

## Álgebra Linear C

folha vi

2008/2009

1. Diga quais dos conjuntos seguintes são subespaços vectoriais do espaço vectorial real  $\mathbb{R}^4$  :

- (a)  $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = 0 \text{ e } x_2 + 2x_4 = 0\}$ .
- (b)  $W_2 = \{(0, a, b, -1) : a, b \in \mathbb{R}\}$ .
- (c)  $W_3 = \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ .
- (d)  $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 \in \mathbb{Q}\}$ .

2. Considere, no espaço vectorial real  $\mathbb{R}^3$ , os vectores

$$v_1 = (1, -1, 1), \quad v_2 = (2, 1, -2), \quad u_1 = (-1, 0, 1), \quad u_2 = (1, 0, 0), \quad u_3 = (1, 0, 1).$$

Verifique se

- (a)  $(1, -4, 5)$  é combinação linear de  $v_1, v_2$ .
- (b)  $(1, 2, 1)$  é combinação linear de  $v_1, v_2$ .
- (c)  $(3, 0, 2)$  é combinação linear de  $u_1, u_2, u_3$ .
- (d)  $(0, 2, 1)$  é combinação linear de  $u_1, u_2, u_3$ .

3. Verifique se  $(2, 5, -3) \in \langle (1, 4, -2), (-2, 1, 3) \rangle$ .

4. Determine  $\alpha, \beta$  de forma a que  $(1, 1, \alpha, \beta) \in \langle (1, 0, 2, 1), (1, -1, 2, 2) \rangle$ .

5. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são linearmente dependentes:

- (a)  $\{(0, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, -1)\}$  no espaço vectorial real  $\mathbb{R}^4$ .
- (b)  $\{(1, 2, 1), (-2, 3, 1)\}$  no espaço vectorial real  $\mathbb{R}^3$ .
- (c)  $\{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  no espaço vectorial real  $\mathbb{R}^2$ .
- (d)  $\{x^2 + x, x^2 + 1, x, x^3\}$  no espaço vectorial real  $\mathbb{R}_3[x]$ .
- (e)  $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$  no espaço vectorial real  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  onde

$$\begin{array}{llll} g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & g_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & g_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos^2 x & x \mapsto \sin^2 x & x \mapsto x + 1 & x \mapsto 1 \end{array}$$

6. Considere os seguintes subespaços vectoriais do espaço vectorial real  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{array}{ll} V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}, & V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0, y - z = 0\}, \\ V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0, 2y + z = 0\}, & V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}. \end{array}$$

Indique a dimensão e uma base para cada um deles.

7. Considere, no espaço vectorial real  $\mathbb{R}^4$ , os subespaços

$$U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 : a_1 - a_4 = 0, a_4 - a_3 = 0\}$$

$$W_1 = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 + 2b_3 = 0, b_1 + 2b_3 - b_4 = 0\}$$

$$W_2 = \langle (1, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1), (1, 3, 2, 1), (-3, 1, -1, 2) \rangle.$$

(a) Diga, justificando, se  $\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1)\}$  é uma base de  $U$ .

(b) Determine uma base de i.  $W_1$ . ii.  $W_2$ .

8. Considere os seguintes vectores do espaço vectorial real  $\mathbb{R}^3$ :

$$v_1 = (\alpha, 6, -1), v_2 = (1, \alpha, -1), v_3 = (2, \alpha, -3).$$

(a) Determine os valores do parâmetro real  $\alpha$  para os quais o conjunto  $\{v_1, v_2, v_3\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^3$ .

(b) Para um dos valores de  $\alpha$  determinados na alínea anterior, calcule as coordenadas do vector  $v = (-1, 1, 2)$  em relação à base  $\{v_1, v_2, v_3\}$ .

9. Considere os seguintes elementos de  $\mathbb{R}^3$ :

$$v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (1, -1, 1), v_3 = (0, -1, 1), v_4 = (1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}).$$

Verifique se  $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$ .

10. Considere os elementos de  $\mathbb{R}^3$ :  $v_1 = (2, -3, 1), v_2 = (0, 1, 2), v_3 = (1, 1, -2)$ .

(a) Mostre que são uma base de  $\mathbb{R}^3$ .

(b) Determine as coordenadas de  $(3, 2, 1)$  relativamente a esta base.

11. Mostre que os vectores  $(a, b), (c, d)$  são uma base de  $\mathbb{R}^2$  se e só se  $ad - bc \neq 0$ .

12. Considere os seguintes subespaços de  $\mathbb{R}^4$ :

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0\}, \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_2 = 0\},$$

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

Para cada um deles, determine a dimensão e indique uma base.

13. Considere os seguintes subespaços de  $\mathbb{R}^4$ :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_3 \wedge x_4 = 2x_2\}, G = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 1), (-1, 2, -1, 1) \rangle.$$

Determine a dimensão e indique uma base para  $F$  e para  $G$ .

14. Encontre uma base para o espaço das colunas das matrizes seguintes:

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 1 & -17 & 6 \\ 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \begin{bmatrix} 0 & -7 & 3 & -8 & -1 \\ -1 & 6 & -8 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

15. Indique, justificando convenientemente, o valor lógico da seguinte afirmação:

“Se as colunas da matriz quadrada  $A$  são linearmente independentes, então as colunas de  $A^2$  são também elas linearmente independentes.”

16. Seja  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Mostre que

(a) se  $A^2 = A$  e  $\text{car}(A) = n$  então  $A = I_n$ ;

(b) se  $A^2 = A$  então  $CS(A) \cap N(A) = \{0\}$ .

17. Calcule a projecção ortogonal do vector  $(2, -1, 1)$  sobre o espaço gerado por  $(1, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 3)$ .

18. Para  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -1 \end{bmatrix}^T$  e  $b = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 10 \end{bmatrix}^T$ , determine a solução no sentido dos mínimos quadrados de  $Ax = b$ .

19. Determine a solução no sentido dos mínimos quadrados de

$$(a) \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 = 2 \end{cases}$$

20. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

(a) Calcule a projecção ortogonal de  $b = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}^T$  sobre  $CS(A)$ .

(b) O que pode dizer sobre o sistema  $Ax = b$ ?

21. Calcule  $\text{proj}_{CS(A)}b$  quando,

$$(a) A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, b = (1, 1, 1)$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, b = (-1, -4, -8)$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, b = (0, 1, 1)$$

$$(d) A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 & 12 \\ -4 & -4 & -20 & -4 \\ -4 & -3 & -17 & -5 \\ -3 & 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}, b = (0, 1, 1, 0).$$