Álgebra Linear C

folha vii — 2008/2009

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule o polinómio característico de A.

   (b) Use o comando `poly(A)` para confirmar o resultado que obteve na alínea anterior.

   (c) Calcule os valores próprios de A.

   (d) Confirme os resultados obtidos na alínea anterior usando o comando `[v,e] = eig(A)`.

   (e) Compare o determinante de A com o produto dos seus valores próprios.

   (f) Compare o traço[1] de A com a soma dos seus valores próprios.

   (g) Calcule os valores próprios de A^2, fazendo

   ```
   > eig(A^2)
   ```

   e compare-os com os quadrados dos valores próprios de A.

   (h) Seja U a matriz cujas colunas são os vectores próprios linearmente independentes. Por exemplo, pode tomar U como a matriz `v` da alínea (d). Calcule $U^{-1}AU$.

   (i) Troque duas colunas da matriz U descrita na alínea anterior e efectue, de novo, o produto $U^{-1}AU$. Comente o resultado obtido.

2. Considere a matriz `B = [1,-1; 1,1]`.

   (a) Calcule o polinómio característico e mostre que B não tem valores próprios reais.

   (b) Compare o determinante de B com o produto dos seus valores próprios.

   (c) Compare o traço de B com a soma dos seus valores próprios.

   (d) Calcule os valores próprios de B^2 compare-os com os quadrados dos valores próprios de B.

   (e) Seja U a matriz cujas colunas são os vectores próprios linearmente independentes. Calcule $U^{-1}BU$.

   (f) Troque duas colunas da matriz U descrita na alínea anterior e efectue, de novo, o produto $U^{-1}BU$. Comente o resultado obtido.

3. Considere a matriz `C=[2 1 0; 0 2 0; 0 0 3]`.

[1] O traço de uma matriz é a soma dos seus elementos diagonais. Use o comando `trace(A)`.

(a) Calcule o polinómio característico e os valores próprios (e a sua multiplicidade algébrica).
(b) Calcule a dimensão dos respectivos espaços próprios.
(c) Compare as multiplicidades algébrica e geométrica.
(d) Mostre que a matriz não é diagonalizável.

4. Mostre que

   (a) se λ é valor próprio de A então λ^k é valor próprio de A^k;
   (b) uma matriz nilpotente não tem valores próprios não nulos.

5. Mostre que duas matrizes semelhantes têm o mesmo espectro.

6. Para cada uma das seguintes matrizes, calcule os valores próprios e os respectivos espaços próprios (indicando uma base para os espaços próprios).

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(f)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{(g)} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{(h)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

7. Calcule $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^9$.

8. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine os valores próprios de A.
   (b) Determine os vectores próprios de A e diagonalize A.
   (c) Usando o resultado da alínea (b), determine uma matriz B tal que $B^3 = A$.

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Verifique que $5, -1$ são os valores próprios de A.
   (b) Verifique se $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é vector próprio associado ao valor próprio -1 e se $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é vector próprio associado ao valor próprio 5.

(c) Diga, justificando, se a matriz $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível, e caso afirmativo calcule a sua inversa.

(d) Diga, justificando, se a matriz A é diagonalizável, e caso afirmativo, diagonalize-a.

10. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que $3, -1$ são os valores próprios de A.

(b) Verifique se $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é vector próprio associado ao valor próprio 3 e se $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é vector próprio associado ao valor próprio -1.

(c) Diga, justificando, se a matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível, e caso afirmativo calcule a sua inversa.

(d) Diga, justificando, se a matriz A é diagonalizável, e caso afirmativo, diagonalize-a.

11. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que $1, -2$ são os valores próprios de A.

(b) Verifique se $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ é vector próprio associado ao valor próprio 1 e se $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é vector próprio associado ao valor próprio -2.

(c) Diga, justificando, se a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é invertível, e caso afirmativo calcule a sua inversa.

(d) Diga, justificando, se a matriz A é diagonalizável, e caso afirmativo, diagonalize-a.

12. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que $2, -3$ são os valores próprios de A.

(b) Verifique se $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é vector próprio associado ao valor próprio -3 e se $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ é vector próprio associado ao valor próprio 2.

(c) Diga, justificando, se a matriz $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível, e caso afirmativo calcule a sua inversa.

(d) Diga, justificando, se a matriz A é diagonalizável, e caso afirmativo, diagonalize-a.

13. Dada a matriz real $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

(a) calcule os valores próprios e respectivos espaços próprios;

(b) verifique que a matriz dada não é diagonalizável.