

publicação do departamento de matemática
da universidade do minho

publicado pelo departamento de matemática
da universidade do minho
campus de gualtar, 4710-054
braga, portugal

primeira edição, março 2003

ISBN 972-8810-00-8

número dois

teoria de ôndulas

maria joana soares

Conteúdo

Prefácio	vii
1 Resultados Preliminares	1
1.1 Espaços de Hilbert e espaços de Banach	1
1.1.1 Produtos internos e normas	1
1.1.2 Espaços de funções. Espaços de Hilbert	3
1.1.3 Bases ortonormadas, bases de Riesz e referenciais	7
1.1.4 Espaços de Banach	11
1.1.5 Operadores de projecção	13
1.2 Análise de Fourier	14
1.2.1 Séries de Fourier	14
1.2.2 Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R})$	21
1.2.3 Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R})$	25
1.2.4 Espaço de Schwartz. Transformada de Fourier de distribuições temperadas	26
1.2.5 Distribuições periódicas. Fórmula da soma de Poisson	33
1.3 Exercícios	35
2 Localização Tempo-Frequência	41
2.1 Transformada de Fourier com janela	41
2.1.1 Algumas notações de processamento de sinal	41
2.1.2 Transformada de Fourier com janela	43
2.2 Transformada contínua com ôndula	48

conteúdo

2.2.1	Definição e propriedades básicas	49
2.2.2	Propriedades de localização da transformada com ôndula	52
2.2.3	Inversão da transformada contínua com ôndula	55
2.2.4	Caracterização da regularidade de funções por meio da transformada contínua com ôndula	58
2.3	Exercícios	63
3	Análise Multi-Resolução	69
3.1	Ôndulas ortogonais	69
3.2	Análise multi-resolução (AMR)	74
3.2.1	Exemplos de AMR	76
3.2.2	Espaços de pormenor e ôndula ortogonal	81
3.2.3	Enfraquecimento da condição AMR5	94
3.2.4	Ôndulas de Battle-Lemarié	97
3.2.5	Construção de uma AMR partindo da função escala	100
3.2.6	Ôndulas de Daubechies	104
3.3	Ôndulas biortogonais	108
3.4	Exercícios	110
4	Transformadas Rápidas com Ôndulas	117
4.1	Transformada directa	117
4.2	Transformada inversa	121
4.3	Generalização para várias variáveis	126
4.4	Sinais e filtros digitais	130
4.5	Exercícios	135
	Software e referências adicionais	142
	Bibliografia	151
	Índice	152

Prefácio

... *Move over Fourier!*
Your series and transforms are not the only game in town.
R. S. Strichartz [Str93]

A chamada *Teoria das ondas*¹ constitui um desenvolvimento recente e fascinante da Matemática, com aplicações importantes nas mais diversas áreas das Ciências e Engenharia.

Estas funções foram introduzidas, no início da década de 80, pelo geofísico francês Jean Morlet que, em ligação com o seu trabalho em prospecção de petróleo para a companhia *Elf Aquitaine*, as utilizou como ferramenta para análise de dados sísmicos. Os bons resultados numéricos obtidos por Morlet levaram o físico teórico Alex Grossmann a interessar-se por estas funções. Da colaboração entre Grossmann e Morlet surge, em 1984, um artigo intitulado “*Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape*” [GM84], no qual são estabelecidos os fundamentos teóricos da chamada *transformada integral com onda* e onde, pela primeira vez, é utilizada a palavra *wavelet*.

Em 1985, o matemático francês Yves Meyer, especialista em análise harmónica, tomou conhecimento da teoria de Grossmann e Morlet, conseguindo, de imediato, aperceber-se da semelhança entre o principal resultado obtido por esses autores e um resultado clássico de análise harmónica, conhecido por *Identidade de Calderón*.

A contribuição dos matemáticos Ingrid Daubechies e Stéphan Mallat que, para além do desenvolvimento da teoria, estabeleceram uma ligação entre certos resultados de *wavelets* e resultados obtidos anteriormente em processamento de sinal – por exemplo, decomposição

¹Usamos a palavra *onda* para traduzir a palavra francesa *ondelette* (em inglês, *wavelet*), no sentido de onda pequena.

prefácio

multi-resolução de sinais (usada em visão por computador) ou códigos de duas bandas (usados em compressão de sinal sonoro ou imagem) – vai cativar para este novo assunto muitos dos especialistas em processamento de sinal.

Embora possamos dizer que muitos dos conceitos e técnicas presentes nesta teoria estavam já implícitos nalguns algoritmos desenvolvidos muito antes da chamada *revolução das ondulas*, esta teve o mérito de unificar, numa linguagem coerente e estruturada, todos esses algoritmos dispersos. Esta síntese contribuiu de forma decisiva para uma melhor clarificação desses métodos e impulsionou o desenvolvimento de novos resultados teóricos e novas aplicações.

Interessando a cientistas de formação muito diversa – matemáticos, físicos teóricos, especialistas em processamento de sinal e imagem, etc – a teoria das ondulas tornou-se numa área de investigação muito activa, com a correspondente explosão de novos resultados, surgindo constantemente novas aplicações.

Na introdução a um número especial da revista *IEEE Transactions on Information Theory*² intitulado *Wavelet Transforms and Multiresolution Signal Analysis*, Ingrid Daubechies, um dos maiores especialistas sobre este tema, afirma:

“Indeed, we are all [· · ·] still working hard to understand each other and to keep up with the research explosion.”

O rápido desenvolvimento deste assunto, com constantes modificações e generalizações, torna impossível dar uma visão global desta teoria e de todos os seus campos actuais de aplicação. Torna-se, inclusivamente, difícil dar uma definição de *ondula* que não corra o risco de ser, ou demasiado vaga para ter interesse em certas aplicações, ou demasiado restritiva noutras circunstâncias.

Estes textos foram escritos com o objectivo de servir de apoio à disciplina de *Introdução à Teoria das Ondulas*, do Mestrado em Matemática Computacional da Universidade do Minho. Nesse curso introdutório, concentramo-nos, essencialmente, no estudo das chamadas *ondulas ortogonais*, em ligação com uma estrutura desenvolvida por Mallat e Meyer, em 1986, conhecida por *análise multi-resolução* (AMR), a qual é a base da construção das ondulas ortogonais de maior interesse. Começamos por fazer o estudo da chamada *transformada integral com ondula*, com a principal finalidade de realçar as suas propriedades

²IEEE Trans. Inform. Theory, 38, 1992.

prefácio

de localização tempo-frequência. Antes, porém, é feita uma breve revisão de alguns resultados básicos de espaços de Hilbert e de Banach e de Análise de Fourier, necessários à compreensão da restante matéria.

1. Resultados Preliminares

Espaços de Hilbert e espaços de Banach
Análise de Fourier

Neste primeiro capítulo, são introduzidas algumas notações, definições e resultados básicos que serão utilizados com frequência nos capítulos posteriores. O objectivo é, apenas, dar um resumo que possa servir de rápida referência ao leitor, não sendo incluídas quaisquer demonstrações. Para mais pormenores, aconselhamos a consulta dos livros de Rudin [Rud74, Rud79], Priestley [Pri97], Dym e McKean [DM72] ou Gasquet e Witomski [GW98]; o livro de Kaiser [Kai94] contém, também, uma introdução bastante acessível sobre os principais resultados aqui contidos, sendo parte deste capítulo muito baseada nessa referência. No final do capítulo são apresentados alguns exercícios cuja resolução poderá ajudar a solidificar a compreensão dos conceitos introduzidos.

1.1 Espaços de Hilbert e espaços de Banach

1.1.1 Produtos internos e normas

Seja \mathbb{C}^n o espaço vectorial sobre \mathbb{C} de todos os vectores com n componentes complexas, com adição e multiplicação escalar definidas da forma usual. Define-se o produto interno canónico em \mathbb{C}^n por

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i, \quad (1.1)$$

onde u_i, v_i são as componentes dos vectores u e v , respectivamente, e onde \bar{v}_i designa o conjugado de v_i . Facilmente se verifica que o produto interno (1.1) satisfaz as seguintes

resultados preliminares

propriedades:

$$\forall u \in \mathbb{C}^n \quad \langle u, u \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0 \quad (\text{Positividade}) \quad (1.2)$$

$$\forall u, v \in \mathbb{C}^n \quad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \quad (\text{Hermiticidade}) \quad (1.3)$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall u, v \in \mathbb{C}^n \quad \langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle \quad (\text{Linearidade}) \quad (1.4)$$

Nota O produto interno é linear apenas no primeiro factor. De (1.4) e (1.3) segue-se de imediato que

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall u, v \in \mathbb{C}^n \quad \langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \bar{\alpha} \langle u, v \rangle + \bar{\beta} \langle u, w \rangle.$$

O conceito de produto interno canónico pode generalizar-se para outros “produtos internos”. Mais precisamente, sendo V um espaço vectorial complexo, chama-se produto interno em V a toda a função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ que verifique as propriedades (1.2), (1.3) e (1.4), para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $u, v, w \in V$.

Dado um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ num espaço vectorial V , a função $\| \cdot \|$ definida por

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad (1.5)$$

satisfaz as seguintes propriedades:

$$\forall u \in V \quad \|u\| \geq 0 \quad \text{e} \quad \|u\| = 0 \iff u = 0 \quad (1.6)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall u \in V \quad \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\| \quad (1.7)$$

$$\forall u, v \in V \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (1.8)$$

Qualquer função de V em \mathbb{R} que satisfaça as propriedades (1.6) – (1.8) diz-se uma *norma*, e um espaço vectorial onde esteja definida uma norma diz-se um espaço vectorial normado (e.v.n.). Vemos, assim, que todo o espaço vectorial com produto interno é um espaço vectorial normado.¹

Dado um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em V , diremos que dois vectores u e v de V são *ortogonais* (relativamente a esse produto interno) se $\langle u, v \rangle = 0$.

Se V é um espaço vectorial de dimensão finita $n \in \mathbb{N}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e respectiva norma $\| \cdot \|$ e $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ é uma base de V , então essa base diz-se ortogonal

¹De notar que nem todas as normas estão, no entanto, associadas a produtos internos.

se os vectores que a constituem forem ortogonais dois a dois. Se, além disso, todos tiverem norma unitária, diremos que formam uma base ortonormada. As seguintes propriedades são de demonstração imediata, usando a definição de norma e as propriedades do produto interno.

Se $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ é uma base ortonormada de V e $u = \sum_{i=1}^n u_i b_i$, então:

$$u_i = \langle u, b_i \rangle; \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.9)$$

Além disso, tem-se a seguinte identidade (*Identidade de Parseval*):

$$\sum_{i=1}^n |u_i|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle u, b_i \rangle|^2 = \|u\|^2. \quad (1.10)$$

Para qualquer produto interno e respectiva norma, é também válida a seguinte desigualdade, conhecida por *desigualdade de Cauchy-Schwarz*:

$$\forall u, v \in V \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|. \quad (1.11)$$

1.1.2 Espaços de funções. Espaços de Hilbert

Um vector $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ de \mathbb{C}^n pode ser interpretado como uma função, definida no conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, que a cada inteiro k desse conjunto associa a componente u_k , isto é, $u(k) = u_k$. Com esta notação, o produto interno canónico e norma associada vêm dados por

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^n u(k) \overline{v(k)} \quad \text{e} \quad \|u\| = \left(\sum_{k=1}^n |u(k)|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.12)$$

Seja agora S um conjunto arbitrário, não vazio, e denotemos por \mathbb{C}^S o conjunto de todas as aplicações de S em \mathbb{C} . Como é bem sabido, \mathbb{C}^S tem uma estrutura de espaço vectorial para a adição de funções e multiplicação de funções por um escalar definidas de forma usual, isto é, pontualmente. No caso em que $S = \{1, 2, \dots, n\}$, este espaço identifica-se, naturalmente, com o espaço \mathbb{C}^n , o qual, como sabemos, tem dimensão n . Se S for um conjunto infinito, \mathbb{C}^S terá dimensão infinita. Vamos debruçar-nos sobre dois tipos de espaços funcionais de dimensão infinita: espaços \mathbb{C}^S com S um conjunto discreto (por exemplo, $S = \mathbb{N}$ ou

resultados preliminares

$S = \mathbb{Z}$) e espaços do tipo \mathbb{C}^S com S um conjunto não discreto (por exemplo, $S = \mathbb{R}$ ou $S = \mathbb{C}$). O problema principal ao passarmos aos espaços de dimensão infinita é que as generalizações naturais, para estes espaços, de alguns dos conceitos introduzidos para o espaço \mathbb{C}^n , envolvem séries ou integrais, cuja convergência não está, *a priori*, garantida. Por exemplo, no espaço $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, cujos elementos identificamos com as sequências bi-infinitas $u = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, será natural definir-se um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e uma norma associada, generalizando o produto canônico de \mathbb{C}^n e respectiva norma, isto é, considerar

$$\langle u, v \rangle := \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \overline{v_k}, \quad (1.13)$$

$$\|u\| := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.14)$$

Temos, no entanto, o problema de as séries envolvidas em (1.13) e (1.14) não convergirem para todos os vectores $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. A solução usual é considerar apenas o subconjunto H de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ formado pelas sequências de “norma” finita, isto é,

$$H := \{u = (u_k) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k|^2 < \infty\}. \quad (1.15)$$

Pode provar-se que, se u, v estão em H , então a série que define $\langle u, v \rangle$ converge e que, além disso, $\langle u, v \rangle$ definido por (1.13) satisfaz os axiomas de um produto interno. Também não é difícil mostrar que H é um subespaço vectorial de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Resumindo: O conjunto H definido por (1.15) é um espaço vectorial, (1.13) define um produto interno em H e (1.14) define a respectiva norma. Quando equipado com este produto interno, H é chamado *espaço das sequências complexas de quadrado somável*, e denotado por $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Consideremos, agora, o caso em que o conjunto de “índices” S não é um conjunto discreto; por exemplo, seja $S = \mathbb{R}$. Uma definição natural de produto interno e norma associada será obtida substituindo as somas em (1.13) e (1.14) pelas suas versões contínuas, isto é, por integrais:

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt, \quad (1.16)$$

$$\|f\| := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (1.17)$$

Existem, no entanto, dois problemas associados com estas definições.

A primeira dificuldade tem a ver com o facto de os integrais (usuais, no sentido de Riemann) que definem $\langle f, g \rangle$ e $\|f\|$ não existirem, para a maior parte das funções de \mathbb{R} em \mathbb{C} . Existe, no entanto, uma generalização do conceito de integral, conhecida por integral de Lebesgue ² que permite lidar com uma muito mais vasta classe de funções. A teoria de integração de Lebesgue é um pouco técnica. Uma referência bastante acessível sobre este tema é o livro de H. A. Priestley [Pri97]. Esta teoria baseia-se no conceito de *medida*, que é uma generalização do conceito de comprimento. A medida de Lebesgue de um subconjunto de \mathbb{R} é, “grosso modo” o seu comprimento total (por exemplo, a medida de Lebesgue de um intervalo (a, b) é $b - a$). Quando uma propriedade se verifique em todos os pontos de \mathbb{R} , com excepção de um conjunto de pontos que tenha medida nula, diremos que ela se verifica *quase sempre* (q.s.) ou *para quase todo o t* (para q.t. t).

Apenas para certo tipo de funções, ditas *mensuráveis*, faz sentido definir o integral de Lebesgue. A classe de funções mensuráveis é, no entanto, muito vasta, contendo, a bem dizer, todas as funções que aparecem em aplicações práticas. Assim, ao longo deste curso, assumimos tacitamente que todas as funções referidas são funções mensuráveis.

Se f e g são funções mensuráveis, são também mensuráveis as funções $f(t)\overline{g(t)}$ e $|f(t)|^2$, que aparecem em (1.16) e (1.17). Em particular, o integral que define $\|f\|$ faz sentido, embora o resultado possa ser infinito. Assim, o conjunto

$$H := \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} : f \text{ é mensurável e } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty\} \quad (1.18)$$

é um subconjunto bem definido de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. Pode também provar-se que, se $f, g \in H$, o integral que define $\langle f, g \rangle$ é finito. Contudo, temos agora uma nova dificuldade. Consideremos, por exemplo, uma função f que se anule em todos os pontos de \mathbb{R} , com excepção de um número finito de pontos $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$. Então, f é mensurável e o conjunto de pontos onde f não se anula tem “comprimento total” zero, isto é, tem medida de Lebesgue nula. Para uma função deste género, o integral de Lebesgue é nulo. Assim, $\langle f, f \rangle = 0$, não sendo f a função nula. Mais geralmente, se uma função f se anula em todos os pontos de \mathbb{R} excepto num conjunto de pontos de medida nula,³ então $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 0$. Isto mostra que o produto

²Henri-Léon Lebesgue (1875–1941), matemático francês.

³Como exemplos de conjuntos de medida nula têm-se, para além de conjuntos finitos, todos os conjuntos

resultados preliminares

interno (1.16) proposto viola a condição de positividade. A solução para este problema consiste em encarar quaisquer duas funções mensuráveis f e g que difiram apenas num conjunto de pontos de medida nula como sendo a *mesma* função. Assim, H não consistirá então de simples funções, mas de classes de equivalência de funções relativamente à relação definida por

$$f \mathcal{R} g \iff f(t) = g(t) \quad (\text{para q.t. } t),$$

isto é, elementos do conjunto quociente H/\mathcal{R} . Naturalmente, identificaremos cada classe com uma função que a represente e, caso haja um representante contínuo, diremos que a “função” é contínua, etc. Assim, escreveremos simplesmente $f = g$ com o significado de que $f = g$ (q.s.). Com este entendimento, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define, de facto, um produto interno em H , ou seja, verifica os axiomas de positividade, hermiticidade e linearidade.

Tal como no caso de dimensão finita, estas propriedades implicam que (1.17) seja uma norma e que seja válida a desigualdade de Cauchy-Schwarz (1.11). Além disso, verifica-se facilmente que H é fechado para a adição e multiplicação por um escalar, pelo que constitui um espaço vectorial complexo. Este espaço é chamado *espaço das funções mensuráveis de quadrado integrável*, e é denotado por $L^2(\mathbb{R})$.

• Espaços de Hilbert

Os espaços $\ell^2(\mathbb{Z})$ e $L^2(\mathbb{R})$ acima definidos constituem dois exemplos dos chamados *espaços de Hilbert*. Seja H um espaço vectorial complexo, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma associada $\| \cdot \|$. Uma sucessão $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de H diz-se uma sucessão de Cauchy, se $\|h_m - h_n\| \rightarrow 0$ quando $m, n \rightarrow \infty$.

Uma sucessão $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diz-se convergente para $h \in H$, e escreve-se $h_n \rightarrow h$, se $\|h_n - h\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Toda a sucessão convergente é uma sucessão de Cauchy (basta usar a desigualdade triangular para provar este resultado), mas o recíproco não se verifica necessariamente. Um espaço com produto interno no qual toda a sucessão de Cauchy convirja para um elemento do espaço é chamado *completo* ou *espaço de Hilbert*.

Pode provar-se que $\ell^2(\mathbb{Z})$ e $L^2(\mathbb{R})$ são, de facto, espaços de Hilbert.

numeráveis, como \mathbb{Z} e \mathbb{Q} , por exemplo. Existem também conjuntos não numeráveis cuja medida de Lebesgue é nula; como exemplo, temos os chamados conjuntos de Cantor – veja, e.g., [Boc90, pp 14-16].

• **Noção de Suporte**

Definição 1.1 *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Chama-se suporte de f , e designa-se por $\text{supp } f$, o conjunto*

$$\text{supp } f := \overline{\{t \in \Omega : f(t) \neq 0\}}, \tag{1.19}$$

onde \bar{A} designa o fecho do conjunto A .

Diz-se que f tem suporte compacto se $\text{supp } f$ for compacto.

Nota Note-se que para funções $f \in L^2(\mathbb{R})$, a noção de suporte (dada para funções contínuas) deverá ser alterada, uma vez que essas funções estão apenas definidas a menos de conjuntos de medida nula. Neste caso, considera-se a família de todos os abertos $(\Theta_i)_{i \in I}$ de \mathbb{R} tais que, para cada $i \in I$, $f = 0$ (q.s.) em Θ_i . Sendo $\Theta = \cup_i \Theta_i$, define-se

$$\text{supp } f := \mathbb{R} \setminus \Theta.$$

Se f é contínua, o suporte de f definido deste modo coincide com o suporte definido por (1.19). Além disso, tem-se que $f = 0$ (q.s.) em Θ e, se $f(t) = g(t)$ (para q.t. t) então $\text{supp } f = \text{supp } g$.

• **Espaço $L^2[a, b]$**

O conjunto de todas as funções de quadrado integrável cujo suporte esteja contido num certo intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} é denotado por $L^2[a, b]$. Nesse caso, tem-se

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt. \tag{1.20}$$

Nota Por vezes, é mais conveniente definir o produto interno em $L^2[a, b]$ por

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

1.1.3 Bases ortonormadas, bases de Riesz e referenciais

Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma $\| \cdot \|$ e seja $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ uma sequência bi-infinita de elementos de H .⁴ Dizemos que a série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k$ converge para h ,

⁴Consideramos aqui sequências bi-infinitas, isto é, conjuntos indexados pelo conjunto \mathbb{Z} , por ser este o tipo de sequências que usaremos mais frequentemente neste curso. As definições aqui apresentadas adaptam-se facilmente para outras sequências indexadas por $\mathbb{N}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, etc.

resultados preliminares

e escrevemos $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = h$, se a sucessão das somas parciais $S_N = \sum_{K=-N}^N h_k$ converge para h quando $N \rightarrow \infty$, isto é, se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{K=-N}^N h_k - h \right\| = 0. \quad (1.21)$$

Dizemos que a série converge *incondicionalmente* para h se qualquer seu rearranjo também converge para h , isto é, se para toda a permutação $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, a série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{\sigma(k)}$ converge para h .

Dizemos que a série converge *absolutamente* se a série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|h_k\|$ converge.

Nota Num espaço de Hilbert, a convergência absoluta implica convergência incondicional, mas uma série pode convergir incondicionalmente e não convergir absolutamente. Por exemplo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{int} e^{-t^2}$ é incondicionalmente convergente em $L^2(\mathbb{R})$, mas não converge absolutamente. Se H é de dimensão finita, haverá convergência incondicional se e só se houver convergência absoluta.

• Base de Schauder

Seja M um subconjunto arbitrário de um espaço de Hilbert H . Dizemos que M é linearmente independente se qualquer seu subconjunto finito for formado por vectores linearmente independentes.

Chama-se espaço gerado por M ($M \neq \emptyset$), e denota-se por $[M]$, ao conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de M .

Como é bem sabido, todo o espaço vectorial H admite uma base (no sentido de base de Hamel), isto é, existe um subconjunto B de H que é linearmente independente e que gera H , ou seja, satisfaz $[B] = H$. Para espaços vectoriais de dimensão infinita, no entanto, tais bases não podem, em geral, ser construídas explicitamente (a demonstração da sua existência assenta no axioma da escolha). De muito maior importância e aplicabilidade em análise é outro conceito de base, introduzido por Schauder [Sch27].

Definição 1.2 Uma sequência $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ num espaço de Hilbert H (de dimensão infinita) diz-se uma base de Schauder de H se, para cada vector $h \in H$, existe uma única sequência de escalares $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ tais que

$$h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k h_k \quad (1.22)$$

resultados preliminares

Por vezes, escrevemos $c_k = c_k(h)$ para indicar a dependência dos escalares c_k do vector h . Note-se que, se $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base de Schauder de H , então os vectores h_k são linearmente independentes.

Nota De agora em diante, sempre que nos referirmos a uma base de um espaço H de dimensão infinita, será no sentido de uma base de Schauder.

Segue-se de imediato de (1.22) que, fixada uma base $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ do espaço H , dado um qualquer vector desse espaço, este pode ser aproximado, com precisão arbitrária, por combinações finitas dos elementos da base. Uma sequência de vectores $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de um espaço de Hilbert H que tenha esta propriedade de aproximação (mesmo que não seja uma base) diz-se *total*, *completa* ou *fechada*. Mais precisamente, $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é completa em H se

$$\overline{[\{h_k\}]} = H,$$

ou seja, se qualquer que seja $h \in H$ e qualquer que seja $\epsilon > 0$, existe uma combinação linear finita $\sum_{k=-N}^N c_k h_k$ tal que

$$\|h - \sum_{k=-N}^N c_k h_k\| < \epsilon.$$

Prova-se que $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é completa se e só se o único elemento de H ortogonal a todos os vectores h_k é o vector nulo, isto é, se e só se

$$\langle h_k, h \rangle = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \implies h = 0.$$

Além disso, se $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ for completa e tiver a propriedade de deixar de ser completa sempre que se excluir um dos seus elementos (isto significa que nenhum vector h_k pertence ao fecho do espaço gerado pelos restantes), $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ será uma base.

• Bases ortonormadas

De entre as bases de um espaço de Hilbert, têm particular importância as bases ortonormadas, que passamos agora a caracterizar.

Seja $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ uma sequência ortonormada de um espaço de Hilbert H , isto é, suponhamos que

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

resultados preliminares

Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é completa;
- (ii) $\forall h \in H \quad h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle h, e_k \rangle e_k$;
- (iii) $\forall h \in H \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle h, e_k \rangle|^2 = \|h\|^2$ (*Identidade de Parseval*).

Uma sequência ortonormada $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ que verifique qualquer das três condições (i) – (iii) acima, diz-se uma *base ortonormada* ou *base de Hilbert* de H .

Um espaço de Hilbert diz-se *separável* se existir um subconjunto S de H , numerável e denso em H , isto é, tal que $\overline{S} = H$.

Nota Desde que nada seja dito em contrário, quando nos referirmos a um espaço de Hilbert, será com o significado de espaço de Hilbert separável.

Pode provar-se o seguinte resultado: *Todo o espaço de Hilbert admite uma base ortonormada.*

• Referenciais e bases de Riesz

Definição 1.3 Uma sequência $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ diz-se um referencial de H , se existem constantes A e B , com $0 < A \leq B < \infty$, tais que:

$$\forall h \in H \quad A\|h\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle h, h_k \rangle|^2 \leq B\|h\|^2. \quad (1.23)$$

As constantes A e B são chamadas *limites do referencial*. Se $A = B$ o referencial diz-se *fechado*.

Uma base ortonormada é, naturalmente um referencial fechado com $A = B = 1$; pode também provar-se que, se $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ for um referencial fechado, com limite $A = 1$ e tal que $\|h_k\| = 1$, para todo o k , então $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ será uma base ortonormada.

A condição (1.23) implica que $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é completa, ou seja, um referencial é sempre um conjunto completo. Um referencial diz-se *exacto* se deixar de ser um conjunto completo sempre que dele se exclua um vector. Nessas condições, ele será uma base, a que chamaremos *base de Riesz*. Pode provar-se que $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base de Riesz se e só se verificar:

- (i) $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é completa;
- (ii) Existem constantes C e D , com $0 < C \leq D < \infty$, tais que, para toda a sequência $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, se tem

$$C \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k h_k \right\|^2 \leq D \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2. \quad (1.24)$$

Se $T : H \rightarrow H$ for um operador limitado e invertível então T transforma qualquer base ortonormada de H numa base de Riesz. Além disso, pode provar-se que todas as bases de Riesz podem ser obtidas desta maneira. De facto, esta é, geralmente, a definição adoptada para base de Riesz, preferindo nós aqui, por uma questão de utilização posterior, defini-la pela caracterização equivalente de referencial exacto. De certo modo, as bases de Riesz são as “melhores” bases a seguir às bases ortonormadas.

Para as demonstrações dos resultados acima referidos e de outros resultados sobre referenciais, bases de Riesz e bases ortonormadas, aconselha-se o livro de [You80].

1.1.4 Espaços de Banach

Sendo H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, já vimos que a função definida por $\|h\| := \sqrt{\langle h, h \rangle}$ define uma norma em H , isto é, satisfaz as propriedades (1.6) – (1.8).

Um espaço normado que seja completo diz-se um *espaço de Banach*. Assim, todo o espaço de Hilbert é um espaço de Banach (mas nem todo o espaço de Banach é um espaço de Hilbert, já que nem todas as normas derivam de produtos internos).

resultados preliminares

- **Espaços $L^p(\mathbb{R})$ e $\ell^p(\mathbb{Z})$**

Para $p \geq 1$, definamos

$$L^p(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} : f \text{ é mensurável e } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt < \infty \right\}. \quad (1.25)$$

Prova-se que $L^p(\mathbb{R})$ é um espaço de Banach, para a norma $\|\cdot\|_p$ definida por

$$\|f\|_p := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p \right)^{1/p} \quad (1.26)$$

Nota

- (i) Naturalmente, tal como no caso $L^2(\mathbb{R})$, identificaremos quaisquer duas funções que difiram apenas num conjunto de pontos de medida nula.
- (ii) Como o espaço com que trabalharemos com maior frequência será o espaço $L^2(\mathbb{R})$, muito frequentemente, desde que tal seja claro pelo contexto, usaremos apenas o símbolo $\|\cdot\|$ para denotar a norma $\|\cdot\|_2$.

De modo análogo se define $L^p[a, b]$, com $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Seja

$$\ell^p(\mathbb{Z}) := \{c = (c_k)_{k \in \mathbb{Z}} : \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^p < \infty\}. \quad (1.27)$$

Então, $\ell^p(\mathbb{Z})$ é um espaço de Banach para a norma definida por

$$\|(c_k)\|_p := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^p \right)^{1/p}. \quad (1.28)$$

Definição 1.4 Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, chama-se *supremo essencial de f* , e denota-se por $\text{supess } f$ à quantidade definida por

$$\text{supess } f := \inf\{C \in \mathbb{R}_0^+ : |f(t)| \leq C \text{ (para q.t.t.)}\} \quad (1.29)$$

Seja

$$L^\infty(\mathbb{R}) := \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} : f \text{ é mensurável e } \text{supess } f < \infty\}. \quad (1.30)$$

Então, prova-se que $L^\infty(\mathbb{R})$ é um espaço de Banach para a norma $\|\cdot\|_\infty$ definida por

$$\|f\|_\infty := \text{supess } f. \quad (1.31)$$

Este espaço é designado por espaço das funções essencialmente limitadas. De modo análogo, definimos

$$\ell^\infty(\mathbb{Z}) := \{(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} : \sup_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < \infty\} \quad (1.32)$$

e

$$\|(c_k)\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{|c_k|\}. \quad (1.33)$$

1.1.5 Operadores de projecção

Seja H um espaço de Hilbert e seja Y um seu subconjunto arbitrário. O conjunto dos elementos de H que são ortogonais a todos os elementos de Y chama-se *complemento ortogonal de Y* , e denota-se por Y^\perp , isto é

$$Y^\perp := \{h \in H : \langle h, y \rangle = 0, \quad \forall y \in Y\}. \quad (1.34)$$

Seja M um subespaço fechado de H e seja M^\perp o seu complemento ortogonal. Pode provar-se então o seguinte resultado: *todo o elemento de H escreve-se, de modo único, como soma de um elemento de M com um elemento de M^\perp* , isto é

$$\forall h \in H, \quad h = m + m^\perp, \quad (1.35)$$

onde $m \in M$ e $m^\perp \in M^\perp$ são univocamente determinados. Escrevemos, então

$$H = M \oplus M^\perp. \quad (1.36)$$

Dado $h \in H$, o único elemento $m \in M$ determinado por h , de acordo com (1.35), chama-se *projecção ortogonal de h no subespaço M* , e denota-se por $\text{proj}_M h$. A aplicação

$$\begin{aligned} P_M : H &\longrightarrow M \\ h &\longmapsto \text{proj}_M h \end{aligned}$$

é um operador linear – chamado *operador de projecção ortogonal de H sobre M* – que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) P_M é limitado;
- (ii) P_M é sobrejectivo;

resultados preliminares

- (iii) P_M transforma M em si mesmo;
- (iv) P_M transforma M^\perp em $\{0\}$; ⁵
- (v) P_M é idempotente, isto é, $P_M^2 = P_M$.

Pode também provar-se o seguinte resultado: sendo H um espaço de Hilbert e sendo M um subespaço fechado de H , então a projecção ortogonal de h sobre M é a melhor aproximação de h por elementos de M , isto é

$$\|h - P_M h\| = \inf_{y \in M} \|h - y\|, \quad (1.37)$$

sendo $P_M h$ o único elemento de M para o qual a igualdade (1.37) se verifica.

1.2 Análise de Fourier

As séries de Fourier⁶ e transformada integral de Fourier constituem uma ferramenta essencial neste curso, pelo que daremos agora um breve resumo das suas principais propriedades e resultados. Para mais pormenores aconselhamos, por exemplo, a consulta dos livros de Rudin [Rud79] ou Dym e McKean [DM72].

1.2.1 Séries de Fourier

Seja $H_{2\pi}$ o espaço das funções mensuráveis e periódicas de período 2π , isto é, tais que

$$f(t + 2\pi) = f(t) \quad (\text{para q.t. } t) \quad (1.38)$$

e que satisfazem, além disso,

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (1.39)$$

⁵Isto significa que $M^\perp \subset \text{Ker } P_M$; mas, facilmente se verifica que $\text{Ker } P_M \subset M^\perp$, donde se conclui que $\text{Ker } P_M = M^\perp$.

⁶Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), matemático francês a quem se deve o desenvolvimento da ideia de representar funções periódicas como séries de senos e co-senos (note que $e^{it} = \cos t + i \sin t$). Fourier desenvolveu essa técnica para resolver as equações diferenciais que aparecem em problemas de condução do calor. Embora Daniel Bernoulli, em 1753, tivesse já usado séries trigonométricas na resolução das equações diferenciais associadas ao problema das cordas vibrantes, é essencialmente com o trabalho de Fourier que nasce o interesse nas representações em séries trigonométricas.

O conjunto $H_{2\pi}$ é um espaço de Hilbert para o produto interno

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (1.40)$$

De facto, como uma função de $H_{2\pi}$ é determinada pela sua restrição ao intervalo $[0, 2\pi]$, o espaço $H_{2\pi}$ pode ser identificado com o espaço $L^2[0, 2\pi]$, definido anteriormente.⁷

Pode provar-se que as funções

$$w_k(t) := e^{ikt}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1.41)$$

formam uma base ortonormada deste espaço.⁸ Assim, toda a função de $L^2[0, 2\pi]$ admite uma expansão da forma

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}, \quad (1.42)$$

onde os coeficientes $c_k = c_k(f)$ são dados por

$$\begin{aligned} c_k &= \langle f, e^{ikt} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt. \end{aligned} \quad (1.43)$$

A expansão (1.42) é chamada *expansão em série de Fourier de f* sendo os coeficientes c_k , definidos por (1.43), chamados *coeficientes de Fourier de f* .

Observações

1. A igualdade (1.42) deve ser interpretada, como vimos, no sentido

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f(t) - \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt} \right\|_2 = 0,$$

ou seja, como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt} \right|^2 dt = 0,$$

⁷Naturalmente, qualquer função de $H_{2\pi}$ é também determinada pela sua restrição a qualquer outro intervalo de amplitude 2π , pelo que podemos também identificar $H_{2\pi}$ com $L^2[-\pi, \pi]$, por exemplo.

⁸É muito fácil de verificar que $(w_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é um sistema ortonormado. A demonstração de que se trata de um conjunto completo pode ser vista, por exemplo, em [Boc90, p.143].

resultados preliminares

não significando necessariamente que, para cada $t \in [0, 2\pi]$, a série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$ convirja para o valor da função f no ponto t .

2. O estudo do problema da convergência pontual e uniforme das séries de Fourier, sendo embora extremamente interessante, está fora do âmbito deste curso.⁹ O resultado de convergência que requer as hipóteses mais fracas afirma que a série de Fourier de uma função $f \in L^p[0, 2\pi]$, $1 < p \leq \infty$, converge para f no sentido da norma $\|\cdot\|_p$ e também em quase toda a parte. Assim, em particular, a igualdade (1.42) é válida para quase todo o t .
3. Prova-se também que, se a função f for de variação limitada em $[a, b]$,¹⁰ a sua série de Fourier converge, em cada ponto t , para $\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$. Assim, se f é de variação limitada, a sua série de Fourier converge pontualmente para $f(t)$ em cada ponto t que seja ponto de continuidade de f . Se, além disso, f é contínua num certo intervalo fechado $[a, b]$, a sua série de Fourier converge uniformemente para f em $[a, b]$. (Estes resultados constituem o chamado *Teste de Dirichlet* para a convergência pontual de séries de Fourier e a sua demonstração pode ser vista, por exemplo, em [lór88].)

A representação de f através da sua série de Fourier tem duas características importantes: a primeira é que ela nos dá a *decomposição* de f numa soma (infinita) de componentes ortogonais $h_k = c_k e^{ikt}$; além disso, as funções $w_k(t) := e^{ikt}$ usadas nessa decomposição são, todas elas, obtidas a partir de uma função básica $w(t) := e^{it}$ à custa de *contrações inteiras*, isto é, tem-se

$$w_k(t) = w(kt), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Resumindo, podemos dizer que *toda a função periódica de período 2π de quadrado integrável é gerada pela sobreposição de contrações inteiras de uma função básica $w(t) = e^{it}$.*

⁹Um artigo de divulgação, muito interessante e acessível, sobre este assunto é o de R. O. Gandulfo, *Séries de Fourier e Convergência*, Matemática Universitária n.º 11 (1990), 27-52.

¹⁰Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se de variação limitada se existir uma constante M tal que, para qualquer partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ do intervalo $[a, b]$, se tenha $\sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})| \leq M$. Prova-se que toda a função de variação limitada tem um conjunto numerável de descontinuidades, sendo todas estas de 1.ª espécie, isto é, descontinuidades tipo salto. Assim, os limites $f(t^+)$ e $f(t^-)$ existem e são finitos em cada ponto t .

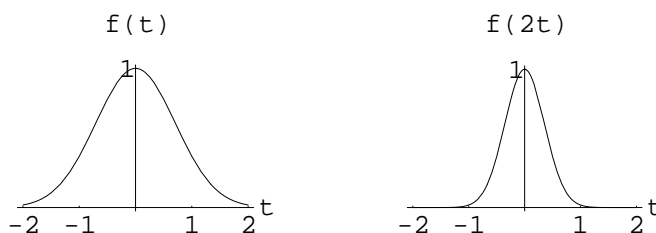


Figura 1.1: Contração de uma função f .

Da ortonormalidade das funções w_k segue-se, de imediato, que a expansão em série de Fourier (1.42) satisfaz a identidade de Parseval:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, e^{ikt} \rangle|^2 \\ &= \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Temos, assim, que a sequência dos coeficientes de Fourier de $f \in L^2[0, 2\pi]$ é de quadrado somável ou seja, está no espaço $\ell^2(\mathbb{Z})$. Reciprocamente, podemos provar que, dada uma sequência $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, se considerarmos a série

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt} \quad (1.45)$$

ela converge, no sentido da norma em $L^2[0, 2\pi]$, para uma função $f \in L^2[0, 2\pi]$, isto é, temos

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt} = f(t) \in L^2[0, 2\pi]. \quad (1.46)$$

Além disso, a sequência dos coeficientes de Fourier dessa função f é precisamente a sequência inicial $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, ou seja, tem-se

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = c_k. \quad (1.47)$$

Observações

1. A igualdade em (1.46) não é válida apenas no sentido da convergência em $L^2[0, 2\pi]$, mas também para quase todo o t .

resultados preliminares

2. Se a sequência $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ for absolutamente somável, isto é, estiver no espaço $\ell^1(\mathbb{Z})$, então a série (1.45) converge absoluta e uniformemente, definindo, portanto, uma função periódica de período 2π e contínua para todo o valor de t .

Atendendo a que

$$w(t) := e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

é usual referir-mo-nos à função $w(t)$ como uma *onda* de período 2π . De modo análogo, $w_k(t) = e^{ikt}$ será uma onda de período $\frac{2\pi}{k}$. Se pensarmos na função $f(t)$ como representando um sinal (temporal) ¹¹ periódico, então a sua série de Fourier

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$$

dá-nos a decomposição do sinal nas chamadas *harmónicas*. Os termos correspondentes a $|k| = 1$ são chamadas harmónicas fundamentais e representam as ondas cujo período é exactamente igual ao do sinal dado. Os termos correspondentes a $|k| = 2, 3, \dots$, são chamados, respectivamente, segundas, terceiras, \dots , harmónicas. A harmónica $h_k = c_k e^{ikt}$ tem período $\omega_k := \frac{2\pi}{k}$ e, portanto, em cada unidade de tempo, “executa” $\frac{1}{\omega_k} = \frac{k}{2\pi}$ *ciclos* completos. Assim, se t for, por exemplo, medido em segundos, dizemos que a harmónica h_k tem uma frequência de $\frac{k}{2\pi}$ ciclos por segundo (c.p.s.). Em Engenharia, usa-se a terminologia *Hertz (Hz)* para denotar c.p.s. Assim, o termo h_k tem uma frequência de $\frac{k}{2\pi}$ Hz. O número k pode também ser interpretado como uma *frequência angular* do termo h_k . A frequência angular é medida em radianos por unidade de tempo. De facto, quando t “percorre” uma unidade de tempo, o ângulo kt “percorre” k radianos. A relação entre a frequência (medida em Hz) e a frequência angular (medida em radianos por segundo) será assim dada por

$$\text{Frequência angular} = 2\pi \times \text{Frequência}$$

• Séries de Fourier para funções de período geral

A teoria das séries de Fourier para funções periódicas de período 2π pode, naturalmente, estender-se para funções periódicas de período arbitrário. Se f é uma função periódica de período $2T$ ($T > 0$) de quadrado integrável (isto é, $f \in L^2[-T, T]$), então a sua série de

¹¹Caso em que a variável t representará o *tempo*.

Fourier será dada por

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik \frac{\pi}{T} t}, \quad (1.48)$$

onde

$$c_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-ik \frac{\pi}{T} t} dt. \quad (1.49)$$

Neste caso, as funções $e^{ik \frac{\pi}{T} t}$ formam uma base ortonormada de $L^2[-T, T]$, relativamente ao produto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (1.50)$$

Dado um sinal $f \in L^2[-T, T]$, o cálculo dos seus coeficientes de Fourier através de (1.49) constitui a chamada *análise* de f , uma vez que esse cálculo corresponde, por assim dizer, a “analisar” o conteúdo em harmónicas do sinal.

Dada a sequência $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ dos seus coeficientes de Fourier, a representação (1.48) constitui a chamada *síntese* do sinal, uma vez que se trata de “sintetizar” ou “reconstruir” o sinal f , à custa das harmónicas.

A série de Fourier dá-nos o modelo base usado em síntese musical ou de voz. Dado um sinal f , é primeiramente feita a análise do seu conteúdo em harmónicas, fazendo-se depois a síntese do sinal, usando, como coeficientes, os coeficientes de Fourier obtidos na fase de análise. Dizemos, então, que o sinal foi reconstruído. Em geral, o sinal reconstruído não coincide exactamente com o sinal original, por causa de erros (de arredondamento ou de outro tipo) ou por uma questão de economia. Por exemplo, se o sinal é muito “complicado” (no sentido em que contém muitas harmónicas), podemos, na fase de síntese, decidir ignorar harmónicas com frequência superior a um certo valor. Um exemplo do que se chama *processamento de sinal* será a modificação intencional do sinal original, aumentado, por exemplo, o valor dos coeficientes correspondentes a determinadas frequências e suprimindo outros coeficientes. Um exemplo do que constitui a chamada *compressão de sinal* consiste numa forma de processamento no qual o objectivo é aproximar o sinal original usando tão poucos coeficientes quanto possível, sem sacrificar as qualidades do sinal consideradas importantes. Todos estes conceitos se estendem para o uso de outras funções que permitam a “decomposição” (i.e., análise) e “reconstrução” (i.e., síntese) do sinal. A escolha dessas

resultados preliminares

funções (eventualmente, funções diferentes para a análise e para a síntese) determina o carácter da correspondente análise, síntese, processamento ou compressão do sinal.

- **Da série de Fourier à transformada de Fourier**

Ao usarmos séries de Fourier, estamos limitados a funções definidas num certo intervalo $[-T, T]$ (e extendidas periodicamente para fora desse intervalo). Em muitas aplicações, tem-se uma variável que percorre toda a recta real, isto é, estamos interessados, por exemplo, em funções de $L^2(\mathbb{R})$. Vejamos o que acontece, pelo menos formalmente, às fórmulas (1.48) e (1.49), quando $T \rightarrow +\infty$.

Seja então f periódica de período $2T$, e sejam

$$h = \frac{\pi}{T} \quad \text{e} \quad \xi_k := kh, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.51)$$

Temos, então,

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i\xi_k t}, \quad (1.52)$$

onde

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\xi_k t} dt \\ &= \frac{h}{2\pi} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\xi_k t} dt \\ &= h g_k, \end{aligned}$$

com

$$g_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\xi_k t} dt. \quad (1.53)$$

Consideremos os valores g_k , dados por (1.53), como valores de uma certa função g nos pontos ξ_k , isto é, sejam $g_k = g(\xi_k)$, onde

$$g(\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\xi t} dt. \quad (1.54)$$

Temos, assim,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h g(\xi_k) e^{i\xi_k t} \\ &= \sum_{nk \in \mathbb{Z}} g(\xi_k) e^{i\xi_k t} \Delta\xi_k, \end{aligned} \quad (1.55)$$

onde

$$\Delta\xi_k := \xi_{k+1} - \xi_k = h.$$

A série (1.55) tem o aspecto formal de uma soma de Riemann para o integral de $g(\xi)e^{i\xi t}$. Logo, de (1.55) e (1.54) obtemos *formalmente*, quando $T \rightarrow +\infty$ (isto é, quando $h = \Delta\xi_k \rightarrow 0$),

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{i\xi t} d\xi, \quad (1.56)$$

onde

$$g(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t} dt. \quad (1.57)$$

É usual reescrever (1.56) – (1.57) como

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi t} d\xi, \quad (1.58)$$

onde

$$\hat{f}(\xi) := \sqrt{2\pi}g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t} dt. \quad (1.59)$$

A função $\hat{f}(\xi)$ definida por (1.59) é chamada *Transformada (Integral) de Fourier* da função f e denotada, usualmente, por $\mathcal{F}f$, definindo (1.58) a chamada *Transformada de Fourier Inversa* de \hat{f} , usualmente designada por $\mathcal{F}^{-1}\hat{f}$ ou \check{f} .¹²

1.2.2 Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R})$

As fórmulas (1.58), (1.59) foram deduzidas formalmente através da passagem ao limite das correspondentes fórmulas das séries de Fourier.

A primeira questão que se coloca, naturalmente, é a seguinte: para que tipo de funções faz sentido definir a transformada de Fourier, isto é, usar a fórmula (1.59)?

Uma classe de funções para as quais (1.59) está, certamente, bem definida é a das funções de $L^1(\mathbb{R})$, uma vez que, sendo $f \in L^1(\mathbb{R})$, se tem:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |e^{-i\xi t}| dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty, \quad \forall \xi.$$

¹²É necessário algum cuidado com as convenções adoptadas para a definição de transformada de Fourier e sua inversa, nos diferentes livros, pois elas não são uniformes. Por exemplo, outras definições usuais são $(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t} dt$ e $(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi t} d\xi$, ou $(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i \xi t} dt$ e $(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i \xi t} d\xi$.

resultados preliminares

Note-se, no entanto, que a transformada de Fourier de uma função de $L^1(\mathbb{R})$ não está necessariamente em $L^1(\mathbb{R})$. Por exemplo, consideremos a função

$$\chi_{[-1,1]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{se } |t| > 1, \end{cases}$$

a qual está, naturalmente, em $L^1(\mathbb{R})$. A sua transformada de Fourier é dada por

$$\widehat{\chi_{[-1,1]}}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}(\xi) := \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \xi}{\xi}$$

e pode mostrar-se que esta função não é uma função do espaço $L^1(\mathbb{R})$; veja, e.g. [Pri97, pp. 112-113].

Embora as transformadas de funções de $L^1(\mathbb{R})$ não estejam necessariamente em $L^1(\mathbb{R})$, elas comportam-se “bem” noutros aspectos.

Teorema 1.1 *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. Então:*

- (i) $\forall \xi \in \mathbb{R} \quad |\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$;
- (ii) \widehat{f} é uma função uniformemente contínua em \mathbb{R} ;
- (iii) $|\widehat{f}(\xi)| \rightarrow 0$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$ (Lema de Riemann-Lebesgue).

Teorema 1.2 *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Então, $\widehat{f}g$ e $f\widehat{g}$ estão em $L^1(\mathbb{R})$ e tem-se*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x)g(x)dx. \quad (1.60)$$

Uma das propriedades notáveis da transformada de Fourier é a relação entre derivação e multiplicação por um monómio.

Teorema 1.3 (i) *Seja f tal que $t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, para $k = 0, 1, \dots, m$. Então, \widehat{f} é m vezes diferenciável e*

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (-i)^k \widehat{(t^k f)}(\xi); \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (1.61)$$

(ii) *Suponhamos que $f \in C^m(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ e que todas as derivadas $f^{(k)}$; $k = 1, 2, \dots, m$, estão em $L^1(\mathbb{R})$. Então,*

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{f}(\xi); \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (1.62)$$

(iii) Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ tem suporte compacto, então \widehat{f} é infinitamente diferenciável.

Segue-se uma lista de outras propriedades básicas da transformada de Fourier, cujas demonstrações podem, por exemplo, ser vistas em [Pri97].

Começamos por introduzir três operadores que usaremos com muita frequência ao longo do curso:

$$\text{Translação : } T_a f := f(\cdot - a), \quad a \in \mathbb{R}. \quad (1.63)$$

$$\text{Modulação : } E_a f := e^{ia\cdot} f(\cdot), \quad a \in \mathbb{R}. \quad (1.64)$$

$$\text{Dilatação : } D_a f := |a|^{-1/2} f(\cdot/a), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \quad (1.65)$$

(Note-se que chamamos operador de dilatação ao operador definido por (1.65), ainda que o resultado possa corresponder (quando $|a| > 1$) a uma contracção da função sobre o qual actua.) Temos o seguinte resultado.

Teorema 1.4

$$\widehat{T_a f} = E_{-a} \widehat{f}; \quad \widehat{E_a f} = T_a \widehat{f}; \quad \widehat{D_a f} = D_{\frac{1}{a}} \widehat{f}. \quad (1.66)$$

• Produto de Convolução

Dadas duas funções $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, então

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t - y) g(y) dy, \quad (1.67)$$

existe (para quase todo o t) e define uma função em $L^1(\mathbb{R})$, chamada *produto de convolução de f e g* . Facilmente se verifica que o produto de convolução é comutativo e associativo. Além disso, tem-se

Teorema 1.5 (Teorema da Convolução) Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, então

$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \widehat{f} \widehat{g}, \quad (1.68)$$

ou seja, a transformada de Fourier transforma convoluções em produtos.

resultados preliminares

- **O teorema da inversão de Fourier**

Enunciamos agora o chamado *Teorema de inversão de Fourier*, o qual estabelece a possibilidade de recuperar a função f da sua transformada de Fourier. Relembremos que, dada uma função $g \in L^1(\mathbb{R})$, se chama transformada de Fourier inversa de g e se denota por \check{g} ou $\mathcal{F}^{-1}g$ a função definida por

$$\check{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi t} d\xi.$$

O teorema da inversão mostra que, se f e \hat{f} estão em $L^1(\mathbb{R})$, então a transformada inversa de \hat{f} é a própria função f .

Teorema 1.6 (Teorema da inversão) *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, então f é contínua e tem-se*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi. \quad (1.69)$$

Nota O resultado (1.69) deve ser interpelado do seguinte modo: o integral do lado direito define uma função *contínua*, a qual coincide com f (q.s.). A igualdade pontual é, portanto válida para todo o $t \in \mathbb{R}$ se considerarmos (como referimos anteriormente) a representante contínua de f .

Como consequência imediata do teorema anterior, tem-se o seguinte teorema.

Teorema 1.7 (Teorema da Unicidade) *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ e $\hat{f} = \hat{g}$, então $f = g$.*

- **Regularidade e decaimento**

Pode também provar-se o seguinte resultado, que estabelece uma relação entre o decaimento de $|\hat{f}(\xi)|$ e a regularidade global de f .

Teorema 1.8 *Se f é tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)| (1 + |\xi|^m) d\xi < +\infty, \quad (1.70)$$

então f é m vezes continuamente diferenciável com derivadas limitadas.¹³ Em particular,

¹³Mais rigorosamente, deveríamos dizer que f coincide q.s. com uma função m vezes continuamente diferenciável cujas derivadas de ordem k são dadas por $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (i\xi)^k \hat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi$.

o resultado anterior verifica-se se existirem constantes K e $\epsilon > 0$ tais que

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{K}{1 + |\xi|^{m+1+\epsilon}}. \quad (1.71)$$

Também se conclui de imediato do resultado anterior que, se \widehat{f} tem suporte compacto, então f é infinitamente diferenciável.

1.2.3 Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R})$

Como vimos, a transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$ não está necessariamente em $L^1(\mathbb{R})$. A teoria é, assim, um pouco assimétrica. Isto motiva-nos a estender a definição de transformada de Fourier ao espaço $L^2(\mathbb{R})$, das funções mensuráveis de quadrado integrável. A primeira dificuldade é que, estando f em $L^2(\mathbb{R})$, mas não em $L^1(\mathbb{R})$, o integral que define a transformada de Fourier (1.59) não existe. A transformada de Fourier para $f \in L^2(\mathbb{R})$ vai ser definida como um limite de transformadas de funções de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

O teorema seguinte mostra-nos que o produto interno e a norma em $L^2(\mathbb{R})$ são preservados pela transformada de Fourier.

Teorema 1.9 (Fórmulas de Parseval e Plancherel) *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, então tem-se a seguinte fórmula de Parseval:*

$$\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle$$

isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi. \quad (1.72)$$

Em particular, é válida a seguinte identidade, conhecida por identidade de Plancherel:

$$\|\widehat{f}\|^2 = \|f\|^2. \quad (1.73)$$

O conjunto $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$. Assim, dada qualquer função $f \in L^2(\mathbb{R})$, existe uma sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ convergente para f , isto é, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$. Sendo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, será de Cauchy, ou seja, teremos $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$ quando $n, m \rightarrow \infty$. Então, ter-se-á, aplicando a linearidade da transformada de Fourier e a fórmula de Plancherel

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\| = \|(\widehat{f_n - f_m})\| = \|f_n - f_m\|,$$

resultados preliminares

o que mostra que a sucessão $(\widehat{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$, formada pelas transformadas de Fourier das funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é uma sucessão de Cauchy. Como $L^2(\mathbb{R})$ é completo, esta sucessão convergirá, então, para uma certa função de $L^2(\mathbb{R})$: será natural chamar a esta função limite ¹⁴ *Transformada de Fourier da função f* e denotá-la por $\mathcal{F}f$ ou \widehat{f} , como habitualmente. Uma forma possível de escolher as funções f_n é tomar $f_n = f \cdot \chi_{[-n, n]}$, onde χ_A designa a função característica do conjunto A . Se escrevermos l.i.m. $g_n(t) = g(t)$ com o significado de que $\|g_n - g\|_2 \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ ¹⁵, podemos então escrever que

$$\widehat{f}(\xi) = \text{l.i.m.} \widehat{f_n}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l.i.m.} \int_{-n}^n f(t) e^{-i\xi t} dt.$$

Com um abuso de notação conveniente, continuaremos, no entanto, a escrever, quando $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt, \quad (1.74)$$

com o entendimento de que se trata de um processo limite como descrevemos acima.

Convém referir que esta extensão da transformada de Fourier a $L^2(\mathbb{R})$ satisfaz as fórmulas de Plancherel-Parseval e, de um modo geral, as propriedades anteriormente referidas para transformadas de funções em $L^1(\mathbb{R})$. Existe também um teorema de inversão, que pode ser enunciado na seguinte forma:

Teorema 1.10 (Teorema de inversão em $L^2(\mathbb{R})$) *A transformada de Fourier é um operador linear bijectivo de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$, sendo, portanto invertível. Temos que, para $f \in L^2(\mathbb{R})$*

$$f(t) = \text{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi.$$

1.2.4 Espaço de Schwartz. Transformada de Fourier de distribuições temperadas

Definição 1.5 *Diz-se que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é de decréscimo rápido no infinito ou decai rapidamente se, para todo $p \in \mathbb{N}_0$,*

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} |t^p f(t)| = 0. \quad (1.75)$$

¹⁴De notar que a função limite depende apenas de f e não da sucessão particular $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ escolhida.

¹⁵l.i.m. é usado para designar "limit in the mean", em inglês.

Como exemplo de uma função de decaimento rápido, tem-se a função definida por $f(t) = e^{-|t|}$.

Definição 1.6 (Espaço de Schwartz) Denotemos por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ou simplesmente \mathcal{S} o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfazem as seguintes propriedades:

- (i) f é infinitamente diferenciável;
- (ii) f e todas as suas derivadas decaem rapidamente.

Trata-se de um espaço vectorial complexo que se designa por espaço de Schwartz.¹⁶

Note-se que uma função f pertence ao espaço \mathcal{S} se e só se, dados quaisquer inteiros $p, q \geq 0$, existe uma constante $M_{p,q} < \infty$ (dependente de p e q) tal que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \left| t^p f^{(q)}(t) \right| \right\} \leq M_{p,q}. \quad (1.76)$$

O espaço \mathcal{S} satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) Se $f \in \mathcal{S}$, então $t^p f^{(q)} \in \mathcal{S}$, para quaisquer $p, q \in \mathbb{N}_0$;
- (ii) \mathcal{S} é um subespaço do espaço $L^1(\mathbb{R})$;
- (iii) dada uma função $f \in \mathcal{S}$, a sua transformada de Fourier \hat{f} está também em \mathcal{S} .

Como exemplos de funções em \mathcal{S} , temos todas as funções da forma $f(t) = P(t)e^{-\alpha t^2 + i\beta t}$ com $P(t)$ um polinómio e $\alpha > 0$.

Definição 1.7 (Convergência no espaço \mathcal{S}) Dizemos que uma sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções de \mathcal{S} converge (em \mathcal{S}) para 0 quando n tende para infinito e escrevemos $f_n \rightarrow 0$ em \mathcal{S} se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| t^p f_n^{(q)}(t) \right| = 0,$$

para quaisquer $p, q \in \mathbb{N}_0$. Diremos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para uma função $f \in \mathcal{S}$, se $f_n - f \rightarrow 0$ em \mathcal{S} .

¹⁶Laurent Schwartz (1915 –), matemático francês a quem se deve o desenvolvimento da teoria das distribuições; [Sch51]. Schwartz recebeu a medalha Fields em 1950.

resultados preliminares

Definição 1.8 (Distribuição temperada) Chama-se *distribuição temperada* a qualquer funcional linear contínuo definido em \mathcal{S} . Mais precisamente, T é uma distribuição temperada, se:

(i) $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$;

(ii) T é linear;

(iii) $f_n \rightarrow 0$ em $\mathcal{S} \implies (T, f_n) \rightarrow 0$ em \mathbb{C} , onde usamos a notação (T, ϕ) para denotar o valor de T em ϕ .¹⁷

O conjunto das distribuições temperadas é denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ou apenas \mathcal{S}' .

Exemplo 1.1 Funções de \mathcal{S} como distribuições temperadas Se f for uma função de \mathcal{S} , então é fácil de verificar que o funcional linear T_f definido por

$$(T_f, \phi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)dt, \quad \phi \in \mathcal{S}, \quad (1.77)$$

é uma distribuição temperada. Além disso, a aplicação que a cada $f \in \mathcal{S}$ associa T_f é linear e tem-se

$$T_f = T_g \iff f = g.$$

Assim, faz sentido identificar a distribuição T_f com a função f (univocamente determinada) que lhe dá origem e considerar \mathcal{S} como um subconjunto de \mathcal{S}' , usando o mesmo símbolo para denotar quer a função de \mathcal{S} quer a distribuição temperada associada.

Não é necessário que $f \in \mathcal{S}$ para que a fórmula (1.77) defina uma distribuição temperada. Tal será verdade se, por exemplo, f for uma função de *crescimento lento*, isto é, se existir uma constante C e um inteiro $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(t)| \leq C(1 + t^2)^N, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, toda a função polinomial pode ser “vista” como uma distribuição temperada. Também se pode mostrar que todas as funções de $L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, são distribuições

¹⁷Uma notação mais frequente para denotar o valor de T em ϕ é $\langle T, \phi \rangle$. Porque reservamos essa notação para o produto interno em $L^2(\mathbb{R})$, optámos por preferir a notação acima.

temperadas; veja, e.g., [GW98, p.286]. Por influência dos exemplos anteriores, costuma escrever-se $\int_{-\infty}^{\infty} T(t)\phi(t)dt$ para denotar o valor da distribuição T em ϕ , isto é, costuma escrever-se simbolicamente

$$(T, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} T(t)\phi(t)dt \quad (1.78)$$

Exemplo 1.2 “Função” δ -Dirac

Nem todas as distribuições temperadas, no entanto, são do tipo anterior. Provavelmente, o exemplo mais conhecido de uma distribuição temperada que não é desse tipo, é o chamado δ -Dirac concentrado no ponto a , definido por

$$(\delta_a, \phi) := \phi(a), \quad \phi \in \mathcal{S}. \quad (1.79)$$

Se $a = 0$, escreve-se, simplesmente, δ para designar δ_0 .

Nota De acordo com a nota anterior, é usual escrever-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt = \phi(0).$$

No entanto, como dissemos, trata-se apenas de uma notação simbólica para dizer que o δ -Dirac aplicado a uma função de \mathcal{S} dá o valor dessa função em $t = 0$.

Exemplo 1.3 Pente de Dirac

A fórmula

$$(T, \phi) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(ka), \quad \phi \in \mathcal{S} \quad (1.80)$$

define uma distribuição temperada, normalmente denotada por Δ_a ou $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{ka}$ e chamada pente de Dirac.

- Operações com distribuições temperadas

Definição 1.9 (Derivada de uma distribuição temperada) Se T é uma distribuição temperada, a derivada de T é a distribuição T' definida por

$$(T', \phi) := -(T, \phi'), \quad \phi \in \mathcal{S}. \quad (1.81)$$

resultados preliminares

Assim, tem-se, por exemplo

$$(\delta', \phi) = -(\delta, \phi') = -\phi'(0) \quad (\delta^{(p)}, \phi) = (-1)^p \phi^{(p)}(0).$$

Note-se que, se T_f é uma distribuição temperada associada a uma função $f \in \mathcal{S}$, então

$$(T'_f, \phi) = -(T_f, \phi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi'(t)dt \quad (1.82)$$

$$= -f(t)\phi(t)|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\phi(t)dt \quad (1.83)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\phi(t)dt = (T_{f'}, \phi) \quad (1.84)$$

ou seja, a sua derivada como distribuição temperada coincide com a (distribuição temperada associada à) derivada de f .

Para além da diferenciação, definem-se uma série de operações em \mathcal{S}' . A ideia é, de um modo geral, a mesma. Uma operação em \mathcal{S} é transladada para a correspondente operação em \mathcal{S}' observando primeiro o que acontece com as funções de \mathcal{S} e extendendo-a depois para \mathcal{S}' . Por exemplo, tem-se a seguinte definição.

Definição 1.10 (Translação de uma distribuição) Dada uma distribuição temperada T , chama-se translação de T por a , e designa-se por $T_a T$, a distribuição definida por

$$(T_a T, \phi) := (T, T_{-a}\phi), \quad \phi \in \mathcal{S}, \quad (1.85)$$

onde $T_a f := f(\cdot - a)$ é o operador de translação definido (para funções) por (1.63).

De igual modo, temos a seguinte definição de dilatação de uma distribuição temperada:

Definição 1.11 (Dilatação de uma distribuição) Dada uma distribuição temperada T , chama-se dilatação por a de T , e designa-se por $D_a T$, a distribuição definida por

$$(D_a T, \phi) := (T, D_{1/a}\phi), \quad \phi \in \mathcal{S}, \quad (1.86)$$

onde $D_a f := |a|^{-1/2} f(\cdot/a)$ é o operador de dilatação definido (para funções) por (1.65).

A multiplicação de uma distribuição T por uma função infinitamente diferenciável de crescimento lento $f(t)$ é definida por

$$(fT, \phi) = (T, f\phi) \quad (1.87)$$

Definição 1.12 (Transformada de Fourier de distribuições temperadas) A transformada de Fourier de uma distribuição temperada T é a distribuição \widehat{T} definida por

$$(\widehat{T}, \phi) := (T, \widehat{\phi}), \quad \phi \in \mathcal{S}, \quad (1.88)$$

onde $\widehat{\phi}$ designa a transformada de Fourier de ϕ .

Note-se que, se $f \in \mathcal{S}$ e T_f for a distribuição temperada associada a f através do uso da fórmula (1.77), ter-se-á:

$$\begin{aligned} (\widehat{T}_f, \phi) &= (T_f, \widehat{\phi}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \widehat{\phi}(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi(x) dx \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t) dt \right) \phi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) \phi(x) dx = (T_{\widehat{f}}, \phi). \end{aligned}$$

Vemos, assim, que se $f \in \mathcal{S}$, a sua transformada de Fourier como distribuição temperada é precisamente a sua transformada de Fourier usual.

Nota Ao estabelecermos o resultado anterior, foi efectuada uma mudança de ordem de integração, justificável por aplicação do Teorema de Fubini-Tonelli.¹⁸

¹⁸Teorema de Fubini-Tonelli: Suponha que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ é mensurável.

1. Se f é não negativa, então

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy.$$

(Note-se que os três integrais podem ser iguais a $+\infty$.)

2. Se f é integrável em \mathbb{R}^2 , então a função $x \mapsto f(x, y)$ é integrável para quase todo o y , a função $y \mapsto f(x, y)$ é integrável para quase todo o x e os três integrais acima são finitos e iguais.
3. f é integrável em \mathbb{R}^2 se e só se um dos dois integrais

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dy dx \quad \text{ou} \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dx dy$$

é finito.

resultados preliminares

Exemplo 1.4 Transformada de Fourier do δ -Dirac

Temos

$$\begin{aligned}(\widehat{\delta}, \phi) &= (\delta, \widehat{\phi}) \\ &= \widehat{\phi}(0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \phi(t) dt.\end{aligned}$$

Isto significa que $\widehat{\delta}$ é a distribuição temperada associada à função constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, ou seja, temos $\widehat{\delta} = T_{1/\sqrt{2\pi}}$. Costumamos, apenas, escrever

$$\widehat{\delta} = 1/\sqrt{2\pi}, \quad (1.89)$$

com o significado anterior. De modo análogo

$$\begin{aligned}(\widehat{\delta^{(p)}}, \phi) &= (\delta^{(p)}, \widehat{\phi}) \\ &= (-1)^p \widehat{\phi}^{(p)}(0),\end{aligned}$$

ou seja, temos

$$\begin{aligned}(\widehat{\delta^{(p)}}, \phi) &= (-1)^p [(-it)^p \widehat{\phi}(t)](0) \\ &= (-1)^p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^p \phi(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (it)^p \phi(t) dt.\end{aligned}$$

Assim,

$$\widehat{\delta^{(p)}} = T_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(it)^p},$$

o que costuma escrever-se, simplesmente, como

$$\widehat{\delta^{(p)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(it)^p.$$

• Fórmula de inversão

Definimos a transformada de Fourier inversa de uma distribuição temperada T , e denotamos por $\mathcal{F}^{-1}(T)$ ou \check{T} , por

$$(\mathcal{F}^{-1}(T), \phi) = (\check{T}, \phi) := (T, \check{\phi}), \quad \phi \in \mathcal{S}, \quad (1.90)$$

onde $\check{\phi}$ designa a transformada de Fourier inversa de ϕ . Então, tem-se o seguinte resultado

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{T}) = T.$$

Em particular, obtém-se, de (1.89),

$$\delta = \mathcal{F}^{-1}(T_{1/\sqrt{2\pi}}) \quad (1.91)$$

que se costuma escrever, *formalmente*, como

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} d\xi. \quad (1.92)$$

Definição 1.13 (Convergência em \mathcal{S}') Diz-se que uma sucessão de distribuições temperadas $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para uma distribuição temperada T se

$$(T_n, \phi) \longrightarrow (T, \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

1.2.5 Distribuições periódicas. Fórmula da soma de Poisson

Definição 1.14 (Distribuição periódica) Uma distribuição temperada T diz-se periódica de período $a \neq 0$ se

$$T_a T = T.$$

Exemplo 1.5 (i) $T_a \delta_b = \delta_{a+b}$.

(ii) O “pente de Dirac” $\Delta_a(\phi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(ka)$ é uma distribuição periódica de período a .

O resultado seguinte é muito importante, sendo usado diversas vezes neste textos.

Teorema 1.11 (Fórmula da soma de Poisson) Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. Para $a > 0$, definamos

$$\{\mathcal{P}_a f\}(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t + ka). \quad (1.93)$$

Então:

resultados preliminares

(i) A série definida por (1.93) converge (no sentido da norma em $L^1[0, a]$) para uma função periódica de período a , ou seja, para uma função do espaço $L^1[0, a]$.

(ii) Os coeficientes de Fourier dessa função $\mathcal{P}_a f$ são dados por $\frac{\sqrt{2\pi}}{a} \hat{f}\left(\frac{2k\pi}{a}\right)$, isto é

$$c_k(\mathcal{P}_a f) := \frac{1}{a} \int_0^a \{\mathcal{P}_a f\}(t) e^{-i2k\pi t/a} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \hat{f}\left(\frac{2\pi k}{a}\right).$$

Nas condições do teorema anterior, a série de Fourier de $\mathcal{P}_a f$ é dada por

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2\pi k}{a}\right) e^{i2k\pi t/a}. \quad (1.94)$$

Tem-se, então, a seguinte igualdade no sentido das distribuições¹⁹:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t + ka) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2\pi k}{a}\right) e^{i2k\pi t/a}. \quad (1.95)$$

Se, adicionalmente, $f' \in L^1(\mathbb{R})$ (onde a derivada de f é tomada no sentido das distribuições), a igualdade (1.95) é válida para todo o $t \in \mathbb{R}$. Mais precisamente, a série do lado esquerdo converge uniformemente em \mathbb{R} para uma função periódica e contínua F e a série de Fourier de F (que é a série do lado direito da igualdade) converge uniformemente para F em \mathbb{R} . Em particular, ter-se-á, nesse caso

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = \sqrt{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi k) \quad (1.96)$$

Por exemplo, uma condição suficiente para garantir a igualdade (1.95) em todo o ponto é que f seja tal que $|f(t)| \leq C|t|^{-1-\epsilon}$ e $|\hat{f}(\xi)| \leq C|\xi|^{-1-\epsilon}$ para um certo $\epsilon > 0$.

O resumo aqui apresentado sobre distribuições (temperadas) e transformadas de Fourier dessas distribuições foi, necessariamente muito breve; para mais pormenores e resultados sobre este assunto aconselhamos, e.g. [Ben97].

¹⁹Isto é, a igualdade é válida interpretando cada um dos membros como elementos do espaço \mathcal{S}' .

1.3 Exercícios

Exercício 1.1. Seja H um espaço vectorial complexo com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $\| \cdot \|$ a função definida em H por

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}. \quad (1.97)$$

a) Prove que é válida a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in H. \quad (1.98)$$

b) Use o resultado anterior para mostrar que é válida a *desigualdade triangular*:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall u, v \in H. \quad (1.99)$$

c) Mostre, então, que a função definida por (1.97) é uma norma em H .

d) Estabeleça condições sob as quais se tem igualdade em (1.98) e em (1.99).

e) Mostre que $\| \cdot \|$ satisfaz a *regra do paralelogramo*:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Exercício 1.2. Considere o espaço $\ell^p(\mathbb{N})$ das sucessões complexas $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^p < \infty$, com norma

$$\|u\|_p := \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^p \right)^{1/p}.$$

Mostre que, se $p \neq 2$, a norma $\| \cdot \|_p$ não deriva de nenhum produto interno.

Sugestão: Considere as sucessões $u = (1, 1, 0, 0, \dots)$ e $v = (1, -1, 0, 0, \dots)$ e mostre que não é válida a regra do paralelogramo.

Exercício 1.3. Mostre que, se a norma $\| \cdot \|$ deriva de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (isto é, se é definida por (1.97)), então é válida a seguinte igualdade, conhecida por *Identidade de Polarização*:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) + \frac{i}{4} (\|u + iv\|^2 - \|u - iv\|^2).$$

Exercício 1.4. Mostre que num espaço de Hilbert H , o produto interno é uma função contínua, isto é, se $u_n \rightarrow u$, então $\langle u_n, v \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle$, $\forall v \in H$.

resultados preliminares

Exercício 1.5. Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e seja $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência ortonormada de elementos de H . Dado $h \in H$, mostre que o vector $u = h - y$, onde y é dado por

$$y = \sum_{n=1}^N \langle h, e_n \rangle e_n$$

é ortogonal ao subespaço de H gerado por $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$.

Exercício 1.6. Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ um conjunto ortonormado num espaço de Hilbert H . Seja h um elemento fixo de H e $y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_N e_N$. Então, $\|h - y\|$ depende de β_1, \dots, β_N . Mostre que $\|h - y\|$ é mínimo se e só se $\beta_j = \langle h, e_j \rangle$, $j = 1, \dots, N$.

Exercício 1.7. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, seja $e_k = ((e_k)_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ a sequência de $\ell^2(\mathbb{Z})$ definida por $(e_k)_i = \delta_{ik}$. Mostre que $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base de Hilbert de $\ell^2(\mathbb{Z})$, isto é, uma sequência ortonormada e completa.

Exercício 1.8. Mostre que, se $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormada de um espaço de Hilbert H , então

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle u, e_n \rangle \overline{\langle v, e_n \rangle}.$$

Exercício 1.9. Seja H um espaço de Hilbert e seja $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma base ortonormada de H .

- Considere a sequência $(2e_1, e_2, e_3, \dots)$. Diga, justificando, se trata de um referencial e, em caso afirmativo, verifique se é exacto e/ou fechado.
- Diga, justificando, se a sequência $(e_1, e_2/2, e_3/3, \dots)$ é ou não um referencial.

Exercício 1.10. Seja H um espaço de Hilbert e seja M um subespaço fechado de H .

- Mostre que o conjunto

$$M^\perp := \{h \in H : \langle h, m \rangle = 0, \forall m \in M\}$$

é um subespaço fechado de H .

- Mostre que

$$M \cap M^\perp = \{0\} \quad \text{e} \quad (M^\perp)^\perp = M.$$

resultados preliminares

Exercício 1.11. Seja H um espaço de Hilbert, M um seu subespaço fechado e seja $P_M : H \rightarrow M$ o operador de projecção ortogonal de H em M . Prove que P_M satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) P_M é um operador linear limitado;
- (ii) P_M é sobrejectivo;
- (iii) $\text{Ker } P_M = M^\perp$;
- (iv) P_M é idempotente.

Exercício 1.12. Seja H um espaço de Hilbert, M um seu subespaço fechado e $P : H \rightarrow M$ um operador linear. Prove que P é o operador de projecção ortogonal de H em M se e só se $(h - Ph) \in M^\perp, \forall h \in H$.

Exercício 1.13. Seja H um espaço de Hilbert e sejam M_1 e M_2 dois subespaços fechados de H tais que $M_1 \subset M_2$. Designando por P_1 e P_2 os operadores de projecção ortogonal de H nos subespaços M_1 e M_2 , respectivamente, prove que:

- (i) $P_1 P_2 = P_2 P_1 = P_1$.
- (ii) $P_2 - P_1$ é o operador de projecção ortogonal de H no complemento ortogonal de M_1 em M_2 , isto é, em $W_1 = M_1^\perp \cap M_2$.

Exercício 1.14. Considere a função $f(t) = \chi_{[-1,1]}$.

Use o Teorema de inversão para justificar por que razão a transformada de Fourier de f não pode ser uma função de $L^1(\mathbb{R})$. Determine a transformada de Fourier de f .

Exercício 1.15. Determine a transformada de Fourier das seguintes funções:

- a) $f(t) = e^{-|t|}$
- b) $g(t) = e^{-t}u(t)$, onde $u(t)$ designa a função de salto unitário (ou de Heaviside), definida por: $u(t) = 0$ para $t \leq 0$ e $u(t) = 1$, para $t > 0$.
- c) $h(t) = \max\{1 - |t|, 0\}$.

Exercício 1.16. Mostre que, se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, então \widehat{fg} e $f\widehat{g}$ pertencem a $L^1(\mathbb{R})$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)g(t)dt.$$

resultados preliminares

Exercício 1.17. Considere a função Gaussiana $g(t) = e^{-t^2/2}$.

- Mostre que g satisfaz a equação diferencial $g'(t) + tg(t) = 0$.
- Use as propriedades da transformada de Fourier para mostrar que \widehat{g} satisfaz $\widehat{g}'(\xi) + \xi\widehat{g}(\xi) = 0$.
- Mostre, então, que

$$\widehat{g}(\xi) = Ce^{-\xi^2/2}$$

onde $C = \widehat{g}(0)$.

- Tendo em conta que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$, conclua, finalmente, que

$$\widehat{g} = g.$$

Exercício 1.18. Considere os operadores de *translação* T_a , *modulação* E_a e *dilatação* D_a definidos, em $L^2(\mathbb{R})$, por

$$T_a f := f(\cdot - a), \quad E_a f := e^{ia\cdot} f(\cdot), \quad D_a f := |a|^{-1/2} f(\cdot/a).$$

- Mostre que se trata de operadores lineares.
- Designando por L_a qualquer desses operadores, mostre que

$$\|L_a f\|_2 = \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

- Verifique que $T_b D_a = D_a T_{b/a}$ e $D_a T_b = T_{ab} D_a$.
- Prove que:

$$\widehat{T_a f} = E_{-a} \widehat{f}, \quad \widehat{E_a f} = T_a \widehat{f}, \quad \widehat{D_a f} = D_{1/a} \widehat{f}.$$

Exercício 1.19. Determine, usando propriedades da transformada de Fourier e algumas transformadas já calculadas, a transformada de Fourier das seguintes funções:

- $f(t) = \chi_{[a,b]}$
- $g(t) = e^{-a|t|}; \quad a > 0.$
- $h(t) = e^{-at^2}; \quad a > 0.$

Exercício 1.20. Use transformadas de Fourier para estabelecer os seguintes resultados:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \pi; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3} dt = \frac{3\pi}{4}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt = \frac{2\pi}{3}.$$

Sugestão: Pode usar a fórmula de Parseval.

Exercício 1.21. *Funções de Hermite*

Considere as funções h_n definidas por

$$h_n(t) := \frac{(-1)^n}{n!} e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}; \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.100)$$

a) Mostre que

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad h'_n(t) = th_n(t) - (n+1)h_{n+1}(t).$$

b) Usando as propriedades da transformada de Fourier, mostre que

$$\widehat{h}_{n+1}(\xi) = -\frac{1}{n+1} (i\xi \widehat{h}_n(\xi) - i(\widehat{h}_n)'(\xi)).$$

c) Mostre que $\widehat{h}_0(\xi) = h_0(\xi)$ e estabeleça, então, por indução, o seguinte resultado

$$\widehat{h}_n = (-i)^n h_n. \quad (1.101)$$

Nota: O resultado (1.101) significa que as funções h_n , $n \in \mathbb{N}_0$, são funções próprias da transformada de Fourier, associadas aos valores próprios $(-i)^n$.

Exercício 1.22. a) Invoque a ajuda do *Mathematica* para obter informação sobre a função *FourierTransform*. Em particular, tenha em atenção a convenção adoptada para a transformada de Fourier e veja como usar *FourierParameters*. Faça o mesmo estudo para a função *InverseFourierTransform*.

b) Determine, usando o *Mathematica*, a transformada de Fourier de cada uma das seguintes funções:

(i) $f(t) = \chi_{[-1,1]}$;

(ii) $g(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$;

(iii) $h(t) = e^{iat}$, $a \in \mathbb{R}$;

(iv) $p(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$, onde $u(t)$ é a função de salto unitário.

c) Determine a transformada de Fourier da distribuição δ -Dirac.

2. Localização Tempo-Frequência

Transformada de Fourier com janela
Transformada contínua com ôndula

2.1 Transformada de Fourier com janela

2.1.1 Algumas notações de processamento de sinal

Um sinal analógico (ou de tempo contínuo) é simplesmente uma função f mensurável definida em \mathbb{R} . Em geral, reserva-se o símbolo t para designar a variável “tempo”, isto é, escreve-se $f(t)$, sendo o domínio de f referido como domínio temporal.¹

Dado um sinal analógico f , a sua *energia* é medida por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (2.1)$$

A grande maioria dos sinais de interesse em engenharia são sinais com energia finita, isto é, são elementos do espaço $L^2(\mathbb{R})$. Dado um sinal de energia finita, a sua transformada de Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \{\mathcal{F}f\}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t} dt \quad (2.2)$$

¹Na prática, os sinais analógicos de interesse são sempre funções contínuas ou, pelo menos, funções seccionalmente contínuas.

Em oposição aos sinais em tempo contínuo, temos os sinais em tempo discreto, ou sinais digitais. Estes são funções de variável discreta (sequências indexadas por \mathbb{Z} , geralmente).

localização tempo-frequência

dá-nos o chamado *espectro* desse sinal, sendo ξ a variável que representa a frequência. ²

Um sinal é dito de *banda limitada*, se

$$\hat{f}(\xi) = 0, \quad \text{para } |\xi| > \Omega, \quad (2.3)$$

para um certo $\Omega > 0$. Ao valor $\omega = \Omega/2\pi$, onde Ω é o menor valor para o qual (2.3) se verifica, chamamos *largura de banda* do sinal.

Um *filtro* (ou mais precisamente um filtro analógico linear) é, geralmente, definido através da convolução, no domínio do tempo, com uma certa função $h(t)$, isto é, dado o sinal f e o filtro $h(t)$ calculamos o sinal “filtrado” $g(t)$ através de

$$g(t) = (h * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(t-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(t-x)dx. \quad (2.4)$$

Atendendo ao teorema da convolução, tem-se

$$\hat{g}(\xi) = \sqrt{2\pi}H(\xi)\hat{f}(\xi),$$

onde $H(\xi) = \hat{h}(\xi)$ é a chamada *função de transferência* do filtro h . Dependendo do comportamento da função de transferência $H(\xi) = \hat{h}(\xi)$, distinguimos os filtros do seguinte modo:

- (i) Filtros passa-baixo: se $H(\xi) \sim \chi_{[-A,A]}$ (atenuam as altas frequências) ³
- (ii) Filtros passa-alto: se $H(\xi) \sim 1 - \chi_{[-A,A]}$ (atenuam as baixas frequências)
- (iii) Filtros passa-banda: se $H(\xi) \sim \chi_{\{\xi: A_1 \leq |\xi| \leq A_2\}}$ (para examinar a banda de frequência entre A_1 e A_2)

²Como já referimos anteriormente, esta é mais precisamente a frequência angular; a medida de frequência é normalmente dada, em Hz, por $\xi/2\pi$. Por essa mesma razão, em processamento de sinal, a transformada de Fourier é muitas vezes definida através da fórmula $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i2\pi\omega t} dt$, designando então ω a frequência.

³Um filtro passa-baixo ideal seria tal que $H(\xi) = \chi_{[-A,A]}$; note-se que esta condição implica que $h(t) = \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen } At}{At}$; um filtro $h(t)$ diz-se realizável (ou causal) se $\text{supp } f \subset [t_0, \infty) \implies \text{supp } (hf) \subset [t_0, \infty), \forall t_0 \in \mathbb{R}$; esta propriedade é completamente natural para um sistema físico em que a variável seja o tempo; diz-nos que a resposta num certo instante t depende apenas do que se passou antes de t ; a causalidade é necessária para que o sistema seja fisicamente realizável. Pode mostrar-se que uma condição n/s para que um filtro seja realizável é que seu suporte esteja contido em $[0, \infty)$; isto não se verifica para um filtro passa-baixo ideal, pelo que podemos concluir que um filtro passa-baixo ideal não é um filtro realizável.

2.1.2 Transformada de Fourier com janela

Se recordarmos a expressão da transformada de Fourier

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t} dt,$$

vemos que o valor de f em “todo o tempo” contribui para o cálculo dessa transformada e é, portanto, difícil obter informação local sobre f a partir do conhecimento da sua transformada de Fourier. Em teoria, o sinal f pode ser sempre reconstruído, sabido o seu espectro, usando a transformada de Fourier inversa, ou seja, temos

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi t} d\xi, \quad (2.5)$$

pelo que não há perda de informação sobre o sinal ao calcular a sua transformada de Fourier. Na representação espectral de um sinal não é possível, todavia, “ler” qualquer informação sobre o comportamento desse sinal no tempo. Se f é um sinal de duração finita ⁴, o espectro não indica o início e final temporal desse sinal. Também, se o sinal tem uma singularidade, o instante onde esta ocorre está “escondido” em \widehat{f} .

Em muitas aplicações, tais como análise de sinais não-estacionários (isto é, sinais cujas frequências evoluem de forma significativa com o tempo) ou processamento de sinal em tempo real, a simples utilização da transformada de Fourier não é adequada.

Gostaríamos, assim, de dispor de uma ferramenta analítica que nos fornecesse informação sobre f simultaneamente no tempo e na frequência, ou seja, associar uma certa função $Rf(t, \xi)$ ao sinal f , que nos dissesse quanto frequências próximas de ξ contribuem para o sinal f num certo intervalo em torno do instante de t . A uma função deste tipo chamamos *representação tempo-frequência* ou *representação no espaço de fase* de f . Ao conjunto de pontos $\{(t, \xi) : t, \xi \in \mathbb{R}\}$ chamamos *plano tempo-frequência* ou *espaço de fase*. Note-se que o conceito de representação tempo-frequência está “definido” de um modo vago.

Um processo clássico de obter localização de frequências no tempo é utilizar a chamada *transformada de Fourier com janela* ou *transformada de Fourier em tempo curto*.

⁵ Neste caso, é escolhida previamente uma certa função g que seja bem localizada no

⁴Por outras palavras, se $\text{supp } f$ é compacto

⁵Em inglês, Short Time Fourier Transform, geralmente abreviada para STFT.

localização tempo-frequência

tempo (isto é, que decaia rapidamente para zero quando $|t| \rightarrow \infty$) e que seja também bem localizada na frequência (isto é, tal que a sua transformada de Fourier $\widehat{g}(\xi)$ também decaia para zero quando $|\xi| \rightarrow \infty$). Esta função, vulgarmente chamada *janela*, é então transladada e multiplicada por f , de modo a permitir seleccionar pequenas secções dessa função, determinando-se depois a transformada de Fourier de cada uma delas. Começamos por introduzir a seguinte definição.

Definição 2.1 (Função janela) Dizemos que uma função $g \in L^2(\mathbb{R})$ é uma janela no tempo se for tal que $tg(t) \in L^2(\mathbb{R})$; dizemos que g é uma janela na frequência se $\xi\widehat{g}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$. A uma função que seja simultaneamente uma janela no tempo e na frequência, chamaremos simplesmente função janela.

Nota

- (i) Note-se que, se $g \in L^2(\mathbb{R})$ e $tg \in L^2(\mathbb{R})$, também $|t|^{1/2}g \in L^2(\mathbb{R})$.
- (ii) Como $\frac{1}{1+|t|} \in L^2(\mathbb{R})$, segue-se, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, que $\frac{1}{1+|t|}(1+|t|)g(t) = g(t) \in L^1(\mathbb{R})$. Assim, se g é uma função janela, $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
- (iii) Do mesmo modo, $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Mas, sendo \widehat{g} uma função de $L^1(\mathbb{R})$, segue-se que g é uma função contínua. Além disso,

$$\xi\widehat{g}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow i\xi\widehat{g}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \{\mathcal{F}^{-1}\}[i\xi\widehat{g}(\xi)](t) = g'(t) \in L^2(\mathbb{R}).$$

Logo, se g é uma função janela, a sua derivada está em $L^2(\mathbb{R})$.

Como exemplos típicos de funções janela, muitas vezes utilizadas, temos as funções Gaussianas

$$G_\alpha(t) = e^{-\alpha t^2}, \alpha > 0.$$

Definição 2.2 (Centro e raio) Sendo g uma janela no tempo, então as seguintes quantidades

$$\mu := \frac{1}{\|g\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t|g(t)|^2 dt \quad (2.6)$$

e

$$\sigma := \frac{1}{\|g\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu)^2 |g(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \quad (2.7)$$

são finitas. Elas definem, respectivamente, os chamados centro e raio de g . Sendo g uma janela na frequência, definem-se, de modo análogo, o centro e o raio de \widehat{g} , que denotaremos por $\widehat{\mu}$ e $\widehat{\sigma}$, respectivamente.

localização tempo-frequência

A quantidade μ é a média da função de distribuição definida por $\frac{1}{\|g\|^2} |g(t)|^2$, sendo σ o respectivo desvio médio quadrático.

O raio σ é uma medida da concentração de g em torno do seu centro μ , isto é, o intervalo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ dá-nos uma indicação do conjunto onde g atinge os valores não nulos “mais significativos”. O intervalo $[\hat{\mu} - \hat{\sigma}, \hat{\mu} + \hat{\sigma}]$ desempenha o mesmo papel para a função \hat{g} .⁶

Dada uma função janela g , considere-se o funcional linear $\Gamma_g : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$\Gamma_g(f) = \langle f, g \rangle, \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (2.8)$$

Então, Γ_g produz, para cada função $f \in L^2(\mathbb{R})$, um número, o qual nos dá uma certa informação acerca de f .⁷ Temos, então

$$\begin{aligned} \Gamma_g(f) &= \langle f, g \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt \\ &\approx \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(t) \overline{g(t)} dt. \end{aligned}$$

Mas, atendendo à fórmula de Parseval,

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi \\ &\approx \int_{\hat{\mu}-\hat{\sigma}}^{\hat{\mu}+\hat{\sigma}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Assim, a região rectangular

$$[\mu - \sigma, \mu + \sigma] \times [\hat{\mu} - \hat{\sigma}, \hat{\mu} + \hat{\sigma}] \quad (2.9)$$

é a região do plano tempo-frequência onde $\Gamma_g(f)$ dá informação significativa acerca de f e \hat{f} . A região (2.9) é chamada *janela tempo-frequência* ou *diagrama de Heisenberg* de g . Se g é uma função janela com centro μ e raio σ , então a quantidade 2σ , isto é, a largura

⁶Se a função g tem suporte compacto $[-A, A]$, então poder-se-ia pensar que uma melhor medida de localização de g seria a amplitude do seu suporte; no entanto, devemos notar que, se g tem suporte compacto, então \hat{g} não pode ter suporte compacto, pelo que não poderíamos usar o mesmo tipo de medida de localização para \hat{g} ; por esse motivo se escolhem as variâncias de g e \hat{g} como medidas razoáveis de localização.

⁷De certo modo, a grandeza desse número dá-nos uma medida da “semelhança” entre f e g .

localização tempo-frequência

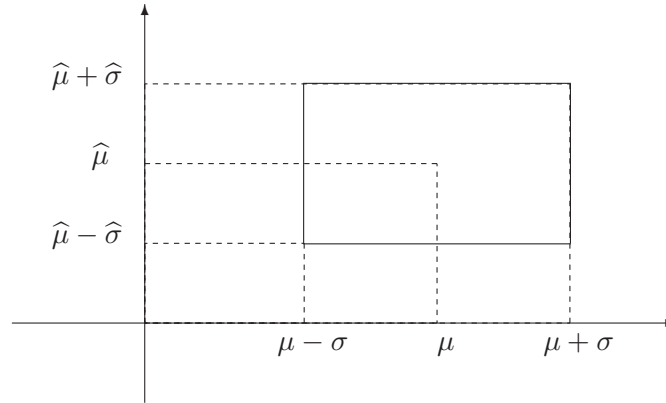


Figura 2.1: Diagrama de Heisenberg

da janela (2.9) é vulgarmente chamada *duração RMS* de g . A altura da janela (2.9), isto é, a quantidade $2\hat{\sigma}$ é dita *largura de banda RMS* de g .

Se g é uma função janela, então dizemos que g está localizada em torno do ponto $(\mu, \hat{\mu})$ do plano tempo-frequência com *incerteza* dada por

$$\gamma(g) := \sigma\hat{\sigma}. \quad (2.10)$$

A incerteza de uma função janela é uma quantidade limitada inferiormente. De facto, tem-se o resultado seguinte (cuja demonstração, para certo tipo de funções, está proposta como exercício no final do capítulo).

Teorema 2.1 (Princípio de Incerteza de Heisenberg) *Seja g uma função de $L^2(\mathbb{R})$ tal que $\|g\|_2 = 1$. Então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |g(t)|^2 dt \times \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \xi_0)^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{1}{4}, \quad \forall t_0, \xi_0 \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

A desigualdade (2.11) mostra que uma função g e a sua transformada de Fourier \hat{g} não podem ser ambas muito concentradas, significando, portanto que teremos sempre que escolher entre uma boa precisão no tempo ou uma boa precisão na frequência. Assim, o princípio de incerteza de Heisenberg estabelece um limite à capacidade da determinação

localização tempo-frequência

instantânea de frequências. ⁸ Pode também provar-se que o limite inferior na desigualdade (2.11) é atingido se e só se g for a Gaussiana $g(t) = \pi^{-1/4} e^{-i\xi_0 t} e^{-(t-t_0)^2/2}$.

Se g for uma função janela, com centro μ e raio σ , então facilmente se verifica que qualquer um dos operadores de translação, modulação e dilatação definidos por (1.63) – (1.65) transforma g em funções janela. Além disso, tem-se:

$$\mu(T_a g) = \mu + a, \quad \mu(E_a g) = \mu, \quad \mu(D_a g) = a \mu \quad (2.12)$$

e

$$\sigma(T_a g) = \sigma, \quad \sigma(E_a g) = \sigma, \quad \sigma(D_a g) = |a| \sigma. \quad (2.13)$$

Definição 2.3 (Transformada de Fourier com janela g) Dada uma função janela g , chama-se transformada de Fourier com janela g de f à função bi-dimensional definida por:

$$\{\mathcal{F}_g f\}(\tau, \xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t - \tau)} e^{-i\xi t} dt, \quad \tau, \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Nota

- (i) Em geral, g é uma função real, pelo que, na definição, não há necessidade de considerar o conjugado de $g(t - \tau)$.
- (ii) Quando se usa uma Gaussiana para função janela na transformada de Fourier em tempo curto, esta toma o nome de transformada de Gabor.
- (iii) Ao operador que, a cada $f \in L^2(\mathbb{R})$, associa a função dada por (2.14) chamamos operador de transformada de Fourier com janela (associado à janela g).

Seja g uma função janela de centro μ e raio σ , sendo $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$, respectivamente, o centro e raio de \hat{g} . Consideremos a seguinte família de funções, obtidas de g por translações e modulações:

$$g_{\tau, \xi} := E_{\xi} T_{\tau} g, \quad \tau, \xi \in \mathbb{R}, \quad (2.15)$$

isto é,

$$g_{\tau, \xi}(t) = e^{i\xi t} g(t - \tau) \quad \tau, \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

⁸Em Mecânica Quântica, a desigualdade (2.11) significa que a posição e momento (massa \times velocidade) de uma partícula livre não podem ser medidos simultaneamente com precisão arbitrária.

localização tempo-frequência

Então, reconhecemos de imediato que a transformada de Fourier com janela g no ponto (τ, ξ) pode ser vista como o produto interno em $L^2(\mathbb{R})$ da função f com a função $g_{\tau, \xi}$, isto é

$$\{\mathcal{F}_g f\}(\tau, \xi) = \langle f, g_{\tau, \xi} \rangle. \quad (2.17)$$

Atendendo aos resultados (2.12) e (2.13), podemos concluir que $\{\mathcal{F}_g f\}(\tau, \xi)$ nos dá informação sobre f e \hat{f} essencialmente na seguinte região do plano tempo-frequência

$$[\mu + \tau - \sigma, \mu + \tau + \sigma] \times [\hat{\mu} + \xi - \hat{\sigma}, \hat{\mu} + \xi + \hat{\sigma}].$$

Em particular, se escolhermos g de modo que $\mu = \hat{\mu} = 0$,⁹ a transformada de Fourier com essa janela g no ponto (τ, ξ) fornece informação de f e \hat{f} na janela

$$J_g(\tau, \xi) = [\tau - \sigma, \tau + \sigma] \times [\xi - \hat{\sigma}, \xi + \hat{\sigma}] \quad (2.18)$$

isto é, próximo do instante τ e da frequência ξ .

Como já referimos, a área da janela J_g é limitada inferiormente, pelo princípio de incerteza de Heisenberg, pelo que localizações precisas no tempo e frequência são mutuamente exclusivas.

Notemos também, que uma vez escolhida uma função janela g , o tamanho das janelas $J_g(\tau, \xi)$ (isto é, a sua largura e altura) não varia com o seu centro de localização, isto é, é sempre o mesmo para quaisquer valores de τ e de ξ . Assim, a resolução tempo-frequência é fixa em todo o plano. Se tivermos um sinal com componentes quase estacionárias e pequenas variações bruscas, então para o primeiro tipo de componentes seria adequado o uso de janelas largas (fraca resolução no tempo, boa resolução na frequência), enquanto para analisar convenientemente as variações bruscas seriam necessárias janela estreitas (boa localização no tempo e conseqüente fraca resolução na frequência). Vemos, assim, que a transformada de Fourier com janela não é apropriada para o estudo deste tipo de sinais.

2.2 Transformada contínua com ôndula

Acabámos de ver que a rigidez das janelas tempo-frequência associadas com a transformada de Fourier em tempo curto constitui uma limitação dessa transformada. A transformada

⁹O que pode ser sempre conseguido, através de uma translação e modulação convenientes.

localização tempo-frequência

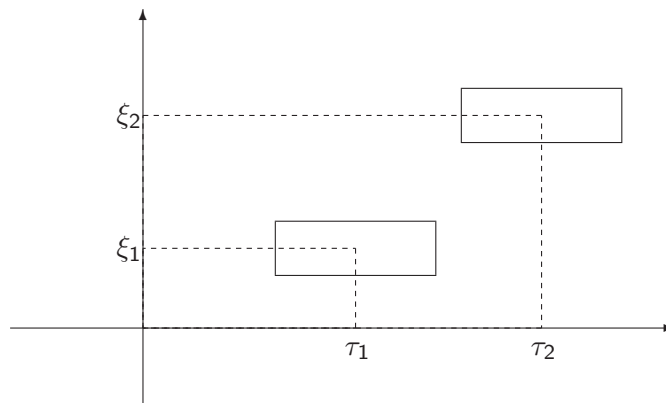


Figura 2.2: Janelas tempo-frequência

contínua com ôndula, que iremos agora descrever, permite ultrapassar essa dificuldade, originando uma análise com janelas *flexíveis*, cuja largura se ajusta às frequências.

A ideia da transformada contínua com ôndula é, tal como no caso da transformada de Fourier com janela, calcular o produto interno de f com uma família de funções $\psi_{a,b}$, dependentes de dois parâmetros. Neste caso, no entanto, essas funções são obtidas de uma função básica ψ por dilatações ou contracções – isto é, mudanças de *escala* – controladas por um parâmetro a , e *translações*, controladas por um parâmetro b .

2.2.1 Definição e propriedades básicas

Começamos por introduzir a seguinte definição.

Definição 2.4 (Ôndula analisadora) Uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ diz-se uma ôndula básica ou ôndula analisadora se satisfizer a seguinte condição:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty. \quad (2.19)$$

A condição (2.19) é chamada *condição de admissibilidade* da ôndula ψ . Ao valor da constante

$$C_\psi := 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \quad (2.20)$$

localização tempo-frequência

chamamos *constante de admissibilidade* para a ôndula ψ . Posteriormente, tornar-se-á claro qual a importância da condição de admissibilidade; vejamos, primeiro, qual o seu significado.

- Se $\psi \in L^1(\mathbb{R})$, então $\widehat{\psi}$ é uma função contínua e a condição de admissibilidade implica, nesse caso, que $\widehat{\psi}(0) = 0$, ou seja, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (2.21)$$

- Por outro lado, se ψ satisfizer uma condição de decaimento um pouco mais forte do que pertencer a $L^1(\mathbb{R})$, por exemplo, se ψ for tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|)^\alpha |\psi(t)| dt < \infty, \quad \text{para um certo } \alpha > 0, \quad (2.22)$$

pode mostrar-se que a condição (2.21) implica que se verifique a condição de admissibilidade.

Na prática, imporemos a ψ condições de decaimento bastante mais exigentes do que a condição (2.22). Nesse caso, a condição de admissibilidade é equivalente à condição (2.21). Em particular, se $0 \neq \psi \in L^2(\mathbb{R})$ tiver suporte compacto, então ψ é uma ôndula básica e só se $\int \psi(t) dt = 0$. Esta condição significa que ψ deve, de algum modo, oscilar, isto é, comportar-se como uma *onda*. Como exigimos a essa *onda* que decaia rapidamente para zero, chamamos-lhe ôndula (no sentido de onda pequena).¹⁰

Exemplo 2.1 *Um exemplo simples de uma ôndula é o chamado chapéu Mexicano definido por $\psi(t) = -\frac{d^2}{dt^2} e^{-t^2/2} = (1 - t^2)e^{-t^2/2}$; ver Fig.2.3.*

Devemos notar que a condição de admissibilidade (2.19) é uma condição fraca. De facto, pode mostrar-se que o conjunto de ôndulas analisadoras é denso em $L^2(\mathbb{R})$; ver Exercício 2.8.

Dada uma ôndula analisadora $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, consideremos a família de funções $\psi_{a,b}$ definidas do seguinte modo:

$$\psi_{a,b} := T_b D_a \psi, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad (2.23)$$

¹⁰Os franceses usam a palavra *ondelette* e os ingleses a palavra *wavelet* para designar estas funções.

localização tempo-frequência

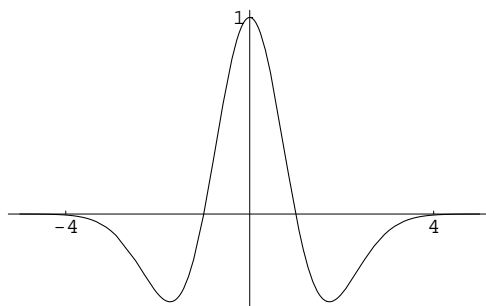


Figura 2.3: Exemplo de uma ôndula (chapéu Mexicano)

ou seja,

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \quad (2.24)$$

A transformada contínua com ôndula ψ de uma função f vai ser definida à custa do produto interno de f com estas funções. Mais precisamente, temos a seguinte definição:

Definição 2.5 (Transformada contínua com ôndula) Dada uma ôndula analisadora $\psi \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$, chama-se transformada contínua com ôndula ψ de f à função bi-dimensional definida por:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b) &:= \langle f, \psi_{a,b} \rangle \\ &= |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Observações

1. Em tudo quanto se segue, usaremos a notação \mathbb{R}^* para designar o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. Ao número complexo $\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)$, para um valor fixo $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, chamaremos *coeficiente de ôndula* de f a respeito da ôndula ψ , no ponto (a, b) .
3. O operador integral \mathcal{W}_ψ definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\psi : L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}} \\ f &\mapsto \mathcal{W}_\psi f, \end{aligned} \quad (2.26)$$

localização tempo-frequência

onde $\mathcal{W}_\psi f$ é a função definida por (2.25), é chamado *operador de transformada contínua com ôndula* associado à ôndula analisadora ψ .

O seguinte teorema enuncia algumas propriedades do operador \mathcal{W}_ψ .

Teorema 2.2 (Propriedades elementares de \mathcal{W}_ψ) *O operador \mathcal{W}_ψ é um operador linear limitado de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^\infty(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$ que satisfaz as seguintes propriedades de invariância:*

$$(i) \quad \{\mathcal{W}_\psi T_\tau f\}(a, b) = \{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b - \tau) \quad (\text{invariância por translação});$$

$$(ii) \quad \{\mathcal{W}_\psi D_c f\}(a, b) = \{\mathcal{W}_\psi f\}(a/c, b/c) \quad (\text{invariância por dilatação}).$$

Demonstração: A linearidade de f é uma consequência imediata do facto de \mathcal{W}_ψ ser um operador integral; demonstremos, então, que o operador é limitado. Temos, como consequência da desigualdade de Schwarz

$$|\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)| = |\langle f, \psi_{a,b} \rangle| \leq \|f\|_2 \|\psi_{a,b}\|_2 = \|f\|_2 \|\psi\|_2,$$

donde se conclui de imediato que

$$\|\mathcal{W}_\psi f\|_\infty \leq C \|f\|_2, \quad (2.27)$$

onde $C = \|\psi\|_2$. As propriedades de invariância por translação e dilatação demonstram-se facilmente usando a definição e fazendo simples mudanças de variável no integral. \square

2.2.2 Propriedades de localização da transformada com ôndula

Suponhamos que a ôndula analisadora ψ é uma função janela, com centro μ e raio σ , e tendo $\widehat{\mu}$ e $\widehat{\sigma}$, respectivamente, como centro e raio da sua transformada de Fourier. Da definição das funções $\psi_{a,b} := T_b D_a \psi$ e dos resultados (2.12) e (2.13), decorre de imediato que

$$\mu(\psi_{a,b}) = b + a\mu, \quad \sigma(\psi_{a,b}) = |a| \sigma. \quad (2.28)$$

Além disso, como

$$\widehat{\psi_{a,b}} = \widehat{T_b D_a \psi} = E_{-b} D_{1/a} \widehat{\psi},$$

tem-se também

$$\mu(\widehat{\psi_{a,b}}) = \frac{1}{a} \widehat{\mu}, \quad \sigma(\widehat{\psi_{a,b}}) = \frac{1}{|a|} \widehat{\sigma}. \quad (2.29)$$

localização tempo-frequência

Vemos, assim, que a transformada integral com ôndula ψ , $\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, ab)$, fornece informação local sobre f e \hat{f} na seguinte região do plano:

$$[b + a\mu - |a|\sigma, b + a\mu + |a|\sigma] \times \left[\frac{1}{a}\hat{\mu} - \frac{1}{|a|}\hat{\sigma}, \frac{1}{a}\hat{\mu} + \frac{1}{|a|}\hat{\sigma} \right].$$

Em particular, se escolhermos ψ de modo que $\mu = 0$ e $\hat{\mu} = 1$, então $\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)$ dá-nos informação sobre f e \hat{f} na seguinte janela:

$$J_{a,b} = [b - |a|\sigma, b + |a|\sigma] \times \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{|a|}\hat{\sigma}, \frac{1}{a} + \frac{1}{|a|}\hat{\sigma} \right], \quad (2.30)$$

isto é, informação sobre f próximo do instante b (com “precisão” $|a|\sigma$) e informação sobre \hat{f} próximo da frequência $\frac{1}{a}$ (com precisão $\frac{1}{|a|}\hat{\sigma}$). Assim:

- Pequenos valores de $|a|$ correspondem a uma informação numa escala fina àcerca de f e numa escala grosseira àcerca de \hat{f} .
- Grandes valores de $|a|$ correspondem a uma informação numa escala grosseira àcerca de f e numa escala fina sobre \hat{f} .
- As janelas *alargam* para valores de $|a|$ grandes (o que corresponde a baixas frequências $|\xi| = \frac{1}{|a|}$) e *estreitam* para valores pequenos de $|a|$ (frequências altas).

Resumindo, podemos dizer que a transformada contínua com ôndula fornece uma descrição tempo-frequência (ou, mais precisamente, tempo-escala) de um sinal, com janelas cuja largura se ajusta à escala (e à frequência).

Nota A área das janelas é constante e dada por

$$2|a|\sigma \cdot 2\frac{1}{|a|}\hat{\sigma} = 4\sigma\hat{\sigma}$$

a qual, pelo princípio de incerteza de Heisenberg, nunca poderá ser inferior a 2.

Note-se que a frequência aparece aqui como inverso da escala, isto é, $\xi = \frac{1}{a}$, porque supusemos $\mu(\hat{\psi}) = 1$. Se $\mu(\hat{\psi}) \neq 1$, a relação entre *escala* e *frequência* não é tão clara. Em particular, se ψ for uma função real (o que acontece na maior parte das aplicações), ter-se-á $\hat{\psi}(-\xi) = \overline{\hat{\psi}(\xi)}$ ou seja, $|\hat{\psi}(\xi)|$ será uma função par, pelo que teremos $\hat{\mu} = 0$. Neste caso, no entanto, é mais natural tomar como medidas de localização o centro e o raio da função $\hat{\psi}_+$ definida como $\hat{\psi}_+ = \hat{\psi}\chi_{[0,\infty)}$, ou seja,

localização tempo-frequência

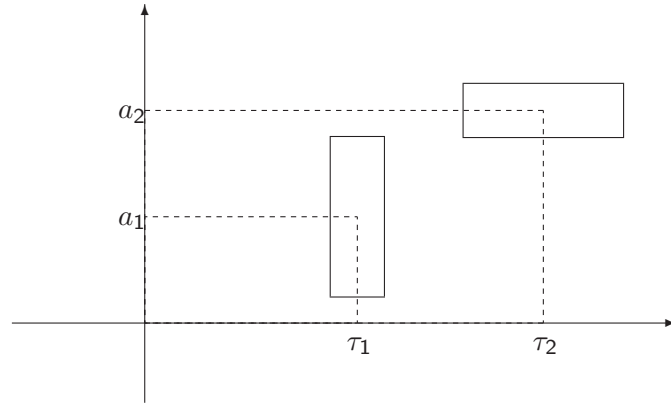


Figura 2.4: Janelas tempo-frequência com $0 < a_1 < a_2$.

considerar

$$\hat{\mu}_+ := \frac{\int_0^\infty \xi |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi}{\int_0^\infty |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi}, \quad (2.31)$$

$$\hat{\sigma}_+ := \left(\frac{\int_0^\infty (\xi - \hat{\mu}_+)^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi}{\int_0^\infty |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi} \right)^{1/2}. \quad (2.32)$$

Note-se que, se f for real, então

$$\begin{aligned} \langle f, \psi \rangle &= \langle \hat{f}, \hat{\psi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\psi}(\xi)} d\xi \\ &= 2\operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\psi}(\xi)} d\xi \right\} \\ &\approx 2\operatorname{Re} \left\{ \int_{\hat{\mu}_+ - \hat{\sigma}_+}^{\hat{\mu}_+ + \hat{\sigma}_+} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\psi}(\xi)} d\xi \right\}. \end{aligned}$$

e será, de facto, mais natural considerar

$$[\mu - \sigma, \mu + \sigma] \times [\hat{\mu}_+ - \hat{\sigma}_+, \hat{\mu}_+ + \hat{\sigma}_+]$$

como correspondente diagrama de Heisenberg. Neste caso, a frequência “surge” como $\frac{\hat{\mu}_+}{a}$.

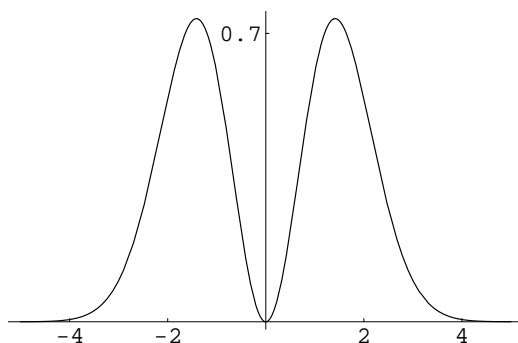


Figura 2.5: Transformada de Fourier do chapéu Mexicano.

2.2.3 Inversão da transformada contínua com ôndula

Ao efectuar a transformação de um sinal, é, naturalmente, importante dispor de um processo de recuperar esse sinal depois de transformado. Vamos ver agora que, se ψ satisfaz a condição de admissibilidade (2.19), então é possível “inverter” a transformada $\{\mathcal{W}_\psi f\}$. Notemos primeiramente que, para cada valor do parâmetro $a \in \mathbb{R}^*$, a transformada com ôndula $\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, \cdot)$ pode ser vista como um produto de convolução. Mais precisamente, seja $\psi_a = D_a \psi = |a|^{-1/2} f(\cdot/a)$ e seja $\widetilde{\psi}_a$ a *involução* da função ψ_a , isto é, seja

$$\widetilde{\psi}_a(t) := \overline{\psi_a(-t)}. \quad (2.33)$$

Então, é imediato reconhecer que

$$\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b) = (f * \widetilde{\psi}_a)(b).^{11} \quad (2.34)$$

Por outro lado, se $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, então a função $f * \widetilde{\psi}_a \in L^2(\mathbb{R})$, e a sua transformada de Fourier é dada por

$$\widehat{(f * \widetilde{\psi}_a)}(\xi) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\xi) |a|^{1/2} \overline{\widehat{\psi}(a\xi)}.$$

Podemos, agora, demonstrar o seguinte teorema.

¹¹Isto significa, em particular, que a transformada com ôndula ψ pode ser vista, para cada valor de a fixo, como uma filtragem com a função $\widetilde{\psi}_a$; como $\widetilde{\psi}(0) = 0$ e, se $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, então $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \widetilde{\psi}(\xi) = 0$, a função ψ (e portanto, também $\widetilde{\psi}_a$) é um filtro do tipo passa-banda.

localização tempo-freqüência

Teorema 2.3 *Seja $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ uma ôndula básica com constante de admissibilidade C_ψ . Então, dada qualquer função $f \in L^2(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)|^2 \frac{dadb}{a^2} = C_\psi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (2.35)$$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)|^2 db \right\} \frac{da}{a^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |(f * \widetilde{\psi}_a)(b)|^2 db \right\} \frac{da}{a^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{(f * \widetilde{\psi}_a)}(\xi)|^2 d\xi \right\} \frac{da}{a^2} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 |\widehat{\psi}(a\xi)|^2 |a| d\xi \right\} \frac{da}{a^2} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(a\xi)|^2}{|a|} da \right\} d\xi \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(u)|^2}{|u|} du \right\} d\xi \\ &= C_\psi \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= C_\psi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

□

Nota Na demonstração acima, a alteração da ordem de integração é permitida pela aplicação do teorema de Fubini-Tonelli, uma vez que a função integranda é não negativa.

A fórmula (2.35) pode ser interpretada como uma fórmula de conservação (a menos do produto por uma constante) da energia do sinal depois de transformado pela transformada contínua com ôndula. Mais precisamente, a fórmula mostra que o operador $\mathbf{W}_\psi := \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \mathcal{W}_\psi$, isto é, o operador definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_\psi : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2\left(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \frac{dadb}{a^2}\right) \\ f(t) &\mapsto \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \end{aligned} \quad (2.36)$$

é uma isometria.

Teorema 2.4 *Nas condições do teorema anterior, tem-se que, para quaisquer funções $f, g \in L^2(\mathbb{R})$,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{W}_{\psi} f\}(a, b) \overline{\{\mathcal{W}_{\psi} g\}(a, b)} db \frac{da}{a^2} = C_{\psi} \langle f, g \rangle. \quad (2.37)$$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{W}_{\psi} f\}(a, b) \overline{\{\mathcal{W}_{\psi} g\}(a, b)} db \right\} \frac{da}{a^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (f * \widetilde{\psi}_a)(b) \overline{(g * \widetilde{\psi}_a)(b)} db \right\} \frac{da}{a^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |a| \overline{\widehat{\psi}(a\xi)} \widehat{f}(\xi) \widehat{\psi}(a\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi \right\} \frac{da}{a^2} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(a\xi)|^2}{|a|} da \right\} d\xi \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(u)|^2}{|u|} du \right\} d\xi \\ &= C_{\psi} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle \\ &= C_{\psi} \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

□

A fórmula (2.37) costuma escrever-se como

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{W}_{\psi} f\}(a, b) \langle \psi_{a,b}, g \rangle \frac{dadb}{a^2}, \quad (2.38)$$

ou simplesmente como

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{W}_{\psi} f\}(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2}, \quad (2.39)$$

devendo haver o cuidado de as interpretar com o significado (2.37). Pode também provar-se que esta última fórmula é válida no seguinte sentido: Se

$$f_{\epsilon}(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int \int_{\substack{|a| > \epsilon \\ b \in \mathbb{R}}} \{\mathcal{W}_{\psi} f\}(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2},$$

localização tempo-frequência

então $f_\epsilon \rightarrow f$ em $L^2(\mathbb{R})$ quando $\epsilon \rightarrow 0^+$. Pode ainda provar-se que se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ é tal que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, então a fórmula de inversão (2.39) é válida em todo o ponto $t \in \mathbb{R}$; veja, e.g. [GW98, p. 401].

Otras variantes da fórmula de inversão (2.37) são possíveis. Em particular, se exigirmos a ψ que satisfça a seguinte condição de admissibilidade, mais forte do que a condição (2.19),

$$\int_{-\infty}^0 \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi = \int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi < \infty, \quad (2.40)$$

então é possível recuperar f dos valores $\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)$ com $b \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, ou seja, temos

$$f(t) = \frac{2}{C_\psi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b) \psi_{a,b}(t) db \right\} \frac{da}{a^2}, \quad (2.41)$$

onde C_ψ é a constante dada por (2.19).

Nota Note-se que se ψ for uma função real, a igualdade dos dois integrais em (2.40) é automaticamente satisfeita, pelo que, nesse caso, exigir a condição de admissibilidade mais forte (2.40) resume-se a exigir que

$$\int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi < \infty. \quad (2.42)$$

A fórmula (2.41) pode ser interpretada como:

- uma fórmula de *reconstrução* de f sabida a sua transformada contínua $\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)$ para todos os valores de $b \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^+$;
- uma fórmula de *decomposição* de f como sobreposição das funções $\psi_{a,b}$, sendo os “coeficientes” dessa decomposição os valores da transformada contínua.

2.2.4 Caracterização da regularidade de funções por meio da transformada contínua com ôndula

Os resultados desta secção são retirados da referência [Mal98]; ver também [Jaf91].

A transformada contínua com ôndula é uma ferramenta importante na caracterização da suavidade de funções. Existem várias maneiras de “medir” a regularidade de uma função. Uma delas, particularmente útil, é dada pela regularidade de Lipschitz, que passamos a definir.

Definição 2.6

(i) Uma função f diz-se α -Lipschitz em t_0 , se existe uma constante $K > 0$ e um polinómio p_{t_0} de grau não superior a α , tais que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t) - p_{t_0}(t)| \leq K|t - t_0|^\alpha. \quad (2.43)$$

(ii) Uma função f diz-se uniformemente α -Lipschitz num certo intervalo $[c, d]$ se satisfaz a desigualdade (2.43) para todo o t_0 em $[c, d]$, com a constante K independente de t_0 .

(iii) A regularidade de Lipschitz de f em t_0 (ou sobre $[c, d]$) é o supremo dos valores de α tais que f é α -Lipschitz em t_0 (ou uniformemente em $[c, d]$).

Nota

- (i) Em cada ponto t_0 , o polinómio p_{t_0} está definido de modo único.
- (ii) Se f é m vezes continuamente diferenciável numa vizinhança de t_0 , então p_{t_0} é o polinómio de Taylor de f em torno de t_0 . Além disso, se f é uniformemente α -Lipschitz, $\alpha > m$, numa certa vizinhança de t_0 , então f é m vezes continuamente diferenciável nessa vizinhança.
- (iii) Se $0 \leq \alpha < 1$, então o polinómio referido na definição acima é $p_{t_0}(t) = f(t_0)$ e a condição de Lipschitz (2.43) é

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t) - f(t_0)| \leq K|t - t_0|^\alpha.$$

- (iv) Uma função que seja limitada, mas descontínua, em t_0 é 0-Lipschitz em t_0 . Se a regularidade de Lipschitz de f em t_0 é $\alpha < 1$, então f não é diferenciável em t_0 e α caracteriza o tipo de singularidade.

Vamos ver agora que o decaimento da amplitude da transformada com ôndula nas diversas escalas de uma certa função f está relacionado com a regularidade de Lipschitz dessa função.

Em tudo quanto se segue, supomos que a ôndula ψ satisfaz as seguintes condições:

- ψ é real;
- ψ é de classe C^m , com derivadas que decaem rapidamente, ou seja, tem-se que, para quaisquer $0 \leq k \leq n$ e $m \in \mathbb{N}$, existe uma constante $C_{k,m}$ tal que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\psi^{(k)}(t)| \leq \frac{C_{k,m}}{1 + |t|^m};$$

localização tempo-frequência

- ψ tem os primeiros n momentos nulos, ou seja

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0; \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.44)$$

Temos, então, o seguinte teorema, cuja demonstração completa pode ser vista em [Mal98, pp.171-174].

Teorema 2.5

- (i) Se uma função limitada $f \in L^2(\mathbb{R})$ é uniformemente α -Lipschitz, $\alpha \leq n$, em $[c, d]$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)| \leq C|a|^{\alpha+1/2}, \quad (2.45)$$

para quaisquer $b \in [c, d]$ e $a \in \mathbb{R}^*$.

- (ii) Reciprocamente, se a transformada contínua com ôndula ψ satisfaz (2.45) e se $\alpha < n$ não é inteiro, então f é uniformemente α -Lipschitz em $[c+\epsilon, d-\epsilon]$, para qualquer $\epsilon > 0$.

Demonstração: Apresentamos aqui apenas a demonstração da condição (i). Começemos por notar que se p é um polinómio qualquer de grau não superior a $n-1$, então o facto de ψ ter n momentos nulos implica que $\{\mathcal{W}_\psi p\}(a, b) = 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \{\mathcal{W}_\psi p\}(a, b) &= |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ &= |a|^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} p(au+b) \psi(u) du = 0, \end{aligned}$$

já que $p(au+b)$ é um polinómio (em u) de grau não superior a $n-1$. Como f é α -Lipschitz

localização tempo-frequência

em $[c, d]$ tem-se, para todo $b \in [c, d]$ e $a \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
 |\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)| &\leq |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right| dt \\
 &= |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |[f(t) - p_b(t)]| \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right| dt \\
 &\leq |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} K|t-b|^\alpha \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right| dt \\
 &= K|a|^{\alpha+1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^\alpha |\psi(u)| du \\
 &\leq C|a|^{\alpha+1/2},
 \end{aligned}$$

como se pretendia demonstrar. □

Nota

- (i) Note-se que, para a demonstração da condição necessária apenas foi importante a existência de n momentos nulos da ôndula, não sendo necessária a regularidade desta.
- (ii) A importância da desigualdade (2.45) é que ela fornece uma condição de decaimento assintótico de $|\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)|$ quando a escala a tende para zero. De facto, para escalas grandes essa desigualdade não impõe nenhuma condição, já que, como vimos, a desigualdade de Schwarz garante que a transformada com ôndula é limitada. Quando a escala a decresce, $\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)$ mede as variações, numa escala fina, na vizinhança de b . O teorema anterior garante que $|\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)|$ decai tanto mais rapidamente quanto maior for o valor de α , ou seja, tanto mais rapidamente quanto maior for a suavidade da função analisada numa vizinhança de b .
- (iii) É importante salientar que, se ψ tem exactamente n momentos nulos, então o decaimento da transformada contínua não fornece informação sobre a regularidade de Lipschitz de f para $\alpha > n$. Com efeito, pode mostrar-se que, se f é uniformemente α -Lipschitz, com $\alpha > n$ e ψ tem n momentos nulos, então $|\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)| \sim |a|^{n+1/2}$ para escalas finas, apesar da regularidade de f ser superior a n .
- (iv) Note-se também que, no teorema acima, (ii) é apenas um recíproco parcial de (i), uma vez que, se α é inteiro, a verificação da condição (2.45) não é suficiente para provar que f é uniformemente α -Lipschitz.

Para além da regularidade global (ou mais precisamente, regularidade uniforme num determinado intervalo), existem também resultados importantes sobre a caracterização da regularidade local de uma função f em termos do decaimento dos valores da sua transformada contínua com ôndula. Enunciamos, sem demonstração, o seguinte teorema; a

localização tempo-frequência

demonstração pode ser vista em, e.g. [Jaf91] ou [Mal98]. Relembramos que, no que se segue, estamos a admitir que a ôndula ψ utilizada satisfaz as condições de regularidade, decaimento e existência de n momentos nulos referidas anteriormente.

Teorema 2.6

(i) Se uma função limitada $f \in L^2(\mathbb{R})$ é α -Lipschitz, $\alpha \leq n$, num determinado ponto t_0 , então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)| \leq C|a|^{\alpha+1/2} \left(1 + \left|\frac{b-t_0}{a}\right|^\alpha\right), \quad (2.46)$$

para quaisquer $b, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

(ii) Reciprocamente, se $\alpha < n$ não é inteiro e existem C e $\alpha' < \alpha$ tais que

$$|\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)| \leq C|a|^{\alpha+1/2} \left(1 + \left|\frac{b-t_0}{a}\right|^{\alpha'}\right) \quad (2.47)$$

para quaisquer $b, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, então f é α -Lipschitz em t_0 .

Para interpretar mais facilmente o significado das condições (2.46) e (2.47), suponhamos que ψ tem suporte compacto $[-N, N]$. O chamado *cone de influência* de t_0 no plano tempo-escala é o conjunto de pontos (b, a) tais que t_0 pertence ao suporte de $\psi_{a,b}$. Como $\text{supp}\psi_{a,b} = [b - |a|N, b + |a|N]$, o cone de influência de t_0 é, portanto, definido pela condição

$$|b - t_0| \leq |a|N. \quad (2.48)$$

Assim, para pontos (b, a) no cone de influência de t_0 , as condições (2.46), (2.47) escrevem-se como

$$|\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)| \leq C'|a|^{\alpha+1/2},$$

ou seja, têm a forma das condições indicadas para o Teorema 2.5.

Para pontos fora do cone de influência de t_0 , a condição (2.47) é da forma

$$|\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)| \leq C'|a|^{\alpha-\alpha'+1/2}|b - t_0|^{\alpha'} \quad (2.49)$$

Embora, à primeira vista, possa parecer estranho que se tenha de considerar o tipo de decaimento de $|\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)|$ para pontos fora do cone de influência do ponto t_0 para se

localização tempo-frequência

inferir sobre a “suavidade” nesse ponto, a verdade é que a verificação da condição (2.49) é de facto imprescindível, no caso em que f tem singularidades de tipo oscilatório; a este propósito, veja, e.g., [Mal98, pp.176-178].

2.3 Exercícios

Exercício 2.1. Seja g uma função janela, com centro μ e raio σ .

- a) Prove que os operadores de translação, modulação e dilatação transformam g em funções janela.
- b) Mostre que:

$$\mu(T_ag) = \mu + a, \quad \mu(E_ag) = \mu, \quad \mu(D_ag) = a\mu$$

e

$$\sigma(T_ag) = \sigma, \quad \sigma(E_ag) = \sigma, \quad \sigma(D_ag) = |a|\sigma.$$

Exercício 2.2. Seja g uma função do espaço de Schwartz (portanto uma função janela).

Sejam μ e σ o centro e raio de g e $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$ o centro e raio de \hat{g} . Suponhamos que $\mu = \hat{\mu} = 0$ e ainda que $\|g\| = 1$. Mostre que

$$\sigma \hat{\sigma} \geq \frac{1}{2}.$$

Sugestão: Considere a função $tg(t)\overline{g'(t)}$ e proceda do seguinte modo:

- (i) Usando a desigualdade de Schwarz e propriedades da transformada de Fourier, mostre que

$$\left| \int tg(t)\overline{g'(t)} dt \right|^2 \leq \|g\|^2 \|\hat{g}\|^2 \sigma^2 \hat{\sigma}^2 = \sigma^2 \hat{\sigma}^2;$$

- (ii) Integrando por partes

$$\int tg(t)\overline{g'(t)} dt,$$

mostre que

$$-2\operatorname{Re} \left\{ \int tg(t)\overline{g'(t)} dt \right\} = \int |g(t)|^2 dt,$$

localização tempo-frequência

isto é, que

$$\left(\operatorname{Re} \left\{ \int t g(t) \overline{g'(t)} dt \right\} \right)^2 = \frac{1}{4};$$

(iii) Estabeleça então o resultado pretendido.

Nota O princípio de incerteza de Heisenberg (estabelecido aqui para funções de \mathcal{S} pode provar-se para qualquer função $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Exercício 2.3. Considere uma função gaussiana $g_\alpha(t) = e^{-\alpha t^2}$, $\alpha > 0$. Mostre que:

$$\|g_\alpha\|^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}; \quad \mu = \hat{\mu} = 0; \quad \sigma \hat{\sigma} = \frac{1}{2}.$$

Sugestão: Partindo da igualdade $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, derive ambos os seus membros (em ordem a a) e conclua que $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-at^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} a^{-3/2}$. Use também o facto de que, se uma função g for multiplicada por uma constante, o seu centro e raio não se alteram.

Exercício 2.4. Derive *formalmente* a seguinte fórmula de inversão da transformada de Fourier com janela:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi g(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{F}_g f\}(t, \xi) e^{i\xi t} d\xi,$$

supondo que $g(0) \neq 0$.

Exercício 2.5. Considere a seguinte função:

$$\psi^H(t) := \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{se } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{outros valores de } t. \end{cases}$$

- Mostre que se trata de uma ôndula básica.
- Determine a transformada de Fourier de $\psi^H(t)$ e o valor da constante de admissibilidade C_{ψ^H} para esta ôndula.
- Esboce o gráfico de $\psi^H(t)$ e de $|\widehat{\psi^H}(\xi)|$.

localização tempo-frequência

Nota: Esta ôndula é conhecida por *ôndula de Haar* e será usada com frequência neste curso.

Exercício 2.6. Seja ϕ uma função k ($k \geq 1$) vezes continuamente diferenciável e tal que $\phi, \phi^{(k)} \in L^2(\mathbb{R})$ e $\phi \neq 0$. Prove que a função

$$\psi(t) := \phi^{(k)}(t)$$

é uma ôndula analisadora.

Exercício 2.7. Use o exercício anterior para justificar que a função chapéu Mexicano

$$\psi(t) = -\frac{d^2}{dt^2} e^{-t^2/2} = (1 - t^2)e^{-t^2/2}$$

é uma ôndula. Determine $\widehat{\psi}(\xi)$ e a constante de admissibilidade C_ψ para esta ôndula. Mostre que $\widehat{\psi}(\xi)$ admite um máximo para $\xi = \sqrt{2}$.

Exercício 2.8. Dada uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$, considere (para $\varepsilon > 0$) a função f_ε tal que

$$\widehat{f}_\varepsilon(\xi) := \begin{cases} \widehat{f}(\xi), & \text{se } |\xi| \geq \varepsilon \\ 0, & \text{se } |\xi| < \varepsilon. \end{cases} \quad (2.50)$$

a) Mostre que, para cada ε , f_ε é admissível.

b) Mostre que

$$\|f - f_\varepsilon\|_2^2 \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

c) Conclua que o conjunto $\Psi = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) : \psi \text{ é admissível}\}$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$.

Exercício 2.9. Seja $0 \neq \psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$. Mostre que, se $\int_{-\infty}^{\infty} |t|^\alpha |\psi(t)| dt < \infty$ para um certo $\alpha > 1/2$, então ψ é uma ôndula básica.

Exercício 2.10. Mostre que se ψ é uma função real, então

$$\int_{-\infty}^0 \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi = \int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi.$$

localização tempo-frequência

Exercício 2.11. Seja ψ é uma ôndula analisadora com as propriedades de uma função janela (em particular, $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ e $\widehat{\psi} \in L^1(\mathbb{R})$). Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ é tal que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, prove que é válida pontualmente a fórmula de inversão da transformada contínua com ôndula, isto é

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} \frac{da}{|a|^{5/2}} db, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde C_ψ designa a constante de admissibilidade de ψ .

Exercício 2.12. Seja $\psi(t) = (1 - Bt^2)e^{-At^2}$, $A > 0$.

- Determine B de modo que ψ seja admissível, ou seja, de modo que ψ seja uma ôndula básica.
- Para esse valor de B , determine o valor da constante C_ψ .
- Verifique que, para esse valor de B , se tem $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$.
- Esboce o gráfico de ψ para $A = 1/2$ e $B = 1$ e o gráfico da sua transformada de Fourier. Que ôndula conhecida é esta?

Exercício 2.13. a) Determine a transformada contínua com ôndula da função $f(t) = \sin t$, tomando para ôndula analisadora $\psi(t)$ a ôndula de Haar. Repita, tomando para $\psi(t)$ o chapéu Mexicano.

Nota: Tendo em atenção que $\sin t = (e^{it} - e^{-it})/(2i)$, note que a transformada $\mathcal{W}_\psi f$ pode ser expressa em termos da transformada de Fourier de ψ .

- Determine, para cada uma das ôndulas referidas, os máximos locais de $\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, \cdot)$.

Exercício 2.14. O exercício seguinte destina-se a familiarizar os alunos com o uso da pac-
kage *Wavelet Toolbox* do *MATLAB* (versão 6.5).

- Comece por invocar o *MATLAB* e, a seguir à *prompt* `>>` digite `wavemenu`.
- Selecione a opção *Continuous Wavelet 1-D* do menu e espere pela figura.
- Em *File*, selecione a opção *LoadSignal*. Escolha o ficheiro `freqbrk.mat` que se encontra na directoria `matlab\toolbox\wavelet\wavedemo`.

localização tempo-frequência

- d) Seleccione a ôndula *haar* e escolha *Analyze* para efectuar a transformada contínua do sinal escolhido, usando como ôndula analisadora essa ôndula (ôndula de Haar).
- e) Em *WaveletDisplay* (voltando ao menu principal) poderá obter uma descrição desta ôndula. Veja também a descrição de algumas outras ôndulas. Por exemplo, veja o que é referido sobre a ôndula *mexhat*.
- f) Seleccione agora outro sinal *quachirp.mat* e repita os passos anteriores com diversas ôndulas analisadoras. Experimente mudar alguns dos parâmetros (*Scale Setting*, *Coloration Mode*, *Color Map*, ...).
- g) Em *File*, seleccione a opção *Example Analysis* do menu e experimente alguns dos exemplos aí contidos. Escolha *Close* para sair.

3. Análise Multi-Resolução

Análise multi-resolução
Ôndulas ortogonais

3.1 Ôndulas ortogonais

Como vimos no capítulo anterior, dada uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$, ela admite uma representação

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dad b}{a^2} \quad (3.1)$$

em termos dos valores da transformada com ôndula ψ , $\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)$, para $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. É de suspeitar que esta representação seja altamente redundante, isto é, que não seja necessário conhecer $\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)$ em cada ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ para podermos “recuperar” a função f : basta pensar que uma função de uma variável foi transformada numa função de duas variáveis. Esta redundância pode ter algumas vantagens. Em particular, ela permite uma menor exigência na precisão com que os coeficientes têm de ser determinados para que se possa obter uma “boa” recuperação da função transformada. Além disso, é, por vezes, mais fácil a análise de dados ou reconhecimento de padrões com uma transformada contínua.¹ No entanto, se o objectivo principal for comprimir informação, de modo a armazená-la ou transmiti-la de uma forma eficiente, deverá evitar-se a redundância, tanto quanto possível. Para obter algoritmos eficientes para determinar a transformada de uma

¹Na prática, quando se fala de transformada contínua, isto é, quando teoricamente deveríamos deixar os parâmetros de translação e dilatação variar continuamente, o que na realidade se faz é calcular a transformada para um número finito, embora muitíssimo elevado, de valores dos parâmetros.

análise multi-resolução

função f e reconstruir f a partir dos valores da transformada, gostaríamos de restringir os valores dos parâmetros de dilatação e translação a *valores discretos*, isto é, calcular $\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, b)$ apenas numa rede discreta do plano tempo-escala. Supondo que ψ satisfaz a condição de admissibilidade (2.40), caso em que sabemos ser possível recuperar f usando apenas valores positivos para o parâmetro de escala, uma escolha natural para os valores de a é a seguinte:

$$a = 2^{-j}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

É também natural que o parâmetro de translação b dependa do parâmetro de escala (se a função ψ é muito comprimida, ou seja, se a escala é muito fina, deveremos efectuar muitas translações, com passos muito pequenos; contrariamente, se ψ é alargada, não é necessário efectuar tantas deslocações dessa função). Assim, para cada $j \in \mathbb{Z}$, vamos considerar os seguintes valores do parâmetro b :

$$b = 2^{-j} k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Para esta discretização dos parâmetros a e b , vulgarmente designada por *rede diádica* do plano, temos então a seguinte família de funções

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}(t) &:= 2^{j/2} \psi\left(\frac{t - 2^{-j}k}{2^{-j}}\right) \\ &= 2^{j/2} \psi(2^j t - k); \quad j, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Naturalmente, pretendemos que, à semelhança do que se passa no caso contínuo, seja possível:

- Reconstruir f a partir do conhecimento dos valores

$$c_{j,k} = \{\mathcal{W}_\psi f\}(2^{-j}, 2^{-j}k) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle.$$

- Expandir f como sobreposição das funções $\psi_{j,k}$, ou seja, encontrar coeficientes $d_{j,k}$ tais que

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}.$$

A reconstrução e decomposição deverão, além disso, ser processos estáveis, isto é, pouco sensíveis a pequenas perturbações nos coeficientes, para que possam ter algum interesse prático. A resposta mais geral a estes dois problemas pode ser encontrada na teoria dos *referenciais de ôndulas*; veja, e.g. as referências [DGM86], [Dau88] e [Dau92], nas quais são discutidas as condições sobre ψ e sobre outras possíveis escolhas de discretização dos parâmetros a e b para garantir uma resposta afirmativa às duas questões acima.

Neste curso introdutório, estamos especialmente interessados nas chamadas *ôndulas ortogonais*, que passamos a definir.

Definição 3.1 Uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ diz-se uma *ôndula ortogonal*, se a família de funções

$$\psi_{j,k} := 2^{j/2} \psi(2^j \cdot -k); \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

constituir uma base ortonormada do espaço $L^2(\mathbb{R})$.

Nota No que se segue, dada uma certa função f , a notação $f_{j,k}$ ($j, k \in \mathbb{Z}$) será sempre usada para designar a função obtida de f por uma dilatação e translação diádica, isto é, $f_{j,k}(t) := 2^{j/2} f(2^j t - k)$.

Se ψ é uma *ôndula ortogonal*, tem-se, então

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \\ &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \{\mathcal{W}_\psi f\}(2^{-j}, 2^{-j}k) \psi_{j,k}, \end{aligned}$$

ou seja, tal como no caso contínuo, uma mesma fórmula expressa a decomposição e a reconstrução de f .

A primeira questão que se coloca, naturalmente, é a de saber se existirá alguma base ortonormada de $L^2(\mathbb{R})$ obtida a partir de translações e dilatações diádicas de uma função ψ , ou seja, se existirá alguma *ôndula ortogonal*. A resposta a esta questão é (felizmente!) afirmativa. O primeiro exemplo de uma tal base foi introduzido muito antes do aparecimento do conceito de *ôndula*, por A. Haar [Haa10]. A *ôndula básica* ψ^H é a função definida por

$$\psi^H := \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}, \quad (3.5)$$

análise multi-resolução

ou seja, a função dada por

$$\psi^H(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & \text{outros valores de } t. \end{cases} \quad (3.6)$$

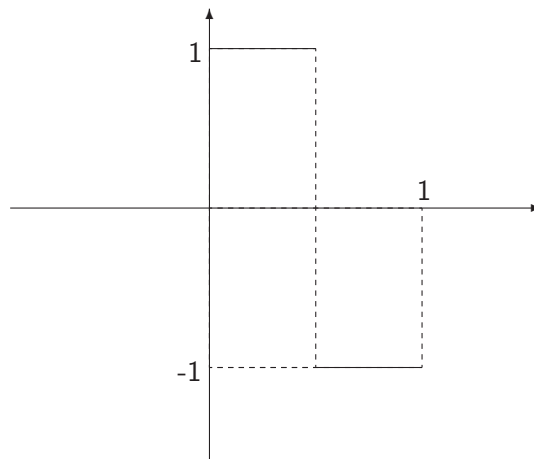


Figura 3.1: Ôndula de Haar

A demonstração de que $\psi_{j,k}^H$ é um conjunto ortonormado é muito simples. A demonstração de que se trata de um conjunto completo, será feita posteriormente.

A base de Haar não é uma base muito apropriada para a representação de funções. Basta notar que os elementos desta base não são sequer funções contínuas. Dada uma função f razoavelmente suave, a sua expansão na base de Haar

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}^H$$

converge muito lentamente. Em geral, para obter uma aproximação com precisão razoável, é necessário tomar um grande número de termos na expansão “truncada”

$$f = \sum_{j=-M}^M \sum_{k=-N}^N \alpha_{j,k} \psi_{j,k}^H.$$

Além disso, a função ψ^H , tendo embora uma ótima localização no tempo (ψ^H tem suporte compacto), tem uma má localização na frequência, pois $|\widehat{\psi^H}(\xi)|$ decai apenas como $|\xi|^{-1}$; veja, a este propósito, o Exercício 2.5.

Outro exemplo de uma ôndula ortogonal, cujas propriedades de localização tempo-frequência são como que complementares das da ôndula de Haar, é a chamada ôndula de Shannon ψ^S , cuja transformada de Fourier é dada por:

$$\widehat{\psi^S}(\xi) := \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\xi/2}, & \pi \leq |\xi| \leq 2\pi, \\ 0, & \text{outros valores de } \xi. \end{cases} \quad (3.7)$$

Esta ôndula tem boas propriedades de localização na frequência, mas má localização no tempo.

Na década de 80², foram construídas várias ôndulas ortogonais que têm simultaneamente as melhores características da base de Haar e da base de Shannon, isto é, que são bem localizadas no tempo e na frequência, sendo, além disso, funções suaves. Como exemplo, podemos citar as ôndulas descobertas por J. O. Strömberg [Str81], Y. Meyer [Mey86b]³, G. Battle [Bat87] e P. G. Lemarié [Lem88]. Estas primeiras construções de bases ortonormadas de ôndulas parecem um pouco *milagrosas*; o próprio Meyer afirma: “*I found my wavelets by trial and error; there was no underlying concept.*” Em finais de 1986, Stéphane Mallat, na altura um jovem estudante de pós-graduação a trabalhar em problemas de visão por computador, tendo lido o artigo de Meyer [Mey86b], apercebeu-se da relação existente entre as ôndulas descobertas por esse autor e certas técnicas usadas em processamento de imagem, nomeadamente os chamados *algoritmos em pirâmide*. Conseguiu, então, convencer Meyer a trabalhar consigo para tentar uma melhor compreensão dessas semelhanças. Da colaboração dos dois, surge um artigo importante [Mal89]⁴, que põe em evidência a relação existente entre resultados de ôndulas e muitas das técnicas anteriormente utilizadas em

²Do século XX!

³Curiosamente, as ôndulas descobertas por Meyer foram construídas quando ele tentava demonstrar a não existência de funções suaves e bem localizadas no tempo e frequência que pudessem originar uma base ortonormada de $L^2(R)$ por dilatações e translações; embora uma função com tais propriedades tivesse já sido construída por Strömberg quatro anos antes, Meyer não tinha, na altura, conhecimento da sua existência, pois desconhecia o artigo de Strömberg. De facto, a base de ôndulas de Strömberg foi construída no contexto de Análise Funcional (estudo de certos espaços de funções) e passou totalmente despercebida na comunidade das ôndulas até 1988.

⁴Este artigo foi publicado apenas sob o nome de Mallat, por insistência de Meyer.

análise multi-resolução

diversas áreas (nomeadamente, em processamento de sinal e imagem), permitindo dar-lhes uma base matemática mais sólida. Nesse artigo, é introduzido o conceito de *análise multi-resolução (AMR)*. Trata-se de uma estrutura que permite dar uma explicação satisfatória de todas as construções de ôndulas ortogonais até aí encontradas, fornecendo também uma ferramenta indispensável à construção de novas bases de ôndulas. Outro resultado importante da introdução do conceito de análise multi-resolução é o aparecimento de algoritmos computacionais muito eficientes para o cálculo da decomposição e reconstrução de um sinal numa base de ôndulas (as chamadas *transformadas rápidas* com ôndulas).

3.2 Análise multi-resolução (AMR)

Apresentamos, agora, o conceito de análise multi-resolução de $L^2(\mathbb{R})$ tal como foi introduzido por Mallat e Meyer. A ideia chave é considerar aproximações sucessivas para uma função f , as quais correspondem a diferentes *níveis de resolução*, e ter em conta o *pormenor* que é necessário adicionar para se passar de um determinado nível de resolução para o nível seguinte.

Definição 3.2 Uma análise multi-resolução (AMR) $\{V_j, \phi\}$ de $L^2(\mathbb{R})$ consiste numa sequência $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de subespaços fechados de $L^2(\mathbb{R})$ e numa função ϕ associada, chamada função escala, satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\text{AMR1} \quad V_j \subset V_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$\text{AMR2} \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$$

$$\text{AMR3} \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$$

$$\text{AMR4} \quad v(\cdot) \in V_j \iff v(2\cdot) \in V_{j+1}$$

AMR5 As translações inteiras de ϕ formam uma base ortonormada do espaço V_0 , isto é, $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormada de V_0 .

Nota A noção que demos aqui de AMR é referida, por vezes, como AMR *ortogonal*, pela exigência de que $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ constitua uma base *ortonormada* de V_0 , chamando alguns autores AMR

a uma sequência de sub-espços que satisfaça as condições *AMR1* – *AMR4* e a condição (menos exigente do que *AMR5*): $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base de Riesz de V_0 .

Antes de vermos alguns exemplos de AMR, façamos algumas observações sobre esta definição.

Observações

1. As propriedades *AMR2* e *AMR3* podem expressar-se em termos dos operadores P_j de projecção ortogonal nos espaços V_j , do seguinte modo: para toda a função $f \in L^2(\mathbb{R})$, tem-se

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} P_j f = f.$$

2. Uma consequência imediata das propriedades *AMR4* e *AMR5* é que

$$f \in V_j \iff f(\cdot - 2^{-j}k) \in V_j.$$

Por esta razão, os espaços V_j são ditos *espaços invariantes por translação*.

3. De acordo com *AMR4*, cada espaço V_j é uma versão de V_0 numa escala diferente. A projecção $P_j f$ pode, assim, ser considerada como uma aproximação de f na escala 2^{-j} .
4. Para cada j , as funções $\phi_{j,k}(t) := 2^{j/2}\phi(2^j t - k)$ formam uma base ortonormada do espaço V_j . Note-se que todas as funções $\phi_{j,k}$ têm a mesma norma $\|\phi_{j,k}\| = \|\phi\| = 1$.

Na prática, por razões computacionais, será de desejar que a função escala ϕ tenha uma certa suavidade e seja bem localizada.⁵ A este propósito, introduzimos a seguinte definição.

Definição 3.3 (AMR r -regular) Uma função $g \in L^2(\mathbb{R})$ diz-se r -regular ($r \in \mathbb{N}_0$), se satisfizer:

(i) $g \in C^{r-1}$

(ii) a derivada de ordem r de g existe (q.s.)

⁵Naturalmente, a suavidade e decaimento de ϕ são propriedades mutuamente exclusivas; por exemplo, se ψ tem decaimento exponencial não pode ser de classe C^∞ .

análise multi-resolução

(iii) para todo o k tal que $0 \leq k \leq r$ e para todo o $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$|g^{(k)}(t)| \leq C(1 + |t|)^{-n},$$

onde $C = C(k, n)$.

Uma AMR $\{(V_j), \phi\}$ diz-se r -regular se a função escala ϕ for r -regular.

Nota No que se segue, a não ser que tal seja explicitamente referido, ao falarmos de uma análise multi-resolução, supo-la-emos sempre regular (isto é, pelo menos 0-regular).

3.2.1 Exemplos de AMR

Vejamos alguns exemplos simples de análises multi-resolução.

• AMR de Haar

Seja V_0 o espaço das funções de $L^2(\mathbb{R})$ que são constantes em cada intervalo $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$ e, para cada $j \in \mathbb{Z}$, seja V_j o espaço das funções constantes em cada um dos intervalos $[k/2^j, (k+1)/2^j)$. É imediato reconhecer que $V_j \subset V_{j+1}$, $\forall j \in \mathbb{Z}$. Além disso, é bem sabido que toda a função de $L^2(\mathbb{R})$ pode ser arbitrariamente bem aproximada por uma função de V_j , desde que j seja suficientemente grande, o que significa que se verifica AMR3.⁶

Por outro lado, se uma função $v \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$, então v deverá ser constante em cada um dos intervalos $(-\infty, 0)$ e $[0, \infty)$. Mas, pertencendo v a $L^2(\mathbb{R})$, v deverá, então, ser a função nula. Assim, verifica-se AMR2. Pela forma como definimos os espaços V_j , a condição AMR4 verifica-se naturalmente. Resta, então, encontrar uma função ϕ cujas translações inteiras formem uma base ortonormada de $L^2(\mathbb{R})$. Seja $\phi^H(t)$ a função característica do intervalo $[0, 1)$. Facilmente se verifica que $\{\phi^H(t-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormado. Basta ter em conta que duas funções $\phi^H(t-k)$ e $\phi^H(t-k')$, com $k \neq k'$ nunca se sobrepõem e que $\|\phi^H\| = 1$. Além disso, toda a função v de V_0 pode, naturalmente, escrever-se como

$$v(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \phi^H(t-k),$$

⁶De facto, é um resultado bem conhecido que as funções em escada são densas em $L^2(\mathbb{R})$; veja, e.g. [Pri97, p.215]. Pode também mostrar-se facilmente que as funções em escada com "nós" nos pontos diádicos $2^j k$; $j, k \in \mathbb{Z}$ são densas no conjunto das funções em escada.

pelo que $\{\phi^H(t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ constitui, de facto, uma base ortonormada de V_0 .

Veremos, mais à frente, por que razão esta análise multi-resolução está associada ao nome de Haar.

• **AMR de Shannon**

Seja V_0 o subespaço de $L^2(\mathbb{R})$ formado pelas funções de banda limitada (de largura de banda 1/2), isto é

$$V_0 = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp } f \subseteq [-\pi, \pi]\} \tag{3.8}$$

e, para $j \in \mathbb{Z}$, seja V_j obtido de V_0 por dilatação, isto é

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp } f \subseteq [-2^j\pi, 2^j\pi]\}. \tag{3.9}$$

É imediato reconhecer que as propriedades *AMR1*, *AMR2* e *AMR4* se verificam. A propriedade *AMR3* é também fácil de verificar. De facto, dada $f \in L^2(\mathbb{R})$, sejam f_j as funções tais que $\widehat{f}_j(\xi) = \widehat{f}\chi_{[-2^j\pi, 2^j\pi]}$. Então, temos $\|\widehat{f}_j - \widehat{f}\| \rightarrow 0$, quando $j \rightarrow \infty$, pelo que, atendendo à identidade Parseval, $\|f_j - f\| \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$.

O resultado seguinte é (uma versão simplificada do) importante Teorema de Shannon:

Teorema 3.1 (Teorema de Shannon) *Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ é tal que $\text{supp } \widehat{f} \subseteq [-\Omega, \Omega]$, então f é contínua e admite a seguinte expansão*

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k\pi}{\Omega}\right) \frac{\text{sen}(\Omega t - k\pi)}{\Omega t - k\pi} \tag{3.10}$$

Em particular, se $\Omega = \pi$, tem-se

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \frac{\text{sen } \pi(t - k)}{\pi(t - k)}. \tag{3.11}$$

Demonstração: Fazemos a demonstração para o caso $\Omega = \pi$, por simplicidade. Começamos por notar que, sendo $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ e de suporte compacto, então $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, o que garante a continuidade de f . Mas sendo $\widehat{f} \in L^2[-\pi, \pi]$, ela admite uma expansão em série de Fourier dada por

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\pi},$$

análise multi-resolução

onde os coeficientes de Fourier são dados por

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(\xi) e^{ik\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ik\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(k). \end{aligned}$$

Pelo teorema da inversão de Fourier, temos

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi} \right) e^{i\xi t} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-k)\xi} d\xi \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \frac{\text{sen } \pi(t-k)}{\pi(t-k)}, \end{aligned}$$

como pretendíamos mostrar.⁷ □

O Teorema de Shannon mostra, assim, que as translações inteiras da função ϕ^S definida por

$$\phi^S(t) = \frac{\text{sen } \pi t}{\pi t} \quad (3.12)$$

formam uma base do espaço V_0 . Facilmente se verifica que a transformada de Fourier da função ϕ^S é dada por $\widehat{\phi^S}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-\pi, \pi]}$ e que $\|\phi^S\| = 1$. Por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned} \langle \phi^S(t), \phi^S(t-k) \rangle &= \langle \widehat{\phi^S}(\xi), e^{-ik\xi} \widehat{\phi^S}(\xi) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi^S}(\xi) e^{ik\xi} \overline{\widehat{\phi^S}(\xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\xi} d\xi = \frac{\text{sen } k\pi}{k\pi} = 0, \quad k \neq 0, \end{aligned}$$

⁷Na demonstração anterior a troca do integral com a soma está "a priori" garantida apenas se $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k e^{-ik\xi}| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < \infty$; tal é o caso, por exemplo, se apenas um número finito de coeficientes c_k são não nulos. Usando um argumento de continuidade, pode verificar-se que o resultado final é, de facto, válido para qualquer função de banda limitada.

pelo que $\{\phi^S(t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormado. Temos, então, que $((V_j), \phi^S)$ é uma análise multi-resolução. Esta é conhecida como *AMR de Shannon*.

• **Alguns resultados sobre splines**

Antes de introduzirmos o próximo exemplo de AMR, façamos uma pequena revisão de alguns resultados sobre funções *spline*. Recordemos que uma função S se diz um *spline* de grau $n \in \mathbb{N}_0$ (ordem $n + 1$), com nós numa sequência de pontos $t_i \in \mathbb{R}$, ordenados por ordem crescente, se, em cada intervalo $I_k := [t_k, t_{k+1})$, S for um polinómio de grau não superior a n e se, além disso, $S \in C^{n-1}(\mathbb{R})$. Quando os nós são os números inteiros $t_k = k, k \in \mathbb{Z}$, os splines são ditos *splines cardinais*. De entre os splines cardinais, têm especial importância as funções B-spline de grau n que passamos a definir.

Definição 3.4 As funções $B_n(t)$ definidas, para $n \in \mathbb{N}_0$, por

$$B_0(t) = \chi_{[0,1)}, \tag{3.13}$$

$$B_n(t) = (B_{n-1} * B_0)(t), \quad n \geq 1, \tag{3.14}$$

são chamadas *B-splines cardinais de grau n* .

O seguinte teorema resume algumas das principais propriedades das funções B-spline. A demonstração destas propriedades pode ser vista em [De 78], [Sch81] e [Chu92].

Teorema 3.2 Para $n \geq 1$, seja B_n o B-spline de grau n definido por (3.14). Então, tem-se:

- (i) $B_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$;
- (ii) $B_n|_{[k,k+1]}$ é um polinómio de grau n ;
- (iii) $\text{supp } B_n = [0, n + 1]$;
- (iv) $B_n(t) > 0$ para $0 < t < n$;
- (v) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} B_n(t - k) = 1$;
- (vi) $\int_{-\infty}^{\infty} B_n(t) dt = 1$;
- (vii) B_n pode ser calculado de B_{n-1} usando a seguinte identidade

$$B_n(t) = \frac{t}{n} B_{n-1}(t) + \frac{n+1-t}{n} B_{n-1}(t-1);$$

análise multi-resolução

(viii) B_n é uma função simétrica em relação ao ponto $t_n^* = \frac{n+1}{2}$;

(ix) $\{B_n(t-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base do espaço dos splines de grau n com nós nos inteiros.

• AMR de Splines de grau n (n -regular)

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere-se como espaço V_0 o espaço das funções de $L^2(\mathbb{R})$ que são splines cardinais de grau n , e sejam os espaços V_j construídos de V_0 por dilatações associadas a potências de 2. Assim, V_1 será, por exemplo, formado pelos splines de grau n com nós em todos os pontos da forma $k/2$, os elementos de V_2 são splines com nós no pontos $k/4$, etc. Não é difícil de mostrar que os espaços V_j satisfazem as propriedades *AMR1–AMR4*.⁸ Se consideramos a função $\phi(t) = B_n(t)$, sabemos (pela propriedade (ix)) que as suas translações inteiras formam uma base de V_0 . No entanto, elas não formam uma base ortonormada desse espaço, já que $\langle B_n(t-k), B_n(t-k') \rangle \neq 0$ para alguns valores de $k, k' \in \mathbb{Z}$. (Verifique!) Assim, $\{(V_j), \phi\}$ não é uma AMR, no sentido de AMR ortogonal. No entanto, pode provar-se que $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base de Riesz de V_0 . Iremos ver que é possível encontrar uma outra função ϕ^\perp (definida, a partir de ϕ , por um processo de ortogonalização) tal que $\{(V_j), \phi^\perp\}$ é uma AMR ortogonal. Esta análise multi-resolução é conhecida como AMR de splines de grau n .

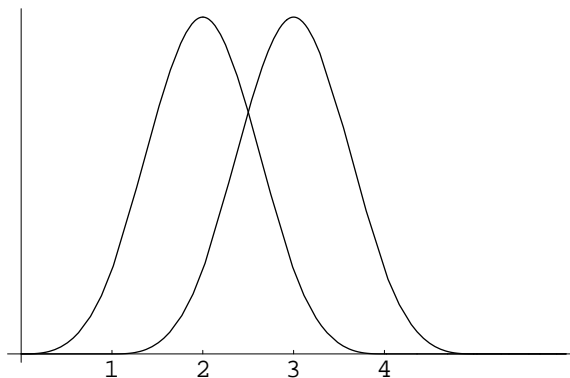


Figura 3.2: B-splines $B_3(t)$ e $B_3(t-1)$

⁸A única propriedade não imediata é *AMR3*. Esta é, no entanto, uma propriedade de aproximação conhecida dos splines.

3.2.2 Espaços de pormenor e ôndula ortogonal

Seja, então, $\{(V_j), \phi\}$ uma determinada análise multi-resolução de $L^2(\mathbb{R})$, que suporemos r -regular. É imediato concluir que, para cada $j \in \mathbb{Z}$, as funções

$$\phi_{j,k} := 2^{j/2} \phi(2^j \cdot -k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.15)$$

formam uma base ortonormada do espaço V_j . A colecção destas bases não forma, no entanto, uma base de $L^2(\mathbb{R})$, uma vez que existem nesse conjunto funções linearmente dependentes. Como surge, então, a base ortonormada de ôndulas associada a esta AMR?

Para cada j , consideremos o espaço W_j que é o complemento ortogonal de V_j em V_{j+1} , ou seja, que satisfaz

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad \text{e} \quad V_j \perp W_j. \quad (3.16)$$

Este espaço é usualmente designado por *espaço de pormenor*, por conter a informação que é necessário adicionar aos elementos do espaço mais “grosseiro” V_j para obter elementos do espaço mais “fino” V_{j+1} .

Atendendo a que os espaços V_j estão encaixados, podemos concluir de imediato que os espaços W_j são mutuamente ortogonais; com efeito, se $j > k$ (isto é, se $j = k + p, p > 0$), então

$$W_k \subset V_{k+1} \subset \dots \subset V_{k+p} = V_j$$

e, como $W_j \perp V_j$, segue-se que $W_j \perp W_k$. Temos, então,

$$\begin{aligned} V_j &= V_{j-1} \overset{\perp}{\oplus} W_{j-1} = V_{j-2} \overset{\perp}{\oplus} W_{j-2} \overset{\perp}{\oplus} W_{j-1} \\ &= \dots = V_{j-k} \overset{\perp}{\oplus} W_{j-k} \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} W_{j-2} \overset{\perp}{\oplus} W_{j-1}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde o símbolo $\overset{\perp}{\oplus}$ designa soma ortogonal. Das propriedades *AMR2* e *AMR3*, podemos então concluir que

$$L^2(\mathbb{R}) = \overset{\perp}{\bigoplus}_{j \in \mathbb{Z}} W_j, \quad (3.18)$$

ou seja, que $L^2(\mathbb{R})$ admite uma decomposição como soma dos subespaços mutuamente ortogonais W_j . Assim, se dispusermos de uma base ortonormada para cada um desses subespaços, a colecção dessas bases formará uma base ortonormada de $L^2(\mathbb{R})$. Mas, como

análise multi-resolução

facilmente se verifica, os espaços W_j herdam, dos respectivos V_j , a propriedade de dilatação AMR4, ou seja,

$$w \in W_0 \iff w(2^j \cdot) \in W_j.$$

Suponhamos, de momento, que é possível, à semelhança do que se passa para V_0 , encontrar uma base ortonormada de W_0 formada por translações inteiras de uma certa função ψ . É então claro que a família $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\} = \{2^{j/2}\psi(2^j \cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormada do espaço W_j , sendo, portanto, o conjunto $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ uma base de $L^2(\mathbb{R})$. Por outras palavras, qualquer função ψ cujas translações inteiras formem uma base ortonormada do espaço W_0 , complemento ortogonal de V_0 em V_1 , será uma ôndula ortogonal.

Acontece que, dada uma AMR, é sempre possível encontrar tal função ψ . Além disso, a ôndula ψ pode ser obtida explicitamente a partir da função escala ϕ . (Por esta razão, a função escala ϕ é, por vezes, chamada ôndula pai).

Vamos indicar os passos principais da demonstração do resultado anterior, aproveitando também para estabelecer certos resultados que serão importantes posteriormente. Uma ferramenta essencial na demonstração será a utilização da transformada de Fourier.

• Caracterização do espaço V_0

Como $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormada do subespaço V_0 , uma função f estará nesse subespaço se e só se existir uma sequência de escalares $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi(t - k). \quad (3.19)$$

(Note-se que os coeficientes α_k são dados por $\alpha_k = \langle f, \phi(\cdot - k) \rangle$.)

Tomando a transformada de Fourier de ambos os lados da equação anterior e tendo em conta as propriedades dessa transformada (nomeadamente as propriedades (1.66) e o facto do operador transformada de Fourier ser um operador linear contínuo), virá

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ik\xi} \hat{\phi}(\xi). \quad (3.20)$$

Como $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, a série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ik\xi}$ converge, para quase todo o ξ , para um função $F(\xi) \in L^2[0, 2\pi]$. Assim, vemos que $f \in V_0$ se e só se existir uma função $F(\xi) \in L^2[0, 2\pi]$ tal que

$$\hat{f}(\xi) = F(\xi) \hat{\phi}(\xi). \quad (3.21)$$

Note-se que se tem

$$\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\xi)|^2 d\xi.$$

• **Caracterização do espaço V_1**

De modo análogo ao anterior, como $\{\phi_{1,k} = \sqrt{2}\phi(2 \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormada de V_1 , temos que uma função g está em V_1 se e só se admitir uma expansão da forma

$$g(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k \phi(2t - k),$$

para uma certa sequência de escalares $(\beta_k) \in l^2(\mathbb{Z})$. Tomando a transformada de Fourier de ambos os lados da equação anterior, vem

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k e^{-ik\xi/2} \widehat{\phi}(\xi/2) \quad (3.22)$$

Assim, g está em V_1 se e só se existir uma função $G(\xi) \in L^2[0, 2\pi]$ tal que

$$\widehat{g}(\xi) = G(\xi/2) \widehat{\phi}(\xi/2). \quad (3.23)$$

A função $G(\xi)$ é, naturalmente, dada por

$$G(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k e^{-ik\xi}, \quad (3.24)$$

em que

$$\beta_k = \langle g, \phi_{1,k} \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \phi(2t - k) dt. \quad (3.25)$$

Tem-se também

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(\xi)|^2 d\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_k \right|^2 = \frac{1}{2} \|g\|^2. \quad (3.26)$$

• **Equação de dupla escala**

Como $V_0 \subset V_1$, qualquer função de V_0 admite também uma expansão em termos da base $\{\phi_{1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ de V_1 . Em particular, a própria função escala ϕ admitirá uma expansão da forma atrás referida, isto é, ter-se-á

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{1,k}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k), \quad (3.27)$$

análise multi-resolução

onde os coeficientes h_k são dados por

$$h_k = \langle \phi, \phi_{1,k} \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \overline{\phi(2t-k)} dt. \quad (3.28)$$

A equação (3.27) é chamada equação de *dilatação*, de *refinamento* ou de *dupla escala* para a função escala ϕ e a sequência $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ é chamada *filtro* da função escala ϕ .

Nota Se ϕ for regular, pode mostrar-se que os coeficientes h_k satisfarão a seguinte propriedade de decaimento

$$|h_k| \leq C_m (1 + |k|)^{-m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}; \quad (3.29)$$

veja, e.g. [CR95, p.13].

No espaço das frequências, a equação de dilatação tem, naturalmente o aspecto

$$\widehat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi/2} \widehat{\phi}(\xi/2),$$

ou seja,

$$\widehat{\phi}(\xi) = H(\xi/2) \widehat{\phi}(\xi/2), \quad (3.30)$$

onde $H(\xi)$ é a função periódica de período 2π definida por

$$H(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi} \quad (3.31)$$

A função $H(\xi)$ é chamada *função de transferência* do filtro $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ e desempenha um papel importante na teoria.

Nota Note-se que, sendo ϕ regular, a propriedade (3.29) de decaimento dos coeficientes h_k , isto é, dos coeficientes de Fourier de $H(\xi)$, implica que esta função está definida para todo o ξ e é, além disso, infinitamente derivável.

• Ortogonalidade

Estabelecemos agora, sob a forma de um lema, alguns resultados que expressam as condições de ortogonalidade, no espaço de Fourier.

Lema 3.1 *Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\{f(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormado;

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{-ij\xi} d\xi = \delta_{j,0}$;

(iii) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(\xi + 2k\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi}$ (para q.t. ξ).

Demonstração: Como

$$\begin{aligned} \langle f(t-k), f(t-l) \rangle &= \langle e^{-ik\xi} \widehat{f}(\xi), e^{-il\xi} \widehat{f}(\xi) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(l-k)\xi} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

concluimos, de imediato que

$$\begin{aligned} \langle f(t-k), f(t-l) \rangle &= \delta_{k,l} \\ \iff \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-l)\xi} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi &= \delta_{k,l} = \delta_{k-l,0}, \end{aligned}$$

o que estabelece a equivalência entre (i) e (ii). Para estabelecer a equivalência entre (ii) e (iii), começamos por notar que, sendo $f \in L^2(\mathbb{R})$, será $|\widehat{f}(\xi)|^2 \in L^1(\mathbb{R})$, o que garante que a série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(\xi + 2k\pi)|^2$ converge para uma função do espaço $L^1[0, 2\pi]$, cujo j -ésimo coeficiente de Fourier é dado por

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{\mathcal{F}|\widehat{f}(u)|^2\}(j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(u)|^2 e^{-iju} du;$$

veja a fórmula da soma de Poisson. A equivalência entre (ii) e (iii) reconhece-se, então, facilmente. ⁹

• **Condição sobre $H(\xi)$**

Como $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormada de V_0 , podemos então concluir que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi}. \quad (3.32)$$

⁹A implicação (iii) \implies (ii) é imediata; a aplicação da fórmula da soma de Poisson prova que, se (ii) se verifica, então (iii) é válido no sentido das distribuições, ou seja, em S' . No entanto, é fácil de mostrar que, nesse caso, (iii) também se verifica q.s.

análise multi-resolução

Nota A regularidade que estamos a assumir para ϕ permite-nos escrever esta igualdade em todo o ponto $\xi \in \mathbb{R}$ e não apenas para q.t. ξ .

Mas, atendendo a (3.30), vem

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2k\pi) \right|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |H(\xi/2 + k\pi)|^2 \left| \widehat{\phi}(\xi/2 + k\pi) \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |H(\xi/2 + 2k\pi)|^2 \left| \widehat{\phi}(\xi/2 + 2k\pi) \right|^2 \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |H(\xi/2 + (2k+1)\pi)|^2 \left| \widehat{\phi}(\xi/2 + (2k+1)\pi) \right|^2. \end{aligned}$$

Como H é periódica de período 2π , vem, então

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2k\pi) \right|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |H(\xi/2)|^2 \left| \widehat{\phi}(\xi/2 + 2k\pi) \right|^2 \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |H(\xi/2 + \pi)|^2 \left| \widehat{\phi}(\xi/2 + (2k+1)\pi) \right|^2 \\ &= |H(\xi/2)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi/2 + 2k\pi) \right|^2 \\ &\quad + |H(\xi/2 + \pi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi/2 + (2k+1)\pi) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} |H(\xi/2)|^2 + \frac{1}{2\pi} |H(\xi/2 + \pi)|^2. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que a função $H(\xi)$ definida por (3.31) satisfaz

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 = 1. \quad (3.33)$$

- **Caracterização do espaço W_0**

O seguinte teorema caracteriza as funções pertencentes ao espaço W_0 .

Teorema 3.3 *Uma função g está em W_0 se e só se a sua transformada de Fourier se escreve como*

$$\widehat{g}(\xi) = e^{i\xi/2} \nu(\xi) \overline{H(\xi/2 + \pi)} \widehat{\phi}(\xi/2), \quad (3.34)$$

onde $\nu(\xi) \in L^2[0, 2\pi]$ e $H(\xi)$ é a função definida por (3.31).

Demonstração: Por definição do espaço W_0 , tem-se que $g \in W_0$ se e só se $g \in V_1$ e $g \perp V_0$, o que é, evidentemente, equivalente a ter-se $g \in V_1$ e $\langle g, \phi(\cdot - k) \rangle = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$. Mas,

$$\begin{aligned} \langle g, \phi(\cdot - k) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \overline{\phi(t - k)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\xi) \overline{\widehat{\phi}(\xi)} e^{ik\xi} d\xi \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} \widehat{g}(\xi) \overline{\widehat{\phi}(\xi)} e^{ik\xi} d\xi \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \widehat{g}(\xi + 2\pi l) \overline{\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)} e^{ik(\xi + 2\pi l)} d\xi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(\xi + 2\pi l) \overline{\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)} \right) e^{ik\xi} d\xi. \end{aligned}$$

¹⁰ Note-se que

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(\xi + 2\pi l) \overline{\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)} \right| d\xi \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(\xi)| |\widehat{\phi}(\xi)| d\xi = \|g\| \|\phi\| = \|g\|,$$

pelo que $\sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(\xi + 2\pi l) \overline{\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)}$ converge para uma função de $L^1[0, 2\pi]$; o resultado acima mostra que $\langle g, \phi(\cdot + k) \rangle$ é 2π vezes o k -ésimo coeficiente de Fourier dessa função. Assim, podemos dizer que $g \in W_0$ se e só se $g \in V_1$ e satisfizer

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(\xi + 2\pi l) \overline{\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)} = 0 \quad (\text{para q.t. } \xi). \quad (3.35)$$

Mas, como vimos, $g \in V_1$ se e só se (3.23) se verifica para uma certa função $G(\xi) \in L^2[0, 2\pi]$. Substituindo (3.23) e (3.30) em (3.35) obtém-se

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} G(\xi/2 + \pi l) \widehat{\phi}(\xi/2 + \pi l) \overline{H(\xi/2 + \pi l)} \overline{\widehat{\phi}(\xi/2 + \pi l)} = 0 \quad (\text{para q.t. } \xi).$$

¹⁰A troca do integral com a série justifica-se pela aplicação do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue: Seja $\{f_k\}$ uma família de funções tais que, para cada k , f_k é integrável e $f_k \rightarrow f$ (q.s) quando $k \rightarrow \infty$; suponhamos ainda que existe uma função F integrável e tal que $|f_k| \leq F, \forall k$. Então tem-se que f é integrável e $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k = \int \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \int f$.

análise multi-resolução

Reagrupando os termos para l par e l ímpar, usando a periodicidade de $G(\xi)$ e $H(\xi)$ e ainda a condição (3.32), obtém-se facilmente

$$G(\xi)\overline{H(\xi)} + G(\xi + \pi)\overline{H(\xi + \pi)} = 0 \quad (\text{para q.t. } \xi). \quad (3.36)$$

O argumento anterior é reversível, pelo que podemos afirmar que $g \in W_0$ se e só se $g \in V_1$ e (3.36) se verificar. Mas, (3.36) significa que o vector bi-dimensional $(G(\xi), G(\xi + \pi))$ é ortogonal ao vector $(H(\xi), H(\xi + \pi))$, para quase todo o ξ . Como a condição (3.33) garante que este vector é não nulo, ter-se-á

$$(G(\xi), G(\xi + \pi)) = \alpha(\xi)(\overline{H(\xi + \pi)}, -\overline{H(\xi)}) \quad (3.37)$$

para uma certa função complexa $\alpha(\xi) \in L^2[0, 2\pi]$. Substituindo ξ por $\xi + \pi$ na equação anterior e usando a periodicidade das funções envolvidas, vem

$$(G(\xi + \pi), G(\xi)) = \alpha(\xi + \pi)(\overline{H(\xi)}, -\overline{H(\xi + \pi)}) \quad (3.38)$$

Assim, tem-se que $G(\xi) = \alpha(\xi)\overline{H(\xi + \pi)}$ onde $\alpha(\xi) = -\alpha(\xi + \pi)$. Uma vez mais, o raciocínio é reversível, e podemos, portanto, concluir que $g \in W_0$ se e só se

$$\widehat{g}(\xi) = G(\xi/2)\widehat{\phi}(\xi/2) \quad (3.39)$$

com

$$G(\xi) = \alpha(\xi)\overline{H(\xi + \pi)}, \quad (3.40)$$

onde $\alpha(\xi) \in L^2[0, 2\pi]$ é uma função que satisfaz $\alpha(\xi) = -\alpha(\xi + \pi)$. Note-se que esta última condição é equivalente a dizer que a função $\beta(\xi) := e^{-i\xi}\alpha(\xi)$ é periódica de período π . Escrevendo $\nu(\xi) = \beta(\xi/2)$, vemos que (3.39) e (3.40) é equivalente à condição (3.34), o que conclui a demonstração do teorema.

• Caracterização da ôndula ortogonal

Como já dispomos de uma caracterização das funções de W_0 , vejamos agora que condição adicional uma função $\psi \in W_0$ deverá satisfazer para que $\{\psi(t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ constitua uma base ortonormada de W_0 , ou seja, para que ψ seja uma ôndula ortogonal.

Teorema 3.4 *Seja $\psi(t)$ uma função cuja transformada de Fourier satisfaz*

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} \nu(\xi) \overline{H(\xi/2 + \pi)} \widehat{\phi}(\xi/2), \quad (3.41)$$

onde $\nu(\xi) \in L^2[0, 2\pi]$. Então, $\{\psi(t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormada de W_0 se e só se $|\nu(\xi)| = 1$ (para q.t. ξ).

Demonstração: Para que $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ seja um sistema ortonormado bastará, de acordo com o Lema 3.1, verificar que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi} \quad (\text{para q.t. } \xi). \quad (3.42)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 &= |\nu(\xi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |H(\xi/2 + (k+1)\pi)|^2 |\widehat{\phi}(\xi/2 + k\pi)|^2 \\ &= |\nu(\xi)|^2 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |H(\xi/2 + (2l+1)\pi)|^2 |\widehat{\phi}(\xi/2 + 2l\pi)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l \in \mathbb{Z}} |H(\xi/2 + (2l+2)\pi)|^2 |\widehat{\phi}(\xi/2 + (2l+1)\pi)|^2 \right) \\ &= |\nu(\xi)|^2 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |H(\xi/2 + \pi)|^2 |\widehat{\phi}(\xi/2 + 2l\pi)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l \in \mathbb{Z}} |H(\xi/2)|^2 |\widehat{\phi}(\xi/2 + (2l+1)\pi)|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} |\nu(\xi)|^2 (|H(\xi/2)|^2 + |H(\xi/2 + \pi)|^2) \\ &= \frac{1}{2\pi} |\nu(\xi)|^2. \end{aligned}$$

Assim, é imediato concluir que $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ será um sistema ortonormado se e só se $|\nu(\xi)| = 1$ (para q.t. ξ).

Resta-nos, portanto, mostrar que $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é um sistema completo em W_0 . Seja U_0 o fecho do espaço gerado por $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$. Então,

$$\begin{aligned} g \in U_0 &\iff g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k \psi(t - k), \quad (\beta_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \\ &\iff \widehat{g}(\xi) = G(\xi) \widehat{\psi}(\xi), \quad G(\xi) \in L^2[0, 2\pi]. \end{aligned}$$

análise multi-resolução

Atendendo à forma de $\widehat{\psi}$ vem, então,

$$\begin{aligned} g \in U_0 &\iff \widehat{g}(\xi) = G(\xi)e^{i\xi/2}\nu(\xi)\overline{H(\xi/2 + \pi)}\widehat{\phi}(\xi/2) \\ &\iff \widehat{g}(\xi) = e^{i\xi/2}\gamma(\xi)\overline{H(\xi/2 + \pi)}\widehat{\phi}(\xi/2), \quad \gamma(\xi) = G(\xi)\nu(\xi) \\ &\iff g \in W_0 \quad (\text{Teorema (3.3)}). \end{aligned}$$

Vemos, assim, que as funções $\{\psi(t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ formam uma base do espaço W_0 , o que conclui a demonstração do teorema. \square

Observações:

1. Se pretendermos construir uma ôndula ortogonal usando o teorema anterior, precisamos, naturalmente, de fixar a função $\nu(\xi)$. A escolha mais simples é tomar $\nu(\xi) = 1$. Nesse caso, obtemos uma ôndula ψ dada por

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2}\overline{H(\xi/2 + \pi)}\widehat{\phi}(\xi/2), \quad (3.43)$$

isto é,

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2}(-1)^{k-1}\overline{h_{-k-1}}\phi(2t - k), \quad (3.44)$$

onde $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é o filtro da função escala ϕ , ou seja, onde h_k são os coeficientes da equação de dupla escala dados por (3.28). Outra escolha usual é $\nu(\xi) = -e^{-i\xi}$ o que corresponde a considerar

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{h_{1-k}} \phi(2t - k). \quad (3.45)$$

2. É importante referir que qualquer das ôndulas definida pelas fórmulas anteriores tem a mesma regularidade da função escala ϕ , isto é, a r -regularidade “propaga-se” à ôndula ψ . De facto, as propriedades de decaimento e suavidade de ψ deduzem-se facilmente do decaimento dos h_k imposto pela regularidade de ϕ ; veja. e.g. [Mey86b].
3. Pode provar-se também que a ôndula ψ associada, da forma com acabámos de descrever, a uma análise de multi-resolução r -regular tem os primeiros $r + 1$ momentos nulos, ou seja, satisfaz a seguinte condição de *oscilação*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^l \psi(t) dt = 0; \quad l = 0, \dots, r; \quad (3.46)$$

veja, e.g. [Mey86b]. Note-se que, para $r = 0$, esta é precisamente a condição de admissibilidade imposta a ψ para que possa ser usada como ôndula na transformada contínua. No espaço de Fourier, esta condição é equivalente a

$$\frac{d^l \widehat{\psi}}{d\xi^l}(0) = 0, \quad l = 0, \dots, r,$$

a qual se traduz na condição seguinte sobre a função de transferência H do filtro $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$

$$H^{(l)}(\pi) = 0, \quad l = 0, \dots, r. \quad (3.47)$$

A condição anterior significa que H tem um zero de ordem $r + 1$ na frequência π , ou seja, H deve factorizar-se da seguinte forma

$$H(\xi) = \left(\frac{1 + e^{i\xi}}{2} \right)^{r+1} p(\xi) \quad (3.48)$$

onde $p(\xi)$ é uma função 2π -periódica. É de salientar que a existência de $r + 1$ momentos nulos de ψ não é necessariamente garantia de r -regularidade desta função.

4. Pode também provar-se que se ϕ é a função escala de uma ARM r -regular, então V_0 “contém” os polinómios de grau não superior a r , isto é, existem coeficientes $\alpha_{n,k}$ tais que

$$t^n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{n,k} \phi(t - k), \quad n \leq r,$$

para todo o t , com $|\alpha_{n,k}| \leq C_n |k|^n$.

Exemplo 3.1 Ôndula de Haar

Retomemos o exemplo da AMR de Haar, cuja função escala é, como vimos, a função $\phi(t) = \chi_{[0,1]}$.

É imediato verificar que $\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t - 1)$, ou seja, que a sequência $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ da equação de refinamento de ϕ é, neste caso, dada por $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $h_k = 0$, $k \neq 0, 1$. Então, de acordo com o Teorema 3.4 (em particular, fazendo uso da fórmula (3.45)), a função $\psi(t)$ definida por $\psi(t) = \sqrt{2}(h_1 \phi(2t) - h_0 \phi(2t - 1)) = \phi(2t) - \phi(2t - 1)$ é uma ôndula ortogonal associada a esta AMR. Esta função é precisamente a ôndula de Haar ψ^H definida anteriormente.

análise multi-resolução

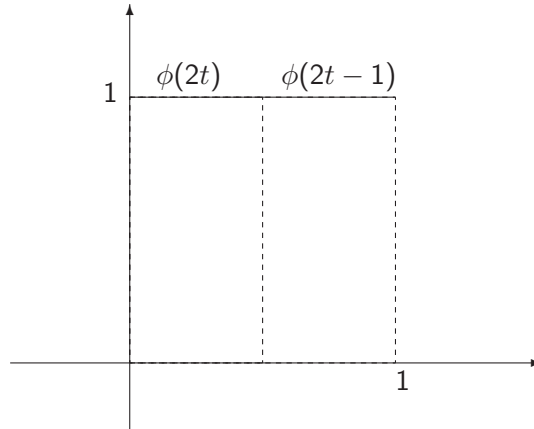


Figura 3.3: Função escala da AMR de Haar

Exemplo 3.2 Ôndula de Shannon

Consideremos agora o exemplo da AMR de Shannon. Relembremos que a função escala desta AMR é a função $\phi^S(t) = \frac{\text{sen } \pi t}{\pi t}$, a qual tem, como transformada de Fourier, $\widehat{\phi^S}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-\pi, \pi]}$. Da relação

$$\widehat{\phi^S}(2\xi) = H(\xi) \widehat{\phi^S}(\xi)$$

e tendo em conta a expressão de $\widehat{\phi^S}(\xi)$, de imediato concluímos que $H(\xi)$ é (a extensão 2π periódica da) função $\chi_{[-\pi/2, \pi/2]}$. Definindo, com uma escolha apropriada da função $\nu(\xi)$ no Teorema 3.4, a ôndula associada a esta AMR, ψ^S , por

$$\begin{aligned} \widehat{\psi^S}(\xi) &= e^{-i(\xi/2 + \pi)} \overline{H(\xi/2 + \pi)} \widehat{\phi^S}(\xi/2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\xi/2} (\chi_{[-2\pi, -\pi]} + \chi_{[\pi, 2\pi]}) \end{aligned} \quad (3.49)$$

vemos que essa ôndula tem a expressão

$$\psi^S(t) = \frac{\text{sen } \pi(t - 1/2) - \text{sen } 2\pi(t - 1/2)}{\pi(t - 1/2)} \quad (3.50)$$

A ôndula ψ^S definida por (3.49) é precisamente a ôndula de Shannon já apresentada anteriormente; veja (3.7).

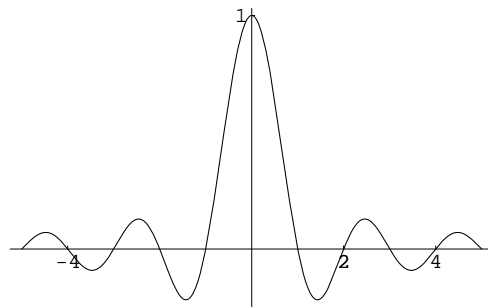


Figura 3.4: Função escala da AMR de Shannon

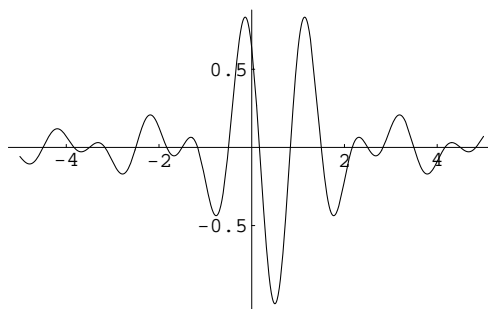


Figura 3.5: Ôndula de Shannon

Exemplo 3.3 Ôndulas de Meyer

Outro exemplo de ôndulas ortogonais cuja construção se baseia numa AMR são as ôndulas introduzidas por Meyer, a que já nos referimos. Uma discussão pormenorizada da construção destas ôndulas, com indicação da respectiva AMR, pode ser vista, por exemplo, em [Mey86a] ou em [Dau92]. Trata-se, de facto, de uma família de ôndulas, já que a sua construção envolve a escolha de uma função $\nu(\xi)$ com certas características. Estas ôndulas têm propriedades importantes: $\hat{\psi}$ tem suporte compacto (o que significa que ψ é infinitamente derivável) e $\hat{\psi}$ pode ser escolhida (dependendo da escolha da função ν) com qualquer grau de suavidade, isto é, é possível escolher $\hat{\psi} \in C^k$ para qualquer valor de k (incluindo $k = \infty$).

análise multi-resolução

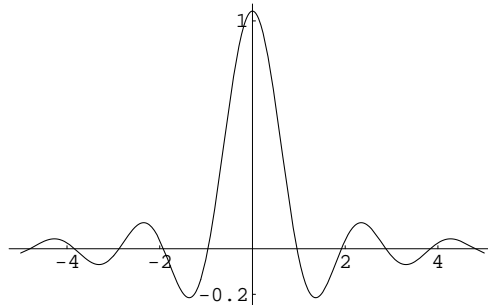


Figura 3.6: Uma função escala de Meyer

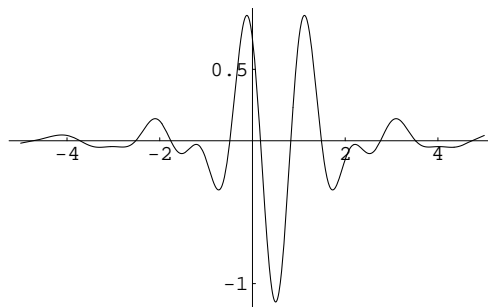


Figura 3.7: Uma ôndula de Meyer

3.2.3 Enfraquecimento da condição AMR5

Como já referimos, a condição *AMR5* imposta na definição de uma AMR, isto é, a exigência de que $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ constitua uma base ortonormada do espaço básico V_0 , pode ser enfraquecida. De facto, podemos substituir *AMR5* na definição de AMR por

AMR5' $\{\phi(t \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma *base de Riesz* de V_0 .

O seguinte argumento mostra como construir uma base ortonormada $\{\phi^\perp(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ do espaço V_0 , partindo de uma base de Riesz $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ (ou seja, como ortogonalizar essa base de Riesz). Recorde-se que, se $\phi(t \cdot -k)$ formam uma base de Riesz, então $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é um sistema completo em V_0 e existem constantes $A > 0$ e $B < \infty$

tais que

$$A \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(\cdot - k) \right\|^2 \leq B \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2, \quad (3.51)$$

para toda a sequência $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$. Começemos por mostrar que a condição (3.51) é equivalente à seguinte condição

$$\frac{A}{2\pi} \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi l) \right|^2 \leq \frac{B}{2\pi} \quad (\text{para q.t. } \xi). \quad (3.52)$$

Temos,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(\cdot - k) \right\|^2 &= \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi} \widehat{\phi}(\xi) \right\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi} \right|^2 |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{2l\pi}^{2(l+1)\pi} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi} \right|^2 |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi} \right|^2 |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 d\xi \\ &= \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi} \right|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi l) \right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela identidade de Parseval, tem-se

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi} \right|^2 d\xi = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2.$$

É imediato reconhecer que a condição (3.52) implica a condição (3.51). Para demonstrar a implicação contrária, procedemos do seguinte modo. Seja

$$\mathcal{B} := \left\{ \xi \in [0, 2\pi] : \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi l) \right|^2 > \frac{B}{2\pi} \right\} \quad (3.53)$$

e suponhamos que este conjunto não tem medida nula (isto é, tem medida positiva). Seja $g(\xi) := \chi_{\mathcal{B}}$ a função característica deste conjunto e sejam $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ os coeficientes da

análise multi-resolução

expansão em série de Fourier de $g(\xi)$, isto é,

$$g(\xi) = \chi_{\mathcal{B}}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi}$$

Tem-se, então

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(\cdot - k) \right\|^2 &= \int_{\mathcal{B}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 d\xi \\ &> \frac{B}{2\pi} |\mathcal{B}|, \end{aligned}$$

onde $|\mathcal{B}|$ designa a medida do conjunto \mathcal{B} . Por outro lado, tem-se

$$2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \|g(\xi)\|^2 = \|\chi_{\mathcal{B}}\|^2 = |\mathcal{B}|.$$

Assim, ter-se-á para esta sequência $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(\cdot - k) \right\|^2 > B \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2,$$

o que contradiz a desigualdade do lado direito de (3.51); a necessidade da outra desigualdade é demonstrada de modo análogo, considerando o conjunto

$$\mathcal{A} := \left\{ \xi \in [0, 2\pi] : \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{\phi}(\xi + 2\pi l) \right|^2 < \frac{A}{2\pi} \right\}.$$

Considere-se, então, a função $\phi^\perp \in L^2(\mathbb{R})$ cuja transformada de Fourier é definida por

$$\widehat{\phi^\perp}(\xi) := \frac{\widehat{\phi}(\xi)}{\left\{ 2\pi \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 \right\}^{1/2}} \quad (3.54)$$

É imediato concluir que esta função satisfaz

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi^\perp}(\xi + 2k\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi} \quad (\text{para q.t. } \xi). \quad (3.55)$$

o que garante, portanto, que $\{\phi^\perp(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é um sistema ortonormado.

Por outro lado, tem-se também que

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi^\perp(\cdot - k) \quad ((a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})) \\ &\iff \widehat{f}(\xi) = F(\xi) \widehat{\phi^\perp}(\xi) \quad (F(\xi) \in L^2[0, 2\pi]) \\ &\iff \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\xi) \left\{ \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2l\pi)|^2 \right\}^{-1/2} \widehat{\phi}(\xi), \end{aligned}$$

o que permite concluir facilmente que as funções $\phi(\cdot - k)$ e $\phi^\perp(\cdot - k)$ geram o mesmo subespaço V_0 de $L^2(\mathbb{R})$. Além disso, pode mostrar-se que ϕ^\perp terá exactamente as mesmas propriedades de regularidade que ϕ .

Pode ainda provar-se que, dada uma certa função $\theta \in V_0$ tal que $\{\theta(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ seja um conjunto ortonormado, esse conjunto será necessariamente uma base ortonormada de V_0 e a transformada de Fourier de θ terá de satisfazer

$$\widehat{\theta}(\xi) = \lambda(\xi) \widehat{\phi}(\xi), \quad (3.56)$$

para uma certa função $\lambda(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R})$, periódica de período 2π , e que satisfaz $|\lambda(\xi)| = 1$ (para q.t. ξ); reciprocamente, para qualquer função λ nas condições anteriores, uma função θ cuja transformada de Fourier satisfaça (3.56) é tal que as suas translações inteiras formam uma base ortonormada de V_0 ; veja, e.g. [Mey86b, p.27]. Isto significa que existe uma certa liberdade na escolha da função escala de uma AMR, sendo esta, no entanto, *única a menos da multiplicação por uma função 2π - periódica e unimodular*.¹¹

3.2.4 Ôndulas de Battle-Lemarié

As ôndulas construídas por Battle [Bat87] e Lemarié [Lem88], a que já fizemos referência, podem ser obtidas pelo processo de ortogonalização que acabámos de descrever, aplicado a uma AMR de splines.¹²

Como vimos, dada uma AMR de splines de grau n , é possível encontrar uma base do espaço V_0 (espaço esse constituído pelas funções de $L^2(\mathbb{R})$ que são splines de grau n com

¹¹Se a a AMR for regular, a função $\lambda(\xi)$ terá de ser uma função infinitamente derivável.

¹²Devemos notar, no entanto, que esta não foi a técnica utilizada por esses autores para a sua construção. Battle e Lemarié descobriram as mesmas ôndulas, trabalhando independentemente e por processos diferentes.

análise multi-resolução

nós nos inteiros) fazendo translações inteiras do B-spline $B_n(t)$ (obtido por n convoluções da função característica do intervalo $[0, 1)$). Como referimos, $B_n(t)$ tem suporte no intervalo $[0, n+1]$. É, por vezes, mais simples, trabalhar com o B-spline $\beta_n(t)$ de grau n com suporte em:

- $[-\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}]$, se n é ímpar
- $[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1]$, se n é par

Por outras palavras, $\beta_n(t)$ é obtido trasladando $B_n(t)$ de $-(n+1)/2$, se n é ímpar e de $-n/2$, se n é par.

É claro que, tal como $\{B_n(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$, também a família $\{\beta_n(t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base de V_0 , já que β_n se obtém de B_n por uma translação inteira. No entanto, como já referimos, para $n \geq 1$, as funções desta base não são ortogonais, não formando portanto uma base ortonormada desse espaço.

A transformada de Fourier de $B_0 = \beta_0 = \chi_{[0,1]}$ é dada por

$$\widehat{B}_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\xi/2} \frac{\text{sen}(\xi/2)}{\xi/2} \quad (3.57)$$

donde se segue de imediato, tendo em conta a definição de β_n e as propriedades da transformada de Fourier, que

$$\widehat{\beta}_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\kappa\xi/2} \left(\frac{\text{sen}(\xi/2)}{\xi/2} \right)^{n+1} \quad (3.58)$$

onde $\kappa = 0$, se n é ímpar, e $\kappa = 1$, se n é par.

Seja $F(\xi)$ a função definida por

$$\begin{aligned} F(\xi) &:= 2\pi \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\beta}_n(\xi + 2\pi l)|^2 \\ &= (2\text{sen}(\xi/2))^{2n+2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\xi + 2\pi l)^{2n+2}} \\ &= (\text{sen}(\xi/2))^{2n+2} S_n(\xi/2), \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde $S_n(\xi)$ é a função par π -periódica dada por

$$S_n(\xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\xi + l\pi)^{2n+2}} \quad (3.60)$$

A demonstração de que a função $F(\xi)$ dada por (3.59) satisfaz

$$A \leq F(\xi) \leq 1, \quad (3.61)$$

onde A é uma constante estritamente positiva (dependente de n , mas não de ξ) pode ser vista, por exemplo, em [Chu92, pp. 89-90].¹³ De (3.61), podemos então concluir que $\{\beta_n(t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base de Riesz, a qual poderá, portanto, ser ortogonalizada de acordo com processo descrito na secção anterior.

Note-se que a função $S_n(\xi)$ dada por (3.60) pode calcular-se recursivamente, do seguinte modo:

- $S_0(\xi) = \frac{1}{\text{sen}^2(\xi)}$;
- $S_n(\xi) = \frac{1}{2n(2n+1)} \frac{d^2}{d\xi^2} S_{n-1}(\xi) = \frac{1}{(2n+1)!} \frac{d^2}{d\xi^2} S_0(\xi)$

A demonstração deste resultado faz-se facilmente por indução sobre n , tendo em conta que S_{n-1} é definida por uma série absolutamente convergente e diferenciável, tendo-se

$$\frac{d^2}{d\xi^2} S_{n-1}(\xi) = 2n(2n+1) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\xi + k\pi)^{2n+2}} = 2n(2n+1) S_n(\xi).$$

Neste caso, ter-se-á para a função escala ortogonalizada (a que chamaremos simplesmente ϕ para não complicar as notações):

$$\widehat{\phi}(\xi) = \frac{\widehat{\beta}_n(\xi)}{\sqrt{F(\xi)}} = \frac{e^{-i\kappa\xi/2} 2^{n+1}}{\sqrt{2\pi}\xi^{n+1} \sqrt{S_n(\xi/2)}} \frac{\text{sen}^{n+1}(\xi/2)}{|\text{sen}^{n+1}(\xi/2)|} \quad (3.62)$$

Torna-se então simples obter a expressão da função de transferência $H(\xi)$ para a função escala ϕ . Uma vez que

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(2\xi) &= \frac{e^{-i\kappa\xi}}{\sqrt{2\pi}\xi^{n+1} \sqrt{S_n(\xi)}} \frac{\text{sen}^{n+1}(\xi/2) \cos^{n+1}(\xi/2)}{|\text{sen}^{n+1}(\xi/2) \cos^{n+1}(\xi/2)|} \\ &= \frac{e^{-i\kappa\xi/2} \sqrt{S_n(\xi/2)}}{2^{n+1} \sqrt{S_n(\xi)}} \frac{\cos^{n+1}(\xi/2)}{|\cos^{n+1}(\xi/2)|} \widehat{\phi}(\xi), \end{aligned}$$

¹³A demonstração de que $F(\xi) \leq 1$ é muito simples; bastará atender ao facto de $|\widehat{\beta}_n(\xi)| = (2\pi)^{n/2} |\widehat{B}_0(\xi)|^{n+1}$ e ter em conta que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{B}_0(\xi + 2k\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi}$, já que $\{B_0(t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é um sistema ortonormado.

análise multi-resolução

podemos concluir que

$$H(\xi) = \frac{e^{-i\kappa\xi/2} \sqrt{S_n(\xi/2)} \cos^{n+1}(\xi/2)}{2^{n+1} \sqrt{S_n(\xi)} |\cos^{n+1}(\xi/2)|}. \quad (3.63)$$

Assim, a transformada de Fourier de uma ôndula ortogonal associada à função escala ϕ dada por (3.62)¹⁴ será

$$\widehat{\psi}(\xi) = -\frac{e^{-i\xi/2} 2^{n+1}}{\sqrt{2\pi} \xi^{n+1}} \frac{\sqrt{S_n(\xi/4 + \pi/2)}}{\sqrt{S_n(\xi/4)} \sqrt{S_n(\xi/2)}} \quad (3.64)$$

Esta ôndula ortogonal assim obtida é precisamente a ôndula de Battle-Lemarié de grau n .

É importante notar que sendo $F(\xi)$ um polinómio trigonométrico, a função $(F(\xi))^{-1/2}$ terá uma expansão em série de Fourier com um número infinito de termos. Isto significa, atendendo a (3.62), que, contrariamente à função $\beta_n(t)$, a função escala normalizada $\phi(t)$ será uma função cujo suporte não é compacto. No entanto, pode provar-se que a função escala ϕ e a correspondente ôndula ψ têm decaimento exponencial; veja, e.g. [Dau92, p.151].

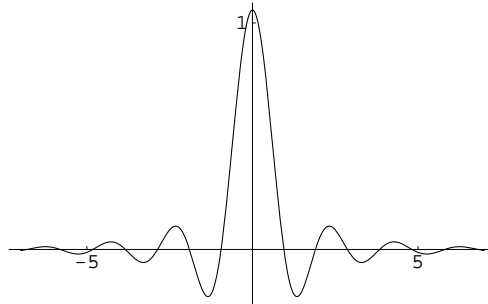


Figura 3.8: Função escala de Battle-Lemarié ($n = 5$).

3.2.5 Construção de uma AMR partindo da função escala

Já vimos como, partindo de uma AMR com função escala ϕ , conseguimos encontrar uma base ortonormada de $L^2(\mathbb{R})$ formada por ôndulas $\psi_{j,k}$ obtidas por dilatações e translações

¹⁴Correspondendo à escolha da função $\nu(\xi) = -e^{-i\xi}$, na aplicação do Teorema 3.4.

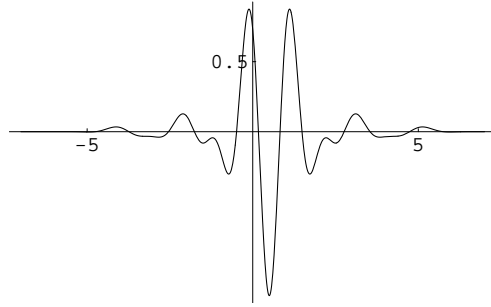


Figura 3.9: Ôndula de Battle-Lemarié ($n = 5$).

de uma “ôndula-mãe” ψ , definida a partir de ϕ . É natural tentar construir uma AMR partindo de uma dada função ϕ que sirva de função escala. O espaço básico V_0 será obtido a partir das translações inteiras de ϕ , isto é, será (o fecho em $L^2(\mathbb{R})$) do espaço gerado por $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ e os outros subespaços V_j serão obtidos de V_0 por simples mudança de escala. A questão natural que se coloca é qual o tipo de condições que ϕ deve satisfazer para garantir que $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ seja uma AMR de $L^2(\mathbb{R})$. É claro que a primeira condição a impor é que $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ constitua um sistema ortonormado. Além disso, interessar-nos-á que ϕ seja, pelo menos, 0-regular ou seja, que satisfaça

$$|\phi(t)| \leq C_m(1 + |t|)^{-m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (3.65)$$

Esta última condição implica que $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, pelo que $\widehat{\phi}(\xi)$ será uma função contínua. Exigir a ortonormalidade das translações inteiras de ϕ é, como vimos, equivalente a exigir que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi}. \quad (3.66)$$

Definamos, então, os espaços V_j como sendo o fecho, em $L^2(\mathbb{R})$, dos espaços gerados pelas funções $\{\phi_{j,k} := 2^{j/2}\phi(2^j \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$, isto é, sejam

$$V_j := \overline{[\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}]}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (3.67)$$

O teorema seguinte estabelece condições que garantem que $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ é uma análise multi-resolução.

análise multi-resolução

Teorema 3.5 *Seja ϕ uma função de $L^2(\mathbb{R})$ que satisfaz (3.65) e (3.66), e sejam V_j os subespaços de $L^2(\mathbb{R})$ definidos por (3.67). Então:*

- (i) $V_j \subset V_{j+1}$ (para todo o $j \in \mathbb{Z}$) se e só se existir uma função $H(\xi)$, periódica de período 2π e infinitamente derivável, tal que

$$\widehat{\phi}(\xi) = H(\xi/2)\widehat{\phi}(\xi/2). \quad (3.68)$$

- (ii) $\overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbb{R})$ se e só se ϕ satisfizer

$$|\widehat{\phi}(0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt \right| = 1. \quad (3.69)$$

- (iii) As restantes condições AMR2 e AMR4 – AMR5 de uma AMR são satisfeitas.

Assim, se se verificarem as condições (3.68) e (3.69), os espaços V_j constituem uma AMR regular de $L^2(\mathbb{R})$.

Demonstração: A demonstração pode ser vista em [CR95, pp.12 e segs]. □

Observações

1. Como já referimos, a função escala ϕ que define uma AMR regular está definida a menos do produto da sua transformada de Fourier $\widehat{\phi}$ por uma função periódica de período 2π , infinitamente diferenciável e unimodular. Assim, assumiremos sempre que ϕ é escolhida de forma a satisfazer

$$\widehat{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1. \quad (3.70)$$

2. A função $H(\xi)$ que aparece na equação de refinamento (3.68) é, naturalmente, a função definida por (3.31), isto é,

$$H(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi}$$

com h_k os coeficientes que exprimem a função ϕ na base ortonormada $\{\phi_{1k} : k \in \mathbb{Z}\}$ de V_1 , isto é,

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{1k}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k). \quad (3.71)$$

3. De (3.68) vem, em particular, para $\xi = 0$,

$$\widehat{\phi}(0) = H(0)\widehat{\phi}(0).$$

Como $\widehat{\phi}(0) = 1$, concluímos de imediato que deverá ser

$$H(0) = 1, \quad (3.72)$$

ou seja, que os coeficientes h_k têm de satisfazer

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2}. \quad (3.73)$$

4. Por outro lado, como $H(\xi)$ tem de satisfazer a equação (3.33),¹⁵ virá

$$|H(0)|^2 + |H(\pi)|^2 = 1,$$

donde se segue, de imediato, que

$$H(\pi) = 0. \quad (3.74)$$

(Note-se que este é o caso $r = 0$ da equação (3.47)). Esta última equação significa que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_k = 0. \quad (3.75)$$

5. As condições (3.73) e (3.75) equivalem a afirmar que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3.76)$$

6. Se ϕ for uma função escala de uma AMR regular, então ϕ satisfaz necessariamente a equação de dupla escala (3.27), a qual pode ser iterada, tendo-se, portanto

$$\widehat{\phi}(\xi) = \prod_{k=1}^n H(2^{-k}\xi)\widehat{\phi}(2^{-n}\xi).$$

¹⁵A continuidade de $\widehat{\phi}$ implica que esta equação é válida em todo o ponto ξ e não apenas q.s.

análise multi-resolução

Como $\widehat{\phi}(0) = 1$ e $\widehat{\phi}$ é contínua em zero, $\widehat{\phi}(\xi)$ pode, então, expressar-se pelo produto infinito

$$\widehat{\phi}(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} H(2^{-k}\xi) \quad (3.77)$$

Nota A regularidade da função $H(\xi)$ em zero é suficiente para garantir a convergência pontual do produto infinito do lado direito de (3.77); veja, e.g. [Dau92, p.175].

A fórmula (3.77) relaciona a função escala de uma AMR com a função transferência do respectivo filtro. Põe-se naturalmente a questão de saber se, reciprocamente, a toda a função $H(\xi)$, periódica de período 2π , infinitamente derivável e que satisfaça (3.33), (3.72) e (3.74) está sempre associada, através da fórmula (3.77), uma função escala de uma AMR regular? A resposta é que *nem sempre*, embora quase sempre . . . Condições necessárias e suficientes (um pouco técnicas) para que tal aconteça podem ser vistas, e.g. em [CR95, pp.39-52]. Uma condição suficiente, embora não necessária, mas que é muitas vezes satisfeita na prática, é que $H(\xi) \neq 0$, para $\xi \in [-\pi/3, \pi/3]$.

3.2.6 Ôndulas de Daubechies

Como vimos, a construção de Battle-Lemarié permite-nos encontrar ôndulas ortogonais com qualquer ordem de suavidade desejada (finita). Mais precisamente, para cada n , a função escala e a ôndula são funções de classe C^{n-1} . No entanto, devido ao processo de ortogonalização, tais ôndulas não têm suporte compacto. Será possível construir ôndulas que sejam simultaneamente de suporte compacto e com certa suavidade?

Em 1988, I. Daubechies [Dau88] respondeu afirmativamente a esta questão, apresentando explicitamente uma forma de construção de tais ôndulas. Estas *ôndulas de Daubechies* são frequentemente usadas em aplicações numéricas. Por limitações de tempo, daremos aqui apenas uma descrição muito breve da ideia básica da construção de Daubechies. Para mais pormenores sobre a construção destas ôndulas, recomenda-se a leitura do referido artigo [Dau88] ou de [Dau92, pp. 167 e segs].

Começamos por referir alguns resultados sobre a função escala e ôndula associados a uma AMR ortogonal.

Teorema 3.6 *Seja ψ a ôndula ortogonal associada a uma AMR com função escala ϕ e seja $H(\xi)$ a função de transferência do filtro $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de ϕ . Se $\widehat{\psi}(\xi)$ é N vezes continuamente diferenciável em $\xi = 0$, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *A ôndula ψ tem N momentos nulos, isto é,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad (3.78)$$

(ii) *$\widehat{\psi}(\xi)$ tem um zero de ordem N em $\xi = 0$;*

(iii) *a função $H(\xi)$ tem um zero de ordem N em $\xi = \pi$.*

Demonstração: A demonstração é deixada como exercício. □

O seguinte resultado relaciona o tamanho do suporte de ϕ (e conseqüentemente, de ψ) com o “comprimento” do filtro $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ da função ϕ .

Teorema 3.7 *A função escala $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k)$ tem suporte compacto $[0, M]$ se e só se $h_k = 0$ para $k < 0$ ou $k > M$.*

Demonstração: A demonstração de que, se $\text{supp } \phi = [0, M]$, então $h_k = 0$ para $k < 0$ ou $k > M$, é imediata, tendo em conta que

$$h_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(2t - k) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t/2) \phi(t - k) dt.$$

A demonstração da implicação contrária, bem menos simples, pode ser vista em e.g. [Dau88]. □

Naturalmente, para se obter uma função escala real, os coeficientes h_k deverão ser escolhidos como números reais.

Suponhamos então que pretendemos uma função escala (real) com suporte compacto M e seja $H(\xi)$ a respectiva função de transferência

$$H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^M h_k e^{-ik\xi},$$

análise multi-resolução

a qual será, neste caso, um polinómio trigonométrico. Para garantir que ψ tenha N momentos nulos, $H(\xi)$ deverá ter um zero de ordem N em $\xi = \pi$, ou seja, deverá ser possível factorizar $H(\xi)$ do seguinte modo

$$H(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^N R(e^{-i\xi}) \quad (3.79)$$

para um certo polinómio R . A dificuldade está em encontrar um polinómio $R(e^{-i\xi})$ do menor grau possível tal que $H(\xi)$ satisfaça a condição de ortogonalidade (3.33):

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 = 1. \quad (3.80)$$

Note-se que, se o grau de R for m , então o grau de $H(\xi)$ será $N + m$, o que significa que o filtro H terá $N + m + 1$ coeficientes não nulos. De (3.79) vem

$$|H(\xi)|^2 = (\cos^2(\xi/2))^N |R(e^{-i\xi})|^2 \quad (3.81)$$

Como os coeficientes de R são reais, tem-se $\overline{R(e^{-i\xi})} = R(e^{i\xi})$ o que significa que $|R(e^{-i\xi})|^2$ é uma função par, podendo, portanto ser escrita como um polinómio em $\cos \xi$, ou, equivalentemente como um polinómio em $\text{sen}^2(\xi/2)$. Assim,

$$|H(\xi)|^2 = (\cos^2(\xi/2))^N P(\text{sen}^2(\xi/2)). \quad (3.82)$$

A condição (3.80) é equivalente a

$$(1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y) = 1, \quad (3.83)$$

para todo o $y = \text{sen}^2(\xi/2) \in [0, 1]$. Assim, pretende-se obter um polinómio $P(y) \geq 0$, de *menor grau possível*, que satisfaça (3.83). Pode mostrar-se que tal polinómio é dado por

$$P(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} y^k. \quad (3.84)$$

Encontrado o polinómio $P(y)$ torna-se necessário extrair a sua “raiz quadrada”, ou seja, encontrar um polinómio $R(e^{-i\xi})$ (do menor grau possível) tal que

$$|R(e^{-i\xi})|^2 = P(\text{sen}^2(\xi/2)).$$

A construção de tal polinómio é baseada no chamado *Lema de Riesz* e a sua descrição pode ser vista em [Dau88].

Estes são, em linhas gerais, os passos seguidos por I. Daubechies para obter as suas famosas ôndulas ortogonais de suporte compacto.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, foi encontrada uma função escala ${}_N\phi$ com as seguintes propriedades importantes:

- (i) ${}_N\phi$ tem como suporte o intervalo $[0, 2N - 1]$;
- (ii) $\{{}_N\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é um sistema ortonormado;
- (iii) a correspondente ôndula ortogonal ${}_N\psi$ tem N momentos nulos;
- (iv) a suavidade de ${}_N\psi$ (igual à de ${}_N\phi$) cresce com N . De facto, prova-se que para $N = 2$, a ôndula é α -Lipschitz com $\alpha = 0.55$, para $N = 3$, ${}_N\psi$ é Lipschitz 1.08 (logo, continuamente diferenciável) e para N suficientemente grande, ${}_N\psi$ é uniformemente α -Lipschitz com $\alpha \sim 0.2N$; veja, e.g. [DL92] e [CC92].

Note-se que cada uma das ôndulas ${}_N\psi$ definidas a partir de ${}_N\phi$ pelo uso da fórmula (3.45) é uma ôndula ortogonal com suporte compacto $[-N + 1, N]$.

Nota

- (i) A função escala ${}_1\phi$ de Daubechies coincide com a função escala da AMR de Haar. Por outras palavras, a ôndula de Daubechies para $N = 1$ é ôndula de Haar.
- (ii) Com excepção do caso particular da ôndula de Haar, nenhuma das ôndulas de Daubechies é simétrica ou anti-simétrica (relativamente a algum eixo de simetria). Na realidade, pode provar-se que não é possível encontrar uma ôndula ortogonal, real e de suporte compacto que seja simétrica ou anti-simétrica. No entanto, é possível modificar ligeiramente a construção inicial de funções escala obtidas por Daubechies por forma a encontrar uma família de funções escala com as mesmas características, mas dando origem a ôndulas menos assimétricas; veja, e.g., [Dau92, pp. 251-257].

A Figura 3.10 contém alguns gráficos de funções escala ${}_N\phi$ e correspondentes ôndulas ortogonais ${}_N\psi$ de Daubechies. Uma tabela com os coeficientes ${}_N h_k; k = 0, 1, \dots, 2N - 1$, para $N = 2, \dots, 10$, pode ser vista em [Dau92, p.191].

análise multi-resolução

• Coiflets

A pedido de Ronald Coifmann, Ingrid Daubechies construiu também uma classe de funções escala e ôndulas de suporte compacto em que a ôndula tem $2N$ momentos nulos e a função escala tem $2N - 1$ momentos nulos (note-se que o momento de ordem zero de uma função escala nunca pode ser nulo!). O tamanho do suporte destas funções é $6N - 1$. Estas ôndulas são conhecidas pelo nome de *coiflets*; para mais pormenores sobre esta construção, veja, e.g. [Dau92, pp.258-259].

3.3 Ôndulas biortogonais

A exigência de que as funções $\psi_{j,k}$, definidas a partir da ôndula ψ , formem uma base ortonormada de $L^2(\mathbb{R})$ impõe sérias restrições à sua construção. De facto, pode mostra-se que as ôndulas ortogonais apresentam algumas desvantagens, nomeadamente:

- (i) como já referimos, para além da ôndula de Haar, não existe nenhuma ôndula ortogonal real que seja de suporte compacto e simétrica ou anti-simétrica relativamente a algum eixo de simetria;
- (ii) os coeficientes dos filtros $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ são geralmente números irracionais;
- (iii) no caso de ôndulas de suporte compacto, não é possível dar uma definição explícita dos subespaços que constituem a AMR; a função escala ϕ (e portanto, também a ôndula ψ) é apenas definida implicitamente pela equação de refinamento.

Este tipo de limitações motivou a construção das chamadas *ôndulas biortogonais*. O que se procura, neste caso, é ter duas bases de Riesz de ôndulas $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ e $\{\tilde{\psi}_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ que sejam biortogonais, isto é, que satisfaçam

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m}. \quad (3.85)$$

As ôndulas biortogonais estão, geralmente, associadas a duas análises multi-resolução $\{(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}, \phi\}$ e $\{(\tilde{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}, \tilde{\phi}\}$ ¹⁶ ligadas entre si da seguinte forma

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus (\tilde{V}_0)^\perp. \quad (3.86)$$

¹⁶Com ϕ e $\tilde{\phi}$ satisfazendo apenas a condição mais fraca *AMR5'* de uma AMR.

Duas AMR que satisfaçam (3.86), dizem-se *duais* ou *biortogonais*. A condição (3.86) é equivalente à seguinte condição sobre as respectivas funções escala:

$$\langle \phi, \tilde{\phi}(\cdot - k) \rangle = \delta_{0,k}. \quad (3.87)$$

Se $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ e $(\tilde{h}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ denotam os filtros de ϕ e $\tilde{\phi}$, respectivamente, e $H(\xi)$ e $\tilde{H}(\xi)$ as respectivas funções de transferência, a condição de dualidade (3.87) pode exprimir-se como

$$\overline{H(\xi)}\tilde{H}(\xi) + \overline{H(\xi + \pi)}\tilde{H}(\xi + \pi) = 1. \quad (3.88)$$

A primeira construção de ôndulas biortogonais deve-se a Albert Cohen, Ingrid Daubechies e Jean-Christophe Feaveau [CDF92]. Das diversas ôndulas biortogonais apresentadas em [CDF92], são especialmente importantes as ôndulas associadas a splines. Para cada $m \in \mathbb{N}$, considera-se para ϕ a função escala da AMR de splines de grau $m - 1$, isto é, a função $\beta_{m-1}(t)$ cuja transformada de Fourier é dada por (3.58):

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\kappa\xi/2} \left(\frac{\text{sen}(\xi/2)}{\xi/2} \right)^m \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\xi \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(\frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi} \right)^m, \end{aligned} \quad (3.89)$$

onde $\kappa = 1$ se m é ímpar e $\kappa = 0$ se m é par e onde $\lfloor x \rfloor$ designa o maior inteiro contido em x . De (3.89), é fácil verificar que a função de transferência $H(\xi)$ é dada por

$$\begin{aligned} H(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\kappa\xi/2} (\cos(\xi/2))^m \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\xi \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\lfloor m/2 \rfloor}^{m-\lfloor m/2 \rfloor} 2^{-m} \binom{m}{k + \lfloor m/2 \rfloor} e^{-ik\xi}. \end{aligned}$$

Em [CDF92] mostra-se que, para qualquer valor de \tilde{m} com a mesma paridade que m , sendo $q = (m + \tilde{m})/2$, a função definida por

$$\tilde{H}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\kappa\xi/2} (\cos(\xi/2))^{\tilde{m}} \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1+k}{k} (\text{sen}(\xi/2))^{2k} \quad (3.90)$$

satisfaz a condição de biortogonalidade (3.88). Isto não é, no entanto, garantia de que $H(\xi)$ origine, através do uso da fórmula (3.77), uma função escala $\tilde{\phi}$ de uma AMR regular,

análise multi-resolução

dual da AMR gerada por ϕ . Para tal, é necessário que \tilde{m} satisfaça um determinado valor mínimo (dependente do valor de m). Em particular, os valores mínimos para $m = 2, 3, 4$ são, respectivamente, 2, 3 e 6; veja e.g [CDF92] ou [Coh00]. O parâmetro \tilde{m} dá-nos o número de momentos nulos da ôndula ψ e m é o número de momentos nulos da ôndula dual. Em [Mal98], é fornecida uma tabela com os coeficientes dos filtros h_k e \tilde{h}_k para os primeiros valores de m e \tilde{m} . É importante realçar que os coeficientes destes filtros são frações diádicas, isto é, são números da forma $2^{-j}k, j, k \in \mathbb{Z}$. Isto torna estes filtros especialmente adequados para utilização no computador, uma vez que tais números têm, por definição, uma expansão binária finita sem erros de arredondamento. ¹⁷

3.4 Exercícios

Exercício 3.1. Seja $\psi^H(t)$ a ôndula de Haar, isto é, a função definida por

$$\psi^H(t) = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)},$$

onde $\chi_{[a,b)}$ designa a função característica do intervalo $[a, b)$.

- Esboce os gráficos de $\psi^H, \psi_{0,1}^H, \psi_{0,2}^H, \psi_{1,2}^H$ e $\psi_{2,1}^H$.
- Justifique que $\{\psi_{jk}^H; j, k \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormado.

Exercício 3.2. Seja $B_1(t)$ o B-spline de grau 1, definido por

$$B_1(t) = (B_0 * B_0)(t),$$

onde $B_0(t)$ é a função característica do intervalo $[0, 1)$.

- Mostre que

$$B_1(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{outros valores de } t. \end{cases}$$

¹⁷Convém ter em atenção que os valores dados em [Mal98] estão normalizados de forma diferente dos nossos.

b) Seja $\beta_1(t) = B_1(t + 1)$. Mostre que

$$\widehat{B}_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\xi/2} \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}$$

e deduza, então, que

$$\widehat{\beta}_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right)^2.$$

c) Considere a função $F(\xi)$ definida por

$$F(\xi) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\beta}_1(\xi + 2k\pi) \right|^2.$$

Mostre que

$$F(\xi) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos^2(\xi/2).$$

d) Utilize a alínea anterior para justificar que $\{\beta_1(t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base de Riesz do espaço dos splines de grau 1 com nós nos inteiros (sabendo, já, que se trata de uma base desse espaço).

e) Considere a função escala ϕ ortogonalizada, isto é:

$$\widehat{\phi}(\xi) = M(\xi) \widehat{\beta}_1(\xi),$$

onde

$$M(\xi) = \frac{1}{\sqrt{F(\xi)}}.$$

Obtenha alguns coeficientes c_k da expansão em série de Fourier da função $M(\xi)$. Verifique que, à medida que $|k|$ cresce, esses coeficientes decaem (muito rapidamente).

f) Utilize os coeficientes obtidos na alínea anterior para obter uma aproximação para a função

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \beta_1(t - k)$$

e para esboçar o seu gráfico.

Nota Pode usar a package *Wavelets* do *Mathematica* e a função aí definida *BSpline[1,t]* que é, precisamente, a função $\beta_1(t)$.

análise multi-resolução

g) Seja ψ a ôndula ortogonal associada à função escala ϕ , isto é, seja

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(\xi) &= -e^{-i\xi/2}H(\xi/2 + \pi)\widehat{\phi}(\xi/2) \\ &= -e^{-i\xi/2}H(\xi/2 + \pi)M(\xi/2)\widehat{\beta}_1(\xi/2),\end{aligned}$$

onde $H(\xi)$ é a função que relaciona $\widehat{\phi}(2\xi)$ com $\widehat{\phi}(\xi)$. Mostre que

$$H(\xi) = \frac{M(2\xi)\widehat{\beta}_1(2\xi)}{M(\xi)\widehat{\beta}_1(\xi)}$$

e deduza que

$$H(\xi/2 + \pi) = \frac{M(\xi)}{M(\xi/2 + \pi)} \sin^2(\xi/4).$$

h) Temos, então

$$\widehat{\psi}(\xi) = G(\xi/2)\widehat{\beta}_1(\xi/2)$$

onde

$$G(\xi/2) = -e^{-i\xi/2} \frac{M(\xi)}{M(\xi/2 + \pi)} M(\xi/2) \sin^2(\xi/4).$$

Determine alguns coeficientes g_k da expansão em série de Fourier da função (periódica de período 4π) $G(\xi/2)$, isto é, da expansão

$$G(\xi/2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{-ik\xi/2}$$

e obtenha, então, uma aproximação para $\psi(t)$ através da fórmula

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2g_k \beta_1(2t - k).$$

Esboce o gráfico de $\psi(t)$.

i) Use as funções *SplinePhi*[1, t, 7] e *SlinePsi*[1, t, 7] para esboçar os gráficos de ϕ e ψ e confrontar com os gráficos que obteve.

Nota As funções ϕ e ψ obtidas por este processo são, como sabe, a função escala e correspondente ôndula ortogonal de Battle-Lemarié, para $n = 1$.

Exercício 3.3. Repita o exercício anterior para o caso $n = 2$.

Exercício 3.4. Demonstre o Teorema 3.6.

Exercício 3.5. Seja ϕ a função escala de uma AMR regular e seja $H(\xi)$ a função de transferência do respectivo filtro $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Suponha que $H(\xi)$ tem um zero de ordem N na frequência π . Mostre que:

a)

$$\widehat{\phi}^{(k)}(2n\pi) = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}; \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

b)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^k \phi(n) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \phi(t) dt; \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Exercício 3.6. Seja ϕ uma função escala de uma AMR, normalizada de forma que $\widehat{\phi}(0) = 1$. Mostre que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(t - k) = 1.$$

Exercício 3.7. Sejam ϕ e ψ a função escala e respectiva ôndula associadas a uma AMR. Mostre que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ |\widehat{\phi}(\xi + 4k\pi)|^2 + |\widehat{\psi}(\xi + 4k\pi)|^2 \right\} = 1.$$

Exercício 3.8. Considere a seguinte equação de dilatação para uma função escala ϕ com filtro finito $\{h_0, h_1, h_2, h_3\}$:

$$\phi(t) = \sqrt{2} (h_0 \phi(2t) + h_1 \phi(2t - 1) + h_2 \phi(2t - 2) + h_3 \phi(2t - 3)) \quad (3.91)$$

e seja $H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^3 h_k e^{-ik\xi}$ a respectiva função de transferência. Suponha que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1$.

a) Mostre que os coeficientes h_k satisfazem

$$h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = \sqrt{2}. \quad (3.92)$$

b) Mostre que, se $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ for um conjunto ortonormado, então os coeficientes h_k devem satisfazer

$$h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1 \quad (3.93)$$

$$h_0 h_2 + h_1 h_3 = 0 \quad (3.94)$$

análise multi-resolução

- c) Mostre que se pretendermos que a ôndula ψ associada a esta função escala tenha dois momentos nulos, então os coeficientes h_k deverão satisfazer

$$-h_0 + h_1 - h_2 + h_3 = 0 \quad (3.95)$$

$$-h_1 + 2h_2 - 3h_3 = 0 \quad (3.96)$$

- d) Mostre que $h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, $h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, $h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, $h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ satisfazem as equações (3.92) – (3.96).
- e) (Para resolver esta questão, deve ter disponível a *wavelet Toolbox* do *MATLAB*.) Invoque o *MATLAB* e obtenha informação sobre a família de ôndulas de Daubechies, digitando *waveinfo('db')*. Obtenha os coeficientes do filtro *db2*. Compare-os com os do filtro $\{h_0, h_1, h_2, h_3\}$ acima obtido. Que relação existe entre os dois filtros?
- f) Obtenha também o filtro da função escala de Daubechies ${}_2\phi$ usando a função *DaubechiesFilter[2]* do *Mathematica*.

Nota Este exercício mostra que é importante ter em atenção as diferentes normalizações dos filtros descritos na literatura e usados nos pacotes de *softawre*.

Exercício 3.9. O seguinte algoritmo (do tipo “ponto fixo”) pode ser usado para obter (uma aproximação) para a função escala da qual se conheça apenas o respectivo filtro. Em particular, pode usar-se para obter o gráfico de ϕ .

Passo 1 Escolha uma função inicial $\phi_0(t)$ como “aproximação inicial” para $\phi(t)$, por exemplo, tome para $\phi_0(t)$ a função característica do intervalo $[0, 1)$.

Passo n Para $n = 1, 2, \dots$, faça

$$\phi_n(t) = \sum_k \sqrt{2}h_k\phi_{n-1}(2t - k) \quad (3.97)$$

Use o algoritmo anterior para esboçar (no *Mathematica*) o gráfico da função escala de Daubechies ${}_2\phi$.

Exercício 3.10. (Usando a *wavelet Toolbox* do *MATLAB*.)

análise multi-resolução

- a) Use a função *waveinfo* para obter informação sobre as diversas famílias de ôndulas disponíveis na *toolbox*. Obtenha informação mais pormenorizada sobre a família *bior*.
- b) Obtenha informação sobre a função *wavefun*. Utilize-a para esboçar os gráficos da função escala e ôndula de Daubechies ${}_2\phi$ e ${}_2\psi$.
- c) Obtenha os gráficos de outras ôndulas suas conhecidas.

análise multi-resolução

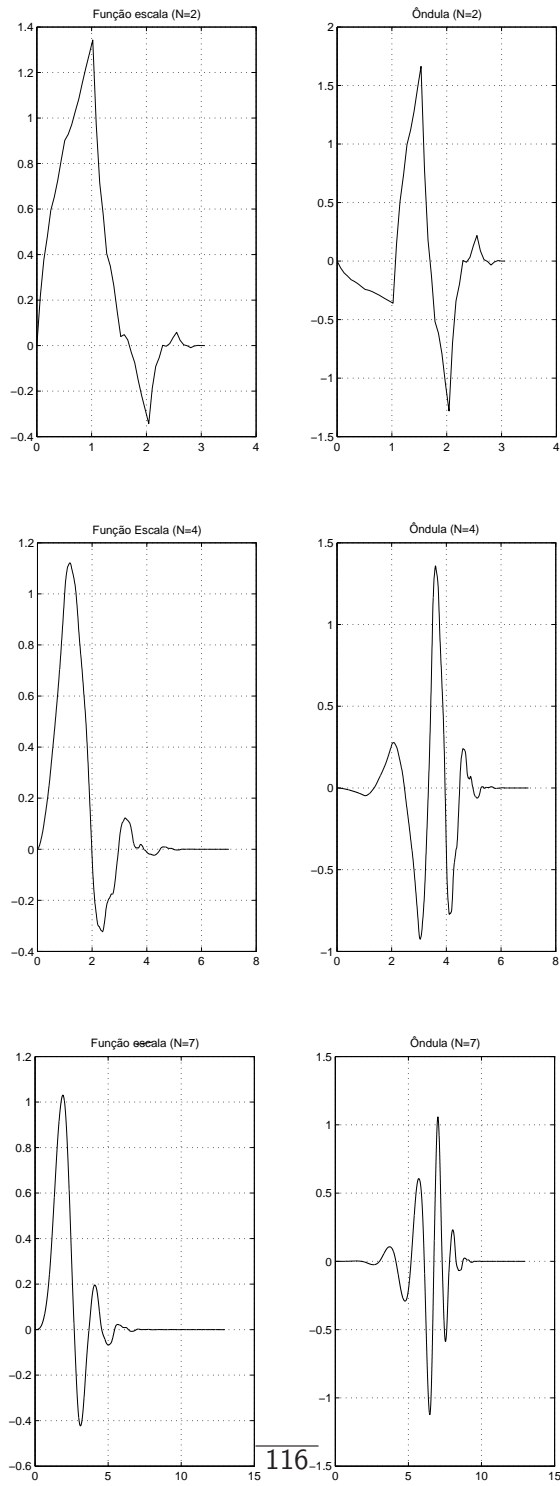


Figura 3.10: Funções escala e ôndulas de Daubechies

4. Transformadas Rápidas com Ôndulas

Transformada rápida directa

Transformada rápida inversa

Sinais e filtros digitais

4.1 Transformada directa

Nesta secção vamos ver como a estrutura de AMR conduz, de uma forma natural, a um esquema iterativo muito eficiente para a determinação dos coeficientes da expansão de uma determinada função numa base ortonormada de ôndulas.¹ A facilidade de implementação e a eficiência dos algoritmos que vamos descrever, e que são devidos a Mallat, estão na base da crescente popularidade da aplicação das ôndulas nas mais diversas áreas científicas.

Suponhamos, então, que dispomos de uma AMR $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$, com função escala ϕ e correspondente ôndula ortogonal ψ . As propriedades *AMR1* e *AMR3* garantem-nos que qualquer função $f \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser aproximada, com precisão arbitrária, por uma função v_j de um determinado espaço V_j , desde que j seja escolhido suficientemente grande, i.e.,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists J \in \mathbb{Z} \quad \exists v_J \in V_J : \quad \|f - v_J\| < \epsilon. \quad (4.1)$$

Como habitualmente, denotemos por W_j o complemento ortogonal de V_j em V_{j+1} e designemos por P_j o operador de projecção ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$ em V_j e por Q_j o operador de projecção ortogonal em W_j . Como sabemos, isto significa que Q_j é a diferença entre os

¹Por simplicidade, consideramos aqui o caso associado a ôndulas ortogonais; a adaptação para o caso de bases biortogonais é muito simples.

transformadas rápidas com ôndulas

operadores P_{j+1} e P_j . Temos, também, que $P_j P_{j+1} = P_j$ e $Q_j P_{j+1} = Q_j$; veja o Exercício 1.13.

Para cada j , designemos por v_j e w_j , respectivamente, as projecções ortogonais de f nos subespaços V_j e W_j , isto é, sejam

$$v_j = P_j f \quad \text{e} \quad w_j = Q_j f. \quad (4.2)$$

Tem-se, então,

$$\begin{aligned} v_J &= P_J f = P_{J-1} f + (P_J - P_{J-1}) f \\ &= v_{J-1} + w_{J-1} \\ &= v_{J-2} + w_{J-2} + w_{J-1} \\ &= \cdots = v_{J-M} + w_{J-M} + \cdots + w_{J-1}, \quad M > 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

A propriedade AMR2 garante que, desde que M seja escolhido suficientemente grande em (4.3), se tem

$$\|v_{J-M}\| < \epsilon. \quad (4.4)$$

Assim, podemos concluir que toda a função de $L^2(\mathbb{R})$ pode ser representada razoavelmente como uma soma finita de funções dos subespaços mutuamente ortogonais W_j , com um resto v_{J-M} interpretado como uma versão muito grosseira de f . A decomposição (4.3) indica-nos quais os sucessivos pormenores que se devem juntar a essa versão *esborratada* de f para se chegar a uma aproximação *fina* f_J dessa função.

Suponhamos, então, que conhecemos a aproximação $v_J = P_J f \in V_J$ para f e que se pretende obter a decomposição (4.3). Como, para cada j , $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ e $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ são bases de V_j e W_j , respectivamente, conhecer as funções v_J e $v_{J-M}, w_{J-M}, \dots, w_{J-1}$, significa conhecer os seus coeficientes nas bases respectivas.

Denotemos por $\mathbf{c}^j = (c_k^j)_{k \in \mathbb{Z}}$ a sequência dos coeficientes de $v_j = P_j f$ na base $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$, isto é, sejam

$$c_k^j = \langle f, \phi_{j,k} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4.5)$$

e seja $\mathbf{d}^j = (d_k^j)_{k \in \mathbb{Z}}$ a sequência dos coeficientes de $w_j = Q_j f$ na base $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$, isto é

$$d_k^j = \langle f, \psi_{j,k} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.6)$$

transformadas rápidas com ôndulas

Então, o que se pretende, é obter a decomposição

$$v_J = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{J-M} \phi_{J-M,k} + \sum_{j=J-M}^{J-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^j \psi_{j,k}. \quad (4.7)$$

Notemos, primeiramente, que ϕ satisfaz a equação de dilatação, isto é, que

$$\phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi_{1,n} \quad (4.8)$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \phi_{j-1,k} &= 2^{(j-1)/2} \phi(2^{j-1} \cdot -k) \\ &= 2^{(j-1)/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi_{1,n}(2^{j-1} \cdot -k) \\ &= 2^{(j-1)/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n 2^{1/2} \phi(2(2^{j-1} \cdot -k) - n) \\ &= 2^{j/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi(2^j \cdot -(2k + n)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi_{j,2k+n} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \phi_{j,n}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Então, vem

$$\begin{aligned} c_k^{j-1} &= \langle f, \phi_{j-1,k} \rangle \\ &= \langle f, \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \phi_{j,n} \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_{n-2k}} \langle f, \phi_{j,n} \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_{n-2k}} c_n^j. \end{aligned} \quad (4.10)$$

De modo análogo,

$$\psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \phi_{1,n} \quad (4.11)$$

transformadas rápidas com ôndulas

com

$$g_n = (-1)^n h_{1-n}, \quad (4.12)$$

pelo que, se tem

$$\psi_{j-1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} \phi_{j,n}. \quad (4.13)$$

Temos, então

$$\begin{aligned} d_k^{j-1} &= \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g_{n-2k}} \langle f, \phi_{j,n} \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g_{n-2k}} c_n^j. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Partindo da sequência $\mathbf{c}^J = (c_n^J)$, as fórmulas (4.10) e (4.14) podem ser usadas, recursivamente, para obter as sequências $\mathbf{c}^{J-M}, \mathbf{d}^{J-1}, \dots, \mathbf{d}^{J-M}$, isto é, para obter a decomposição desejada para v_J ; veja o esquema da Fig.4.1. Este processo pode expressar-se mais facil-

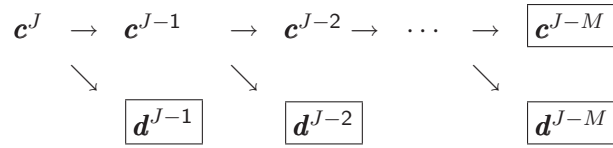


Figura 4.1: Esquema de decomposição

mente com a ajuda dos *operadores de decomposição* \mathcal{H} e \mathcal{G} . Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \ell^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \mathbf{c} &\longmapsto \mathcal{H}\mathbf{c} \end{aligned} \quad (4.15)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : \ell^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \mathbf{c} &\longmapsto \mathcal{G}\mathbf{c} \end{aligned} \quad (4.16)$$

transformadas rápidas com ôndulas

onde

$$(\mathcal{H}\mathbf{c})_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_{n-2k}} c_n \quad \text{e} \quad (\mathcal{G}\mathbf{c})_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g_{n-2k}} c_n \quad (4.17)$$

com $h = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ e $g = (g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, respectivamente, o filtro da função escala ϕ e o filtro dado por (4.12). Então, o algoritmo de decomposição (também chamado de *transformada rápida directa*) pode ser descrito do seguinte modo:

TRANSFORMADA RÁPIDA DIRECTA

Entrada: $\mathbf{c}^J = (c_k^J)_{k \in \mathbb{Z}}$
 M (número de decomposições)

Para $k = 1, \dots, M$

$$\mathbf{c}^{J-k} = \mathcal{H}\mathbf{c}^{J-k+1}$$

$$\mathbf{d}^{J-k} = \mathcal{G}\mathbf{c}^{J-k+1}$$

Fim Para

Saída: \mathbf{c}^{J-M}
 $\mathbf{d}^{J-M}, \mathbf{d}^{J-M+1}, \dots, \mathbf{d}^{J-1}$

4.2 Transformada inversa

A transformada que acabámos de descrever pode ser invertida facilmente, ou seja, supondo conhecidas as sequências dos coeficientes $\mathbf{c}^{J-M}, \mathbf{d}^{J-1}, \dots, \mathbf{d}^{J-M}$, poderemos determinar a sequência inicial \mathbf{c}^J . Por outras palavras, conhecida a versão *grosseira* de f (v_{J-M}) e sabidos os pormenores (w_{j-M}, \dots, w_{j-1}), é possível reconstruir a aproximação inicial v_j para f . Temos, para cada j ,

$$\begin{aligned} P_j f &= v_j = v_{j-1} + w_{j-1} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l^{j-1} \phi_{j-1,l} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_l^{j-1} \psi_{j-1,l} \end{aligned}$$

transformadas rápidas com ôndulas

Assim,

$$\begin{aligned}
 c_k^j &= \langle f, \phi_{j,k} \rangle \\
 &= \langle P_j f, \phi_{j,k} \rangle \\
 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l^{j-1} \langle \phi_{j-1,l}, \phi_{j,k} \rangle + \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_l^{j-1} \langle \psi_{j-1,l}, \phi_{j,k} \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_{j-1,l}, \phi_{j,k} \rangle &= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2l} \phi_{j,n}, \phi_{j,k} \right\rangle \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2l} \langle \phi_{j,n}, \phi_{j,k} \rangle \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2l} \delta_{n,k} = h_{k-2l}.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Por outro lado,

$$\langle \psi_{j-1,l}, \phi_{j,k} \rangle = \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2l} \phi_{j,n}, \phi_{j,k} \right\rangle = g_{k-2l}. \tag{4.20}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
 c_k^j &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} c_l^{j-1} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{k-2l} d_l^{j-1} \\
 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(h_{k-2l} c_l^{j-1} + g_{k-2l} d_l^{j-1} \right);
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

ver esquema da Fig. 4.2.

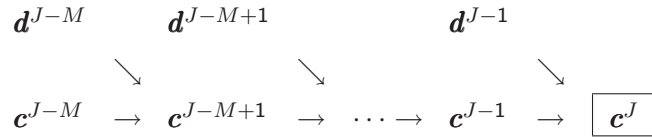


Figura 4.2: Esquema de reconstrução

Se definirmos os *operadores de reconstrução* \mathcal{H}^* e \mathcal{G}^* por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^* &: \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\
 \mathbf{c} &\mapsto \mathcal{H}^* \mathbf{c}
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

transformadas rápidas com ôndulas

onde

$$(\mathcal{H}^* \mathbf{c})_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} c_l \quad (4.23)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^* : \ell^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \mathbf{c} &\mapsto \mathcal{G}^* \mathbf{c} \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde

$$(\mathcal{G}^* \mathbf{c})_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{k-2l} c_l, \quad (4.25)$$

então, o algoritmo de reconstrução (também chamado de *transformada rápida inversa*) pode ser descrito do seguinte modo:

TRANSFORMADA RÁPIDA INVERSA

Entrada:	M
	$\mathbf{c}^{J-M}, \mathbf{d}^{J-k}; k = 1, \dots, M$
Para $k = 1, \dots, M$	
	$\mathbf{c}^{J-M+k} = \mathcal{H}^* \mathbf{c}^{J-M+k-1} + \mathcal{G}^* \mathbf{d}^{J-M+k-1}$
Fim para	
Saída:	\mathbf{c}^J

Observações

1. Naturalmente, ao implementar os algoritmos, todas as sequências infinitas terão sempre de ser truncadas. Assim, ao aplicar o algoritmo de decomposição, a sequência inicial será uma sequência finita, ou seja, um determinado vector de comprimento N , $(c_0^J, c_1^J, \dots, c_{N-1}^J)$. Também, ou o filtro $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é já finito ou, se estivermos a trabalhar com uma ôndula de suporte não compacto, terá de ser truncado para um determinado vector de comprimento L : $(h_{-m}, h_{-m+1}, \dots, h_{-m+L-1})$.²

²Assumimos que $m \geq 0$ e $L - 1 > m$ e também que o comprimento do vector não é inferior ao do "filtro" (h_k) , ou seja, que $N \geq L$.

transformadas rápidas com ôndulas

2. Como a sequência inicial tem um comprimento finito, é necessário saber como tratar com os pontos fronteiros. Por exemplo, as fórmulas que dão c_0^{J-1} e $c_{N/2-1}^{J-1}$ ³ são:

$$c_0^{J-1} = \sum_{n=-m}^{-m+L-1} \overline{h_n} c_n^J \quad \text{e} \quad c_{N/2-1}^{J-1} = \sum_{n=-m+N-2}^{n=N+L-m-3} \overline{h_{n-N+2}} c_n^J \quad (4.26)$$

Assim, torna-se necessário “aumentar” o vector inicial, juntando-lhe m componentes no início e $L - 2 - m$ componentes no final. Os valores dessas componentes podem ser escolhidos de diversas maneiras, correspondendo a diversas *condições de fronteira*:

- (i) Uma possibilidade consiste em considerá-los iguais a zero (o que corresponde a “truncar” as fórmulas (4.26) de modo a envolverem apenas os valores c_0^{J-1}, \dots, c_N^J .)
(ii) Outra hipótese, é tomá-los iguais aos valores fronteiros, isto é, considerar

$$c_{-m} = \dots = c_{-1} = c_0 \quad \text{e} \quad c_N = \dots = c_{N+L-m-3} = c_{N-1}.$$

- (iii) Poderemos também imaginar uma “reflexão” na fronteira, isto é, tomar

$$c_{-i} = c_{i-1} \quad \text{e} \quad c_{N-1+i} = c_{N-i}, \quad i > 0.$$

- (iv) Uma escolha muito usual é considerar a extensão periódica do vector, isto é, tomar:

$$c_{i+N} = c_i, \quad \forall i.$$

Existem outras formas de tratar com as fronteiras, as quais correspondem a usar bases ortonormadas de ôndulas construídas para espaços de funções definidas apenas num subintervalo limitado de \mathbb{R} , isto é, para espaços do tipo $L^2[0, 1]$ em vez de $L^2(\mathbb{R})$. Algumas soluções para este importante problema de determinação de *ôndulas no intervalo* podem ser vistas, por exemplo, em [Aus92, Aus93, CDV93, Mey91, QW95].

3. Com escolha apropriada das condições de fronteira, as fórmulas (4.10) e (4.14) mostram que no primeiro passo de decomposição são calculados (aproximadamente) $N/2$ coeficientes c_k^{J-1} e $N/2$ coeficientes d_k^{J-1} . O passo de decomposição seguinte é apenas efectuado sobre os coeficientes c_k^{J-1} que representam a parte em V_{J-1} e assim

³Estamos a supor que N é par.

transformadas rápidas com ôndulas

sucessivamente. Assim, à medida que a decomposição prossegue, serão efectuadas cada vez menos operações. Se o comprimento do filtro é L , o número de operações envolvidas é da ordem de

$$L \times \left(N + \frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \dots \right) < 2NL.$$

Assim, o número de operações envolvidas no algoritmo da transformada rápida com ôndula é $O(N)$. Trata-se, portanto, de um algoritmo bastante rápido, à semelhança do que acontece com a Transformada de Fourier Rápida (vulgarmente referida como FFT).⁴

4. Um problema interessante é saber como determinar os coeficientes c_k^J da função do espaço V_J que aproxima a função dada f , para iniciar o processo de decomposição. Teoricamente, deveríamos escolher a melhor aproximação de f em V_J , isto é, considerar

$$c_k^J = \langle f, \phi_{J,k} \rangle. \quad (4.27)$$

Na prática, a função $f(t)$ nem sempre é conhecida (sendo, por vezes, apenas conhecida uma amostra dos seus valores) e, além disso, os produtos internos são dispendiosos de calcular. Assim, estes produtos internos são raramente calculados. Frequentemente, dispomos de uma série de valores da função f obtidos em pontos de amostragem igualmente espaçados $k/2^J$. Em muitas aplicações, considera-se simplesmente

$$c_k^J = 2^{-J/2} f(2^{-J}k). \quad (4.28)$$

Uma justificação pouco rigorosa para esta escolha é a seguinte:

Por definição,

$$c_k^J = 2^{J/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi(2^J t - k) dt = 2^{J/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t + 2^{-J}k) \phi(2^J t) dt \quad (4.29)$$

⁴Como é bem sabido, o algoritmo FFT aplicado a um sinal de comprimento N envolve $N \ln N$ operações, pelo que, teoricamente, o algoritmo da transformada rápida, sobretudo se N for muito grande. No entanto, é necessário ter em atenção que a transformada com ôndula depende fortemente do filtro escolhido, podendo ser bastante mais complexa de implementar que a FFT.

transformadas rápidas com ôndulas

Quando J é bastante grande, $\phi(2^J t)$ estará muito “concentrada” numa pequena região em torno de $t = 0$ e, admitindo que a função f é suave, f será “quase” constante nessa região, vindo, então

$$c_k^J \approx 2^{J/2} f(2^{-J} k) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^J t) dt = 2^{-J/2} f(2^{-J} k). \quad (4.30)$$

Isto explica porque razão, quando J é grande, podemos tomar (4.28) como aproximação para os produtos internos (4.27); ⁵ outras alternativas para aproximar os produtos internos podem ser vistas, por exemplo, em [Jan88, SP94, Wal92]; veja também [Dau92, p.166].

4.3 Generalização para várias variáveis

Os conceitos de AMR e as transformadas rápidas com ôndulas podem generalizar-se para funções de várias variáveis, de diferentes formas. A forma mais simples de passar de funções de uma variável para funções de várias variáveis é através da utilização de produtos tensoriais, e será essa abordagem que descreveremos brevemente nesta secção. Por uma questão de simplicidade, consideramos apenas o caso de duas variáveis, sendo depois óbvia a generalização para n variáveis.

Começemos por relembrar algumas definições e resultados básicos sobre produtos tensoriais.

Definição 4.1 *Dadas duas funções $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ chama-se produto tensorial $f \otimes g$ dessas duas funções à função de duas variáveis dada por*

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y) \quad (4.31)$$

Note-se que $f \otimes g \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Definição 4.2 *Dados dois subespaços fechados F e G de $L^2(\mathbb{R})$, define-se $F \otimes G$ como sendo o fecho, em $L^2(\mathbb{R}^2)$, de todos os produtos tensoriais $f \otimes g$, com $f \in F$ e $g \in G$.*

⁵Na prática, ignora-se muitas vezes a constante de proporcionalidade $2^{-J/2}$, isto é, tomam-se simplesmente os valores de f nos pontos diádicos $2^{-J} k$ para sequência inicial.

transformadas rápidas com ôndulas

Tem-se que, se $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ e $(g_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ forem bases ortonormadas de F e G , respectivamente, a sequência $(f_k \otimes g_l)_{k,l \in \mathbb{Z}}$ será uma base ortonormada de $F \otimes G$. Também se verifica facilmente que $L^2(\mathbb{R}^2) = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$.⁶

Suponhamos, então, que dispomos de uma AMR $\{(V_j), \phi\}$ de $L^2(\mathbb{R})$ e seja ψ a ôndula ortogonal associada. Para cada $j \in \mathbb{Z}$ definamos

$$\mathcal{V}_j = V_j \otimes V_j. \quad (4.32)$$

A sequência dos subespaços fechados de $L^2(\mathbb{R}^2)$, (\mathcal{V}_j) , satisfaz as seguintes propriedades:

$$AMR1' \quad \mathcal{V}_j \subset \mathcal{V}_{j+1}$$

$$AMR2' \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_j = \{0\}$$

$$AMR3' \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_j} = L^2(\mathbb{R}^2)$$

$$AMR4' \quad v(x, y) \in \mathcal{V}_j \iff v(2x, 2y) \in \mathcal{V}_{j+1}$$

$$AMR5' \quad \text{O conjunto } \{\phi(x-k)\phi(y-l) : k, l \in \mathbb{Z}\} \text{ é uma base ortonormada de } \mathcal{V}_0.$$

Será, então, natural dizer que $\{\mathcal{V}_j\}$ constitui uma AMR de $L^2(\mathbb{R}^2)$ com função escala $\Phi := \phi \otimes \phi$.

Temos, atendendo à definição dos subespaços \mathcal{V}_j , às propriedades de uma AMR e ao facto de o produto tensorial ser distributivo relativamente à adição de funções:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= V_1 \otimes V_1 \\ &= (V_0 \oplus W_0) \otimes (V_0 \oplus W_0) \\ &= (V_0 \otimes V_0) \oplus (V_0 \otimes W_0) \oplus (W_0 \otimes V_0) \oplus (W_0 \otimes W_0) \\ &= \mathcal{V}_0 \oplus (V_0 \otimes W_0) \oplus (W_0 \otimes V_0) \oplus (W_0 \otimes W_0) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Assim, se designarmos por \mathcal{W}_0 o complemento ortogonal de \mathcal{V}_0 em \mathcal{V}_1 , vemos que

$$\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}_{0,1} \oplus \mathcal{W}_{1,0} \oplus \mathcal{W}_{1,1} \quad (4.34)$$

⁶Note-se que definimos $F \otimes G$ como o fecho do conjunto formado por todos os produtos tensoriais de funções de F por funções de G .

transformadas rápidas com ôndulas

onde

$$\mathcal{W}_{0,1} = V_0 \otimes W_0 \quad (4.35)$$

$$\mathcal{W}_{1,0} = W_0 \otimes V_0 \quad (4.36)$$

$$\mathcal{W}_{1,1} = W_0 \otimes W_0 \quad (4.37)$$

Os espaços $\mathcal{W}_{0,1}$, $\mathcal{W}_{1,0}$ e $\mathcal{W}_{1,1}$ admitem as seguintes bases ortonormadas, respectivamente: $\{\phi(x-k)\psi(y-l) : k, l \in \mathbb{Z}\}$, $\{\psi(x-k)\phi(y-l) : k, l \in \mathbb{Z}\}$ e $\{\psi(x-k)\psi(y-l) : k, l \in \mathbb{Z}\}$. Segue-se então das propriedades AMR1'–AMR5' que as três funções

$$\Psi^1 := \phi \otimes \psi \quad (4.38)$$

$$\Psi^2 := \psi \otimes \phi \quad (4.39)$$

$$\Psi^3 := \psi \otimes \psi \quad (4.40)$$

são tais que $\{2^{-j}\Psi^s(2^j x - k, 2^j y - l) : j, k, l \in \mathbb{Z}; s \in \{1, 2, 3\}\}$ é uma base ortonormada de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Assim, no caso de duas variáveis, temos uma função escala Φ e três “ôndulas” Ψ^1 , Ψ^2 e Ψ^3 .

A função escala Φ e as ôndulas Ψ^s ; $s = 1, 2, 3$ satisfazem equações de dupla escala idênticas às das funções unidimensionais. Tem-se

$$\Phi(x, y) = 2 \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{h}_{k,l} \Phi(2x - k, 2y - l) \quad (4.41)$$

onde

$$\mathbf{h}_{k,l} = h_k h_l \quad (4.42)$$

e

$$\Psi^s(x, y) = 2 \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{g}_{k,l}^{(s)} \Phi(2x - k, 2y - l); \quad s = 1, 2, 3, \quad (4.43)$$

onde

$$\mathbf{g}_{k,l}^{(1)} = h_k g_l, \quad \mathbf{g}_{k,l}^{(2)} = g_k h_l \quad \text{e} \quad \mathbf{g}_{k,l}^{(3)} = g_k g_l. \quad (4.44)$$

Usando as equações (4.41) – (4.44), pode mostra-se que as transformadas rápidas aplicadas a sinais bi-dimensionais são muito simples de implementar: dada uma matriz $A = (a_{ij})$, no primeiro passo aplica-se uma transformação uni-dimensional a cada uma das linhas de

transformadas rápidas com ôndulas

A , seguida de uma nova transformação uni-dimensional a cada uma das colunas da matriz obtida. Assim, uma transformação (de um nível) pode ser representada simbolicamente como

$$A \mapsto \left(A_h \mid A_g \right) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} A_{hh} & \\ \hline & A_g \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} A_{hh} & A_{hg} \\ \hline A_{gh} & A_{gg} \end{array} \right) \quad (4.45)$$

• Alguma terminologia de processamento de imagem

Para poder trabalhar com transformadas no processamento de uma imagem, há necessidade de a *digitalizar*. Há dois conceitos importantes sobre a digitalização: *níveis de intensidade* e *resolução*. Em processamento de imagem, é usual usar 256 níveis diferentes de intensidade ou *escalas* de cinzento, variando entre o valor 0 (preto) a 255 (branco).⁷ Cada uma destas escalas pode ser representada por um número binário de 8 bits ($2^8 = 256$). Uma imagem digitalizada pode ser criada considerando uma rede de quadrados (chamados *pixels*) e atribuindo a cada pixel um determinado nível de cinzento. A *resolução* (ou qualidade) de uma imagem é medida pelo número de pixels por polegada quadrada, dizendo-se que a resolução é de x pixels por polegada (em inglês, “dots per inch”, dpi), se o lado de cada pixel medir $1/x$ de uma polegada, ou seja, se numa polegada quadrada existirem x^2 pixels. Para digitalizar uma imagem de uma polegada de lado, numa resolução de 500 dpi,⁸ são, portanto, necessários 2 milhões ($8 \times 250\,000$) de bits. Compreende-se, assim a importância de dispor de boas técnicas de *compressão de imagem*, isto é, formas de tentar obter imagens visualmente muito semelhantes às originais, mas necessitando de muito menor necessidades de armazenamento de dados.

A este propósito, é interessante referir que o FBI lançou um concurso público para o desenvolvimento de algoritmos para a compressão das imagens digitalizadas das impressões digitais contidas nos seus arquivos, sendo o “standard” adoptado baseado na utilização de ôndulas biortogonais: (*Wavelet/Scalar Quantization (WSQ)*); mais pormenores podem ser vistos em [BBH93], [Bri95] ou [Cip93].

⁷Estamos aqui a referir-nos a imagens monocromáticas, isto é, a preto e branco.

⁸Tipicamente, as impressoras *laser* têm uma resolução de 300 dpi ou 600 dpi.

transformadas rápidas com ôndulas

Como vimos, uma imagem pode ser representada por uma matriz $A = (a_{ij})$ em que cada elemento corresponde ao nível de intensidade do respectivo pixel.

Se a matriz A representar uma determinada imagem, então, após um passo do algoritmo de transformada rápida com ôndulas obtidas por produtos tensoriais, a submatriz (subimagem) A_{gh} tenderá a captar as eventuais “linhas horizontais” da imagem inicial (ou seja, as alterações de intensidade ou “descontinuidades” na vertical) e a ignorar as linhas verticais, a submatriz A_{hg} tenderá, pelo contrário, a captar as “linhas verticais” e a submatriz A_{gg} tenderá a captar as “linhas diagonais” (ou seja, alterações de intensidade na vertical e horizontal); a subimagem A_{hh} será uma versão mais suavizada ou desfocada (isto é, com menos detalhes) da imagem inicial.

O processo acima descrito pode repetir-se, aplicando-se uma nova transformação à submatriz A_{hh} e assim sucessivamente.

4.4 Sinais e filtros digitais

Como já referimos, um sinal digital é, simplesmente, uma aplicação de \mathbb{Z} em \mathbb{C} , ou, dito de outro modo, é uma sequência $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. No que se segue, usaremos ambas as notações $(x(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ ou $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ para um determinado sinal, conforme seja mais conveniente, sendo a primeira das notações mais apropriada quando pensarmos num sinal digital como uma aplicação de \mathbb{Z} em \mathbb{C} .

Como exemplo simples de um sinal digital, temos o chamado *impulso unitário* ou *Dirac discreto* δ , definido por

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \quad (4.46)$$

Ao valor $\epsilon := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2$ chamamos *energia do sinal*. Assim, os sinais de energia finita são precisamente os elementos de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Nota No que se segue, trataremos sempre com sinais de energia finita.

Definição 4.3 Uma aplicação $F : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ é chamada *sistema ou filtro digital*.

Assim cada sinal $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ (*input*) é transformado por F noutro sinal $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ (*output*), resposta do sistema ao sinal inicial.

transformadas rápidas com ôndulas

Definição 4.4 Dado um sinal digital $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ e dado $b \in \mathbb{Z}$, chama-se *translação* desse sinal por b e denota-se por $T_b x$ ao sinal definido por

$$(T_b x)(k) = x(k - b). \quad (4.47)$$

Exemplo 4.1 A translação por n do Dirac discreto é o sinal tal que

$$(T_n \delta)(k) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (4.48)$$

Esse sinal é simplesmente denotado por δ_n .

Na prática, um filtro digital deverá satisfazer certas propriedades, tais como:

- (i) *Linearidade*: isto significa que F deve ser uma aplicação linear.
- (ii) *Invariância no tempo* ou *invariância sob translação*: $F(T_b x) = T_b(Fx)$.
- (iii) *Continuidade*: Se $((x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de sinais e $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$,⁹ então $F(x_n) \rightarrow F(x)$, quando $n \rightarrow \infty$.

Nota De aqui em diante, quando nos referirmos a um filtro, assumimos sempre que ele satisfaz as três propriedades acima mencionadas, isto é, será sempre linear, invariante no tempo e contínuo.

Começemos por observar que qualquer sinal $x = (x_k)$ se pode decompor à custa das translações do Dirac discreto

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \delta_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k T_k \delta. \quad (4.49)$$

Então, a imagem de x por um filtro F vem dada por

$$\begin{aligned} y = F(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k H(T_k \delta) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k T_k H(\delta). \end{aligned} \quad (4.50)$$

⁹A convergência a que nos referimos é a convergência para a norma de $\ell^2(\mathbb{Z})$, embora por vezes também se use a convergência simples ou pontual, significando que $x_n \rightarrow x \iff \forall k \in \mathbb{Z} (x_n)(k) \rightarrow x(k)$, quando $n \rightarrow \infty$.

transformadas rápidas com ôndulas

Definição 4.5 Seja $F : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ um filtro. Ao sinal $h := F(\delta)$, ou seja, à imagem pelo filtro do Dirac discreto, chamamos resposta ao impulso unitário.

A equação (4.50) significa que

$$y_n = (Fx)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k h_{n-k} \quad (4.51)$$

onde $h := F(\delta)$.

Definição 4.6 Dados dois sinais discretos x, y , chama-se convolução desses sinais e denota-se por $x * y$ ao sinal definido por

$$(x * y)_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_{n-k} \quad (4.52)$$

É imediato reconhecer que $x * y = y * x$.

Vemos, então, que um filtro fica totalmente caracterizado pela sequência $h = F(\delta)$ que é a sua resposta ao impulso unitário, tendo-se

$$Fx = x * h. \quad (4.53)$$

Assim, em processamento de sinal digital, um filtro é definido por meio de uma convolução com uma certa sequência $h = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, usando-se por vezes o termo filtro para designar a própria sequência. Se $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ tem apenas um número finito de termos não nulos, então a soma (4.53) é calculada apenas com um número finito de operações. Filtros desse tipo são chamados filtros de *Resposta Finita ao Impulso* (em inglês designados por FIR).

Definição 4.7 Um filtro F diz-se causal se $(Fx)_N$ depende apenas dos coeficientes x_k de x para $k \leq N$. A fórmula de convolução (4.53) mostra que isso implica que $h_k = 0$ para $k < 0$.

Definição 4.8 Um filtro F diz-se estável se qualquer sinal limitado x é transformado num sinal limitado $F(x)$.

Como, atendendo a (4.53) e (4.52), se tem

$$|(Fx)_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n| \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|,$$

transformadas rápidas com ôndulas

segue-se que é suficiente que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k| < \infty$ para que o filtro seja estável. Pode mostrar-se também que esta condição é necessária. Assim, um filtro será estável se e só se a sua resposta ao impulso, h , satisfizer $h \in l^1(\mathbb{Z})$.

Definição 4.9 A função

$$H(\xi) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ih\xi} \quad (4.54)$$

é chamada função resposta-frequência ou função de transferência do filtro $h = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.¹⁰

Definição 4.10 Dado um sinal digital x , chama-se decimação por dois e denota-se por $[x] \downarrow 2$ ao sinal obtido de x "retendo" apenas os seus termos de ordem par, i.e.

$$([x] \downarrow 2)_k = a_{2k}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.55)$$

Definição 4.11 Dado um sinal x , chama-se interpolação por dois desse sinal e denota-se por $[x] \uparrow 2$ ao sinal obtido de x inserindo zeros entre cada dois dos seus termos, i.e.

$$([x] \uparrow 2)_k = \begin{cases} a_{k/2} & \text{se } k \text{ par} \\ 0 & \text{se } k \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (4.56)$$

O símbolo $\tilde{\cdot}$ é usado para representar involução, isto é, conjugação e inversão no tempo, ou seja,

$$\tilde{x}_k = \overline{x_{-k}}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.57)$$

Consideremos então o sinal $\mathbf{c}^j = (c_k^j)$ dos coeficientes da aproximação v_j na base $\phi_{j,k}$ de V_j . De acordo com (4.10) e (4.14), temos que a sequência \mathbf{c}^{j-1} é obtida de \mathbf{c}^j do seguinte modo:

$$\mathbf{c}^{j-1} = [\tilde{h} * \mathbf{c}^j] \downarrow 2, \quad (4.58)$$

onde $h = (h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é o filtro da função escala ϕ . De modo análogo,

$$\mathbf{d}^{j-1} = [\tilde{g} * \mathbf{c}^j] \downarrow 2. \quad (4.59)$$

¹⁰Esta definição não coincide exactamente com a introduzida no Capítulo 3 para a função de transferência do filtro associado à função escala, sendo a diferença apenas na normalização.

transformadas rápidas com ôndulas

Por outro lado, vemos de imediato, de (4.21), que

$$\mathbf{c}^j = (h * [\mathbf{c}^{j-1}] \uparrow 2) + (g * [\mathbf{d}^{j-1}] \uparrow 2). \quad (4.60)$$

Quer dizer:

- em cada passo do algoritmo de decomposição do sinal original, é feita a filtragem desse sinal com os filtros \tilde{h} e \tilde{g} , fazendo-se a decimação por dois dos sinais obtidos.
- Na fase de reconstrução, é feita interpolação por dois de cada um dos sinais obtidos na decomposição, filtram-se os sinais com os filtros h e g e somam-se os sinais obtidos.

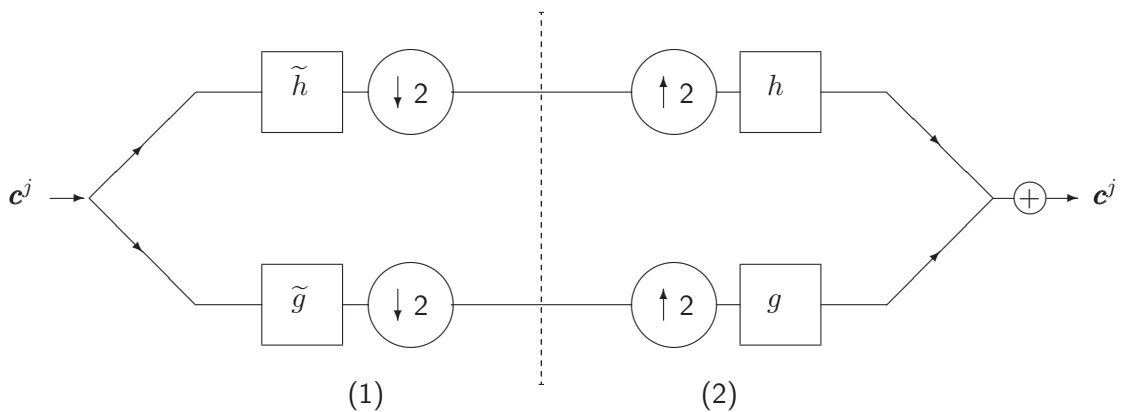


Figura 4.3: Esquema de decomposição e reconstrução

Em processamento de sinal digital, (1) e (2) constituem as fases de análise e síntese de um processo conhecido por *esquema de filtragem de duas bandas com capacidade de reconstrução perfeita*; para mais pormenores sobre a ligação entre a teoria das ôndulas e a teoria de bancos de filtros, sugerimos a leitura dos artigos [RV91, Vai87, Vet86] e [VH92]. Os livros de Cohen e Ryan [CR95] e de Strang e Nguyen [SN96] são também excelentes referências sobre este assunto.

4.5 Exercícios

Nota Os exercícios que se seguem devem ser resolvidos utilizando a package *Wavelet Explorer* do *Mathematica*.

- Exercício 4.1. a) Gere uma tabela de 8 números aleatórios.
- b) Obtenha a transformada discreta dessa tabela de valores, usando como ôndula analisadora a ôndula de Haar.
 - c) Verifique quantas decomposições foram efectuadas.
 - d) Use a função *PlotCoefficients* para obter uma representação gráfica dos coeficientes da decomposição.
 - e) Use a função *PhaseSpacePlot* para obter uma representação diferente dos mesmos coeficientes.
 - f) Use a função *MRDecomposition* para obter a decomposição multi-resolução do “sinal” inicial e, usando a função *PlotCoefficients* obtenha o gráfico de cada um dos níveis de decomposição.
 - g) Obtenha a transformada inversa dos dados transformados.
 - h) Verifique que os dados originais são recuperados exactamente.

Exercício 4.2. Considere o seguinte problema de valores iniciais (equação de Burger) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 \leq x \leq 1024, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = \sin\left(\frac{2\pi x}{1024}\right), & 0 \leq x \leq 1024, \end{cases}$$

com coeficiente de viscosidade $\mu = 1.5$. O ficheiro *shocksin.dat* que se encontra na directoria *Wavelets/Data* contém uma tabela de valores da solução desse problema no instante $t = 400$, para os valores de $x = 0, 1, \dots, 1023$.

- a) Esboce o gráfico da função que define a condição inicial e represente também graficamente os pontos da tabela referida.
- b) Obtenha a transformada discreta dessa tabela de valores, usando como ôndula analisadora a ôndula de Daubechies ${}_2\psi$.

transformadas rápidas com ôndulas

- c) Use a função *PlotCoefficients* para obter uma representação gráfica dos coeficientes da decomposição.
- d) Use a função *Cumulative Energy* para verificar que 99.9% da energia total está concentrada nos 14 coeficientes de maior módulo.
- e) Use a função *Compress* para obter uma compressão do vector dos dados transformados com uma taxa de compressão de 1024/20 (isto é, retendo apenas os 20 coeficientes de maior módulo dos 1024 coeficientes originais).
- f) Obtenha a transformada inversa dos dados comprimidos.
- g) Obtenha a representação gráfica da tabela de pontos obtidos na alínea anterior.
- h) Compare com o gráfico da tabela de pontos representada na alínea a).
- i) Determine o erro entre os dados originais e os dados recuperados, relativamente à norma $\| \cdot \|_2$.

Exercício 4.3. O ficheiro *shocknoi.dat* que se encontra na directoria *Wavelets/Data* contém dados que correspondem a valores da solução de uma modificação do problema considerado no Exercício anterior: as condições iniciais são uma sobreposição de senos de diversas frequências e à equação de Burger foi adicionado um certo *ruído*.

- a) Obtenha a representação gráfica dos dados contidos nesse ficheiro.
- b) Obtenha a transformada desses dados, usando a ôndula de Battle-Lemarié de grau 4.
- c) Efectue uma compressão dos dados transformados, usando a função *Compress*, e considerando nulos os coeficientes cujo valor absoluto seja inferior ao valor limiar (*threshold*) de 1.5. (Efectue a compressão apenas sobre os coeficientes dos espaços de “detalhe” e utilize a técnica de *shrinkage*.)
- d) Efectue a transformada inversa dos dados comprimidos e represente graficamente os dados obtidos.
- e) Repita as alíneas b) - d) com diferentes ôndulas analisadoras, diferentes valores do limiar e com e sem *shrinkage*.

transformadas rápidas com ôndulas

Exercício 4.4. Considere a função de duas variáveis $f(x, y)$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & (2 \leq |x| < 3 \wedge |y| < 3) \vee (|x| < 3 \wedge 2 \leq |y| < 3); \\ 0 & \text{restantes valores de } x \text{ e } y. \end{cases}$$

- a) Considere a matriz 64×64 cujas entradas são os valores de $f(x, y)$ para $x = -4(1/8)4 - 1/8$ e $y = -4(1/8)4 - 1/8$.
- b) Use a função *ListDensityPlot* para obter um gráfico de densidade destes dados.
- c) Transforme os dados, usando a transformada discreta com ôndula de Daubechies ($N = 2$); verifique quantas submatrizes são obtidas e as respectivas dimensões.
- d) Obtenha a representação gráfica dos dados transformados, utilizando a função *PlotCoefficients2D*.
- e) Obtenha a transformada inversa dos dados transformados e faça a sua representação gráfica.
- f) Obtenha a representação gráfica das matrizes que contêm os coeficientes dos “pormenores” correspondentes ao primeiro nível de decomposição.
- g) Usando apropriadamente a função *InverseWaveletTransform* obtenha a imagem correspondente a um nível de resolução inferior ao inicial.

Exercício 4.5. Este exercício destina-se a efectuar as transformadas rápidas de um sinal uni-dimensional, usando a *Wavelet Toolbox* do *MATLAB*, sem recurso à interface gráfica.

- a) Obtenha ajuda sobre as funções *dwt* e *wavedec*.
- b) Construa um sinal (vector) $signal = (1, 2, \dots, 9, 10, 10, 9, \dots, 2, 1)$.
 - (i) Efectue um passo de decomposição da transformada rápida com ôndula, escolhendo para ôndula analisadora a ôndula de Haar. Qual o comprimento dos vectores dos coeficientes de *aproximação* e *detalhe*?
 - (ii) Repita a alínea anterior, usando a ôndula de Daubechies *db2*. Que conclui? Como justifica tal resultado?
 - (iii) Efectue uma decomposição do sinal original até ao nível 3, usando a ôndula de Daubchies *db2*.

transformadas rápidas com ôndulas

- (iv) Peça ajuda sobre as funções *detcoef* e *appcoef* e utilize-as para determinar os coeficientes de aproximação do nível 2 e 1 e os coeficientes de detalhe dos mesmos níveis.
- (v) Obtenha informação sobre as funções *idwt*, *waverec*, *wrecoef* e *upcoef*. Use-as para reconstruir a aproximação do nível 3 e os detalhes dos níveis 1,2 e 3.

Exercício 4.6. Este exercício destina-se a efectuar as transformadas rápidas de um sinal uni-dimensional, usando a *Wavelet Toolbox* do *MATLAB*, com recurso à interface gráfica.

- a) Considere novamente o sinal do exercício anterior. Use o comando *save* para criar um ficheiro *senal.mat*.
- b) Use o comando *wavemenu* e seleccione a opção *Wavelet 1-D*. Faça o *load* do sinal por si criado e proceda às mesmas operações do exercício anterior, mas usando a interface gráfica.
- c) Explore as capacidades da *toolbox* seleccionando, em *File* → *Example Analysis*, alguns dos sinais aí contidos. Em particular, seleccione sinais *com ruído* (*Noisy Signals*) e efectue *de-noising*.

Exercício 4.7. Explore as capacidades da *toolbox* do *MATLAB* na análise de imagens, usando a interface gráfica. Para isso seleccione a opção *Wavelet 2-D* do menu e, em *File* → *Example Analysis*, escolha algumas das imagens aí contidas.

Exercício 4.8. Considere novamente a matriz do Exercício 4.3 . Guarde-a num ficheiro *matriz.mat* e, usando a interface gráfica da *toolbox*, decomponha-a, usando a ôndula de Daubechies *db2*. Use 1 e 2 níveis de decomposição.

Software e referências adicionais

Terminamos este curso referindo uma lista de alguns produtos de *software* e de recursos electrónicos, úteis para quem deseje trabalhar com *wavelets*, e indicando também alguma bibliografia adicional.

Software

- *Wavelet Digest* – é uma espécie de jornal electrónico que dá informação actualizada sobre ôndulas: seminários, conferências, novos livros e artigos, respostas a questões, etc. Para o subscrever bastará aceder a:

<http://www.wavelet.org>

Este *site* é também muito útil para obter referências sobre ôndulas.

- *Numerical Recipes* – a segunda edição de *Numerical Recipes in C* e *Numerical Recipes in Fortran* inclui discussão da transformada discreta com wavelets, transformadas para funções de várias variáveis e aplicações de ôndulas a em compressão de imagem.

Referência: W. H. Press et. al., *Numerical Recipes in C* e *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge University Press, 1992.

- *Wavelet Packet Laboratory for Windows* – desenvolvida por R. Coifman et. al. para IBM - PC's é uma ferramenta interactiva para encontrar a “melhor” representação de um sinal digital. Inclui manual e disquete e serve de acompanhamento ao livro de Wickerhauser [Wic94].

software e referências adicionais

(Requer DOS e Windows 3.1)

Referência: A. K. Peters, Ltd. 289 Linden St., Wellesley, MA 02181 USA.

- *Mathematica Wavelet Explorer* – package de *Mathematica* que permite a análise de sinais uni-dimensionais e de imagens. (Requer versão 2.2 do Mathematica)

Referência: Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois.

O manual de utilização pode ser usado como um livro básico de introdução ao estudo das ôndulas.

- *Wavelet Toolbox for use with MATLAB* – toolbox de MATLAB, tem uma ótima interface gráfica e é de muito fácil utilização.

Referência: The MathWorks, Inc. (e-mail: info@mathworks.com).

- *WAVELAB Toolbox*– trata-se de uma *package* escrita em *MATLAB* por David Donoho e seus colaboradores, na Universidade de Stanford. Esta *package* é gratuita e pode ser obtida através da Internet:

<ftp://playfair.stanford.edu/pub/wavelab>

ou

<http://playfair.stanford.edu/wavelab>

Mais pormenores podem ser obtidos no livro de Mallat [Ma198]. Este livro contém também uma lista de outras *packages* gratuitas para trabalhar com ôndulas.

- O livro de Chui [Chu97] inclui uma lista muito completa de *software* comercial e de domínio público e ainda uma extensa lista de *sites* relacionados com ôndulas.

Referências adicionais

Para além das referências citadas ao longo do texto, foram também utilizados na escrita destas notas os seguintes livros: [AS99], [BNB00], [Chu97], [HW96], [Koo93], [LMR98], [RW98], [SSW02], [SN96], e [Wa199].

Dois artigos sobre ôndulas, de carácter expositório e bastante interessantes, são os de [Str93] e [JS94].

software e referências adicionais

Gostaríamos de recomendar vivamente a leitura do livro de B. B. Hubbard [Hub98], o qual é um exemplo fascinante da capacidade de divulgação, numa linguagem extremamente acessível, da teoria das ôndulas.

Existem diversas variantes importantes da teoria básica das ôndulas. De de entre essas variantes destacamos as seguintes (com indicação de algumas referências básicas sobre o respectivo tema):

- *wavelet-packets*, introduzidas em [CMQW89] e aplicadas a compressão de sinal em [Wic92]; recomendamos ainda o livro de Wickerhauser [Wic94] e o artigo de [Tor92];
- bases de Wilson – [DJJ91];
- bases locais de senos e co-senos – [CM91], [AWW92];
- multiwavelets – [GHM94];
- ôndulas interpoladoras – [Don94];
- esquema de *lifting* e ôndulas de segunda geração – [Swe95, Swe96, Swe97].

Por limitações de tempo, não foram indicadas nestes textos nenhuma aplicação específica da teoria das ôndulas. Apenas para dar uma ideia da diversidade de áreas de aplicação desta teoria, segue-se uma pequena lista de publicações onde são descritas algumas dessas aplicações.

- *Processamento de sinal e imagem*: [RV91], [Teo98] (processamento de sinal); [HJS94], [VU92] (compressão de imagem), [MTWW00] (detecção de características de materiais); [RLG93] (mamografia); [BT93] (modelação da audição humana e compressão de sinal acústico); [Bri95] (compressão de impressões digitais); [DJ94] (supressão de ruído) e [DN98];
- *Análise Numérica*: [BCR91], [BCR92] (compressão de operadores); [Jaf92], [Bey93], [JS93], [QW93], [SS92] e [Dah01] (problemas de equações diferenciais);
- *Mecânica Quântica*: [PS92];

software e referências adicionais

- *Fractais*: [FHV93], [Mas94] e [Mey97];
- *Estatística*: [AO95] e [Ogd96];
- *Medicina e Biologia*: [AU96];
- *Electromagnetismo*: [SSW02];
- *Geofísica*: [FK93].

Bibliografia

- [AO95] A. Antoniadis and G. Oppenheim, editors. *Wavelets and Statistics*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [AS99] E. Aboufadel and S. Schlicker. *Discovering Wavelets*. John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [AU96] A. Aldroubi and M. Unser, editors. *Wavelets in Medicine and Biology*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1996.
- [Aus92] P. Auscher. Wavelets with boundary conditions on the interval. In C. K. Chui, editor, *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, volume 2 of *Wavelet Analysis and Its Applications*, pages 237–256. Academic Press, Boston, 1992.
- [Aus93] P. Auscher. Ondelettes à support compact et conditions aux limites. *J. Funct. Anal.*, 111:29–43, 1993.
- [AWW92] P. Auscher, G. Weiss, and M. V. Wickerhauser. Local sine and cosine bases of Coifman and Meyer and the construction of smooth bases. In C. K. Chui, editor, *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, volume 2 of *Wavelet Analysis and Its Applications*, pages 181–216. Academic Press, Boston, 1992.
- [Bat87] G. Battle. A block spin construction of ondelettes. Part I: Lemarié functions. *Comm. Math. Phys.*, 110:601–615, 1987.
- [BBH93] J. N. Bradley, C. M. Brislawn, and T. Hopper. The FBI wavelet/scalar quantization standard for gray-scale fingerprint image compression. In *Visual Infor-*

bibliografia

- mation Processing II*, volume 1961, pages 293–304, Orlando, Florida, 1993. SPIE.
- [BCR91] G. Beylkin, R. Coifman, and V. Rokhlin. Fast wavelet transforms and numerical algorithms. *Comm. Pure Appl. Math.*, 44:141–183, 1991.
- [BCR92] G. Beylkin, R. Coifman, and V. Rokhlin. Wavelets in numerical analysis. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, editors, *Wavelets and Their Applications*, pages 181–210. Jones and Bartlett, Boston, 1992.
- [Ben97] J. J. Benedetto. *Harmonic Analysis and Applications*. CRC Press, New York, 1997.
- [Bey93] G. Beylkin. On wavelet-based algorithms for solving differential equations. In J. J. Benedetto and M. Frazier, editors, *Wavelets: Mathematics and Applications*, pages 449–466. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.
- [BNB00] G. Bachman, L. Narici, and E. Beckenstein. *Fourier and Wavelet Analysis*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Boc90] N. Boccara. *Functional Analysis – An Introduction for Physicists*. Academic Press, San Diego, 1990.
- [Bri95] C. M. Brislawn. Fingerprints go digital. *Notices of the A.M.S.*, 42(11):1278–1283, 1995.
- [BT93] J. J. Benedetto and A. Teolis. A wavelet auditory model and data compression. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 1(7):3–28, 1993.
- [CC92] A. Cohen and J. P. Conze. Régularité des bases d’ondelettes et mesures ergodiques. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 8:351–365, 1992.
- [CDF92] A. Cohen, I. Daubechies, and J.-C. Feauveau. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45:486–560, 1992.
- [CDV93] A. Cohen, I. Daubechies, and P. Vial. Wavelets and fast wavelet transforms on an interval. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 1:54–81, 1993.

- [Chu92] C. K. Chui. *An Introduction to Wavelets*. Academic Press, San Diego, 1992.
- [Chu97] C. K. Chui. *Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Analysis*. SIAM, Philadelphia, 1997.
- [Cip93] B. Cipra. Wavelet applications come to the fore. *SIAM News*, 27(7), 1993.
- [CM91] R. Coifman and Y. Meyer. Remarques sur l'analyse de Fourier à fenêtre. *C. R. Acad. Sci.*, 4312:259–261, 1991.
- [CMQW89] R. Coifman, Y. Meyer, S. Quake, and M. V. Wickerhauser. Signal processing and compression with wavelet packets. In Y. Meyer and S. Roques, editors, *Proceedings of the International Conference on Wavelets, Marseille, Paris, 1989*. Masson.
- [Coh00] A. Cohen. Wavelet Methods in Numerical Analysis. In P. G. Ciarlet and J. L. Lions, editors, *Handbook of Numerical Analysis*, volume VII, pages 417–711. Elsevier, Amsterdam, 2000.
- [CR95] A. Cohen and R. D. Ryan. *Wavelets and Multiscale Signal Processing*. Chapman & Hall, London, 1995.
- [Dah01] W. Dahmen. Wavelet methods for PDEs - some recent developments. *J. Comp. Appl. Math.*, 128:133–185, 2001.
- [Dau88] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41:909–996, 1988.
- [Dau92] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*, volume 61 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, 1992.
- [De 78] C. De Boor. *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [DGM86] I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer. Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys.*, 27:1271–1283, 1986.
- [DJ94] D. L. Donoho and I. M. Johnstone. Minimax estimation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81:425–455, 1994.

bibliografia

- [DJJ91] I. Daubechies, S. Jaffard, and J.-L. Journé. A simple Wilson orthonormal basis with exponential decay. *SIAM J. of Math. Anal.*, 22:554–572, 1991.
- [DL92] I. Daubechies and J. Lagarias. Two-scale difference equations: II. Local regularity, infinite product of matrices and fractals. *SIAM J. of Math. Anal.*, 23:1031–1079, 1992.
- [DM72] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier Series and Integrals*. Academic Press, New York, 1972.
- [DN98] G. M. Davis and A. Nosratinia. Wavelet-based image coding: an overview. *Applied and Computational Control, Signals and Circuits*, 1(1), 1998.
- [Don94] D. L. Donoho. Interpolating wavelet transforms. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 1994.
- [FHV93] M. Farge, J. C. R. Hunt, and J. C. Vassilicos, editors. *Wavelets, Fractals and Fourier Transforms*. Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [FK93] E. Foufoula-Gergiou and P. Kumar, editors. *Wavelets in Geophysics*, volume 4 of *Wavelet Analysis and Its Applications*. Academic Press, Boston, 1993.
- [GHM94] J. Geronimo, D. Hardin, and P. Massopust. Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions. *J. Approx. Theory*, 78:373–401, 1994.
- [GM84] A. Grossmann and J. Morlet. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. of Math. Anal.*, 15(4):723–736, 1984.
- [GW98] C. Gasquet and P. Witomski. *Fourier Analysis and Applications*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Haa10] A. Haar. Zur theorie der orthogonalen Funktionen Systeme. *Mat. Ann.*, 69:331–371, 1910.
- [HJS94] M. Hilton, B. Jawerth, and A. Sengupta. Compressing still and moving images with wavelets. *Multimedia Systems*, 2:218–227, 1994.

- [Hub98] B. B. Hubbard. *The World According to Wavelets: The Story of a Mathematical Technique in the Making*. AK Peters, Wellesley, Massachusetts, 1998.
- [HW96] E. Hernández and G. Weiss. *A First Course on Wavelets*. CRC Press, Boca Raton, New York, 1996.
- [Iór88] R. Iório. *Equações Diferenciais: Uma Introdução*. IMPA – CNPq, Rio de Janeiro, 1988.
- [Jaf91] S. Jaffard. Pointwise smoothness, two-microlocalization and wavelet coefficients. *Publications Mathématiques*, 35:155–168, 1991.
- [Jaf92] S. Jaffard. Wavelet methods for the fast resolution of elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29:965–986, 1992.
- [Jan88] A. J. E. M. Janssen. The Zak transform: a signal transform for sampled time-continuous signals. *Phillips J. Res.*, 43:23–69, 1988.
- [JS93] B. Jawerth and W. Sweldens. Wavelet multiresolution analyses adapted for the fast solution of boundary value ordinary differential equations. In N. Melson, T. Manteuffel, and S. McCormick, editors, *Proceedings of the Sixth Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*, number 3224, pages 259–273. NASA Conference Publication, 1993.
- [JS94] B. Jawerth and W. Sweldens. An overview of wavelet based multiresolution analyses. *SIAM Review*, 36:377–412, 1994.
- [Kai94] G. Kaiser. *A Friendly Guide to Wavelets*. Birkhäuser, Basel, 1994.
- [Koo93] T. H. Koornwinder, editor. *Wavelets: An Elementary Treatment of Theory and Applications*, volume 1 of *Approximations and Decompositions*. World Scientific, Singapore, 1993.
- [Lem88] P. G. Lemarié. Une nouvelle base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R}^n)$. *J. de Mat. Pures et Appl.*, 67:227–236, 1988.
- [LMR98] A. K. Louis, P. Maascript, and A. Rieder. *Wavelets: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, Chichester, 1998.

bibliografia

- [Mal89] S. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315:69–87, September 1989.
- [Mal98] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, New York, 1998.
- [Mas94] P. Massopust. *Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets*. Academic Press, San Diego, 1994.
- [Mey86a] Y. Meyer. Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs. *Séminaire Bourbaki*, 662:1–15, 1985-1986.
- [Mey86b] Y. Meyer. Ondelettes, fonctions spline et analyses graduées. Curso na Universidade de Torino, 1986.
- [Mey91] Y. Meyer. Ondellets sur l'intervalle. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 7:115–143, 1991.
- [Mey97] Y. Meyer. *Wavelets, Vibrations and Scalings*. AMS, Providence, Rhode Island, 1997.
- [MTWW00] P. Maascript, G. Teschke, W. Willmann, and G. Wollmann. Detection and classification of material attributes - a practical application of wavelet analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 48(08):2432–2438, 2000.
- [Ogd96] R. T. Ogden. *Essential Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis*. Birkhäuser, Boston, 1996.
- [Pri97] H. A. Priestley. *Introduction to Integration*. Clarendon Press, London, 1997.
- [PS92] T. Paul and K. Seip. Wavelets and quantum mechanics. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, editors, *Wavelets and their Applications*, pages 302–322. Jones and Bartlett, Boston, 1992.
- [QW93] S. Qian and J. Weiss. Wavelets and the numerical solution of partial differential equations. *J. Comp. Phy.*, 106:155–175, 1993.

- [QW95] E. Quak and N. Weyrich. Wavelets on the interval. In S. P. Singh, editor, *Approximation Theory, Wavelets and Applications*, pages 247–283. NATO ASI Series, Kluwer, Dordrecht, 1995.
- [RLG93] W. Richardson Jr., H. Lonbotham, and D. Gokham. Wavelet analysis of mammograms. In Y. Meyer and S. Roques, editors, *Progress in Wavelet Analysis and Applications*, pages 599–608, Gif-sur-Yvette, France, 1993. International Conference on Wavelets and Applications, Toulouse, France, June 1992, Editions Frontières.
- [Rud74] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1974.
- [Rud79] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1979.
- [RV91] O. Rioul and M. Vetterli. Wavelets and signal processing. *IEEE Signal Process. Mag.*, 8(4):14–38, 1991.
- [RW98] H. L. Resnikoff and R. O. Wells Jr. *Wavelet Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Sch27] J. Schauder. Zur theorie stetiger abbildungen in Funktionalräumen. *Math. Z.*, 26:47–65, 417–431, 1927.
- [Sch51] L. Schwartz. *Théorie des Distributions*. Hermann, Paris, 1966 (1950,1951).
- [Sch81] L. Schumaker. *Spline Functions: Basic Theory*. John Wiley, New York, 1981.
- [SN96] G. Strang and T. Nguyen. *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley-Cambridge Press, Massachusetts, 1996.
- [SP94] W. Sweldens and R. Piessens. Quadrature formulae and asymptotic error expansions for wavelet approximation of smooth functions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31:2140–2164, 1994.
- [SS92] J.-C. Shu and W.-C. Shann. Galerkin wavelet methods for two-point boundary value problems. *Numer. Math.*, 63:123–142, 1992.
- [SSW02] T. K. Sarkar, M. Salazar-Palma, and M. Wicks. *Wavelet Applications in Engineering Electromagnetics*. Artech House, Boston, 2002.

bibliografia

- [Str81] J. O. Strömberg. A modified Franklin system and higher order spline systems on \mathbb{R}^n as unconditional bases for Hardy spaces. In W. Beckner, A. P. Calderón, R. Fefferman, and P. W. Jones, editors, *Conf. in honor of Antoni Zygmund*, volume II, pages 475–493, New York, 1981. Wadsworth Math. Series.
- [Str93] R. Strichartz. How to make wavelts. *Amer. Math. Monthly*, 100:539–556, 1993.
- [Swe95] W. Sweldens. The lifting scheme: a new philosophy in biorthogonal wavelet constructions. In *Wavelet Applications in Signal and Image Processing III*, volume 2569, pages 68–79. SPIE, 1995.
- [Swe96] W. Sweldens. The lifting scheme: a custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Appl. Comp. Harmon. Anal.*, 3(2):186–200, 1996.
- [Swe97] W. Sweldens. The lifting scheme: a construction of second generation wavelets. *SIAM J. Math. Anal.*, 29(2):51–546, 1997.
- [Teo98] A. Teolis. *Computational Signal Processing with Wavelets*. Birkhäuser, Boston, 1998.
- [Tor92] B. Torrésani. Time-frequency representations: Wavelet packets and optimal decomposition. *Ann. Inst. H. Poincaré, Physique Théorique*, 56:215–234, 1992.
- [Vai87] P. P. Vaidyanathan. Theory and design of M-channel maximally decimated quadrature mirror filters with arbitrary M, having perfect reconstruction property. *IEEE Trans. on Acoust. Speech Process*, 36:476–492, 1987.
- [Vet86] M. Vetterli. Filter banks allowing perfect reconstruction. *Signal Process.*, 10(3):219–244, 1986.
- [VH92] M. Vetterli and C. Herley. Wavelets and filter banks: theory and design. *IEEE Trans. on Acoust. Speech Process*, 40(9):2207–2232, 1992.
- [VU92] M. Vetterli and K. M. Uz. Multiresolution coding techniques for digital video: a review. Invited Paper, Special Issue on Multidimensional Processing of Video

bibliografia

- Signals, Multidimensional Systems and Signal Processing. *Kluwer Acad. Pub.*, 3:191–187, 1992.
- [Wal92] G. G. Walter. A sampling theorem for wavelet subspaces. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 38:881–884, 1992.
- [Wal99] J. S. Walker. *A Primer on Wavelets and their Scientific Applications*. Chpaman & Hall, New York, 1999.
- [Wic92] M. V. Wickerhauser. Acoustic signal compression with wavelet-packets. In C. K. Chui, editor, *Wavelts: A Tutorial of Theory and Applications*, volume 2 of *Wavelet Analysis and Its Applications*, pages 679–700. Academic Press, Boston, 1992.
- [Wic94] M. V. Wickerhauser. *Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software*. A K Peters, Massachusets, 1994.
- [You80] R. M. Young. *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*. Academic Press, New York, 1980.

Índice

base

de Hilbert, 10

de Schauder, 8

ortogonal, 3

ortonormada, 3, 10

desigualdade

de Cauchy-Schwarz, 3

espaço

de Hilbert, 6

vectorial normado, 2

identidade

de Parseval, 3, 10

norma, 2

produto interno, 2

sequência

completa, 9

fechada, 9

total, 9

suporte, 7

