Universidade do Minho
Departamento de Matemática MiEB

Álgebra Linear C

folha v — 2008/2009

1. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares:

   (a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 = -9 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 8 \\ -8x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -4x - 6y = -2 \\ 12x - 18y = -6 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \\ -3x_1 - x_2 + 7x_3 = -22 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 2 \end{cases}$

   (f) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

2. Determine $\beta \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema

$$\begin{cases} \beta x - y + \beta z = 0 \\ -2\beta y - 2z = 0 \\ x - y + \beta z = 0 \end{cases}$$

   seja determinado.

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

   (a) Encontre uma factorização $PA = LU$, onde P é matriz permutação, L é invertível triangular inferior e U é escada de linhas.

   (b) Resolva a equação $Ax = b$, onde $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. Determine todas as matrizes $X \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ tais que $AX = 0$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -6 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

5. Encontre os valores do parâmetro $k \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z & = & 1 \\ 2x + ky + 6z & = & 6 \\ -x + 3y + (k-3)z & = & 0 \end{cases}$$

seja

   (a) Possível determinado;

   (b) Possível indeterminado;

   (c) Impossível.

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$. Resolva, usando o algoritmo de eliminação de Gauss, a equação matricial $Ax = (-2, -1, 0)$.

7. Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Mostre que a matriz A é invertível e calcule a sua inversa fazendo uso do algoritmo de Gauss-Jordan.

   (b) Recorrendo à regra de Cramer, resolva

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

8. Resolva $AX = B$, com

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

9. Para $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, mostre que U é invertível e calcule U^{-1} pelo algoritmo de Gauss-Jordan.

10. Seja $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Mostre que B é invertível e faça uso do algoritmo de Gauss-Jordan para calcular a inversa de B.

   (b) Use a regra de Cramer para determinar a única solução de $Bx = (0, 1, 0)$.

11. Para $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, mostre que U é invertível e calcule U^{-1} pelo algoritmo de Gauss-Jordan.

12. Usando o algoritmo de Gauss-Jordan, calcule, se possível, a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$