

# Complementos de Análise Matemática

## PARTE III - Séries de Fourier e Aplicações a EDPs

Maria Joana Soares  
Ricardo Severino

MIECivil

setembro 2011

# Introdução

O estudo das equações diferenciais teve o seu início no séc. XVII, com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Foi um grande sucesso da matemática desse século poder fornecer às leis da Mecânica e dos movimentos dos planetas (*Mecânica Celeste*) modelos matemáticos que concordavam admiravelmente bem com as observações. Tais modelos envolviam o uso de equações diferenciais ordinárias.

O sucesso obtido levou os físicos e matemáticos do século XVIII a procurar usar o Cálculo Diferencial para obter também modelos para outro tipo de fenómenos físicos (problemas de mecânica dos meios contínuos, condução do calor, etc.).

As equações diferenciais resultantes são, para estes casos, equações que envolvem derivadas parciais de uma função em relação a duas ou mais variáveis, isto é, são **equações de derivadas parciais**.

As três equações básicas que já aparecem nos estudos dos matemáticos do séc. XVIII são as seguintes:

- no problema das vibrações transversais de uma corda, a posição  $u(x, t)$  de um ponto  $x$  da corda, num instante  $t$ , deve satisfazer a chamada **equação das ondas** (ou **das cordas vibrantes**)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (1)$$

- no problema da condução do calor numa barra, a temperatura  $u(x, t)$  do ponto  $x$  da barra, no instante  $t$ , deve satisfazer a **equação do calor** (ou **da difusão**)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (2)$$

- no problema do equilíbrio de uma membrana sob a acção de certas forças, obtém-se que uma certa função  $u(x, y)$  deve satisfazer a chamada **equação de Laplace**

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

numa certa região do plano  $x, y$ .

Para estes problemas, a obtenção de soluções satisfazendo, para além da equação diferencial, certas condições adicionais (**condições iniciais e/ou de fronteira**) é uma tarefa difícil.

Um dos métodos de resolução destes problemas é o chamado **método de Fourier** o qual requer uma ferramenta matemática conhecida por **análise de Fourier**. Esta ferramenta deve o seu nome ao matemático francês <sup>1</sup> que, no início do século XIX, desenvolveu uma teoria matemática para o problema da condução do calor baseada na expansão de funções periódicas em certo tipo de séries trigonométricas (hoje conhecidas por séries de Fourier).

As séries de Fourier, bem como a sua generalização para os chamados integrais de Fourier (transformada integral de Fourier), constituem hoje um instrumento indispensável na maior parte das ciências aplicadas e em Engenharia.

Vamos então estudar séries de Fourier.

---

<sup>1</sup>Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).

## Função periódica

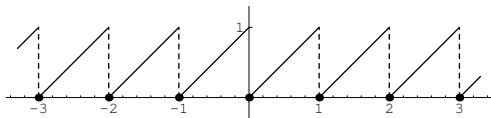
Seja  $P \neq 0$ . Uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **periódica de período  $P$** , se

$$\forall x \in D, \quad x + P \in D, \quad x - P \in D \text{ e } f(x + P) = f(x).$$

Nesse caso, dizemos também que  $f$  é  $P$ -periódica.

### Exemplos:

- 1 As funções  $\cos(x)$  e  $\sin(x)$  são periódicas de período  $2\pi$ .
- 2 As funções  $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  e  $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  são periódicas de período  $\frac{2L}{n}$ .
- 3 A função  $f(x) = x - [x]$ , onde  $[x]$  representa o maior inteiro não superior a  $x$ , é periódica de período 1.



## Série de Fourier de uma função periódica

Seja  $f$  uma função seccionalmente contínua em  $\mathbb{R}$  e periódica de período  $2L$ . Chama-se **série de Fourier de  $f$**  à série de funções

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \quad (4)$$

onde os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  definidos por (5) e (6) são chamados **coeficientes de Fourier** da função  $f$ . As fórmulas (5) e (6) são conhecidas por **fórmulas de Euler**.

## Observações:

- Se (4) é a série de Fourier de  $f$ , é usual escrever-se

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \quad (7)$$

para lembrar que a série está associada com a função  $f$ . Por vezes denotamos a série de Fourier de  $f$  por  $S(f)$ . A expressão  $S_N(f)$  designa a soma parcial dos primeiros  $N$  termos da série, isto é, a função dada por

$$(S_N(f))(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

- Se  $f$  é seccionalmente contínua e periódica de período  $2L$ , então

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{a-L}^{a+L} f(x) dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Por exemplo, tem-se  $\int_{-L}^L f(x) dx = \int_0^{2L} f(x) dx$ .

## Convergência de séries

- Começamos por relembrar que uma série numérica  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  é convergente se existir  $\ell \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N a_n = \ell$ . Nesse caso escrevemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \ell$$

e chamamos a  $\ell$  a soma da série.

- Diz-se que uma série de funções  $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  converge num ponto  $x_0 \in D$ , se a série numérica  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$  for convergente.
- Diz-se que uma série de funções  $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  converge em  $D$  se, para cada  $x \in D$ , a série numérica  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  convergir; neste caso, fica definida a **função soma**  $f$ , dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \quad x \in D.$$



## Convergência da série de Fourier

Dada uma certa função  $f$ , periódica de período  $2L$  e seccionalmente contínua, não podemos garantir que a série de Fourier de  $f$  convirja, em cada ponto  $x$ , para  $f(x)$ . Vamos enunciar de seguida um resultado que nos indica condições **suficientes** de convergência da série de Fourier da função  $f$ .

Começamos por introduzir a seguinte definição:

Uma função  $f$  diz-se seccionalmente diferenciável em  $\mathbb{R}$  se for seccionalmente contínua em  $\mathbb{R}$  e se a função derivada  $f'$  também for seccionalmente contínua.<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Note-se que, se  $f$  é seccionalmente contínua, a sua função derivada pode não estar definida em alguns pontos; em particular,  $f'$  não estará definida nos pontos de descontinuidade de  $f$ .

## Convergência da série de Fourier

Seja  $f$  uma função periódica de período  $2L$  e seccionalmente diferenciável. Então, a série de Fourier de  $f$ ,  $S_f$ , dada por (4)-(6), converge em todo o ponto  $x \in \mathbb{R}$  e tem-se

$$S_f(x) = \frac{1}{2} (f(x^-) + f(x^+))$$

onde  $f(x^-) = \lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$  e  $f(x^+) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$ .

- Se  $x$  for um ponto de continuidade de  $f$ , então será  $f(x^-) = f(x^+) = f(x)$ , donde, virá  $\frac{1}{2} (f(x^-) + f(x^+)) = f(x)$  pelo que, nesse caso, teremos

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

- Nos pontos onde  $f$  não está definida ou é descontínua, a sua série de Fourier converge para a média dos limites laterais direito e esquerdo (os quais existem e são finitos, por ser  $f$  seccionalmente contínua).

**Exemplo 1** Seja  $f$  a função periódica de período  $2\pi$  e definida, no intervalo  $[-\pi, \pi)$ , por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x \leq 0; \\ x & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Usando as fórmulas (5) e (6), temos

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi n^2} \int_0^{n\pi} u \cos(u) du,$$

onde, na última passagem efectuámos uma mudança de variável definida por  $u = nx$ , para  $n \geq 1$ . Assim, temos

$$a_n = \frac{1}{\pi n^2} \left[ \cos(u) + u \operatorname{sen}(u) \right] \Big|_0^{n\pi} = \frac{1}{\pi n^2} \left( \cos(n\pi) - 1 \right) = \frac{1}{\pi n^2} \left( (-1)^n - 1 \right),$$

para  $n \geq 1$ . Para  $n = 0$  temos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \left[ \frac{x^2}{2\pi} \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

**Exemplo 1 (cont.)** Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{1}{\pi n^2} \int_0^{n\pi} u \operatorname{sen}(u) du \\ &= \frac{1}{\pi n^2} \left[ \operatorname{sen}(u) - u \cos(u) \right] \Big|_0^{n\pi} = -\frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \end{aligned}$$

para  $n \geq 1$ . Assim,

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(x) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left( \cos(x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + \dots \right) + \\ + \left( \operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x) + \dots \right). \end{aligned}$$

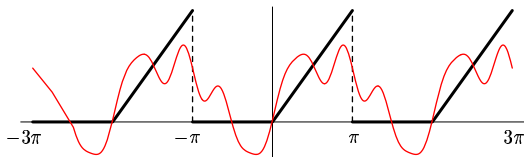
Note-se que  $f$  é seccionalmente diferenciável com descontinuidades nos pontos  $x_k = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ , tendo-se  $f(x_k^-) = \pi$  e  $f(x_k^+) = 0$ . Assim, para  $x \neq (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ , tem-se

$$S_f(x) = f(x)$$

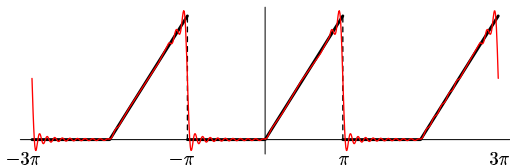
e nos pontos da forma  $x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ , tem-se

$$S_f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Nas figuras seguintes apresentam-se comparações entre os gráficos da função  $f$  e os das funções  $S_5$  e  $S_{20}$ , obtidas das somas parciais.



Comparação entre a função  $f$  e  $S_5$



Comparação entre a função  $f$  e  $S_{20}$

Como as figuras ilustram, a função  $S_5$  ainda não é uma boa aproximação para  $f$ , o mesmo já não acontecendo, com a função  $S_{20}$ . Note-se que a maior dificuldade da aproximação se deve às discontinuidades da função  $f$ .

**Exemplo 2** Seja  $f$  a função periódica de período  $2\pi$ , definida, no intervalo  $[-\pi, \pi)$ , por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \leq x \leq 0; \\ 1, & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases} \quad (8)$$

Calculemos os coeficientes de Fourier de  $f$ , usando as fórmulas de Euler:

- $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1;$
- $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = \left[ \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen}(nx)}{n} \right] \Big|_0^{\pi} = 0, \quad n = 1, 2, \dots;$
- $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}(nx) dx = - \left[ \frac{1}{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)), \quad n = 1, 2,$

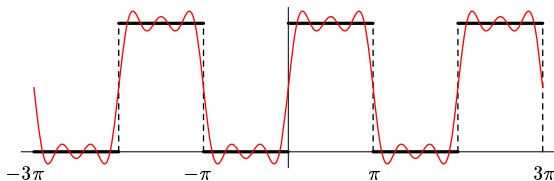
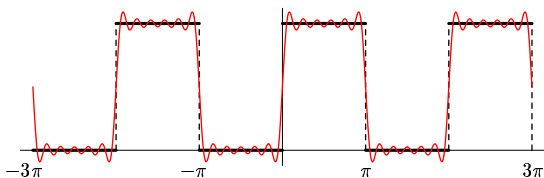
ou seja,

$$b_{2k} = 0 \quad \text{e} \quad b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi}; \quad k = 1, 2, \dots$$

Logo,

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \text{sen}((2k-1)x).$$

Uma vez mais, a comparação dos gráficos da função  $f$  com os das funções das somas parciais  $S_5$  e  $S_{11}$  dá uma ideia do modo como uma soma de funções trigonométricas se vai ajustar de modo a “reproduzir” a função  $f$ :

Gráficos das funções  $f$  e  $S_5$ Gráficos das funções  $f$  e  $S_{11}$



## Extensão periódica de uma função definida num intervalo

Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Uma função  $g : D' \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se uma **extensão** de  $f$ , se  $D \subset D'$  e, para todo o  $x \in D$ ,  $f(x) = g(x)$ . Nesse caso, dizemos que  $f$  é uma restrição de  $g$  a  $D$ .

Seja  $I$  um intervalo da forma  $(a, b)$ ,  $[a, b)$  ou  $(a, b]$ , com  $a$  e  $b$  finitos e seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Então, podemos obter uma extensão de  $f$ ,  $\tilde{f}$ , periódica de período  $P = (b - a)$ , do seguinte modo:

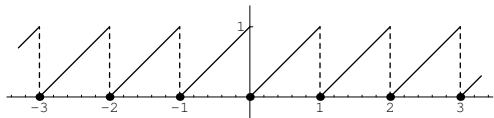
$$\tilde{f}(x + kP) = f(x), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

### Notas:

- Se  $f$  for contínua em  $I$  e os limites laterais em  $a$  e  $b$  (no caso em que  $I$  não contém um desses pontos) forem finitos, a extensão referida é uma função seccionalmente contínua em  $\mathbb{R}$ .

## Extensão periódica de uma função definida num intervalo

- No caso em que  $I = [a, b)$ , se  $f$  for contínua, seccionalmente diferenciável em  $I$  e  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(a)$  (ou, de modo análogo, se  $I = (a, b]$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(b)$ ) então a sua extensão  $(b - a)$ -periódica,  $\tilde{f}$ , será uma função contínua e seccionalmente diferenciável em  $\mathbb{R}$ , pelo que a sua série de Fourier será convergente para  $\tilde{f}(x)$  em todo o ponto  $x \in \mathbb{R}$ . Em particular, a série convergirá para  $f(x)$  para todo o  $x \in I$ .
- Se  $f$  estiver definida em  $I = [a, b]$  será possível definir a sua extensão periódica de período  $(b - a)$  apenas se  $f(a) = f(b)$ .



Extensão periódica de período 1 da função  $f(x) = x, x \in [0, 1)$

# Funções pares e ímpares

Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Então,  $f$  diz-se

- **par**, se

$$\forall x \in D, -x \in D \text{ e } f(-x) = f(x)$$

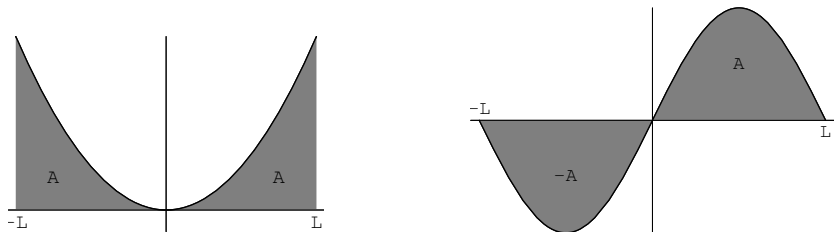
- **ímpar**, se

$$\forall x \in D, -x \in D \text{ e para } x \neq 0, f(-x) = -f(x)$$

**Nota:** A definição que aqui adoptámos de função ímpar difere um pouco do que é habitual (em que se exige  $f(x) = -f(-x)$ ,  $\forall x \in D$ ), permitindo que consideremos como ímpares funções para as quais se tenha  $f(0) \neq 0$ .

Se  $f$  é par, o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo dos  $yy$ ; se  $f$  é ímpar, então o seu gráfico é simétrico em relação à origem.

Na figura seguinte apresenta-se o gráfico de uma função par e o de uma função ímpar, destacando, em ambas as situações, as áreas definidas pelo gráfico da função e o eixo dos  $xx$ .



## Exemplos

- As funções  $f(x) = \cos(n\pi x/L)$  e  $g(x) = x^{2n}$ , com  $n = 1, 2, \dots$ , são funções pares.
- As funções  $f(x) = \sin(n\pi x/L)$  e  $g(x) = x^{2n-1}$ , com  $n = 1, 2, \dots$ , são funções ímpares.

Facilmente se provam as seguintes propriedades:

- 1 A soma de duas funções pares (ímpares) é uma função par (ímpar).
- 2 O produto de duas funções pares ou de duas funções ímpares é uma função par.
- 3 O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.
- 4 Se  $f : (-L, L) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função integrável
  - e **par**, então:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx.$$

- e **ímpar**, então

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0.$$

## Série de Fourier de uma função par em $(-L, L)$

Seja  $f$  um função periódica de período  $2L$ , seccionalmente contínua e suponhamos que a sua restrição ao intervalo  $(-L, L)$  é uma função **par**. Então, os seus coeficientes de Fourier serão dados por:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx; \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0; \quad n \geq 1.$$

(Na obtenção dos resultados acima usámos o facto de as funções  $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  serem pares e de as funções  $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  serem ímpares e ainda as propriedades 2-4 referidas no slide anterior.) Assim, a série de Fourier de  $f$  terá a forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (9)$$

com  $a_n$  dados por

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx; \quad n \geq 0 \quad (10)$$

## Série de Fourier de uma função ímpar em $(-L, L)$

De modo análogo, se a restrição de  $f$  ao intervalo  $(-L, L)$  for uma função **ímpar**, ter-se-á:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0; \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx; \quad n \geq 1,$$

peço que podemos concluir que sua série de Fourier será uma série apenas com senos:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (11)$$

com os coeficientes  $b_n$  dados por

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx; \quad n \geq 1. \quad (12)$$

# Série de Fourier de senos

## Série de Fourier de cossenos

Como teremos oportunidade de ver mais à frente, aquando da resolução de alguns problemas associados a equações de derivadas parciais, poderá ser importante representar uma função, definida apenas num certo **intervalo fechado e limitado**  $[0, L]$ , por uma série de Fourier envolvendo apenas **senos** ou apenas **cossenos**.

A ideia será usar os resultados que acabámos de deduzir.

Podemos começar por estender a função  $f$ , definida inicialmente apenas no intervalo  $[0, L]$ , a uma função definida no intervalo  $(-L, L]$ , de modo que essa nova função seja par (ou ímpar) em  $(-L, L)$ , e determinar depois a série de Fourier da extensão  $2L$ -periódica dessa função.

Consideremos primeiro o caso em que se pretende obter uma série de senos.



Seja  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente contínua.

Denotamos por  $f_I$  a extensão de  $f$  ao intervalo  $(-L, L]$ , construída do seguinte modo:

$$f_I(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } 0 \leq x \leq L \\ -f(-x), & \text{se } -L < x < 0 \end{cases}.$$

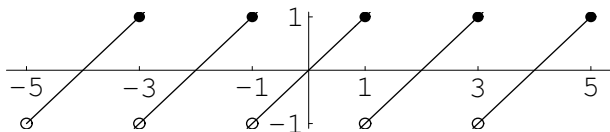
Seja  $\tilde{f}_I$  a extensão  $2L$ -periódica de  $f_I$ , isto é,  $\tilde{f}_I$  é definida em  $\mathbb{R}$  por:

$$\tilde{f}_I(x + 2kL) = f_I(x), \quad x \in [0, L], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A função  $\tilde{f}_I(x)$  é, pela forma como foi construída, uma função periódica de período  $2L$ , seccionalmente contínua e cuja restrição ao intervalo  $(-L, L)$  é ímpar, pelo que terá uma expansão em série de Fourier consistindo apenas de termos com senos.

## Extensão ímpar $2L$ -periódica de uma função definida $[0, L]$

Esta função  $\tilde{f}_I$ , extensão de  $f$  à recta real, é chamada a **extensão ímpar  $2L$ -periódica de  $f$** .



Extensão ímpar 2-periódica da função  $f(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$ .

Note-se que, mesmo que  $f$  seja contínua em  $[0, L]$ , a sua extensão ímpar  $2L$ -periódica  $\tilde{f}_I$  só será contínua em  $\mathbb{R}$  se  $f(0) = f(L) = 0$ . Caso contrário,  $\tilde{f}_I$  terá descontinuidades nos pontos da forma  $2kL$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (se  $f(0) \neq 0$ ) e  $(2k + 1)L$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (se  $f(L) \neq 0$ ).

Neste caso, sendo embora chamada extensão ímpar de  $f$ , “rigorosamente”, esta função não é uma função ímpar, uma vez que para alguns pontos do seu domínio, se tem  $f(x) \neq -f(-x)$ .

## Extensão par $2L$ -periódica de uma função definida $[0, L]$

De modo análogo ao anterior, define-se a **extensão par  $2L$ -periódica de  $f$**  como sendo a função  $\tilde{f}_P$ , obtida por extensão  $2L$ -periódica da função  $f_P$  dada por:

$$f_P(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } 0 \leq x \leq L \\ f(-x), & \text{se } -L < x < 0. \end{cases}$$

As séries de Fourier das funções  $\tilde{f}_I$  e  $\tilde{f}_P$  acima definidas são chamadas, respectivamente, **série de Fourier de senos** e **série de Fourier de cossenos** da função  $f$  definida no intervalo  $[0, L]$ .

## Série de Fourier de senos e série de Fourier de cossenos

Seja  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente contínua no intervalo  $[0, L]$ . Então, a sua série de Fourier de cossenos será a série definida por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (13)$$

onde os coeficientes  $a_n$  são dados por

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \tilde{f}_P(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Mas, como, para  $x \in [0, L]$ ,  $\tilde{f}_P(x) = f(x)$  (já que  $\tilde{f}_P$  foi obtida por extensão de  $f$ ), temos que os coeficientes  $a_n$  da série de Fourier de cossenos de  $f$  são dados por

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (14)$$

De modo análogo ao anterior, se deduz a expressão dos coeficientes da série de Fourier de senos. Mais precisamente, tem-se:

Se  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função seccionalmente contínua no intervalo  $[0, L]$ , então, a sua série de Fourier de senos é a série definida por

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (15)$$

onde os coeficientes  $b_n$  são dados por

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (16)$$

**Exemplo 3** Consideremos a função  $f$  definida no intervalo  $[0, \pi]$  por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & \text{se } \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

e determinemos a sua série de Fourier de senos. Temos

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\pi} \right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen}(nx) dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi (\pi - x) \operatorname{sen}(nx) dx.$$

Efectuando a mudança de variável  $u = nx$  ( $x = \frac{u}{n}$ ), vem

$$b_n = \frac{2}{\pi n^2} \int_0^{n\pi/2} u \operatorname{sen} u du + \frac{2}{n} \int_{n\pi/2}^{n\pi} \operatorname{sen} u du - \frac{2}{\pi n^2} \int_{n\pi/2}^{n\pi} u \operatorname{sen} u du$$

isto é,

$$b_n = \frac{2}{\pi n^2} [\operatorname{sen} u - u \cos u]_0^{n\pi/2} - \frac{2}{n} [\cos u]_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{2}{\pi n^2} [\operatorname{sen} u - u \cos u]_{n\pi/2}^{n\pi}$$

obtendo-se, após alguns cálculos

$$b_n = \frac{4}{\pi n^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right), n = 1, 2, \dots$$

Temos, então, para  $k = 1, 2, \dots$  :

$$b_{2k} = \frac{4}{\pi(2k)^2} \operatorname{sen} \left( \frac{2k\pi}{2} \right) = \frac{4}{\pi(2k)^2} \operatorname{sen}(k\pi) = 0,$$

$$b_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \operatorname{sen} \left( \frac{(2k-1)\pi}{2} \right) = \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \operatorname{sen} \left( k\pi - \frac{\pi}{2} \right) = (-1)^{k-1}$$

Assim, a série de Fourier de senos de  $f$  é dada por

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k-1)}}{(2k-1)^2} \operatorname{sen}((2k-1)x) \\ &= \frac{4}{\pi} \left( \operatorname{sen} x - \frac{1}{9} \operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{25} \operatorname{sen}(5x) - \frac{1}{49} \operatorname{sen}(7x) + \dots \right). \end{aligned}$$

Como a extensão ímpar de  $f$ ,  $\tilde{f}_I(x)$ , é seccionalmente diferenciável e contínua (note-se que  $f(0) = f(\pi) = 0$ ), podemos concluir que a série anterior converge, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , para o valor de  $\tilde{f}_I(x)$ . Em particular, uma vez que, para  $x \in [0, \pi]$ , se tem  $\tilde{f}_I(x) = f(x)$ , podemos escrever

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \operatorname{sen} x - \frac{1}{9} \operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{25} \operatorname{sen}(5x) - \frac{1}{49} \operatorname{sen}(7x) + \dots \right), \quad x \in [0, \pi].$$

# Problema de condução do calor

Consideremos o seguinte problema de valores iniciais e de fronteira:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 & \text{(ED)} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0 & \text{(CF)} \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L & \text{(CI)} \end{array} \right. \quad (17)$$

Fisicamente, este problema descreve a variação da temperatura  $u$  numa barra de comprimento  $L$ , ao longo do tempo. Admite-se que a barra é feita de material homogéneo, com constante de difusividade térmica  $\sigma > 0$ ; além disso, são satisfeitas também as seguintes hipóteses adicionais.



## Problema de condução do calor

- 1 a barra é suficientemente fina de modo a ser razoável admitir que a posição na barra pode ser representada apenas por uma variável espacial  $x$ ; é também suposto que o eixo dos  $xx$  foi colocado ao longo da barra e que esta tem uma das extremidades na origem; assim, a temperatura  $u$  é apenas uma função de  $x$  e  $t$  ( $t$  representando o tempo);
- 2 a superfície da barra está termicamente isolada, de modo que não há troca de calor com o exterior através dessa superfície;
- 3 as extremidades da barra estão contacto com reservatórios térmicos à temperatura zero – este é o significado das condições de fronteira (CF);
- 4 no instante inicial,  $t = 0$ , a barra tem uma distribuição de temperatura conhecida,  $f(x)$  – é este o significado da condição inicial (CI).

É natural considerar como solução do problema uma função  $u(x, t)$  que seja duas vezes continuamente diferenciável em

$$\Omega = \{(x, t) : 0 < x < L, t > 0\} \quad (18)$$

e contínua em

$$\bar{\Omega} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}, \quad (19)$$

que satisfaça a equação diferencial (ED), as condições de fronteira (CF) e a condição inicial (CI). Para que haja tal tipo de solução é preciso que a função  $f$  seja contínua em  $[0, L]$  e ainda que sejam satisfeitas as condições adicionais (ditas **de compatibilidade**)  $f(0) = f(L) = 0$ .

## Método da separação de variáveis (método de Fourier)

O **método da separação das variáveis** (ou **método de Fourier**) é uma técnica clássica de resolver diversos tipos de equações de derivadas parciais. Vamos ilustrar a sua utilização na resolução do problema da condução do calor (17).

## Método da separação de variáveis (método de Fourier)

A ideia básica deste método é **tentar encontrar** soluções  $u(x, t)$  do problema que possam ser escritas na forma <sup>2</sup>

$$u(x, t) = F(x) G(t). \quad (20)$$

Temos

$$u(x, t) = F(x)G(t) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = F(x) G'(t) \text{ e } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = F''(x) G(t).$$

Substituindo as expressões das derivadas anteriores na equação diferencial (ED) obtemos imediatamente a equação

$$F(x) G'(t) = \sigma F''(x) G(t)$$

---

<sup>2</sup>Não existe nenhuma razão, *a priori*, para assumir que a solução do problema possa ser escrita como produto de uma função de  $x$  por uma função de  $t$ ; ao procurar uma solução desta forma, Fourier foi inspirado num método semelhante empregue anteriormente por outros matemáticos, na resolução de outro problema, o chamado problema das cordas vibrantes.

Separando as variáveis na equação anterior, vem

$$\frac{1}{\sigma} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}.$$

Como as funções do lado esquerdo da equação anterior dependem apenas de  $t$ , enquanto as do lado direito dependem apenas de  $x$ , os dois quocientes terão de ser iguais a uma certa constante, que denotaremos por  $\lambda$ , isto é, terá de ser

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sigma} \frac{G'(t)}{G(t)} = \lambda,$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Temos então

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0 \tag{21}$$

e

$$G'(t) - \sigma \lambda G(t) = 0 \tag{22}$$

Consideremos agora as duas condições de fronteira (CF).

Sendo  $u(x, t) = F(x)G(t)$ , essas condições determinam que, para todo  $t \geq 0$ ,

$$F(0)G(t) = 0 \text{ e } F(L)G(t) = 0.$$

Assim, ou  $G(t) = 0$ , para todo  $t \geq 0$ , o que implica  $u(x, t) \equiv 0$ , ou

$$F(0) = F(L) = 0. \quad (23)$$

Ignorando a solução trivial<sup>3</sup> e combinando as condições de fronteira (23) com a equação (21), obtemos o seguinte problema de valores de fronteira:

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0 \quad (24)$$

$$F(0) = F(L) = 0 \quad (25)$$

com  $\lambda$  uma constante.

---

<sup>3</sup>Note-se que  $u(x, t) \equiv 0$  será solução se e só se  $f(x) = 0$ , caso em que não teríamos verdadeiramente nenhum problema real de condução do calor.

Note-se que a função  $F(x) = 0$  é sempre uma solução do problema (24)-(25), qualquer que seja o valor de  $\lambda$  e, dependendo do valor de  $\lambda$ , poderá ser a única solução.

Assim, se procuramos uma solução não trivial  $u(x, t) = F(x)G(t)$  para o nosso problema, deveremos determinar os valores de  $\lambda$  para os quais o problema (24)-(25) tem soluções não triviais. Estes valores de  $\lambda$  são chamados **valores próprios do problema** e as correspondentes soluções não triviais são chamadas **funções próprias**.

Vamos então procurar soluções não triviais do problema de valores de fronteira (24)-(25).

A equação diferencial  $F''(x) - \lambda F(x) = 0$  tem como equação característica

$$r^2 - \lambda = 0. \quad (26)$$

Temos três casos a considerar, conforme  $\lambda$  seja positivo, nulo ou negativo.

❶ **Caso 1:  $\lambda > 0$**

Seja  $\lambda > 0$ , i.e. seja  $\lambda = k^2$ ,  $k \neq 0$ .

Neste caso, as raízes da equação característica são  $\pm k$ , pelo que a solução geral da equação (24) é dada por

$$F(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}.$$

Substituindo nas condições de fronteira  $F(0) = F(L) = 0$ , obtemos

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{kL} + C_2 e^{-kL} = 0. \end{cases}$$

É fácil de mostrar que o sistema acima tem apenas a solução trivial  $C_1 = C_2 = 0$ . Assim, quando  $\lambda > 0$ , não existe solução não trivial do problema (24)-(25).

**2 Caso 2:  $\lambda = 0$** 

Nesta situação,  $r = 0$  é raiz dupla da equação característica, pelo que a solução geral da equação diferencial (24) é dada por

$$F(x) = C_1 + C_2 x.$$

Das condições de fronteira obtém-se o sistema

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 L = 0 \end{cases}$$

o qual tem apenas a solução  $C_1 = C_2 = 0$ ; assim, também neste caso há apenas a solução trivial para o problema (24)-(25).



**3 Caso 3:  $\lambda < 0$** 

Seja  $\lambda < 0$ , isto é, seja  $\lambda = -k^2$  com  $k \neq 0$ .

Neste caso, as raízes da equação característica são  $\pm i k$  e a solução geral da equação (24) é dada por

$$F(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx). \quad (27)$$

Desta vez, as condições de fronteira conduzem ao sistema

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 \cos(kL) + C_2 \sin(kL) = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Mas,

$$\begin{aligned} C_2 \sin(kL) = 0 &\Leftrightarrow C_2 = 0 \text{ ou } \sin(kL) = 0 \\ &\Leftrightarrow C_2 = 0 \text{ ou } kL = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Assim, o problema (24)-(25) admite soluções **não triviais**, se  $C_2 \neq 0$  e  $k = \frac{n\pi}{L}$ ,  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Essas soluções são as funções da forma

$$F_n(x) = c_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad c_n \in \mathbb{R}, \quad c_n \neq 0. \quad (29)$$

**Nota:** Como  $\operatorname{sen} \left( -\frac{n\pi}{L} x \right) = -\operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right)$  e as constantes  $c_n$  são arbitrárias, não é necessário considerar  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  em (29), bastando tomar  $n \in \mathbb{N}$ .

Tendo concluído que só nos interessa considerar o caso em que  $\lambda = -k^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos então a equação (22), para um desses valores de  $\lambda$ , isto é, consideremos

$$G'(t) + \sigma \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 G(t) = 0. \quad (30)$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a solução geral da equação diferencial de 1<sup>a</sup> ordem anterior é, como sabemos, dada por

$$G_n(t) = d_n e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad d_n \in \mathbb{R}. \quad (31)$$

Combinando (29) com (31), obtemos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , uma função

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= F_n(x) G_n(t) = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) d_n e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \\ &= b_n e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad b_n \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (32)$$

Facilmente se verifica que cada uma das funções (32) é duas vezes continuamente diferenciável em  $\Omega$  e contínua em  $\bar{\Omega}$ , satisfaz a equação diferencial (ED) e as condições de fronteira (CF).

Assim, cada uma das funções  $u_n(x, t)$  dadas por (32) **quase** resolve o nosso problema (17). Falta apenas verificar a condição inicial. Sendo

$$u_n(x, t) = b_n e^{-\sigma \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

teremos

$$u_n(x, 0) = b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

peço que  $u_n(x, t)$  só será solução do problema (17) se a função  $f(x)$  que define a condição inicial (CI) tiver a forma

$$f(x) = b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

para alguma constante  $b_n$  e algum valor de  $n$ .

Por exemplo, se o problema considerado fosse

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(0, x) = u(2, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 7 \operatorname{sen} \left( \frac{5\pi}{2} x \right), & 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

então, teríamos  $\sigma = 3$ ,  $L = 2$ ,  $n = 5$  e  $b_n = 7$ , pelo que a solução do problema seria a função

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 7e^{-3\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 t} \operatorname{sen} \left( \frac{5\pi}{2} x \right) \\ &= 7e^{-\frac{75\pi^2}{4} t} \operatorname{sen} \left( \frac{5\pi}{2} x \right) \end{aligned}$$

É fácil de mostrar que, se  $u_n$  e  $u_m$  são soluções do problema formado pela equação diferencial (ED) e pelas condições de fronteira (CF), também será solução desse problema qualquer sua combinação linear, isto é, qualquer função da forma  $\alpha u_n + \beta u_m$ , com  $\alpha, \beta$  constantes arbitrárias. Isto significa, então, que qualquer função da forma

$$\sum_{n=1}^N b_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n e^{-\sigma \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right),$$

é solução de (ED)-(CF). Assim, se a condição inicial  $f(x)$  for do tipo

$$f(x) = \sum_{n=1}^N b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right), \quad (33)$$

a solução do problema será dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n e^{-\sigma \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right).$$

E se a função  $f$  não tiver a forma simples (33) ?

A ideia que surge, neste caso, é expandir  $f$  em série de Fourier de senos!

Se  $f$  for contínua e seccionalmente diferenciável em  $[0, L]$  e satisfizer as condições de compatibilidade  $f(0) = f(L) = 0$ , então a sua extensão ímpar  $2L$ -periódica será uma função contínua e seccionalmente diferenciável, pelo que a série de Fourier de senos de  $f$  convergirá para  $f$  em todo o ponto  $x \in [0, L]$ , isto é, ter-se-á

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right), \quad 0 \leq x \leq L,$$

com

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (34)$$

Neste caso, pode provar-se que a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\sigma \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \quad (35)$$

converge, para cada  $(x, t) \in \bar{\Omega}$ , definindo uma função  $u(x, t)$  que é solução do problema (17). Pode mostrar-se ainda que, neste caso, o problema em causa admite apenas a solução definida pela série (35).

**Exemplo 4**

Suponhamos que nos é dado o seguinte problema de condução de calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases},$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & \text{se } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Neste caso, temos  $\sigma = 2$  e  $L = \pi$ . Além disso, a função  $f$  que define a condição inicial é contínua e seccionalmente diferenciável em  $[0, \pi]$  e  $f(0) = f(\pi) = 0$ . Já calculámos anteriormente a série de Fourier de senos de  $f$  (veja Exemplo 3). Vimos que ela é dada por

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \text{sen}((2k-1)x)$$



Assim a solução deste problema de condução de calor vem dada por

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} e^{-2(2k-1)^2 t} \operatorname{sen}((2k-1)x) \\ &= \frac{4}{\pi} \left[ e^{-2t} \operatorname{sen}(x) - \frac{1}{9} e^{-18t} \operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{25} e^{-50t} \operatorname{sen}(5x) + \dots \right]\end{aligned}$$

**Nota:** Em certas aplicações, poderá ser conveniente modelar o problema da condução do calor com uma função inicial  $f$  que não satisfaça as condições atrás referidas. Por exemplo,  $f$  poderá ser apenas uma função seccionalmente contínua em  $[0, L]$ , poderemos ter condições iniciais que não satisfazem condições de compatibilidade com as condições de fronteira, etc.

Desde que possamos encontrar a série de Fourier de senos de  $f$ , chamaremos **solução formal** do problema à série definida por (35), i.e. à série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

com  $b_n$  os coeficientes da série de Fourier de senos de  $f$ .

Nesse caso, no entanto, o próprio conceito de solução do problema terá de ser interpretado de modo diferente. Por exemplo, no caso em que  $f$  não é contínua em  $[0, L]$ , a condição (CF) deve ser interpretada como sendo apenas exigida nos pontos onde  $f$  seja contínua.

Considere-se agora um problema de condução de calor análogo ao que acabámos de estudar, mas com condições de fronteira de outro tipo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (36)$$

(Qual será a interpretação física destas novas condições de fronteira?)

De um modo análogo ao anterior, se mostra que, se  $f$  e  $f'$  forem contínuas em  $[0, L]$  e  $f'(0) = f'(L) = 0$ , então a solução do problema vem dada por

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\sigma \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (37)$$

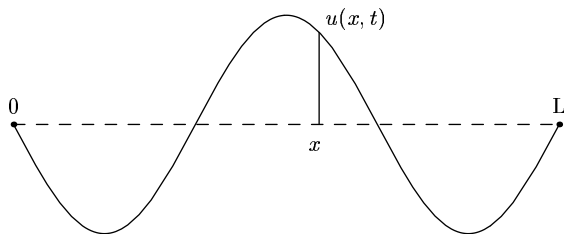
onde  $a_n$  são os coeficientes da **série de Fourier de cossenos** de  $f$ , i.e. são dados por

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (38)$$

**Nota:** Mesmo que  $f$  não satisfaça as condições exigidas, diremos que a série em (37) é a solução formal do problema (36).

## Problema da corda vibrante

O problema da corda vibrante diz respeito ao estudo das vibrações transversais de uma corda esticada entre dois pontos (por exemplo, uma corda de uma guitarra). O objectivo é determinar a função  $u(x, t)$  que dá o deslocamento vertical da corda num determinado ponto  $x$ ,  $0 \leq x \leq L$ , e num determinado instante  $t$ ,  $t \geq 0$  (veja a figura abaixo)



Fotografia da corda num determinado instante  $t$

Ao desenvolver o modelo matemático para este problema, assumimos que:

- 1 a corda é perfeitamente flexível e tem densidade linear constante;
- 2 a tensão da corda é constante;
- 3 a acção da gravidade é negligível e não actuam quaisquer outras forças sobre a corda;
- 4 a amplitude das vibrações é pequena, de modo que é lícito supor que o ponto  $x$  da corda se desloca apenas na vertical.

Sob estas condições, prova-se que o movimento da corda é governado pelo seguinte problema de valores iniciais e de fronteira

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 & \text{(ED)} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0 & \text{(CF)} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L & \text{(CI1)} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L & \text{(CI2)} \end{array} \right. \quad (39)$$

A constante  $\alpha^2$  em (ED) é estritamente positiva e tem a ver com a densidade e tensão da corda. As condições de fronteira (CF) reflectem o facto de a corda estar fixa nos pontos  $x = 0$  e  $x = L$ . As equações (CI1) e (CI2) especificam, respectivamente, a configuração inicial da corda e a velocidade inicial de cada ponto desta (ou seja, o modo como a corda é *abandonada* na posição inicial).

Se usarmos o método de separação de variáveis de modo totalmente análogo ao que fizemos para o problema de condução do calor, podemos concluir que problema tem como solução, pelo menos **formal**, a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi\alpha}{L}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi\alpha} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\alpha}{L}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (40)$$

onde  $b_n$  e  $c_n$  são os coeficientes da série de Fourier de senos de  $f$  e de  $g$ , respectivamente, i.e.

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (41)$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (42)$$

Pode provar-se, além disso, que se  $f$  e  $g$  satisfizerem as seguintes condições

- $f$  é duas vezes continuamente diferenciável em  $[0, L]$ ,  
 $f(0) = f(L) = 0$  e  $f''(0) = f''(L) = 0$
- $g$  tem derivada contínua em  $[0, L]$  e  $g(0) = g(L) = 0$

então o problema tem uma única solução e essa solução é dada pela série (40).

Mais precisamente, nessas condições, a série (40) converge para todo o  $(x, t) \in \bar{\Omega}$ , definindo uma função  $u(x, t)$  que é duas vezes continuamente diferenciável em  $\Omega$ , contínua em  $\bar{\Omega}$  e que satisfaz as condições (ED), (CF), (CI1) e (CI2).



**Exemplo 5**

Suponhamos que nos é dado o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. ,$$

onde

$$f(x) = \text{sen}(\pi x) + \frac{1}{3} \text{sen}(3\pi x) \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{2} \text{sen}(4\pi x).$$

Neste caso, temos  $\alpha = 2$ ,  $L = 1$  e a solução do problema é a função

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \cos(2\pi t) \text{sen}(\pi x) + \frac{1}{3} \cos(6\pi t) \text{sen}(3\pi x) + \frac{1}{8\pi} \frac{1}{2} \text{sen}(8\pi t) \text{sen}(4\pi x) \\ &= \cos(2\pi t) \text{sen}(\pi x) + \frac{1}{3} \cos(6\pi t) \text{sen}(3\pi x) + \frac{1}{16\pi} \text{sen}(8\pi t) \text{sen}(4\pi x) \end{aligned}$$