Universidade do Minho
Departamento de Matemática

L.C.C. – 3° ano

Teoria de Números Computacional

folha ii — 2° semestre, 2008/2009

1. Use o algoritmo estendido de Euclides[1] para encontrar $s, r \in \mathbb{Z}$ para os quais $(a, b) = as + br$, onde a e b são, respectivamente,
   (a) 45, 75
   (b) 666, 1414
   (c) 102, 222
   (d) 20785, 44350
   (e) 34709, 100313
   (f) 9876543210, 123456789
   (g) 11111111111, 1000000001
   (h) 45666020043321, 73433510078091009

2. Implemente uma função no pari/gp que tenha como argumento um natural $n > 2$ e como retorno a lista dos números primos não superiores a n, fazendo uso do crivo de Eratóstenes.

3. Implemente uma função no pari/gp que teste a primalidade de um número à custa da divisão trivial.

4. Recorde a sucessão de Fibonacci (f_n): $f_1 = 1, f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n \geq 3$.
   (a) Prove que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$. [Repare que $f_k = f_{k+2} - f_{k+1}$, com $k \in \mathbb{N}$.]
   (b) Use o segundo princípio de indução para mostrar que $f_n > \alpha^{n-2}$, onde $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o *número de ouro* ou *número áureo*. [Repare que α é solução de $x^2 - x - 1 = 0$.]
   (c) Mostre que se $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$, onde $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, então $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ e $a_1 = a_2 = 1$. Conclua que $f_n = a_n$.
   (d) Mostre que o quociente da divisão inteira de termos consecutivos da sucessão de Fibonacci é 1.
   (e) Sejam f_{n+1}, f_{n+2} termos consecutivos da sucessão de Fibonacci, com $n > 1$. Mostre que o algoritmo de Euclides tem exactamente n passos para mostrar que $(f_{n+1}, f_{n+2}) = 1$.

[1] Será boa ideia escrever uma função no pari/gp...