Complementos de Análise Matemática

PARTE II - Transformada de Laplace

Maria Joana Soares
Ricardo Severino

MIECivil

setembro 2011

Noções de análise

Função seccionalmente contínua

Uma função f diz-se seccionalmente contínua num intervalo fechado e limitado $[a, b]$ se existir um número finito de pontos

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

tais que:

- f é contínua em cada subintervalo aberto (t_i, t_{i+1})
- para $i = 1, \ldots, n-1$, os limites laterais $\lim_{t \to t_i^+} f(t)$ e $\lim_{t \to t_i^-} f(t)$ existem e são finitos, sendo também finitos os limites laterais $\lim_{t \to a^+} f(t)$ e $\lim_{t \to b^-} f(t)$.

Se f é seccionalmente contínua em $[a, b]$ o integral de f em $[a, b]$ é dado por

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt$$

Noções de análise

Integral impróprio

Uma função f diz-se seccionalmente contínua num intervalo ilimitado $[a, +\infty)$ se for seccionalmente contínua em cada intervalo fechado e limitado $[a, b], b > a$.
Seja $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua. O integral impróprio de f em $[a, +\infty)$ é definido por

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(t)dt, \tag{1}$$

quando esse limite existir. Dizemos que o integral impróprio converge quando o limite em (1) existir e for finito; caso contrário, dizemos que o integral diverge.

Transformada de Laplace

Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua. A transformada de Laplace de f é a função F definida pelo integral impróprio

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}dt \tag{2}$$

Notas:

1. O domínio da função F é o conjunto dos valores de $s \in \mathbb{R}$ para os quais o integral em (2) converge.
2. A transformada de Laplace de f é usualmente denotada por F ou $\mathcal{L}\{f\}$.

Exemplo 1 $f(t) = 1,\ t \geq 0$

- Para $s \neq 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}dt &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \mathrm{e}^{-st}dt \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right]_{t=0}^{t=b} \\
&= -\frac{1}{s}\lim_{b\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{-sb} - 1\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{s}, & \text{para } s > 0 \\ +\infty, & \text{para } s < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

- Para $s = 0$, tem-se $\int_0^{+\infty} 1\mathrm{e}^{-st}dt = \int_0^{+\infty} 1dt = \lim_{b\to+\infty} [t]_{t=0}^{t=b} = \lim_{b\to+\infty} b = +\infty.$

Concluímos, assim, que

$$\boxed{\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s},\ \text{para } s > 0}$$

Exemplo 2 $f(t) = \mathrm{e}^{at}$, $a \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$

- Para $s \neq a$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}dt &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-st}dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} \mathrm{e}^{-(s-a)t}dt \\
&= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{s-a}\mathrm{e}^{-(s-a)t}\right]_{t=0}^{t=b} \\
&= -\frac{1}{s-a}\lim_{b\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-(s-a)b}-1\right) \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{s-a}, & \text{para } s > a \\ +\infty, & \text{para } s < a. \end{cases}
\end{aligned}$$

- Para $s = a$, vem $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-st}dt = \int_0^{+\infty} 1dt = +\infty$.

Logo, temos

$$\boxed{\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}, \text{ para } s > a}$$

Exemplo 3 $f(t) = t,\ t \geq 0$

- Para $s \neq 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} t e^{-st} dt &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b t e^{-st} dt \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left\{ \left[-\frac{1}{s} e^{-st} t \right]_{t=0}^{t=b} + \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} dt \right\} \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} t - \frac{1}{s^2} e^{-st} \right]_{t=0}^{t=b} = -\frac{1}{s} \lim_{b\to+\infty} \left\{ e^{-sb}(b + \frac{1}{s}) - \frac{1}{s} \right\} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{s^2}, & \text{para } s > 0 \\ +\infty, & \text{para } s < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

- Para $s = 0$, tem-se $\int_0^{+\infty} t e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} t dt = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=b} = +\infty$

Conclusão:

$$\boxed{\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2}, \text{ para } s > 0}$$

Exemplo 4

Pode provar-se facilmente, por indução sobre n, que

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \text{ para } s > 0}$$

Nota: Os casos $n = 0$ e $n = 1$ foram estudados nos Exemplos 1 e 3, respetivamente.

Os resultados dos dois exemplos seguintes, embora simples, requerem um pouco mais de trabalho; omitimos a dedução destes resultados.

Exemplo 5

$$\boxed{\mathcal{L}\{\operatorname{sen} bt\}(s) = \frac{b}{s^2 + b^2}, \text{ para } s > 0}$$

Exemplo 6

$$\boxed{\mathcal{L}\{\cos bt\}(s) = \frac{s}{s^2 + b^2}, \text{ para } s > 0}$$

Funções de ordem exponencial

Existem funções $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ seccionalmente contínuas para as quais o integral impróprio em (2) diverge para qualquer valor de s, isto é, que não admitem transformada de Laplace. Tal tem a ver com a forma como $|f(t)|$ cresce quando t tende para infinito. A este propósito, introduzimos a seguinte definição.

Seja dada uma função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ e seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Diz-se que f é de ordem exponencial α, se existirem constantes positivas t_0 e M tais que

$$|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{\alpha t}, \text{para todo o } t \geq t_0 \tag{3}$$

Uma função diz-se de ordem exponencial se for de ordem exponencial α para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Notas:

1. Se $\lim_{t\to+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t} = 0$, então f é de ordem exponencial α. Em particular, toda a função da forma $f(t) = \mathrm{e}^{at}P(t)$ ou $f(t) = \mathrm{e}^{at}\cos(\beta t)P(t)$ ou $f(t) = \mathrm{e}^{at}\operatorname{sen}(\beta t)P(t)$, onde $a < \alpha$ e P é um polinómio, é de ordem exponencial α.

2. Se f é de ordem exponencial α, então, para qualquer $s > \alpha$, $\lim_{t\to+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st} = 0$.

3. Por exemplo, a função $f(t) = \mathrm{e}^{t^2}$ não é de ordem exponencial:

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{e}^{-st} = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{t(t-s)} = +\infty, \forall s.$$

Pode provar-se o seguinte resultado.

Teorema

Se $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua e de ordem exponencial α, então a transformada de Laplace de f, $\mathcal{L}\{f\}(s)$, existe para $s > \alpha$.

Propriedades da transformada de Laplace

1. **Linearidade**

Sejam $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ duas funções cuja transformada de Laplace existe para $s > \alpha$ e $s > \beta$, respetivamente. Então, tem-se:

- $\mathcal{L}\{f + g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s)$, para $s > \gamma$, onde $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$.
- Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}\{cf\}(s) = c\mathcal{L}\{f\}(s)$, para $s > \alpha$.

Dem: Ao cuidado dos alunos.

2 Translação da transformada

Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função cuja transformada de Laplace $F(s)$ existe para $s > \alpha$. Então, tem-se

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s-a), \quad \text{para} \quad s > \alpha + a}$$

Dem:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt = F(s-a)\end{aligned}$$

3 Mudança de escala

Seja $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ uma função cuja transformada de Laplace $F(s)$ existe para $s>\alpha$. Então, para qualquer $a>0$, tem-se

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(at)\}(s)=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\quad \text{para}\quad s>a\,\alpha.}$$

Dem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(at)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f(at)\mathrm{e}^{-st}dt\\
&= \int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-s\frac{u}{a}}\frac{1}{a}du\\
&= \int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}u}\frac{1}{a}du=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)
\end{aligned}$$

4. **Transformada da derivada** Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua e tal que f' é seccionalmente contínua em $[0, +\infty)$; suponhamos, além disso, que f e f' são de ordem exponencial α. Então, a transformada de Laplace de f' existe para $s > \alpha$ e tem-se

$$\boxed{\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)}$$

Dem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'\}(s) &= \int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-st}dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b f'(t)\mathrm{e}^{-st}dt \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left\{ \left[f(t)\mathrm{e}^{-st}\right]_{t=0}^{t=b} + s\int_0^b f(t)\mathrm{e}^{-st}dt \right\} \\
&= \lim_{b\to+\infty} f(b)\mathrm{e}^{-sb} - f(0) + s\lim_{b\to+\infty} \int_0^b f(t)\mathrm{e}^{-st}dt \\
&= s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0), \quad \text{para } s > \alpha.
\end{aligned}$$

Nota: Na última passagem usámos o facto de, sendo f de ordem exponencial α se ter, para $s > \alpha$, $\lim_{b\to+\infty} f(b)\mathrm{e}^{-sb} = 0$.

O resultado anterior generaliza-se para derivadas de ordem superior.

5. **Transformada das derivadas**

Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ são contínuas em $[0, +\infty)$ e $f^{(n)}$ é seccionalmente contínua em $[0, +\infty)$. Suponhamos, além disso, que $f, f', \ldots, f^{(n)}$ são de ordem exponencial α. Então, a transformada de Laplace de $f^{(n)}$ existe para $s > \alpha$ e tem-se

$$\boxed{\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)}$$

6. **Derivadas da transformada** Seja $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e de ordem exponencial α e seja $F(s)$, $s>\alpha$, a sua transformada de Laplace. Então, $F^{(n)}(s)$ existe para todo o $n\in\mathbb{N}$ e tem-se

$$\boxed{F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s),\quad \text{para} \quad s>\alpha}$$

Dem: Demonstramos apenas o caso $n=1$. Tem-se

$$F'(s)=\frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}dt.$$

As hipóteses que assumimos sobre f permitem-mos trocar a ordem de integração e derivação e vem:

$$\begin{aligned} F'(s) &= \int_0^{+\infty}\frac{d}{ds}\left(f(t)\mathrm{e}^{-st}\right)dt \\ &= -\int_0^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{e}^{-st}dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s). \end{aligned}$$

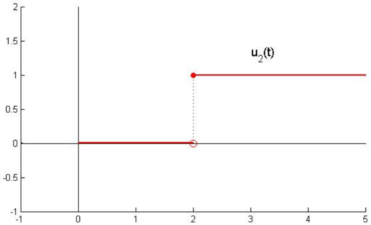
Função salto unitário

Introduzimos agora a seguinte definição.

Para $a \geq 0$, a função $u_a : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a, \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$

é chamada função salto unitário em a.



7 Transformada do salto unitário

A transformada de Laplace da função salto unitário em a é dada por

$$\boxed{\mathcal{L}\{u_a\}(s) = \frac{e^{-as}}{s}, \quad \text{para } s > 0}$$

Dem: Para $s \neq 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} u_a(t) e^{-st} dt &= \int_a^{+\infty} e^{-st} dt = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b e^{-st} dt \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{t=a}^{t=b} = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{s} (e^{-sb} - e^{-sa}) \right) \\
&= \begin{cases} \dfrac{e^{-as}}{s}, & s > 0 \\ +\infty & s < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Para $s = 0$, facilmente se vê que o integral diverge.

Muitas funções descontínuas (nomeadamente funções em escada) podem exprimir-se como combinação linear de funções salto unitário. Por exemplo, consideremos a função

$$f(t) = \begin{cases} 3, & 0 \leq t < 2, \\ -1, & 2 \leq t < 5, \\ 7, & t \geq 5 \end{cases}$$

É imediato reconhecer que f pode escrever-se como

$$f(t) = 3 - 4u_2(t) + 8u_5(t), \quad t \geq 0.$$

Então, usando a linearidade da transformada de Laplace e a fórmula da transformada do salto unitário, podemos concluir que

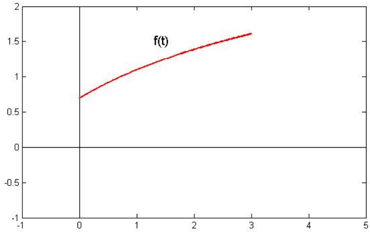
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\}(s) &= 3\mathcal{L}\{1\}(s) - 4\mathcal{L}\{u_2\}(s) + 8\mathcal{L}\{u_5\}(s) \\ &= \frac{3}{s} - 4\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s} + 8\frac{\mathrm{e}^{-5s}}{s} \\ &= \frac{1}{s}\left(3 - 4\mathrm{e}^{-2s} + 8\mathrm{e}^{-5s}\right), \text{ para } s > 0 \end{aligned}$$

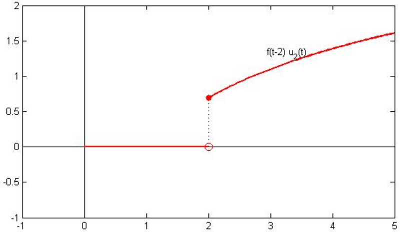
Já vimos que se multiplicarmos a função f por e^{at}, a sua transformada sofre uma translação por a. A propriedade seguinte indica o efeito "análogo" em $f(t)$, quando consideramos a multiplicação da transformada por uma função da forma e^{-as}.

8. Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função cuja transformada de Laplace $F(s)$ existe para $s > \alpha$. Então, para $a \geq 0$, tem-se

$$\boxed{\mathcal{L}\{u_a(t)f(t-a)\}(s) = \mathrm{e}^{-as}F(s), \text{ para } s > \alpha}$$

Dem: Ao cuidado dos alunos.





Nota: Na prática, é mais frequente procurarmos a transformada de Laplace de uma função expressa como $g(t)u_a(t)$ do que como $f(t-a)u_a(t)$. Para calcularmos $\mathcal{L}\{g(t)u_a(t)\}$ devemos identificar $g(t)$ com $f(t-a)$, de onde virá $f(t)=g(t+a)$. Assim, tem-se

$$\boxed{\mathcal{L}\{g(t)u_a(t)\}(s) = \mathrm{e}^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\}}$$

Exemplo: Determinar a transformada de Laplace da função definida por

$$\phi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1, \\ t^2, & t \ge 1 \end{cases}$$

Temos $\phi(t) = g(t)u_1(t)$, onde $g(t) = t^2$ $(t \ge 0)$. Assim, vem

$$\mathcal{L}\{\phi\}(s) = \mathcal{L}\{t^2 u_1(t)\} = e^{-s}\mathcal{L}\{(t+1)^2\}(s),$$

ou seja, vem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\phi\}(s) &= \mathrm{e}^{-s}\mathcal{L}\{t^2+2t+1\}(s) \\ &= \mathrm{e}^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right), \; s>0 \end{aligned}$$

Transformada de Laplace inversa

Como vimos, a transformada de Laplace é um operador que transforma uma função $f(t)$, definida em $[0, +\infty)$, noutra função $F(s)$.

Consideremos agora o problema inverso: Dada uma função $F(s)$, pretende-se encontrar uma função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s). \tag{4}$$

As questões que se colocam são as seguintes:

1. Dada $F(s)$, existirá sempre $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, satisfazendo (4)?
2. Supondo que existe tal f, será essa função única?

A resposta à questão 1. é: **nem sempre!**
Por outras palavras, existem funções que não são transformada de Laplace de nenhuma função.

Relativamente à questão 2., tem-se o seguinte resultado.

Se f, g são duas funções seccionalmente contínuas definidas em $[0, +\infty)$ e tais que $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = F(s)$, então f e g apenas podem diferir nos seus pontos de descontinuidade. Assim:

- se f e g forem ambas funções contínuas, então $f = g$ (isto é $f(t) = g(t)$ para todo o $t \in [0, +\infty)$); por outras palavras, existe, no máximo, uma função contínua definida em $[0, +\infty)$ que satisfaz (4).

- se f e g não forem ambas contínuas, então $f(t) = g(t)$ para todo o $t \in [0, +\infty)$, com excepção de um conjunto numerável de pontos.

Podemos, assim, dizer que todas funções seccionalmente contínuas que têm uma mesma transformada de Laplace são "essencialmente" iguais.

Vamos, então, definir a transformada de Laplace inversa de uma função $F(s)$ (caso exista).

Chamamos transformada de Laplace inversa de uma dada função $F(s)$ e denotamos por $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$, à única (caso exista) função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua que satisfaça as seguintes condições:

(i)
$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s), \tag{5}$$

(ii) f tem o menor número de pontos de descontinuidade possível,

(iii) em cada ponto de descontinuidade t_i, $f(t_i) = \lim_{t \to t_i^+} f(t)$.

Note-se que, **de acordo com a definição aqui adoptada**, se houver uma função contínua satisfazendo (5), é essa que consideramos como a transformada de Laplace inversa de F. No caso de não haver nenhuma função contínua que satisfaça (5), escolhemos para inversa uma função seccionalmente contínua e contínua à direita em cada ponto de descontinuidade.

De acordo com a definição anterior, tem-se, por exemplo

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}(t) = \mathrm{e}^{at} \qquad (s > a, a \in \mathbb{R}, t \geq 0)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}(t) = t^n \qquad (s > 0, n \in \mathbb{N}, t \geq 0)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{s^2+b^2}\right\}(t) = \operatorname{sen}(bt) \qquad (s > 0, b \in \mathbb{R}, t \geq 0)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+b^2}\right\}(t) = \cos(bt) \qquad (s > 0, b \in \mathbb{R}, t \geq 0)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-as}}{s}\right\}(t) = u_a(t) \qquad (s > 0, a \geq 0, t \geq 0)$$

Além disso, se f for uma função contínua e $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{e}^{-as}F(s)\}(t) = u_a(t)f(t-a), \quad t \geq 0, a \geq 0.$$

A determinação de transformadas de Laplace inversas é feita à custa da utilização de tabelas, tendo em conta também propriedades dessa transformada. As seguintes propriedades são uma consequência imediata das propriedades respetivas da transformada de Laplace.
No que se segue, F e G são funções que admitem transformada de Laplace inversa, f e g, respetivamente.

1. **Linearidade**
   - $\mathcal{L}^{-1}\{F+G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\}$
   - $\mathcal{L}^{-1}\{cF\} = c\mathcal{L}^{-1}\{F\},\ \forall c \in \mathbb{R}$
2. **Translação** $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}(t) = \mathrm{e}^{at} f(t)$
3. **Mudança de escala** $\mathcal{L}^{-1}\{F(as)\}(t) = \dfrac{1}{a} f(\dfrac{t}{a}),\ a > 0$
4. **Transformada inversa de derivadas**
   $\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\}(t) = (-1)^n t^n f(t)$
5. **Transformada inversa de $sF(s) - f(0)$**
   $\mathcal{L}^{-1}\{sF(s) - f(0)\}(t) = f'(t)$

Exemplo Calcular a transformada de Laplace inversa da função $G(s) = \dfrac{1}{s^2+6s+13}$. Usando a tabela, vemos que dela consta a transformada de Laplace inversa de $F(s) = \dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$, a qual é a função $f(t) = \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{sen}(bt)$. Por outro lado, temos

$$\frac{1}{s^2+6s+13} = \frac{1}{(s+3)^2+4} = \frac{1}{2}\frac{2}{(s+3)^2+4}$$

Assim sendo, tem-se

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+3)^2+4}\right\}(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{sen}(2t).$$

Aplicação das transformadas na resolução de PVIs

Função g contínua

Vamos agora ver como podemos usar as transformadas de Laplace na resolução de um PVI da forma

$$\begin{cases} a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = g(t), \ t \in [0, +\infty) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \\ \quad \vdots \\ y^{(n-1)}(0) = y_n \end{cases}$$

onde a_i e y_i são constantes $(a_n \neq 0)$ e g é uma função contínua num intervalo aberto I que contém $[0, +\infty)$. Como se sabe, o PVI anterior tem uma só solução definida em I. Neste caso, como estamos apenas interessados nos valores de t pertencentes ao intervalo $\in [0, +\infty)$, chamaremos solução do problema à restrição a esse intervalo da solução definida em I.

Exemplo Considere-se o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) - 8y(t) = 0, \; t \in [0, +\infty) \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 6 \end{cases}$$

Tomando a transformada de Laplace de ambos os membros da equação diferencial, vem $\mathcal{L}\{y''(t) - 2y'(t) - 8y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{0\}$ ou seja, vem, usando a linearidade da transformada e o evidente facto de que $\mathcal{L}\{0\} = 0$,

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}(s) - 2\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) - 8\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = 0 \tag{6}$$

Usando a propriedade relativa à transformada de derivadas e substituindo os valores dados pelas condições iniciais, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t)\}(s) &= s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy(0) - y'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - 3s - 6 \end{aligned} \tag{7}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) &= s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y(0) \\ &= s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - 3 \end{aligned} \tag{8}$$

Exemplo (cont).

Denotando $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ por $Y(s)$ e substituindo (7) - (8) em (6), vem

$$s^2Y(s) - 3s - 6 - 2sY(s) + 6 - 8Y(s) = 0$$

ou seja, vem

$$\left(s^2 - 2s - 8\right) Y(s) - 3s = 0.$$

Resolvendo a equação anterior em ordem a $Y(s)$, obtemos

$$Y(s) = \frac{3s}{s^2 - 2s - 8}.$$

Para determinarmos a solução $y(t)$ do problema, devemos, então, determinar a transformada de Laplace inversa de $Y(s)$. Temos

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{3s}{s^2 - 2s - 8} &= \frac{3s}{(s+2)(s-4)} \\ &= \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s-4} \end{aligned}$$

de onde se obtém, de imediato, que

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{4t}, \ t \geq 0.$$

Aplicação das transformadas na resolução de PVIs

Função g seccionalmente contínua

Consideremos novamente o PVI

$$\begin{cases} a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = g(t), \ t \in [0, +\infty) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \\ \quad \vdots \\ y^{(n-1)}(0) = y_n \end{cases}$$

mas suponhamos agora que g (função do lado direito da equação diferencial) **não** é uma função contínua em $[0, +\infty)$, mas apenas uma função seccionalmente contínua, com um número finito de descontinuidades em $[0, +\infty)$.

Como g não é contínua, não existe uma solução do PVI no sentido usual, porque não existe uma função com derivadas contínuas até à ordem n que satisfaça a equação diferencial. Temos, portanto, de modificar o conceito de solução do problema.

No caso em que g é uma função seccionalmente contínua, com um número finito de descontinuidades nos pontos

$$0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n < +\infty,$$

vamos chamar solução do PVI a uma função $y : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

- $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ são contínuas em $[0, +\infty)$;
- $y^{(n)}$ é seccionalmente contínua em $[0, +\infty)$ e tem apenas descontinuidades nos pontos t_i;
- y satisfaz a equação diferencial em cada um dos subintervalos $[0, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_n, +\infty)$;
- y satisfaz as condições iniciais.

Pode provar-se que a solução (neste sentido) do PVI considerado existe e é única.

Exemplo Considere-se o seguinte PVI

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = u_\pi(t), \ t \in [0, +\infty) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial e usando a linearidade dessa transformada, obtemos

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}(s) + \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{u_\pi(t)\}.$$

Seja $Y(s) := \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Temos, então

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s}.$$

Substituindo os valores dados pelas condições iniciais, vem

$$s^2 Y(s) + Y(s) = \frac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s},$$

ou ainda

$$Y(s) = \frac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s(s^2+1)}.$$

Temos, então

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+1)}\right\}(t) \\ &= u_\pi(t) f(t-\pi), \end{aligned}$$

onde f é a transformada de Laplace inversa da função $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$. Como $\dfrac{1}{s(s^2+1)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1}$, tem-se

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right\}(x) = 1 - \cos(x).$$

Assim, a solução do PVI considerado é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= u_\pi(t)\left[1 - \cos(x)\right]_{x=t-\pi} \\ &= u_\pi(t)\left(1 - \cos(t-\pi)\right) \\ &= u_\pi(t)\left(1 + \cos t\right) \end{aligned}$$

ou seja, é a função

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1 + \cos t, & t \geq \pi \end{cases}.$$

Método das Transformadas de Laplace para PVIs

Para usar transformadas de Laplace na resolução de um PVI da forma

$$\begin{cases} a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = g(t), \ t \in [0, +\infty) \\ y(0) = y_0, \ y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_n \end{cases}$$

podemos:

1. Tomar a transformada de Laplace de ambos os membros da equação diferencial.
2. Usar as propriedades da transformada de Laplace e as condições iniciais para obter uma equação algébrica para $Y(s)$ (transformada de Laplace da solução do problema).
3. Resolver essa equação para determinar a expressão de $Y(s)$.
4. Obter $y(t)$ calculando a transformada de Laplace inversa de $Y(s)$.