Universidade do Minho
Departamento de Matemática MiEB

Álgebra Linear C

folha iv — 2008/2009

1. Introduza o comando

   `A=fix(30*rand(3,3)-15);`

   Responda às alíneas seguintes para várias escolhas de A.

   (a) Descreva o *output* de `Ainf=tril (A)` e de `Asup=triu (A)`

   (b) Calcule e comente o resultado de `det(Ainf)` e de `det(Asup)`.

   (c) Troque duas linhas de A e compare o determinante da matriz obtida com $|A|$. Repita o exercício fazendo trocas de colunas.

   (d) Substitua uma linha/coluna de A pela linha nula e calcule o determinante da matriz obtida.

   (e) Multiplique uma linha por um escalar não nulo e compare o determinante da matriz obtida com $|A|$. Repita o exercício multiplicando uma coluna por um escalar não nulo.

   (f) A uma linha de A some-lhe outra multiplicada por um escalar não nulo. Compare o determinante da matriz obtida com $|A|$. Repita o exercício fazendo a operação elementar por colunas.

   (g) Use `[L,U,P]=lu (A)` para obter a factorização $PA = LU$. Compare $|A|$ com $|U|$.

   (h) O que pode conjecturar sobre a relação entre $|2A|$ e $2|A|$? Teste a validade da sua conjectura.

2. Introduza as matrizes `A=[1,-3,1; 2,-4,2; 2,2,-3]; B=[ -10 2 -3; -1 9 14; -6 5 8];`.

   (a) Introduza os comandos

   ```
   [l,u,p]=lu (B)
   u(1,1)*u(2,2)*u(3,3)
   u(1,1)*u(2,2)*u(3,3)-det(B)
   ```

   Interprete os comandos introduzidos e os resultados obtidos.

   (b) Repita a alínea anterior para as matrizes A e AB.

   (c) Compare $|A||B|$ e $|AB|$.

   (d) Verifique que A é não singular. Relacione $|A|$ com $|A^{-1}|$.

   (e) Verifique se $\det(A + B) = \det A + \det B$.

(f) Verifique que $|A^T| = |A|$.

3. Considere as matrizes `A=[2 -6 0 6;5 -7 8 2;-3 -2 4 1;5 -1 4 -1]; B=[4 20 -29 25;3 13 -24 13 ;1 5 -7 4;5 25 -35 21]; .`

   (a) Mostre que A, B são não-singulares.

   (b) Compare $|A||B|$ e $|AB|$.

   (c) Relacione $|A|$ com $|A^{-1}|$.

   (d) Relacione $|B|$ com $|B^{-1}|$.

   (e) Considere $C = B^{-1}AB$. Compare $|C|$ com $|A|$. Que resultado pode conjecturar?

   (f) Verifique se $\det(A + B) = \det A + \det B$.

   (g) Verifique que $|A^T| = |A|$ e que $|B^T| = |B|$.

4. Considere as matrizes definidas aleatoriamente pelos comandos

```
> R=fix(-10+rand(7)*20);
> S=fix(-10+rand(7)*20);
> P=fix(-10+rand(4)*20);
```

   (a) Calcule e compare, para várias escolhas, $|R||S|$ e $|RS|$. O que pode inferir?

   (b) Calcule e compare, para várias escolhas, $|R+S|$ e $|R|+|S|$. O que pode concluir?

5. Construa uma função, `adjunta`, que, dada uma matriz quadrada, devolva a sua adjunta. Fazendo uso dessa função,

   (a) para `C=[ -0 -3 3 4; 0 -1 -0 -3; 2 -4 -4 -0; -4 -2 1 -4];`, determine `C*adjunta(C)/det(C)`; que pode observar?

   (b) para `A=[ 2 2 -0 -3; 2 -0 -1 -2; 4 -3 -1 4; -3 0 4 -1];`, determine `A*adjunta(A)`; que pode observar?

   (c) para `B=[ -2 3 -2 2; -4 3 -1 2; -2 -4 3 -1; 3 -1 3 -2];`, determine `B*adjunta(B)`; o que pode observar?

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & 6 \\ -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Encontre uma factorização $PA = LU$.

   (b) Calcule $\mathrm{car}(A)$.

   (c) Calcule $\det(A)$.

   (d) Calcule a matriz dos complementos algébricos, a adjunta e a inversa (caso exista) da matriz dada.

7. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

   (a) Encontre uma factorização $PA = LU$.
   (b) Calcule $\mathrm{car}(A)$.
   (c) Calcule $\det(A)$.
   (d) Calcule a matriz dos complementos algébricos, a adjunta e a inversa (caso exista) da matriz dada.

8. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Encontre uma factorização $PA = LU$.
   (b) Calcule $\mathrm{car}(A)$.
   (c) Calcule $\det(A)$.
   (d) Calcule a matriz dos complementos algébricos, a adjunta e a inversa (caso exista) da matriz dada.

9. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}$,

   (a) encontre uma factorização $PA = LU$,
   (b) calcule $\mathrm{car}(A)$,
   (c) calcule $\det(A)$.
   (d) calcule a matriz dos complementos algébricos, a adjunta e a inversa (caso exista).

10. Calcule o determinante, a matriz dos complementos algébricos, a adjunta e a inversa (caso exista) das matrizes

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

   (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

11. Calcule o determinante das matrizes seguintes:

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1 & \imath \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} a & c+d\,\mathrm{i} \\ c-d\,\mathrm{i} & b \end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix} a+b\,\mathrm{i} & b \\ 2a & a-b\,\mathrm{i} \end{bmatrix}$ (k) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ (l) $\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$

12. Se A é uma matriz simétrica, mostre que $\det(A+B) = \det\left(A+B^T\right)$, para qualquer matriz B com a mesma ordem de A.

13. Uma matriz A é anti-simétrica se $A^T = -A$. Mostre que, para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ com n ímpar e A anti-simétrica, se tem $\det A = 0$.