LS-catégorie algébrique et attachement de cellules

Thomas Kahl

Résumé

Nous montrons que la A-catégorie d'un espace simplement connexe de type fini est inférieure ou égale à n si et seulement si son modèle d'Adams-Hilton est rétracte homotopique d'une algèbre différentielle à n étages. Nous en déduisons que l'invariant Acat augmente au plus de 1 lors de l'attachement d'une cellule à un espace.

Abstract

We show that the A-category of a simply connected space of finite type is less than or equal to n if and only if its Adams-Hilton model is a homotopy retract of an n-stage differential algebra. We deduce from this that the invariant Acat increases by at most 1 when a cell is attached to a space.

1991 *Mathematics Subject Classification* : 55M30, 18G55.
Keywords : LS-category, strong category, Adams-Hilton models, cell attachments.

Introduction

La catégorie de Lusternik-Schnirelmann d'un espace topologique X, notée cat X, est le plus petit entier n pour lequel il existe un recouvrement ouvert de X constitué de $n+1$ ouverts contractiles dans X. La détermination directe de cat X étant souvent difficile, de nombreuses approximations de cet invariant homotopique ont été introduites. Parmi ces approximations se trouvent l'invariant e de G. H. Toomer ([12]) et l'invariant Acat de S. Halperin et J.-M. Lemaire ([7]) qui tous deux peuvent, pour un espace simplement connexe de type fini X, être déterminés à partir d'un modèle d'Adams-Hilton de X. Lorsqu'on considère une approximation de la catégorie, une question naturelle se pose : quelles propriétés de base de cat possède-t-elle ? L'une des propriétés fondamentales de la catégorie est qu'elle augmente au plus de 1 lors de l'attachement d'une cellule à un espace. Dans ce texte, nous montrons que l'invariant Acat a également cette propriété. Plus précisement, nous montrons le théorème suivant :

Théorème A. *Soit $f : S \to X$ une application continue entre des espaces simplement connexes de type fini. Si S a le type d'homotopie d'une suspension, alors $A\mathit{cat}\, X \cup_f CS \leq A\mathit{cat}\, X + 1$.*

Remarquons que ce comportement est conjecturé pour l'invariant de Toomer. La démonstration du Théorème A repose sur une caractérisation de Acat en termes de la version algébrique suivante de la catégorie forte de T. Ganea ([6]) : La catégorie forte d'une algèbre de chaînes A, Cat A, est le plus petit entier n pour lequel A est quasi-isomorphe à une algèbre de chaînes à n étages, c-à-d une algèbre de chaînes $(T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n), d)$ satisfaisant $d(V_i) \subset T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_{i-1})$. En topologie, un théorème de Ganea ([6]) entraîne que cat $X \leq n$ si et seulement si X est rétracte homotopique d'un espace dont la catégorie forte est $\leq n$. Notre caractérisation de Acat est l'analogue algébrique suivant de ce résultat :

Théorème B. *Soit X un espace simplement connexe de type fini et TV un modèle d'Adams-Hilton de X. Alors Acat $X \leq n$ si et seulement si TV est rétracte homotopique d'une algèbre de chaînes A avec Cat $A \leq n$.*

1 Préliminaires

Dans tout ce texte on travaille sur un corps commutatif quelconque $\mathbf{k}$. On écrira $\otimes$ au lieu de $\otimes_{\mathbf{k}}$ et Hom au lieu de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}$.

La suspension d'un espace vectoriel gradué $V = (V_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est l'espace vectoriel gradué sV défini par $(sV)_n = V_{n-1}$. La désuspension de V est l'espace vectoriel gradué $s^{-1}V$ défini par $(s^{-1}V)_n = V_{n+1}$. Si V est un espace vectoriel différentiel, sV est muni de la différentielle $dsv = -sdv$; $s^{-1}V$ est muni de la différentielle $ds^{-1}v = -s^{-1}dv$. On suivra la convention de notation usuelle $V^n = V_{-n}$.

Une *algèbre* sera toujours une algèbre graduée augmentée ; par *coalgèbre* on entendra toujours une coalgèbre graduée coaugmentée. Pour une (co)algèbre A (C), on notera $\bar{A}$ ($\bar{C}$) le (co)idéal de (co)augmentation. Pour un espace vectoriel gradué V, on note TV la (co)algèbre tensorielle engendrée par V. Quand TV est la coalgèbre engendrée par V, on écrira, pour des éléments $v_1, \ldots, v_n \in V$, $[v_1 \mid \cdots \mid v_n]$ au lieu de $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$.

La *bar-construction* d'une algèbre différentielle A est la coalgèbre différentielle $BA = (T(s\bar{A}), d_1 + d_2)$ où d_1 et d_2 sont donnés par

$$d_1[sa_1 \mid \cdots \mid sa_n] = -\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\varepsilon(i)} [sa_1 \mid \cdots \mid sda_i \mid \cdots \mid sa_n],$$

$$d_2[sa_1 \mid \cdots \mid sa_n] = \sum_{i=2}^{n} (-1)^{\varepsilon(i)} [sa_1 \mid \cdots \mid sa_{i-1}a_i \mid \cdots \mid sa_n].$$

Ici $\varepsilon(1) = 0$ et $\varepsilon(i) = i - 1 + \sum_{j=1}^{i-1} \mid a_j \mid$ pour $i > 1$. La *cobar-construction* d'une coalgèbre différentielle C est l'algèbre différentielle $\Omega C = (T(s^{-1}\bar{C}), d)$ où la différentielle est donnée par

$$ds^{-1}c = -s^{-1}dc + \sum (-1)^{|c_i|} s^{-1}c_i \otimes s^{-1}c'_i$$

Ici, $\sum c_i \otimes c'_i$ est la diagonale réduite de c. La bar- et la cobar-construction sont des foncteurs adjoints entre la catégorie des algèbres différentielles et la catégorie des coalgèbres différentielles cocomplètes.

Une *algèbre de chaînes* (AGD$_*$) est une algèbre différentielle A pour laquelle $A_n = 0$ si $n < 0$. Une *algèbre de cochaînes* (AGD*) est une algèbre différentielle A pour laquelle $A^n = 0$ si $n < 0$. Pour un espace pointé X, le complexe de cochaînes (normalisées) (à coefficients dans $\mathbf{k}$) $C^*(X) = C^*(X; \mathbf{k})$ est une AGD*. Le complexe de chaînes (normalisées) $C_*(\Omega X) = C_*(\Omega X; \mathbf{k})$, où ΩX est l'espace de lacets de Moore de X, est une AGD$_*$. Une AGD* A est *connexe* si $A^0 = \mathbf{k}$; A est *r-connexe* si en plus $A^n = 0$ pour $1 \leq n \leq r$. La (r-)connexité d'une AGD$_*$ est définie de manière analogue.

Pour une AGD$_*$ A, le dual de la bar-construction de A, $(BA)^\vee = \mathrm{Hom}(BA, \mathbf{k})$, est une AGD* connexe. Pour un quasi-isomorphisme d'AGD$_*$ $f : A \to U$ (c-à-d un morphisme induisant un isomorphisme en homologie), le morphisme d'AGD* $(Bf)^\vee : (BU)^\vee \to (BA)^\vee$ est un quasi-isomorphisme (cf. par ex. [4]). Pour une AGD* connexe de type fini A, la cobar-construction du dual de A, $\Omega A^\vee = \Omega\mathrm{Hom}(A, \mathbf{k})$, est une AGD$_*$. Pour un quasi-isomorphisme d'AGD* simplement connexes de type fini $f : A \to U$, le morphisme d'AGD$_*$ $\Omega f^\vee : \Omega U^\vee \to \Omega A^\vee$ est un quasi-isomorphisme (cf. par ex. [4]).

H. Munkholm ([9]) a montré que la catégorie $\mathbf{AGD}_*$ des AGD$_*$ et la catégorie $\mathbf{AGD}^*_\mathbf{0}$ des AGD* connexes sont des catégories modèles dans le sens de D. Quillen ([10]) dans lesquelles les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes, les surjections sont des fibrations et les extensions libres sont des cofibrations. Ces deux catégories sont alors équipées d'une théorie homotopique. Une description de ces théories homotopiques se trouve par exemple dans [2], [9] ou [10]. Rappelons ici que deux morphismes d'AGD$_*$ $f, g : (TV, d) \to (A, d)$ sont homotopes dans $\mathbf{AGD}_*$ si et seulement si il existe une application de degré 1 $h : TV \to A$ telle que $dh + hd = f - g,\ h(xy) = f(x)h(y) + h(x)g(y)$ *et* $h(1) = 0$. Rappelons encore qu'un morphisme surjectif entre des AGD$_*$ libres admet une section si et seulement s'il admet une section homotopique. Rappelons enfin le “ lemme de relèvement ” suivant : Étant donné un morphisme d'AGD$_*$ $f : (TV, d) \to B$ et un quasi-isomorphisme $g : A \to B$, il existe un morphisme $\lambda : TV \to A$ tel que $g \circ \lambda \simeq f$.

2 La catégorie et la catégorie forte d'une AGD$_*$

Dans cette section nous rappelons la définition de la catégorie forte d'un espace et son lien avec la catégorie. Nous définissons la catégorie forte d'une AGD$_*$ et montrons que, pour tout espace X, Cat $X \geq$ Cat $C_*(\Omega X)$. Nous définissons la catégorie d'une AGD$_*$ et montrons que, pour un espace simplement connexe de type fini X, Acat X = cat $C_*(\Omega X)$. Tout espace est supposé bien pointé et connexe par arcs. Toute application continue préserve le point base, et “ homotope ” signifie “ homotope rel. $*$ ”. Un espace est dit de type fini s'il a le type d'homotopie faible d'un CW-complexe ayant un nombre fini de cellules en chaque dimension.

Définition 2.1. La *catégorie forte* d'un espace X, notée Cat X, est le plus petit entier $n \geq 0$ pour lequel il existe une suite de cofibrations homotopiques

$$Z_i \to X_i \to X_{i+1}, \qquad 0 \leq i \leq n,$$

telle que X_0 a le type d'homotopie d'un point et X_n a le type d'homotopie de X. S'il n'existe pas de tel entier, on pose Cat $X = \infty$.

La catégorie forte a été introduite par T. Ganea ([6]). La Définition 2.1 est en fait une variante d'une caractérisation, due à Ganea (cf. [6, 2.1]), de la catégorie forte originale. La différence principale entre la notion de Ganea et celle que nous utilisons ici est que, pour un espace non-simplement connexe X, on a, selon notre définition, Cat $X = \infty$. Cela vient du fait que nous demandons aux espaces Z_i dans la Définition 2.1 d'être connexes par arcs. Remarquons que O. Cornea a montré qu'on peut remplacer les espaces Z_i dans la Définition 2.1 par des suspensions i-èmes ([3]). La proposition suivante est un corollaire immédiat de la Proposition 2.2 de [6] :

Proposition 2.2. *Pour un CW-complexe simplement connexe X, on a cat $X \leq n$ si et seulement si X est rétracte homotopique d'un espace Y avec Cat $Y \leq n$.* □

Le Théorème B découlera de l'analogue pour les algèbres de chaînes de cette proposition. La catégorie forte d'une AGD$_*$ est définie comme suit :

Définition 2.3. Une algèbre de chaînes est a 0 *étages* si son augmentation est un isomorphisme. On dira qu'une algèbre de chaînes (TV, d) est à n *étages* $(n > 0)$ s'il existe une décomposition $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ telle que $d(V_i) \subset T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_{i-1})$, $1 \leq i \leq n$. La *catégorie forte* d'une AGD$_*$ A, notée Cat A, est le plus petit entier n pour lequel A est quasi-isomorphe à une AGD$_*$ à n étages. S'il n'existe pas de tel entier, on pose Cat $A = \infty$.

Remarquons que l'invariant Cat est l'analogue pour les algèbres de chaînes d'un invariant défini par J.-M. Lemaire et F. Sigrist pour les $\mathbb{Q}$-algèbres de Lie (cf. [8]). Le lien entre la catégorie forte topologique et la catégorie forte algébrique est le suivant :

Proposition 2.4. *Pour tout espace X, Cat $X \geq$ Cat $C_*(\Omega X)$.*

<u>Démonstration</u> : On peut supposer que X est simplement connexe. On montre par récurrence que, si Cat $X \leq n$, alors Cat $C_*(\Omega X) \leq n$. Pour $n = 0$ cela est évident. Si Cat $X \leq 1$, alors X a le type d'homotopie d'une suspension ΣZ. Grâce au théorème de Bott-Samelson, l'algèbre à un étage $T(\tilde{H}_* Z)$ est un modèle libre de $C_*(\Omega X)$. On a alors Cat $C_*(\Omega X) \leq 1$. Soit $n > 1$ et Cat $X \leq n$. Grâce au théorème de Cornea ([3]) déja mentionné, il existe une application continue $f : \Sigma Z \to Y$ telle que Cat $Y \leq n - 1$ et $X \simeq C_f = Y \cup_f C\Sigma Z$. Par le théorème de Bott-Samelson, l'AGD$_*$ $(T(\tilde{H}_* Z), 0)$ est un modèle libre de $C_*(\Omega\Sigma Z)$. Par hypothèse de récurrence, il existe une AGD$_*$ à $n-1$ étages $T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n-1})$ qui est quasi-isomorphe à $C_*(\Omega Y)$. Par le lemme de relèvement, il existe un morphisme d'AGD$_*$

$$\phi : T(\tilde{H}_* Z) \to T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n-1})$$

qui est un modèle de $C_*(\Omega f)$. Puisque le foncteur $C_*\Omega$ préserve les sommes amalgamées homotopiques d'espaces simplement connexes (cf. [1], [2, I.7.29]), la cofibre homotopique de ϕ, l'AGD$_*$ à n étages $T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n-1} \oplus s\tilde{H}_* Z)$, est un modèle de $C_*(\Omega X)$. Cela montre que Cat $C_*(\Omega X) \leq n$. □

Nous définissons maintenant la catégorie d'une algèbre de chaînes. Dans la définition nous utilisons la notation suivante : Pour une algèbre graduée différentielle (A,d), on note B_nA la sous-coalgèbre différentielle $T^{\leq n}(s^{-1}\bar{A})$ de BA et $p_n(A) : \Omega B_nA \to A$ la restriction du morphisme d'adjonction $p(A) : \Omega BA \to A$. Remarquons encore que, pour $n > 0$, A est canoniquement un sous-espace vectoriel différentiel de ΩB_nA. Puisque la restriction de $p_n(A) : \Omega B_nA \to A$ à ce sous-espace vectoriel différentiel est l'identité, le morphisme $p_n(A)$ $(n > 0)$ est à la fois surjectif et surjectif en homologie.

Définition 2.5. La *catégorie* d'une AGD_* A, notée cat A, est le plus petit entier n tel que, pour un (de manière équivalente : pour tout) modèle libre (TV,d) de A, il existe une section homotopique du morphisme $p_n(TV) : \Omega B_nTV \to TV$ (c-à-d un morphisme d'algèbres différentielles $s : TV \to \Omega B_nTV$ vérifiant $p_n(TV)\circ s \simeq id_{TV}$). S'il n'existe pas de tel n, on pose cat $A = \infty$.

Nous voulons montrer que, pour un espace simplement connexe de type fini X, Acat $X =$ cat $C_*(\Omega X)$. Rappelons la définition de Acat :

Définition 2.6. ([7]) La A-catégorie d'un espace simplement connexe X, notée Acat X, est le plus petit entier n tel que, pour un (de manière équivalente : pour tout) modèle libre $TV \xrightarrow{\sim} C^*(X)$ où TV est connexe, il existe un diagramme commutatif dans $\mathbf{AGD_0^*}$

$$\begin{tikzcd}
TV \arrow[r, equal] \arrow[d] \arrow[dr] & TV \\
TV/T^{>n}V & U. \arrow[l, "\sim"] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Remarquons qu'un tel diagramme existe si et seulement si, pour toute factorisation du morphisme $TV \to TV/T^{>n}V$ en une extension libre $j : TV \to TV \amalg TW$ et un quasi-isomorpisme $r : TV \amalg TW \xrightarrow{\sim} TV/T^{>n}V$, l'extension libre j admet une rétraction.

Proposition 2.7. *Soit X un espace simplement connexe de type fini. Alors $A cat\, X = cat\, C_*(\Omega X)$.*

<u>Démonstration</u> : Soit $A = (TV,d)$ un modèle d'Adams-Hilton de X (ou un modèle libre de l'AGD_* $C_*(\Omega X)$) tel que A est connexe et de type fini. Il suit de [7] (ou de [5]) que $(BA)^\vee$ (où on note $^\vee$ le foncteur $\mathrm{Hom}(-,\mathbf{k})$) est un modèle libre de l'algèbre de cochaînes $C^*(X)$ et donc que Acat X est le plus petit n pour lequel il existe un diagramme commutatif d'algèbres de cochaînes

$$\begin{tikzcd}
T(s\bar{A}^\vee) \arrow[r, equal] & (BA)^\vee \arrow[r, equal] \arrow[d] \arrow[dr] & (BA)^\vee \\
T(s\bar{A}^\vee)/T^{>n}(s\bar{A}^\vee) \arrow[r, equal] & (B_nA)^\vee & (BA)^\vee \amalg T(W) \arrow[l, "\sim"] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où le triangle de gauche est le modèle minimal (cf. [7]) de la projection $(BA)^\vee \to (B_nA)^\vee$.

Montrons que Acat $X \leq n$ si et seulement si cat $C_*(\Omega X) \leq n$. Pour $n = 0$ cela est clair. Soit $n > 0$. Supposons d'abord que Acat $X \leq n$. Il existe alors un diagramme comme ci-dessus. Comme A est connexe et $n > 0$, on a que $H^i(BA)^\vee \to H^i(B_nA)^\vee$ est un isomorphisme pour $i = 0,1,2$. Comme A est de type fini, il en résulte que $(BA)^\vee \amalg T(W)$ est 1-connexe et de type fini. On peut alors appliquer le foncteur $\Omega^\vee$ au diagramme ci-dessus. Cela donne le diagramme commutatif suivant d'algèbres de chaînes :

$$\begin{tikzcd} \Omega BA \arrow[r, equal] & \Omega BA \arrow[d] \\ \Omega B_n A \arrow[u] \arrow[r, "\sim"] & \Omega((BA)^\vee \amalg T(W))^\vee . \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Comme le morphisme d'adjonction $p(A) : \Omega BA \to A$ est un quasi-isomorphisme (cf. par ex. [4]), il en découle que cat $C_*(\Omega X) =$ cat $A \leq n$.

Inversement supposons cat $C_*(\Omega X) \leq n$ $(n > 0)$. Il existe alors une section homotopique σ de $p_n(A) : \Omega B_n A \to A$. Comme $p_n(A)$ est surjectif, on peut supposer que σ est une vraie section. En appliquant le foncteur ${}^\vee B$ on obtient le diagramme suivant d'algèbres de cochaînes connexes :

$$\begin{tikzcd} (BA)^\vee \arrow[r, equal] \arrow[d] \arrow[dr, "(Bp_n(A))^\vee"] & (BA)^\vee \\ (B_n A)^\vee & (B\Omega B_n A)^\vee . \arrow[l, "\sim"'] \arrow[u, "(B\sigma)^\vee"'] \end{tikzcd}$$

Il en découle que Acat $X \leq n$. $\square$

3 Preuve des Théorèmes A et B

Dans cette section nous prouvons les deux théorèmes énoncés dans l'introduction. Nous montrons d'abord que la catégorie d'une AGD$_*$ $A = TV$ est inférieure ou égale à n si et seulement si A est rétracte homotopique d'une AGD$_*$ U avec Cat $U \leq n$. Le Théorème B est un corollaire immédiat de ce résultat. En utilisant le Théorème B, nous établissons ensuite le Théorème A.

Notation. Soit (V, d) un espace vectoriel gradué différentiel. On note $CV = C(V, d)$ le cône sur (V, d), c-à-d l'espace vectoriel gradué différentiel $(V \oplus sV, d)$ où $dv = dv$ et $dsv = v - sdv$. Le cône CV est acyclique, et l'augmentation de TCV est un quasi-isomorphisme.

Proposition 3.1. *Pour toute AGD$_*$ A, Cat $\Omega B_n A \leq n$.*

<u>Démonstration</u> : On procède par récurrence sur n. $\Omega B_0 A = \mathbf{k}$ est une AGD$_*$ à 0 étages. Soit $n > 0$. Choisissons un quasi-isomorphisme d'espaces vectoriels gradués différentiels $\rho : H\bar{A} \to \bar{A}$ et formons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} T(s^{-2}(sH\bar{A})^{\otimes n}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & T(s^{-2}(s\overline{(A,d)})^{\otimes n}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \Omega B_{n-1} A \arrow[d] \\ T(C(s^{-2}(sH\bar{A})^{\otimes n})) \arrow[r, "\sim"] & T(C(s^{-2}(s\overline{(A,d)})^{\otimes n})) \arrow[r] & \Omega B_n A . \end{tikzcd}$$

où δ est défini par

$$\begin{aligned}\delta s^{-2}[sa_1 \mid \cdots \mid sa_n] &= d_{\Omega B_n A} s^{-1}[sa_1 \mid \cdots \mid sa_n] \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\varepsilon(i)} s^{-1}[sa_1 \mid \cdots \mid sda_i \mid \cdots \mid sa_n].\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, il existe une AGD$_*$ à $n-1$ étages $U = (T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_{n-1}), d)$ qui est quasi-isomorphe à $\Omega B_{n-1}A$. Par le lemme de relèvement, il existe alors un morphismse $\delta' : T(s^{-2}(sH\bar{A})^{\otimes n}) \to U$ lequel est un modèle de δ. Comme le carré de droite du diagramme ci-dessus est une somme amalgamée, on a, par le lemme de recollement (cf. [2, II.1.2]), que $\Omega B_n A$ est quasi-isomorphe à la cofibre de δ' laquelle est l'AGD$_*$ à n étages

$$U \amalg T(s^{-1}(sH\bar{A})^{\otimes n}) = T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_{n-1} \oplus s^{-1}(sH\bar{A})^{\otimes n}).$$

Cela montre que Cat $\Omega B_n A \leq n$. □

Il s'ensuit qu'une AGD$_*$ $A = TV$ est rétracte homotopique d'une AGD$_*$ U avec Cat $U \leq n$ si la catégorie de A est inférieure ou égale à n. Pour la réciproque, il suffit de savoir qu'on a cat $A \leq$ Cat A. C'est essentiellement la proposition suivante de H. Scheerer et D. Tanré qui nous garantira cela.

Proposition 3.2. ([11]) *Soit A une AGD$_*$. Pour tout entier $n > 0$, l'application* $H_*(\ker p_n(A)) \to H_*(\ker p_{n+1}(A))$ *induite par l'inclusion* $\ker p_n(A) \hookrightarrow \ker p_{n+1}(A)$ *est nulle.* □

Lemme 3.3. *Considérons le diagramme commutatif suivant d'algèbres de chaînes :*

$$\begin{tikzcd} T(V,0) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\ TC(V,0) \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dotted, "\lambda"] & B. \end{tikzcd}$$

Si π est surjectif et surjectif en homologie, alors il existe un morphisme d'AGD$_*$ λ rendant le diagramme commuatif si et seulement si $[fv] = 0$ pour tout $v \in V$.

Démonstration : Il est clair que, si λ existe, $[fv] = 0$ pour tout $v \in V$.

Supposons que $[fv] = 0$ pour tout $v \in V$. Soit $\mathcal{B}$ une base de V. Pour $v \in \mathcal{B}$, il existe $e_v \in E$ tel que $de_v = fv$. Comme $\pi e_v - hsv$ est un cycle et $H_*\pi$ est surjectif, il existe un cycle $\hat{e}_v \in E$ tel que $[\pi\hat{e}_v] = [\pi e_v - hsv]$. Comme $\pi\hat{e}_v - \pi e_v + hsv$ est un bord et π est surjectif, il existe $\bar{e}_v \in E$ tel que $d\pi\bar{e}_v = \pi\hat{e}_v - \pi e_v + hsv$. Alors $\hat{e}_v - d\bar{e}_v$ est un cycle et $\pi(\hat{e}_v - d\bar{e}_v) = \pi e_v - hsv$. On peut maintenant définir λ par $\lambda v = fv$ et $\lambda sv = e_v - \hat{e}_v + d\bar{e}_v$. Il est clair que λ commute à la différentielle et rend commutatif le diagramme. □

Théorème 3.4. *Pour une AGD$_*$ $A = (TV, d)$, on a cat $A \leq n$ si et seulement si A est rétracte homotopique d'une AGD$_*$ U avec Cat $U \leq n$.*

Démonstration : Par la Proposition 3.1, si cat $A \leq n$, alors A est rétracte homotopique d'une AGD$_*$ U avec Cat $U \leq n$. Supposons inversement que A

est rétracte homotopique d'une AGD$_*$ U avec Cat $U \leq n$. On a alors que A est rétracte homotopique d'une AGD$_*$ à n étages $(T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n), d)$. Pour prouver que cat $A \leq n$, il suffit de montrer que cat $T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n) \leq n$. Pour $n = 0$, cela est évident. Pour $n = 1$, comme d est nulle sur W_1, la section d'algèbres de $p_1(T(W_1))$ induite par l'inclusion $W_1 \to \Omega B_1 T W_1$ est une section d'AGD$_*$. Pour $n > 1$, on a, par récurrence, une section σ de $p_{n-1}(T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_{n-1}))$. Afin d'alléger la notation, nous écrirons dans la suite p_k au lieu de $p_k(T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n))$. Formons le diagramme commutatif suivant dans lequel $\delta s^{-1} w_n = d w_n$, le carré de gauche est une somme amalgamée, $\bar{\delta}$ est l'extension de cobase de δ et i et j sont les inclusions évidentes :

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega B_{n-1} T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_{n-1}) \arrow[r, "\Omega B_{n-1} i"] & \Omega B_{n-1} T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n) \arrow[d, "j"] \arrow[ddl, "p_{n-1}"'] \\
T(s^{-1} W_n, 0) \arrow[r, "\delta"] \arrow[ur] \arrow[d] & T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_{n-1}) \arrow[u, "\sigma"] \arrow[d, "i"] & \Omega B_n T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n) \arrow[dl, "p_n"] \\
TC(s^{-1} W_n, 0) \arrow[r, "\bar{\delta}"'] & T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n). &
\end{tikzcd}$$

Considérons un élément $w_n \in W_n$. Puisque $H_* p_{n-1}[\Omega B_{n-1} i \circ \sigma \circ \delta(s^{-1} w_n)] = [d w_n] = 0$, on a $[\Omega B_{n-1} i \circ \sigma \circ \delta(s^{-1} w_n)] \in \ker H_* p_{n-1}$. Puisque le morphisme p_{n-1} est surjectif en homologie, le connectant de la longue suite exacte en homologie associée à la courte suite exacte d'espaces vectoriels différentiels

$$0 \to \ker p_{n-1} \to \Omega B_{n-1} A \xrightarrow{p_{n-1}} A \to 0$$

est nulle. On a donc des courtes suites exactes

$$0 \to H_*(\ker p_{n-1}) \to H_*(\Omega B_{n-1} A) \xrightarrow{H_*(p_{n-1})} H_* A \to 0.$$

Il s'ensuit que $H_*(\ker p_{n-1}) = \ker H_* p_{n-1}$ et donc que $[\Omega B_{n-1} i \circ \sigma \circ \delta(s^{-1} w_n)] \in H_*(\ker p_{n-1})$. Par la Proposition 3.2, on a alors $[j \circ \Omega B_{n-1} i \circ \sigma \circ \delta(s^{-1} w_n)] = 0$. Puisque p_n est surjectif et surjectif en homologie, il existe, par le Lemme 3.3, un morphisme $\lambda : TC(s^{-1} W_n, 0) \to \Omega B_n T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n)$ tel que $\lambda_{|T(s^{-1} W_n)} = j \circ \Omega B_{n-1} i \circ \sigma \circ \delta$ et $p_n \circ \lambda = \bar{\delta}$. Comme le carré de gauche dans le diagramme ci-dessus est une somme amalgamée, λ et $j \circ \Omega B_{n-1} i \circ \sigma$ induisent une section de p_n. On a donc cat $T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n) \leq n$. $\square$

Le Théorème B est un corollaire immédiat du théorème précédent et de la Proposition 2.7.

Démonstration du Théorème A. On peut choisir comme modèle du morphisme d'AGD$_*$

$$C_* \Omega X \to C_* \Omega(X \cup_f CS)$$

une extension libre de la forme $(TV, d) \to (T(V \oplus \tilde{H}_* S), d)$ où $d(\tilde{H}_* S) \subset TV$. Supposons que Acat $X \leq n$. Par le Théorème B, cela signifie que TV est rétracte homotopique d'une AGD$_*$ à n étages $T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n)$. Il existe alors un morphisme $i : TV \to T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n)$ et un morphisme $r : T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n) \to$

TV tels que $r \circ i \simeq id_{TV}$. Formons le diagramme commutatif suivant dans lequel les deux carrés sont des sommes amalgamées :

$$\begin{tikzcd}
(TV,d) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & (T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n),d) \arrow[r, "r"] \arrow[d] & (TV,d) \arrow[d] \\
(T(V \oplus \tilde{H}_*S),d) \arrow[r] & (T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n \oplus \tilde{H}_*S),d) \arrow[r] & (T(V \oplus \tilde{H}_*S),d').
\end{tikzcd}$$

On ne peut pas supposer que la différentielle d' est la même que la différentielle d. Puisque $r \circ i \simeq id$, on a néanmoins que le composé du bas est un quasi-isomorphisme. Il en découle que $(T(V \oplus \tilde{H}_*S),d)$ est rétracte homotopique de l'AGD$_*$ à $n+1$ étages $(T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n \oplus \tilde{H}_*S),d)$. Par le Théorème B, cela montre que Acat $X \cup_f CS \leq n+1$. □

Références

[1] J.F. Adams and P.J. Hilton : On the chain algebra of a loop space, *Comment. Math. Helvetici* **30** (1955), pp. 305-330.

[2] H.J. Baues : *Algebraic Homotopy*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1989).

[3] O. Cornea : Strong LS category equals Cone-length, *Topology*, vol **34** No. 2 (1995), pp. 377-381.

[4] Y. Félix, S. Halperin et J-C. Thomas : Adams' cobar equivalence, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol **329** (1992), pp. 531-549.

[5] Y. Félix, S. Halperin, and J-C. Thomas : Differential graded algebras in topology, Handbook of Algebraic Topology, ed. I. M. James, North-Holland (1995).

[6] T. Ganea : Lusternik-Schnirelmann category and strong category, *Illinois J. Math.*, vol **11** (1967), pp. 417-427.

[7] S. Halperin et J-M. Lemaire : Notions of category in differential algebra, *Algebraic Topology - Rational Homotopy* LNM, vol **1318**, Springer Verlag, 1988, pp. 138-154.

[8] J.-M. Lemaire et F. Sigrist : Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la L.S. catégorie, *Comment. Math. Helv.* **56** (1981), pp. 103 - 122.

[9] H. Munkholm : DGA algebras as a Quillen model category, *J. Pure Appl. Alg.* **13** (1978), pp. 221-232.

[10] D. Quillen : Homotopical Algebra, LNM **43**, Springer-Verlag (1967).

[11] H. Scheerer et D. Tanré : Lusternik-Schnirelmann category and algebraic R-local homotopy theory, *Can. J. Math.* **50** (4) (1998), pp. 845 - 862.

[12] G. H. Toomer : Lusternik-Schnirelmann category and the Moore spectral sequence, *Math. Z.* **138** (1974), pp. 123-143.

UMR CNRS 8524
U.F.R. de Mathématiques

Université des Sciences et Technologies de Lille
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
France
kahl@aglae.univ-lille1.fr