Álgebra Linear C

folha i 2008/2009

Suponha que A é uma matriz real com as dimensões apropriadas.

```
> A(1,2) % indica a entrada (1,2) de A
> A(2,:) % mostra a segunda linha de A
> A(:,3) % mostra a terceira coluna de A
> A(2:4,:) % mostra da segunda à quarta linhas de A
> A(1:2:5,:) % mostra a primeira, a terceira e a quinta linhas de A
> A([1,5],:) % mostra a primeira e quinta linhas de A
> A' % mostra a transposta de A
```

1. Seja A a matriz real dada por

$$\begin{bmatrix} 6 & 19 & 21 & -9 & -22 \\ 13 & -7 & -18 & -24 & 6 \\ 6 & 3 & 14 & 17 & 20 \end{bmatrix}.$$

Instrua o Octave por forma a exibir, relativamente a A,

(a) toda a matriz
(b) o elemento (3,5)
(c) a segunda linha
(d) a quinta coluna
(e) a primeira e a quarta colunas
(f) a primeira, a segunda e a quinta colunas
(g) os elementos que estão simultaneamente nas duas primeiras linhas e colunas
(h) os elementos que estão nas colunas pares
(i) os elementos que estão na primeira, terceira e quinta colunas, e na segunda e terceira linhas

2. Seja A a matriz real dada por

$$\begin{bmatrix} -12 & 54 & 6 & -66 & 18 \\ 68 & 61 & -56 & 80 & 45 \\ -18 & 22 & -22 & 48 & -7 \\ 41 & 60 & 83 & -57 & 49 \\ 6 & -66 & 27 & -62 & -62 \end{bmatrix}.$$

Instrua o Octave por forma a exibir, relativamente a A,

(a) toda a matriz

(b) o elemento (4,5)

(c) a terceira linha

(d) a quinta coluna

(e) a segunda e a quarta colunas

(f) os elementos que estão simultaneamente nas duas primeiras linhas e colunas

(g) os elementos que estão nas colunas ímpares

(h) os elementos que estão na primeira, terceira e quinta linhas, e na segunda e quarta colunas

3. Introduza as matrizes seguintes no Octave:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ -6 & -3 & 12 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -10 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

(a) Defina a matriz D que iguala a matriz A excepto as entradas (1,2) e (3,2) que valem, respectivamente, -1 e 7.

(b) Introduza o comando `E=[D C]` e descreva o conteúdo de E à custa de D e C.

(c) Introduza o comando `F=[D B]` e descreva o conteúdo de F à custa de D e B.

(d) Introduza o comando `G=[E; B]` e descreva o conteúdo de G à custa de E e B.

4. Introduza, no Octave, as matrizes-coluna b e c cujas entradas são, respectivamente, e por ordem, $0, 1, 2, 3$ e $3, 4, 5, 6$. Defina a matriz A cujas colunas são b e c.

5. No Octave,

(a) Introduza as matrizes-linha b e c cujas entradas são, respectivamente, e por ordem, $0, -1, 12, -23$ e $3, -4, 0, 3$.

(b) Defina a matriz A cujas linhas são b e c.

(c) Descreva o resultado do comando `5*b`.

(d) Descreva o resultado do comando `b+c`.

(e) Descreva o resultado do comando `[b;b-c;c]`.

6. Indique A^T no caso de A ser

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

7. No Octave, insira os comandos

```
A=fix(100*rand(4,3)-50)
B=fix(100*rand(4,3)-50)
```

que fornecem as matrizes A e B com entradas geradas aleatoriamente. Para várias escolhas de A e B, compare $(A+B)^T$ com $A^T + B^T$. O que pode inferir?

8. Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -8 & 2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & -2 \\ -3 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 7 & 13 & -52 & 3 \end{bmatrix}$$

   (a) Defina-as no Octave.
   (b) Calcule AB e BA e compare as respostas. O que pode inferir sobre o produto matricial?
   (c) Faça o produto da linha i de A com a coluna j de B (fazendo i, j variar de 1 até 4), e compare o resultado com a entrada (i,j) de AB.
   (d) Calcule $(AB)H$ e $A(BH)$ e compare os resultados. O resultado final ilustra que propriedade do produto?
   (e) Calcule $(A+B)H$ e $AH + BH$ e compare os resultados. O resultado final ilustra que propriedade das operações matriciais?

9. S, T, U são matrizes reais, resp. $3 \times 4, 4 \times 2, 2 \times 5$ aleatórias geradas no Octave pelas instruções

```
S=fix(200*rand(3,4)-100);
T=fix(200*rand(4,2)-100);
U=fix(200*rand(2,5)-100);
```

   (a) Calcule $(ST)U$ e $S(TU)$ e compare os resultados, fazendo-o repetidas vezes, inicializando a cada passo os valores de S, T, U. O resultado final ilustra que propriedade do produto?
   (b) Verifique que $(ST)^T = T^T S^T$, para várias escolhas aleatórias de S e T.

10. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Considere ainda $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

   (a) Faça os produtos $Ae_1, Ae_2, Ae_3, e_1^T A, e_2^T A, e_3^T A$. O que pode inferir dos produtos?

(b) Compare $A(e_1+e_2)$ com $A\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

(c) Preveja, e confirme, o resultado de

i. $A\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

ii. $A\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$

iii. $A\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$

iv. $A\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

11. Sejam

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad E=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Indique quais das seguintes operações estão bem definidas, e neste caso efectue-as:

(a) $A+B$ (b) $B+C$ (c) AB (d) BA (e) AC (f) CA
(g) EC (h) CE (i) AD (j) ED (k) AE (l) EA
(m) CC (n) $3CD$ (o) $B(CE)$ (p) $(CE)B$

12. Calcule as expressões seguintes:

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}^3$

(e) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}^5$

13. Calcule, se possível,

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 14 & 20 \\ 8 & -25 & 9 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & -15 & 26 \\ 1 & 6 & -28 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -2 & 31 & 24 \\ -10 & 19 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & 22 & -29 \\ 15 & -9 & 17 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 4 & -19 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 31 \\ 29 & 0 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 29 & 20 \\ 27 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22 & 18 & 29 \\ 1 & 8 & 22 \\ 14 & 0 & 23 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 27 & 1 & 10 \\ 30 & 30 & 4 \\ 6 & 14 & 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25 & 26 & 0 \\ 20 & 27 & 0 \\ 24 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $3\begin{bmatrix} 7 & -4 & 7 \\ 7 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

(g) $-1\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(j) $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -6 \end{bmatrix}$

14. Mostre que, para $v \in \mathbb{R}^n$, se tem $v^T v = 0$ se e só se $v = 0$.

15. Mostre que equivalência de matrizes é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja, $A \sim A$, $A \sim B \Rightarrow B \sim A$, e $(A \sim B \wedge B \sim C) \Rightarrow A \sim C$.