexo, então $u - v$ e $u - w$. Sejam γ_v, γ_w as geodésicas entre u e v e entre u e w , respectivamente. Então existe o vértice P , comum aos dois caminhos e que torna a secção $u \cdots P$ de comprimento máximo. Ou seja, P é o último vértice comum às duas geodésicas, e portanto as secções $u \cdots P$ de γ_1 e $u \cdots P$ de γ_2 têm o mesmo comprimento. Como $w, v \in V_1$ então tem igual paridade o comprimento das secções $P \cdots v$ e $P \cdots w$. Se forem pares, então a concatenação dos caminhos γ_1, e, γ_2 define um ciclo de comprimento ímpar. O mesmo se conclui se os comprimentos forem ímpares, o que contradiz a hipótese do grafo não ter ciclos ímpares. \square

O grafo seguinte não contém ciclos de comprimento ímpar



pelo que é bipartido. Como exercício, descreva os ciclos e encontre a partição do conjunto dos vértices.

Proposição 5.3. *Todo o circuito contém um ciclo.*

Demonstração. Seja ω um circuito num grafo \mathcal{G} . Se ω é ciclo então não há nada a provar. Se não é, então existem dois vértices v_0, v_k repetidos. Ou seja, existe uma secção ϕ do circuito ω que é um caminho fechado. Como ω não tem arestas repetidas, então ϕ é um circuito. Se ϕ é ciclo, então a prova está terminada. Se não, então repete-se o processo até se obter um ciclo. \square

Vejam agora como se pode mostrar o não isomorfismo de grafos à custa da noção de conexidade que temos estudado nesta secção.

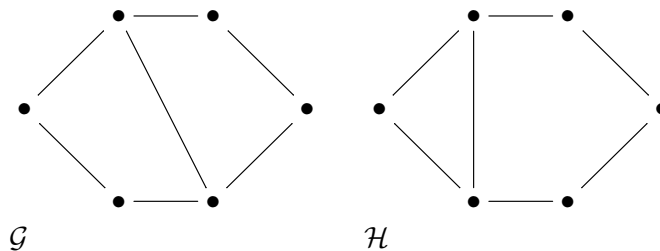
Teorema 5.4. *Supondo $\mathcal{G} \cong_{\varphi} \mathcal{H}$,*

1. *se $\gamma = v_0 v_1 \cdots v_k$ é um caminho de comprimento r de \mathcal{G} então $\varphi(\gamma) = \varphi(v_0) \varphi(v_1) \cdots \varphi(v_k)$ é um caminho de comprimento r de \mathcal{H} .*
2. *a imagem por φ de um caminho simples [resp. caminho elementar, ciclo] é um caminho simples [resp. caminho elementar, ciclo] com o mesmo comprimento.*

3. \mathcal{G} e \mathcal{H} têm o mesmo número de componentes conexas.

Demonstração. Exercício. □

Como aplicação do resultado anterior, os grafos seguintes não são isomorfos:



De facto, \mathcal{H} contém um ciclo C_3 o que não sucede com \mathcal{G} .

No resultado seguinte, faz-se uso da noção de matriz de adjacência definida atrás para se estudar não só a alcançabilidade mas também o comprimento dos caminhos possíveis entre dois vértices.

Proposição 5.5. *Seja A a matriz de adjacência do grafo \mathcal{G} , para uma ordenação fixa previamente dos vértices. A entrada $A_{[u,v]}^r$ indica o número de caminhos $u - v$ de comprimento r .*

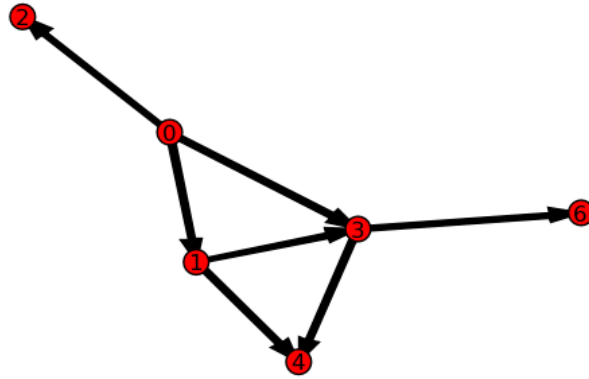
5.2 Em digrafos

Um *caminho dirigido* num digrafo G do vértice v para o vértice w é uma sucessão (finita) de vértices e arestas

$$v = v_0, x_1, v_1, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n = w,$$

com $v_i \in V_G$, tais que $x_i = (v_{i-1}, v_i) \in A_G$. Ou seja, $v_{i-1} \in \Gamma^-(v_i)$. As arestas são tais que a extremidade inicial de x_i é v_{i-1} e a final é v_i . Dizemos, neste caso, que existe uma *conexão* de v para w e escrevemos $v \rightarrow w$.

No digrafo representado por



temos, por exemplo, $0 \rightarrow 4$ e $0 \rightarrow 6$, mas $4 \not\rightarrow i$, para $i = 0, \dots, 6$.

Um par de vértices diz-se *fortemente conectado* se existir uma conexão de cada um deles para o outro. Se existir conexão de apenas um deles para o outro, então teremos um par *unilateralmente conectado*. Um digrafo diz-se *fortemente conexo* se cada par de vértices for fortemente conectado, e *unilateralmente conexo* se cada par de vértices for unilateralmente conectado. Um digrafo diz-se *fracamente conexo* se o grafo suporte⁹ for conexo.

Exercício 5.6. *Indique que par de vértices do digrafo anterior são fortemente conectados.*

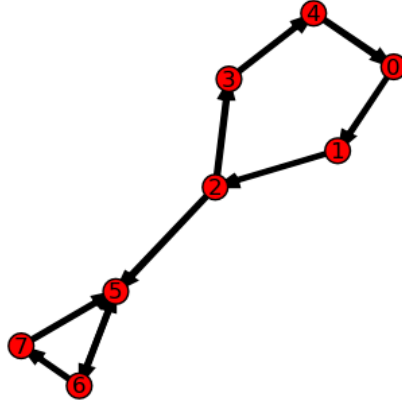
A um caminho dirigido de um vértice para ele mesmo dá-se o nome de *caminho fechado dirigido*. Um caminho fechado dirigido diz-se um *circuito dirigido* se os arcos que o compõem forem distintos, e um *ciclo dirigido* se todos os vértices que o compõem forem distintos.

A relação definida por xRw se $\{v, w\}$ forem fortemente conectados (ou seja, $v \rightarrow w$ ou $w \rightarrow v$) é uma relação de equivalência, e corresponde à partição de V em classes de equivalência, designadas por *componentes fortemente conexas* do digrafo.

O digrafo seguinte, embora o grafo suporte seja conexo, não é fortemente conexo. Por isso se diz que é fracamente conexo. Este digrafo tem como matriz de adjacência, tomando a ordem natural da enumeração dos vértices,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

⁹Ou seja, o grafo obtido do digrafo onde as arestas perdem a orientação.



Quantas componentes fortemente conexas existem?

Teorema 5.7. *Seja A a matriz de adjacência do digrafo \mathcal{G} , para uma ordenação fixa previamente dos vértices. A entrada $A_{[u,v]}^r$ indica o número de caminhos dirigidos de u para v de comprimento r .*

Demonstração. A prova é feita por indução sobre r . Para $r = 1$, o resultado é óbvio. Suponha que é válido para $r - 1$. Ora $A_{[u,v]}^r = \sum_{p \in \mathcal{V}} A_{[u,p]}^{r-1} A_{[p,v]}$ pela forma como o produto matricial está definido. Mas

$$A_{[u,p]}^{r-1} A_{[p,v]} = \begin{cases} A_{[u,p]}^{r-1} & \text{se } (u, p) \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como $A_{[u,p]}^{r-1}$ é um número de $r - 1$ -caminhos entre u e p , que iguala o número de r caminhos entre u e v que passam por $p \in \Gamma^-(v)$, temos que $\sum_{p \in \mathcal{V}} A_{[u,p]}^{r-1} A_{[p,v]}$ é o número de r -caminhos entre u e v . □

No digrafo representado atrás, e sabendo que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

não existem, por exemplo, caminhos dirigidos de comprimento 2 de 7 para qualquer outro vértice que não o 6. Sabendo ainda que

$$A^6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

não existem caminhos dirigidos de comprimento 6 de qualquer vértice que não o 0 e que termine em 1. E que existem 3 caminhos dirigidos de comprimento 6 de 2 para 5.

Corolário 5.8. *Se A é a matriz de adjacência de \mathcal{G} então a entrada (i, j) de*

$$B_r = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^r$$

indica o número de caminhos, de comprimento não superior a r , entre v_i e v_j .

Proposição 5.9. *Sejam A a matriz de adjacência de \mathcal{G} , com m vértices, e*

$$B_m = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^m.$$

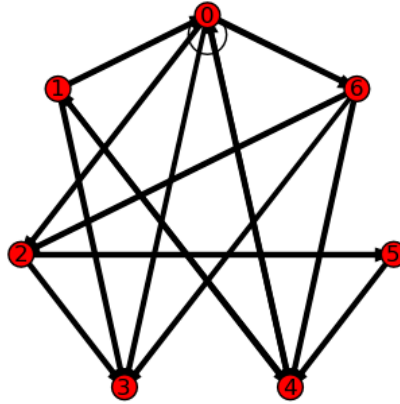
Então \mathcal{G} é fortemente conexo se e só se B_m não tiver entradas nulas.

Para o digrafo considerado acima,

$$B_8 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 9 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 13 & 9 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 14 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Logo, o digrafo não é fortemente conexo.

Exercício 5.10. *Considere o digrafo*



Indique uma matriz de adjacência. Ele é fortemente conexo? E o grafo suporte é conexo?

A matriz de alcançabilidade de um digrafo com n vértices é uma matriz $R = [r_{ij}]$ em que $r_{ij} = 1$ se existir um caminho dirigido de i para j e 0 caso contrário. Como é evidente, um digrafo é fortemente conexo se e só se os elementos da sua matriz de alcançabilidade forem todos iguais a 1.

Uma forma alternativa de se definir matriz de alcançabilidade (equivalente, como é óbvio, com a apresentada) de um digrafo com n vértices é a de considerar a matriz de adjacência A como matriz booleana, e tomar $R = A + A^2 + \dots + A^m$. Recorde que as operações na álgebra de Boole estão definidas como

$$\begin{array}{c|c|c}
 + & 0 & 1 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c|c|c}
 * & 0 & 1 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & 0 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 .$$

No cálculo proposicional, a operação $+$ corresponde ao OR ou \vee , e a $*$ ao AND ou \wedge .

Seja R uma relação binária num conjunto finito V com m elementos. Ou seja, $R \subseteq V \times V$. O fecho transitivo R^* de R é o invólucro transitivo de R . Ou seja, é o menor conjunto (para a relação de ordem \subseteq) que contém R e é uma relação transitiva¹⁰.

A relação R pode ser identificada da forma natural com o digrafo $\mathcal{G} = (V, R)$. A relação binária $R^2 = R \circ R$ está definida por

$$R \circ R = \{(u, v) \in V \times V \mid \exists w \in R (u, w), (w, v) \in R\}.$$

Ou seja, R^2 pode ser encarado como um digrafo com m vértices e arestas (u, v) se existir um caminho dirigido de comprimento 2 de u para v . De forma análoga,

$$R^k = \{(u, v) \in V \times V \mid \text{existe um caminho de comprimento } k \text{ de } u \text{ para } v\}.$$

¹⁰Recorde que a relação binária α é transitiva se $a \alpha b$ e $b \alpha c$ força necessariamente que $a \alpha c$.

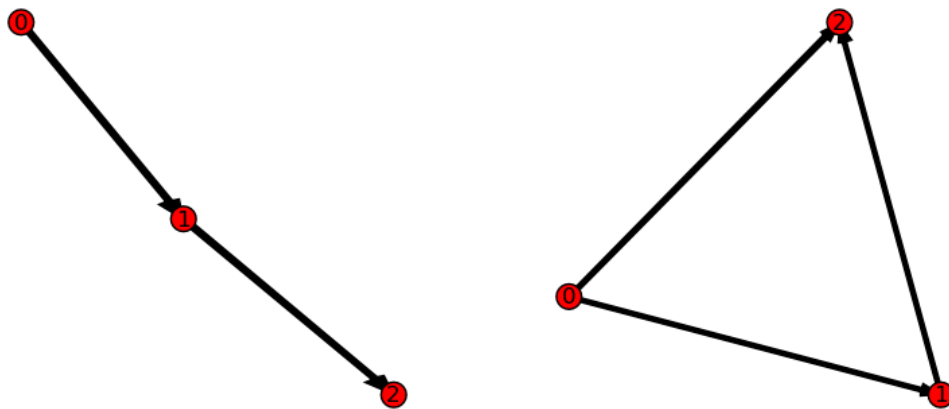


Figura 3: Um digrafo G e o seu fecho transitivo G^*

O fecho transitivo R^* de R pode agora ser visto como o conjunto dos elementos (u, v) , com $u, v \in V$, para os quais $u \rightarrow v$, ou seja, existe um caminho dirigido de u para v .

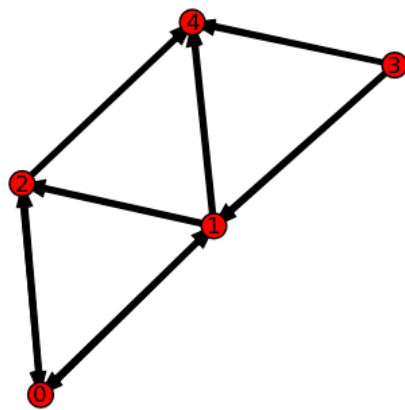
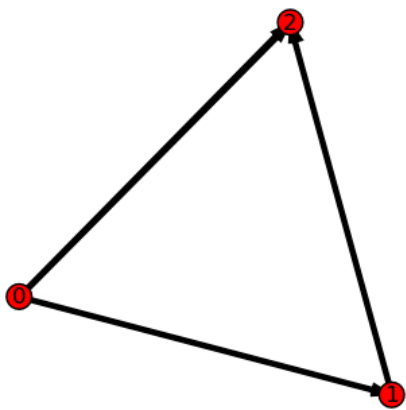
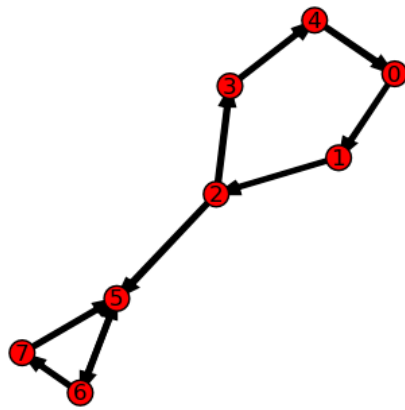
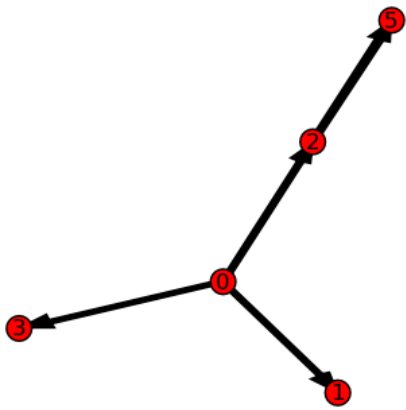
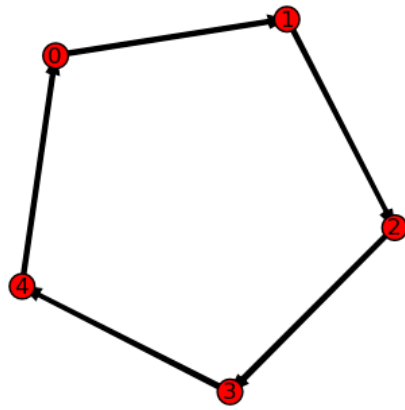
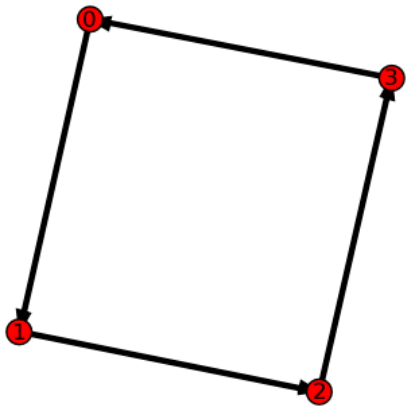
Teorema 5.11. *Seja R uma relação binária num conjunto V com m elementos e considere o digrafo $G = (V, R)$. Então*

1. $R^* = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^m$ é o fecho transitivo de R .
2. A matriz de alcançabilidade de G iguala a matriz de adjacência de $G^* = (V, R^*)$.

Na figura acima, a matriz de adjacência de G é a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e a de G^* é a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 5.12. *Encontre o fecho transitivo e a matriz de alcançabilidade dos digrafos seguintes:*



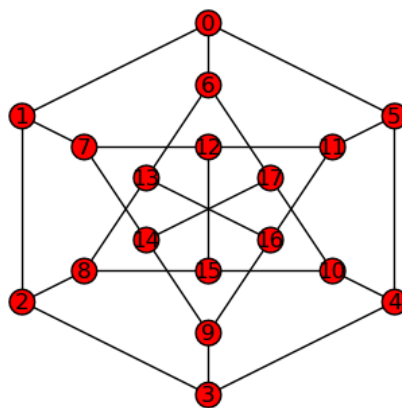
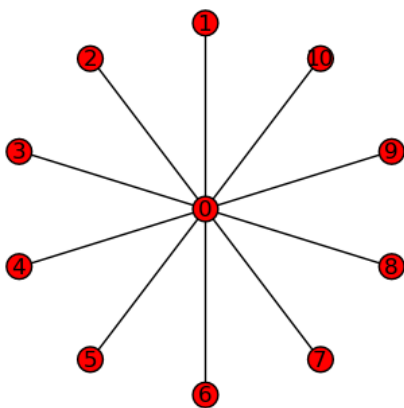
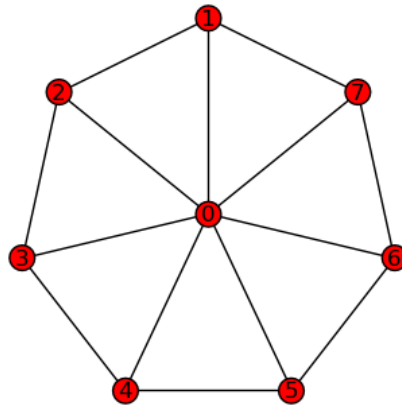
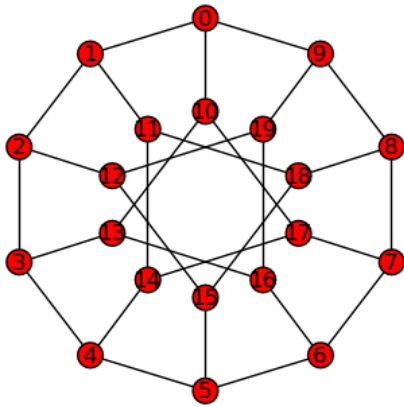
6 Grafos orientáveis

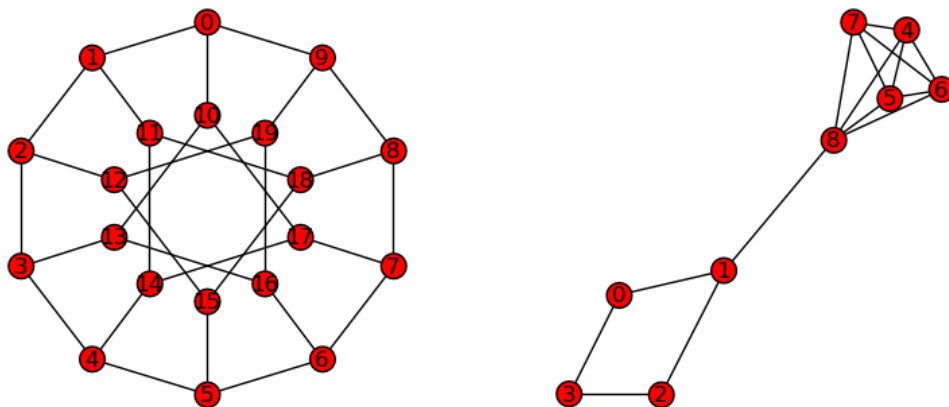
Se \mathcal{G} é um grafo, então o digrafo que se obtém substituindo cada aresta de \mathcal{G} por um arco é denominado de *orientação* de \mathcal{G} . Uma orientação de um grafo diz-se uma *orientação forte* se a orientação for fortemente conexa.

Um grafo diz-se *fortemente orientável* se possuir uma orientação forte. O resultado seguinte caracteriza os grafos fortemente orientáveis.

Teorema 6.1 (Teorema de Robbins). *Um grafo é fortemente orientável se e só se é conexo e não tem pontes.*

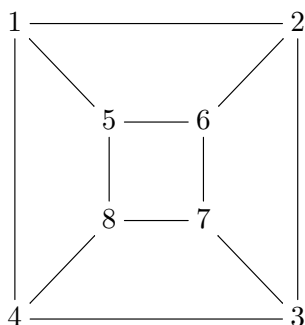
Exercício 6.2. *Dos grafos seguintes, indique os que são fortemente orientáveis.*





7 Grafos planares

Um grafo diz-se planar se for possível desenhá-lo de tal forma que duas arestas não se intersectem à excepção nos vértices inicial e final. Por exemplo, o cubo é um grafo planar já que pode ser desenhado como



Outro exemplo de grafo planar é K_4 (verifique!), e o objectivo desta secção é caracterizar tais grafos. Um resultado relevante no estudo da planaridade de grafos é o *Teorema de Kuratowski*, que passamos a enunciar:

Um grafo é planar se e só se não tem nenhum subgrafo homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$.

Antes de compreendermos o enunciado, é importante apresentar mais definições e alguns resultados.

Um grafo planar divide o plano em regiões, à custa das suas arestas. Cada uma destas divisões é denominada por face do grafo. Dois pontos do plano estão na mesma face se existir uma curva do plano que os une sem intersectar nenhuma das arestas do grafo. No grafo apresentado atrás, existem 6 faces (a face “exterior” é contabilizada! – esta é denominada

por face infinita, ou face exterior). A fronteira de uma face, $fr(F)$, é o conjunto das arestas que delimitam a face F , ou que estão contidas em F .

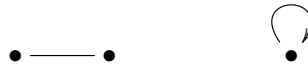
Teorema 7.1 (Fórmula de Euler). *Dado um grafo planar conexo (p, q) com f faces,*

$$p + f = q + 2.$$

Demonstração. Se $f = 1$ então o grafo é acíclico, e sendo conexo segue que é uma árvore. Como foi provado na secção anterior, $q = p - 1$ e a fórmula é válida.

Suponhamos agora que $f > 1$; a igualdade é provada por indução sobre o número de arestas.

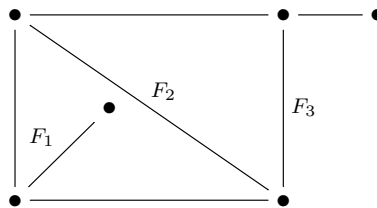
Se $q = 1$ então $p = 2$ e $f = 1$, ou então $p = 1$, e portanto $f = 2$. Uma representação destes dois casos é, respectivamente,



Em qualquer um dos casos, a fórmula é válida quando $q = 1$.

Suponhamos agora que $f - q + p = 2$ para grafos com mais que 1 face com q arestas. Seja \mathcal{G} um grafo conexo com $q + 1$ arestas e mais que uma face. Seja F a face infinita. Existe então um ciclo γ contido na fronteira de F . Defina-se \mathcal{G}' como o grafo obtido de \mathcal{G} a que se retirou uma aresta e de γ . Tem-se que, como e é aresta de um ciclo, o grafo \mathcal{G}' é conexo, planar e com q arestas. Sejam f', q', p' o número de faces, arestas e vértices, respectivamente, de \mathcal{G}' . As igualdade seguintes são válidas: $p = p', q = q' + 1, f = f' + 1$. Se $f' > 1$, então pela hipótese de indução $f' - q' + p' = 2$, e logo $f - q + p = 2$. Se $f' = 1$ então $f' - q' + p' = 2$ pelo que foi visto no início da demonstração, o que implica que $f - q + p = 2$. \square

Vejamus um exemplo:



O grafo planar acima apresentado tem 3 faces, mas apenas uma delas tem um ciclo como fronteira.

Vejamus algumas consequências da fórmula de Euler:

Corolário 7.2. *Dado um (p, q) -grafo planar conexo com f faces tal que cada uma tem como fronteira um ciclo de comprimento n , então $q = \frac{n(p-2)}{n-2}$.*

Demonstração. Visto cada face ter n arestas e cada aresta está em fronteiras de 2 faces distintas, segue que $nf = 2q$. Sendo $p - q + f = 2$, então $np - nq + nf = 2n$. Como $nf = 2q$ segue que $q(2 - n) = 2n - np$. \square

Um grafo planar diz-se maximal se não for possível acrescentar uma aresta (que não seja lacete) de forma a não se perder a planaridade do grafo.

Corolário 7.3. *Se \mathcal{G} é um grafo (p, q) planar maximal então a fronteira de cada face é C_3 e $q = 3p - 6$. Se \mathcal{G} é um grafo (p, q) planar tal que a fronteira de cada face é C_4 então $q = 2p - 4$.*

Demonstração. Basta substituir n por 3 e 4, respectivamente. □

Visto o número máximo de arestas ocorrer quando a fronteira de cada face é C_3 , são válidos os resultados seguintes:

Corolário 7.4. *Dado \mathcal{G} um grafo (p, q) planar, com $p \geq 3$, então $q \leq 3p - 6$. Se \mathcal{G} não tem subgrafos do tipo C_3 então $q \leq 2p - 4$.*

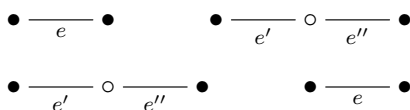
Corolário 7.5. *Os grafos K_5 e $K_{3,3}$ não são planares.*

Demonstração. Para K_5 , $q = 10 > 9 = 3p - 6$, e para $K_{3,3}$, $q = 9 > 8 = 2p - 4$. □

Definição 7.6. *Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}_{\mathcal{G}}, \mathcal{A}_{\mathcal{G}})$ um grafo.*

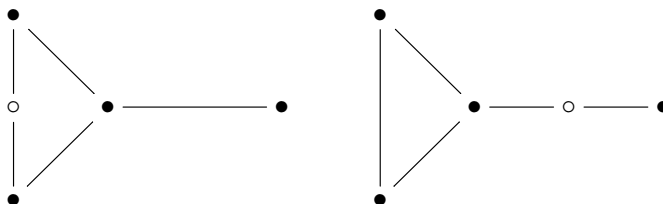
1. *Se $e = \{u, v\} \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}}$, com $u \neq v$, uma subdivisão de e consiste na inserção de w em $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$ e na substituição de e por $e' = \{u, w\}, e'' = \{w, v\}$.*
2. *Se $e = \{u, w\}, e' = \{w, v\}$ e $\deg(w) = 2$, uma contracção de w consiste na remoção de w de $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$ e na substituição de e, e' por $e'' = \{u, v\}$.*
3. *Uma subdivisão de \mathcal{G} é um grafo obtido de \mathcal{G} por subdivisão de arestas e/ou contracção de arestas.*

Um exemplo de cada um destes conceitos é, respectivamente,



Definição 7.7. *Dois grafos \mathcal{G}, \mathcal{H} são homeomorfos se uma subdivisão de \mathcal{G} for isomorfa a uma subdivisão de \mathcal{H} .*

Os grafos seguintes são homeomorfos mas não são isomorfos:

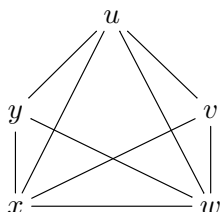


Recordamos, então, o enunciado do Teorema de Kuratowski:

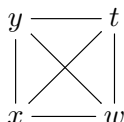
Teorema 7.8 (Teorema de Kuratowski). *Um grafo é planar se e só se não tem nenhum subgrafo homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$.*

Uma contracção elementar do grafo \mathcal{G} consiste na substituição de dois vértices u, v adjacentes por um novo vértice w , acrescentando-se arestas de tal forma que w seja vizinho de todos os vizinhos de u, v .

Por exemplo, considere o grafo



Vamos remover os vértices u e v , assim como as arestas adjacentes a eles, acrescentando um vértice t bem como arestas de forma a que t seja vizinho dos vértices que o eram de u ou de v :



Um grafo \mathcal{G} diz-se contractível num grafo \mathcal{H} se \mathcal{H} puder ser obtido de \mathcal{G} por contracções elementares. Por exemplo, o grafo apresentado atrás é contractível em K_4 .

O resultado seguinte dá-nos outra forma de caracterizar os grafos planares:

Teorema 7.9 (Teorema de Wagner-Harary-Tutte). *Um grafo é planar se e só se não tiver um subgrafo contractível em K_5 ou $K_{3,3}$.*

8 Árvores e florestas

Um grafo simples diz-se *acíclico* se não tiver ciclos.

Uma *árvore*¹¹ é um grafo acíclico conexo.

Um grafo acíclico chama-se *floresta*¹². Logo, as componentes conexas de uma floresta são árvores.

Lema 8.1. *Numa árvore com pelo menos uma aresta existem pelo menos dois vértices com grau 1.*

Demonstração. Seja N o diâmetro do grafo e seja $\gamma = v_0v_1v_2 \cdots v_N$ uma geodésica cujo comprimento é N , e suponhamos que v_0 tem grau maior que 1. Então v_0 é vizinho não só de v_1 mas também de outro vértice w . Se w é vértice de γ então γ teria um ciclo. Se w não é

¹¹ *Tree*, em inglês.

¹² *Forest*, em inglês.

vértice de γ então $\gamma' = wv_0 \circ \gamma$ seria um caminho elementar de comprimento $N + 1$, o que contraria a noção de diâmetro. O mesmo raciocínio se aplica a v_N . \square

Teorema 8.2. *Para \mathcal{G} um grafo (p, q) , as afirmações seguintes são equivalentes:*

1. \mathcal{G} é uma árvore;
2. Todos os vértices de G são ligados por um único caminho elementar;
3. G é conexo e $p = q + 1$;
4. G é acíclico e $p = q + 1$.

Demonstração. (1) \Leftrightarrow (2). Se \mathcal{G} é uma árvore, então é um grafo acíclico conexo. Existe um caminho $v_i - v_j$, e esse caminho contém um caminho elementar. A concatenação de dois caminhos elementares distintos daria origem a um ciclo, o que mostra a unicidade. Reciprocamente, a existência de um caminho elementar garante a conexidade do grafo. A unicidade impede a existência de ciclos (verifique a razão).

(1) \Rightarrow (3). A conexidade é imediata. Considere a propriedade $P(n)$: uma árvore \mathcal{G} com n vértices tem $n - 1$ arestas, onde $n \geq 2$. $P(2)$ é válida. Mostre-se que $P(n)$ é suficiente para $P(n + 1)$. Seja \mathcal{G} uma árvore com $n + 1$ vértices, e seja v_{n+1} um vértice escolhido de tal forma que $\deg(v_{n+1}) = 1$. Seja ainda $\mathcal{G}' = \mathcal{G} - v_{n+1}$. Temos que \mathcal{G}' tem n vértices, e que é uma árvore (verifique!), e portanto tem $n - 1$ arestas. Logo \mathcal{G} tem n arestas.

(1) \Rightarrow (4) é análogo.

(4) \Rightarrow (3). Se \mathcal{G} é acíclico, então é uma floresta com k componentes conexas $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_k$ que são árvores. Logo, aplicando (1) \Rightarrow (3) a cada uma destas componentes, obtemos $p - k$ arestas em \mathcal{G} , pelo que, e sabendo que \mathcal{G} tem q arestas e $p - 1 = q$, se conclui que $k = 1$, ou seja \mathcal{G} é conexo.

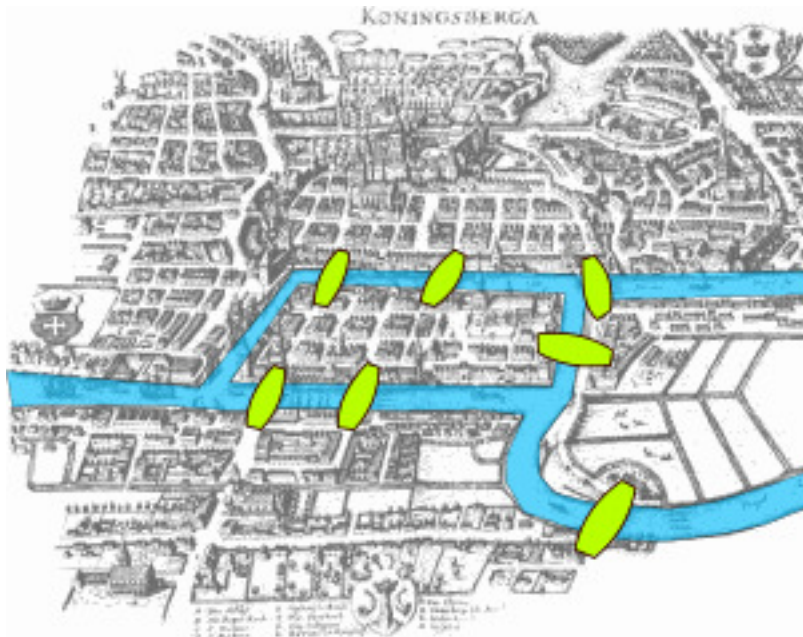
(4) \Rightarrow (2). Suponha que (4) é válida, mas que (2) é falsa. Ou seja, ou que existem dois caminhos elementares entre dois vértices, ou que não existe caminho elementar algum. O primeiro caso implica a existência de um ciclo, o segundo a não conexidade do grafo. \square

Finalmente, dizemos que uma aresta de \mathcal{G} é uma ponte se a eliminação dessa aresta aumenta o número de componentes do grafo. É imediato verificar-se que todas as arestas de uma árvore são pontes. De facto, se \mathcal{G} é uma árvore e v, w são vértices tais que $\{v, w\}$ não é ponte, então existe γ caminho $v - w$ que não contenha a aresta $\{v, w\}$. Ora a inclusão da aresta $\{v, w\}$ cria um caminho fechado, e portanto a existência de um ciclo.

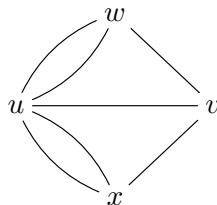
9 Grafos eulerianos e grafos hamiltonianos

Um *caminho euleriano* num grafo é um caminho simples que contém *todas* as arestas do grafo. Um *circuito euleriano* é um caminho euleriano fechado. Um grafo diz-se *grafo euleriano* se contém um circuito euleriano.

Historicamente, os caminhos eulerianos estão associados à gênese da teoria de grafos, essencialmente à custa das pontes de Königsberg (actual Caliningrado, no enclave russo entre a Polónia e a Lituânia). A questão era saber se seria possível passar exactamente uma vez em cada ponte, voltando ao ponto de partida.



Em 1736, Leonhard Euler mostrou que tal não é possível. O multi-grafo associado ao problema é



Teorema 9.1. *Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}_{\mathcal{G}}, \mathcal{A}_{\mathcal{G}})$ um (multi-)grafo. São equivalentes:*

1. \mathcal{G} é euleriano.
2. $\deg(v)$ é par, para todo o $v \in \mathcal{V}_{\mathcal{G}}$.
3. $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ é a união de ciclos disjuntos.

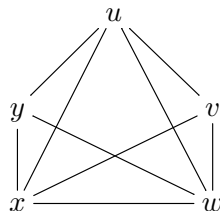
Demonstração. (1) \Rightarrow (2). Seja γ um circuito euleriano. Como passa por todas as arestas, então passa por todos os vértices. Para qualquer vértice v , γ passa por v , e como não repete arestas, então o número de arestas que incidem em v é par.

(2) \Rightarrow (3). Suponhamos agora que $\deg(v)$ é par. Como o grafo é conexo, então o grau de qualquer vértice é um par não nulo. Portanto, o grafo não é uma árvore, e portanto existe um ciclo γ em \mathcal{G} . Defina-se o grafo \mathcal{G}' como o grafo obtido de \mathcal{G} removendo as arestas de

γ . Note-se que os graus dos vértices de \mathcal{G}' continuam a ser números pares. Se \mathcal{G}' não tem arestas (o que corresponde ao caso em que γ contém todas as arestas de \mathcal{G}) então (3) está provado. Caso contrário, repete-se o algoritmo de remoção de arestas.

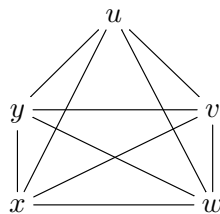
(3) \Rightarrow (1). Seja γ um ciclo da partição do conjunto das arestas. Se γ é o único ciclo, então \mathcal{G} é euleriano. Caso contrário, existe um outro ciclo γ' com um vértice v comum com γ (recorde que o grafo é conexo). Considere a concatenação $\gamma \circ \gamma'$. Este caminho, iniciado (e terminado) em v é um circuito. Repetindo o algoritmo, obtemos um circuito que contém todas as arestas, e logo o grafo é euleriano. \square

Como aplicação, o teorema anterior mostra que um grafo cúbico (e em particular o cubo e o grafo de Petersen) não é euleriano. O grafo

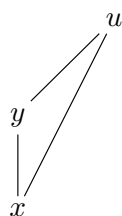


também não é euleriano, já que o grau do vértice y (e de v) não é par.

A demonstração do teorema anterior, por outro lado, fornece-nos uma construção de um circuito euleriano, no caso de grafo dado ter os vértices de grau par. Considere, como exemplo, o grafo K_5 :



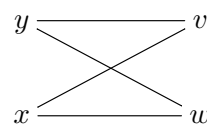
Os ciclos disjuntos (nas arestas) que formam o grafo são



$$\gamma_1 = uxyu$$



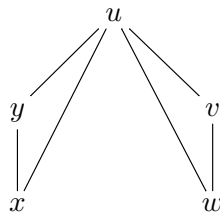
$$\gamma_2 = uwvu$$



$$\gamma_3 = ywxvy$$

Atentando, em primeiro lugar, nos ciclos γ_1 e γ_2 , estes têm o vértice u em comum. Seja

$\gamma_4 = \gamma_1 \circ \gamma_2$, que é um circuito:



Este circuito tem, por exemplo, o vértice y em comum com γ_3 . Fazemos então a concatenação, esgotando, portanto, as arestas disponíveis. Um circuito euleriano é, por exemplo, o que se inicia (e termina) em u , percorre γ_4 até encontrar y , faz um "desvio" percorrendo γ_3 , para depois continuar o percurso em γ_4 regressando a v . Ou seja, $uxywxv yu wvu$.

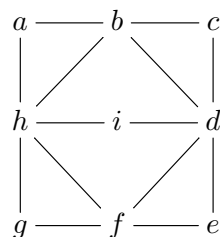
Um *caminho hamiltoniano* num grafo é um caminho elementar que contém *todos* os vértices do grafo. Um *ciclo hamiltoniano* é um ciclo que contém *todos* os vértices do grafo. Um grafo diz-se *grafo hamiltoniano* se contém um ciclo hamiltoniano.

É importante salientar que o problema de se saber se certo grafo hamiltoniano é NP-completo. Ou seja, e simplificando, é simples testar que um ciclo é hamiltoniano, mas o problema recíproco de se encontrar um ciclo hamiltoniano é difícil. Ou seja, não se encontrou, até à data, um algoritmo que resolva tal problema em tempo razoável (no tamanho do *input*). Existem, no entanto, condições necessárias e outras suficientes que permitem, em alguns casos, testar se o grafo é (ou não) hamiltoniano de uma forma fácil.

Se o grafo \mathcal{G} é hamiltoniano então

- # 1. se $\text{deg}(v) = 2$ então as arestas incidentes em v estão em qualquer ciclo hamiltoniano;
- # 2. na construção de um ciclo hamiltoniano, nenhum ciclo se pode formar até se percorrerem os vértices todos;
- # 3. se na construção de um ciclo hamiltoniano 2 arestas que incidem em v não podem ser eliminadas, então as restantes que incidem em v podem-no.

Com base nestas regras, vamos mostrar que o seguinte grafo não é hamiltoniano:



Suponha que o grafo é hamiltoniano. Como os vértices a, c, e, g têm grau dois, as arestas

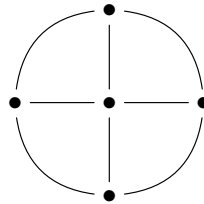
$$ab, ah, cb, cd, ed, eg, gf, gh$$

estão em *qualquer* ciclo hamiltoniano, pela regra 1. Aplicando a regra 3 aos vértices d e h , as arestas hb, hi, hf, db, di, df podem ser eliminadas. Mas ficamos então com o ciclo $abcdefgha$ que não passa por i , o que viola a regra 2.

Teorema 9.2 (Ore, 1960). *Se um n -grafo simples com 3 ou mais vértices satisfaz $\deg(v) + \deg(w) \geq n$ para quaisquer vértices não vizinhos um do outro, então o grafo é hamiltoniano.*

Corolário 9.3 (Dirac, 1952). *Seja \mathcal{G} um grafo simples com 3 ou mais vértices, vértices esses que têm grau não inferior à metade do número de vértices. Então \mathcal{G} é hamiltoniano.*

Com base nestes resultados, segue que $K_4, K_5, K_{3,3}$ são hamiltonianos. O grafo W_5 , apresentado em baixo, é também hamiltoniano:



10 Colorações

Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}_{\mathcal{G}}, \mathcal{A}_{\mathcal{G}})$ um grafo. Uma coloração de \mathcal{G} é uma aplicação $f : \mathcal{V}_{\mathcal{G}} \rightarrow C$ tal que $f(v) \neq f(w)$ se $v \leftrightarrow w$, onde C é um conjunto cujos elementos se chamam *cores*. Uma k -coloração é uma coloração f tal que $\#f(\mathcal{V}_{\mathcal{G}}) = k$. O número cromático de \mathcal{G} , denotado por $\chi(\mathcal{G})$, é o menor k tal que existe uma k -coloração de \mathcal{G} . Por outras palavras, o número cromático de um grafo é o menor número de cores necessárias de forma a que dois vértices vizinhos tenham cores distintas. Por exemplo, um grafo bipartido com pelo menos uma aresta tem número cromático 2. Já o grafo completo K_n tem número cromático n .

Teorema 10.1 (Teorema das 5 cores, P.J.Heawood, 1890). *Seja \mathcal{G} um grafo simples planar. Então $\chi(\mathcal{G}) \leq 5$.*

Conjectura 10.2 (Conjectura das 4 cores, F.Guthrie, 1852). *O número cromático de qualquer grafo planar é não superior a 4.*

Referências

- [1] Stephen Barnett, *Discrete mathematics: numbers and beyond*, Addison-Wesley Longman, 1998 (ISBN 0-201-34292-8).
- [2] Jonathan Gross, Jay Yellen, *Graph theory and its applications*, CRC Press, 1999 (ISBN 0-8493-3982-0).
- [3] Frank Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley Publ., 1972 (ISBN 0-201-02787-9).

- [4] Robert E. Hartwig, *Directed graphs*, notas não publicadas, North Carolina State University, 2002.
- [5] João Patrício, *Grafos e Digrafos*, notas de apoio à disciplina Lógica e Computação, IPT, 2007/2008.
- [6] Mario Rodríguez Riotorto, *Primeros pasos en Maxima*, 2008, disponível em www.telefonica.net/web2/biomates/maxima/max.pdf
- [7] Ilda Perez F. da Silva, *Tópicos de Matemática Finita*, edição da A.E.F.C.L., 1992.
- [8] William Stein, *Sage Reference Manual, Release 2008.04.21*, 2008, disponível em <http://www.sagemath.org/doc/paper-letter/ref.pdf>
- [9] J. K. Truss, *Discrete mathematics for computer scientists*, Addison-Wesley Publ., 1999 (ISBN 0-201-36061-6).

Anexo

10.1 Maxima

O *Maxima* é uma sistema algébrico computacional de código aberto distribuído de acordo com a licença GPL. Pode ser obtido no endereço

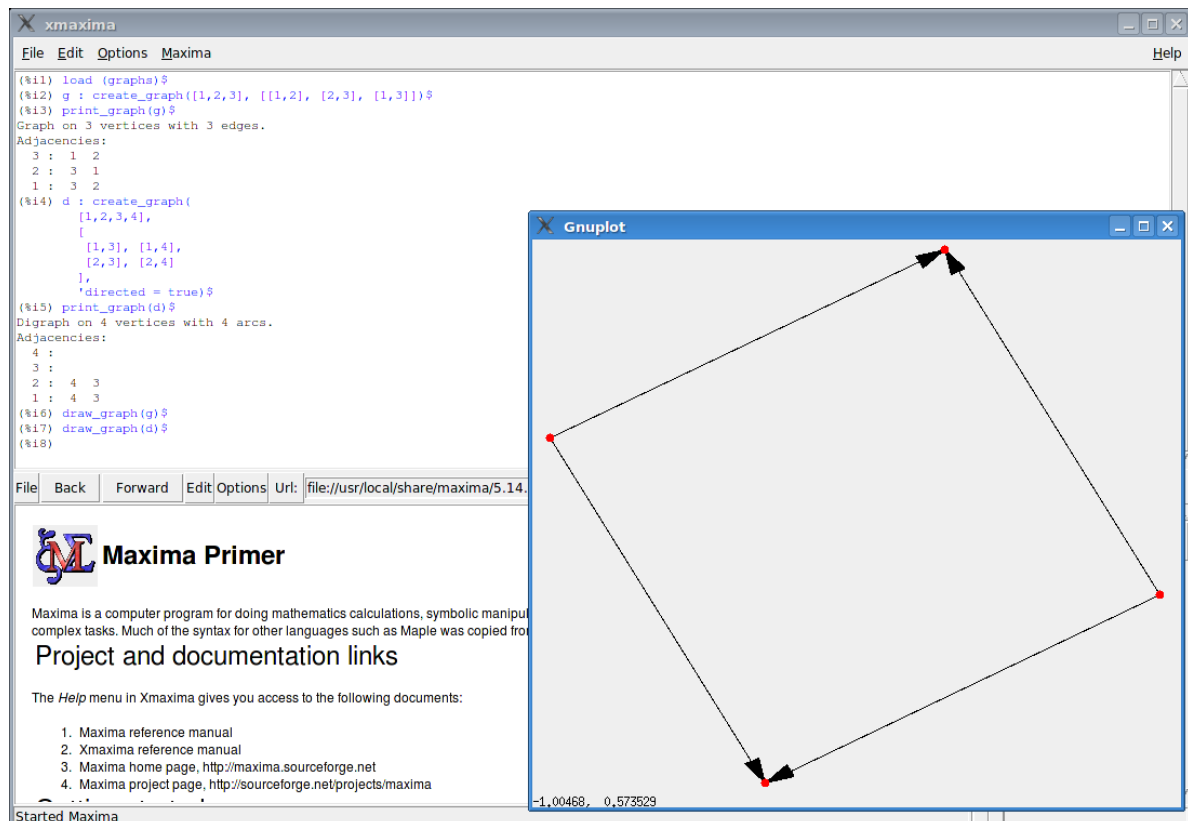
<http://maxima.sourceforge.net/>

A documentação referente ao estudo dos grafos pode ser consultada em

http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/en/maxima_52.html

Uma versão mais intuitiva no uso do *Maxima*, o *wxMaxima*, pode ser obtido em

<http://wxmaxima.sourceforge.net/>



Em [6, pp 37–42] pode consultar como construir e realizar operações simples com grafos e digrafos. Deixamo-lo com algumas implementações muito simples.

```
(%i1) load (graphs)$
(%i2) g : create_graph([1,2,3], [[1,2], [2,3], [1,3]])$
(%i3) print_graph(g)$
```

Graph on 3 vertices with 3 edges.

Adjacencies:

3 : 1 2

2 : 3 1

1 : 3 2

```
(%i4) d : create_graph(  
      [1,2,3,4],  
      [  
        [1,3], [1,4],  
        [2,3], [2,4]  
      ],  
      'directed = true)$
```

```
(%i5) print_graph(d)$
```

Digraph on 4 vertices with 4 arcs.

Adjacencies:

4 :

3 :

2 : 4 3

1 : 4 3

```
(%i6) draw_graph(g)$
```

```
(%i7) draw_graph(d)$
```

10.2 SAGE

As representações gráficas de grafos e digrafos apresentadas neste documento foram, na sua maioria, construídas com um outro sistema computacional, também ele distribuído sob a licença GPL, denominado *SAGE*. Pode ser obtido no endereço

<http://www.sagemath.org>

Em [8] pode consultar um manual de utilização, ou visitar

<http://www.sagemath.org/doc/html/ref/node40.html>

Apresentamos uma forma de integrar o SAGE na resolução de alguns dos exercícios propostos nestas notas.

1. Exercício 2.1

```
sage: D=DiGraph({ 0:[1,2,0], 1:[0]},loops=True)  
sage: D.show()  
sage: d = {0: [1,4,5], 1: [2,6], 2: [3,7], 3: [4,8], 4: [9], \  
.....: 5: [7, 8], 6: [8,9], 7: [9]}
```

```

sage: D=DiGraph (d,loops=True)
sage: D.show()
sage: g = DiGraph({0:[1,2,3], 2:[5]})
sage: G=DiGraph(g)
sage: G.show()
sage: g=DiGraph([[1..12],lambda i,j: i!=j and i.divides(j)])
sage: G=DiGraph(g)
sage: G.plot().show()

sage: D = DiGraph( { 0: [1,2,3], 1: [0,2], 2: [3], 3: [4], 4: [0,5], 5: [1] } )
sage: D.in_degree(vertices = [0,1,2], labels=True)
{0: 2, 1: 2, 2: 2}
sage: D.in_degree()
[2, 2, 2, 2, 1, 1]
sage: G = graphs.PetersenGraph().to_directed()
sage: G.in_degree(0)
3

```

2. Exercício 3.1(1)

```

sage: G = DiGraph( { 0 : [1, 2], 1 : [2], 3 : [4, 5], 4 : [5] } )
sage: G.plot().show()
sage: G.add_edge([0,4])
sage: G.plot().show()
sage: G.adjacency_matrix ()

[0 1 1 0 1 0]
[0 0 1 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 1 1]
[0 0 0 0 0 1]
[0 0 0 0 0 0]

```

3. Exercício 3.1(3)

```

sage: g={0:[1,2], 1:[0,2,4], 2:[ 4,0], 3:[1,4]}
sage: G=DiGraph (g)
sage: G.show()
sage: G.adjacency_matrix()

```

```

[0 1 1 0 0]
[1 0 1 0 1]
[1 0 0 0 1]
[0 1 0 0 1]
[0 0 0 0 0]

```

4. Exercício 4.5

```

sage: N=matrix([[1,0,1,1,1,0,1],[1,0,0,1,1,0,0],[0,0,0,1,0,1,0],\
....: [0,0,0,0,0,0,0],[1,1,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,1,0,0],[0,0,1,1,1,0,0]])
sage: G=DiGraph (N,loops=True)
sage: G.show(layout='circular')
sage: G.show3d()
sage: G.adjacency_matrix ()

```

```

[1 0 1 1 1 0 1]
[1 0 0 1 1 0 0]
[0 0 0 1 0 1 0]
[0 0 0 0 0 0 0]
[1 1 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0]
[0 0 1 1 1 0 0]

```

```

sage: G.adjacency_matrix ()==N
True
sage: G.vertices ()
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]
sage: sum(N^(i+1) for i in range(7))

```

```

[259 102 162 276 236 70 113]
[199 78 123 211 181 53 86]
[ 37 15 23 40 34 11 16]
[ 0 0 0 0 0 0 0]
[199 79 123 210 180 53 86]
[ 86 34 53 91 79 23 37]
[102 40 64 110 94 28 44]
sage: N+N^2+N^3+N^4+N^5+N^6+N^7

```

```

[259 102 162 276 236 70 113]
[199 78 123 211 181 53 86]

```



```
[ 37  15  23  40  34  11  16]
[  0   0   0   0   0   0   0]
[199  79 123 210 180  53  86]
[ 86  34  53  91  79  23  37]
[102  40  64 110  94  28  44]
```

5. Exercício 4.7

```
sage: g1=DiGraph( {0:[1],1:[2],2:[3],3:[0]})
sage: g1trans=g1.transitive_closure ()
sage: g1trans.show()
sage: g1trans.adjacency_matrix ()
```

```
[0 1 1 1]
[1 0 1 1]
[1 1 0 1]
[1 1 1 0]
```