Complementos de Análise Matemática

PARTE I - EDOs

Equações Lineares de Ordem n

Maria Joana Soares
Ricardo Severino

MIECivil

setembro 2011

Equações Lineares de Ordem n

Considere-se uma equação linear de ordem n, isto é, uma equação da forma

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

- Se $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ são constantes, a equação diz-se de coeficientes constantes.
- Se $b(x) = 0$, a equação diz-se homogénea.

Nota: No que se segue, supomos que as funções a_i e b são contínuas num certo intervalo I e que $a_n(x) \neq 0$ em I.
Dividindo ambos os membros da equação por $a_n(x)$ obtém-se uma equação na forma (dita forma normalizada):

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = g(x)$$

Existência e Unicidade de Solução de PVI

Começamos por enunciar o seguinte importante teorema.

Teorema

Sejam $p_0, \ldots, p_{n-1}$ e g funções contínuas num certo intervalo aberto I de $\mathbb{R}$ e seja x_0 um ponto desse intervalo. Então, para qualquer escolha das constantes $y_0, \ldots, y_{n-1}$, existe uma e uma só solução (definida em I) do seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \qquad \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Operador diferencial linear

Considere-se o operador diferencial[1] L definido por:

$$L[y] := y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y$$

(com $p_0, \ldots, p_{n-1}$ e g funções contínuas num certo intervalo aberto I de $\mathbb{R}$).[2] Facilmente se verifica (basta usar propriedades conhecidas das derivadas) que este operador é linear, i.e., que:

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$$
$$L[c\,y] = c\,L[y], \quad c \in \mathbb{R}.$$

[1]Um operador é simplesmente uma função entre espaços vectoriais.

[2]Este operador está definido no espaço vectorial das funções com derivadas contínuas até à ordem n no intervalo I, para a adição de funções e multiplicação de uma função por um escalar usuais.

Equação homogénea

Consideramos agora o caso especial de a equação dada ser homogénea, isto é, ser da forma $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y = 0$. O seguinte teorema é uma consequência imediata da linearidade do operador L.

Teorema

Se $y_1, y_2, \ldots, y_m$ são soluções da equação homogénea

$$L[y] := y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0, \quad (1)$$

então qualquer combinação linear $C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + \ldots + C_m\, y_m$ dessas funções também é solução da equação.

Dem: Ao cuidado dos alunos.

Suponhamos que temos n soluções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ da equação de ordem n homogénea

$$L[y] := y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0,$$

definidas num certo intervalo I.

Questão

Será que toda a solução dessa equação, no intervalo I, é uma combinação linear dessas funções, ou seja, é da forma

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_n\,y_n(x),$$

para determinadas constantes?

Resposta

Sim, se as n funções $y_1, \ldots, y_n$ forem linearmente independentes em I.

Funções linearmente independentes

Relembre:

Dadas m funções $f_1, f_2, \ldots, f_m$ definidas num certo intervalo I, elas dizem-se linearmente independentes em I, se

$$C_1\, f_1(x) + C_2\, f_2(x) + \cdots + C_m\, f_m(x) = 0, \;\; \forall x \in I \Rightarrow C_1 = C_2 = \cdots = C_m = 0.$$

Caso contrário, as funções dizem-se linearmente dependentes em I. Assim, $f_1, f_2, \ldots, f_m$ são linearmente dependentes em I se existirem constantes $C_1, C_2, \ldots, C_m$ não todas nulas tais que

$$C_1\, f_1(x) + C_2\, f_2(x) + \ldots + C_m\, f_m(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Exemplos:

1. As funções $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ e $f_3(x) = x^2$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}$.
   Suponhamos que $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + C_3 f_3(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ou seja que $C_1 + C_2 x + C_3 x^2 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Isto significa que o polinómio $P(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2$ é identicamente nulo, pelo que os seus coeficientes têm de ser iguais a zero, isto é, temos de ter $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Vemos assim que

   $$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + C_3 f_3(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow C_1 = C_2 = C_3 = 0,$$

   o que significa que as funções são, de facto, linearmente independentes em $I = \mathbb{R}$.
2. As funções $g_1(x) = x, g_2(x) = 3x$ e $g_3(x) = x^2$ são linearmente dependentes em $\mathbb{R}$.
   Basta notar que temos $3g_1(x) - g_2(x) + 0g_3(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
3. As funções $h_1(x) = \operatorname{sen} 2x$ e $h_2(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ são linearmente dependentes em $\mathbb{R}$.
   (Prove!)

Definição

Dadas n funções $f_1, f_2, \ldots, f_n$ deriváveis até à ordem $n-1$ (num certo intervalo I), chama-se Wronskiano destas n funções e denota-se por $W[f_1, f_2, \ldots, f_n](x)$ (ou, por vezes , simplesmente por $W(x)$) a função definida, para $x \in I$, por

$$W[f_1, f_2, \ldots, f_n](x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Pode provar-se o seguinte resultado, que pode ser útil para testar se certas soluções de uma equação diferencial são ou não linearmente independentes.

Teorema

Considere-se a equação diferencial linear homogénea

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0,$$

com p_i funções contínuas num certo intervalo I. Se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são n soluções dessa equação, definidas em I, então $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são linearmente independentes em I se e só se $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) \neq 0$, para algum $x_0 \in I$.

Nota: A condição suficiente deste teorema, isto é,

$$\exists x_0 \in I : W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) \neq 0 \Rightarrow y_1, \ldots, y_n \text{linearmente independentes}$$

é válida para quaisquer funções (suficientemente diferenciáveis) definidas em I.

Observação importante

Pode mostrar-se que os seguintes conjuntos de funções são formados por funções linearmente independentes em $\mathbb{R}$:

- $\{1, x, \ldots, x^n\}, n \in \mathbb{N}$
- $\{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \ldots, \operatorname{sen} nx, \cos nx\}, n \in \mathbb{N}$
- $\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}\}$, α_i constantes distintas
- $\{\operatorname{sen} x, \cos x, x \operatorname{sen} x, x \cos x, \ldots, x^n \operatorname{sen} x, x^n \cos x\}, n \in \mathbb{N}$

O seguinte teorema (cuja demonstração omitimos) carateriza as soluções de uma equação linear de ordem n homogénea.

Teorema

Considere-se uma equação diferencial linear de ordem n, homogénea

$$L[y] := y^{(n)}(x)+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+p_1(x)y'(x)+p_0(x)y(x) = 0, \quad (2)$$

com p_i funções contínuas num certo intervalo aberto I de $\mathbb{R}$. Então:

1. essa equação admite n soluções linearmente independentes em I;
2. sendo $y_1, y_2, \ldots, y_n$, n soluções linearmente independentes dessa equação, toda a solução dessa equação (no intervalo I) é da forma

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x), \quad (3)$$

com $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$.

1. Se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ forem n soluções linearmente independentes da equação linear de ordem n homogénea, $L[y] = 0$, dizemos que formam um conjunto fundamental de soluções dessa equação.
2. Nesse caso, dizemos que $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$ com $C_1, C_2, \ldots, C_n$ constantes arbitrárias em $\mathbb{R}$, é a solução geral dessa mesma equação.

Exemplo

- As funções $y_1(x) = \cos x$ e $y_2(x) = \operatorname{sen}(x)$ são soluções da equação diferencial $y''(x) + y(x) = 0$, em $I = \mathbb{R}$. (Verifique!)
- Para vermos se são linearmente independentes, podemos formar o seu Wronskiano e ver se ele é diferente de zero para algum $x_0 \in \mathbb{R}$. Temos

$$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

  Logo, as funções são linearmente independentes em $\mathbb{R}$.
- As funções $y_1(x) = \cos x$ e $y_2(x) = \operatorname{sen} x$ formam, portanto, um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial $y''(x) + y(x) = 0$ e a solução geral dessa equação é: $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Equações Lineares Homogéneas de Coeficientes Constantes

Consideremos agora o caso de termos uma equação linear de ordem n, homogénea e de coeficientes constantes, i.e. uma equação da forma

$$L[y] := a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = 0, \tag{4}$$

com $a_0, \ldots, a_n$ constantes e $a_n \neq 0$.

Relembrando o que acontece quando derivamos sucessivamente a função $y(x) = e^{rx}$, faz sentido procurar soluções da equação (4) que sejam da forma e^{rx}!

Para $y = e^{rx}$, tem-se

$$\begin{aligned} L[e^{rx}] &= a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} \\ &= e^{rx}\big(a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0\big) \\ &= e^{rx} P(r), \end{aligned}$$

onde

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

Vemos, assim que

$$e^{rx} \text{ é solução da equação } L[y] = 0 \iff L[e^{rx}] = 0$$
$$\iff e^{rx} P(r) = 0$$
$$\iff P(r) = 0$$

Equação caraterística

1. O polinómio

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

é chamado polinómio caraterístico da equação diferencial

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = 0$$

2. A equação $P(r) = 0$ é chamada equação caraterística dessa mesma equação.

Resultados sobre equações polinomiais

Relembre:

1. Uma equação polinomial de grau n admite n raízes (contando multiplicidades), as quais podem ser reais ou complexas.
2. Sendo os coeficientes da equação números reais, as raízes complexas ocorrem em pares conjugados (i.e., se $\alpha + \beta i$ é uma raiz, então $\alpha - \beta i$ também é uma raiz).
3. Para equações de grau superior a 4 não há fórmulas para determinar raízes [3] $\longrightarrow$ encontrar algumas raízes por tentativas e usar a Regra de Ruffini!

[3] E para equações do $3^{\underline{\text{o}}}$ e $4^{\underline{\text{o}}}$ graus, as fórmulas existentes são complicadas!

De seguida, vamos considerar uma equação diferencial linear de ordem n, homogénea e de coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \tag{5}$$

e discutir a forma da sua solução geral, em função do comportamento das raízes da respetiva equação caraterística

$$P(r) := a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0. \tag{6}$$

I. Raízes não repetidas

(A) Raízes reais

Se a equação caraterística $P(r) = 0$ admite n raízes reais distintas $r_1, r_2, \ldots, r_n$, então as n funções

$$y_1(x) = e^{r_1 x}, y_2(x) = e^{r_2 x}, \ldots, y_n(x) = e^{r_n x}$$

são soluções da equação diferencial.
Além disso, pode mostrar-se que tais funções são linearmente independentes em $\mathbb{R}$.
Assim sendo, podemos concluir que, neste caso, a solução geral da equação diferencial (5) é

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n e^{r_n x},\ C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Exemplo – raízes reais não repetidas

Considere-se a equação diferencial

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0$$

A equação caraterística correspondente a esta equação é

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

a qual admite as raízes $r_1 = -2$ e $r_2 = -3$.
Então, a solução geral da equação é

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

I. Raízes não repetidas

(B) Raízes complexas

Se a equação caraterística tem raízes complexas, elas ocorrem sempre em pares conjugados, isto é, se $r_1 = \alpha + i\beta$ é uma raiz da equação (6), também $r_2 = \overline{r_1} = \alpha - i\beta$ é uma raiz dessa equação.
Se a equação caraterística não tiver raízes repetidas, então a solução geral da equação ainda é dada por

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}, C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}.$$

No entanto, neste caso, surgem funções da forma $e^{(\alpha+i\beta)x}$ e $e^{(\alpha-i\beta)x}$.

Que significado tem $e^{(\alpha+i\beta)x}$ e $e^{(\alpha-i\beta)x}$?

I. Raízes não repetidas

(B) Raízes complexas

Para dar significado às expressões anteriores, é necessário saber o conceito de função exponencial complexa (a qual pode ser vista como uma generalização da função exponencial, para argumentos que são números complexos).

Para o que necessitamos nesta disciplina, apenas temos que saber que:

- A exponencial complexa satisfaz

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

- Para argumentos imaginários puros, $z = i\theta, \theta \in \mathbb{R}$, é válida a chamada **Fórmula de Euler**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

I. Raízes não repetidas

(B) Raízes complexas

Assim, temos

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)x} &= e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\ \operatorname{sen}\beta x\right) \\ &= e^{\alpha x}\cos\beta x + i\, e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{(\alpha-i\beta)x} &= e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos(-\beta x) + i\operatorname{sen}(-\beta x)) \\ &= e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\operatorname{sen}\beta x\right) = e^{\alpha x}\cos\beta x - i\, e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \end{aligned}$$

I. Raízes não repetidas

(B) Raízes complexas

Com o significado anterior para $e^{r_1 x}$ e $e^{\overline{r_1} x}$, a solução da equação pode, de facto, ser dada por

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{\overline{r_1} x} + \cdots + C_n e^{r_n x}, C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}.$$

No entanto, seria preferível exprimir a solução geral apenas em termos de funções reais, isto é, gostaríamos de substituir as duas funções complexas $y_1(x) = e^{r_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\overline{r_1} x}$ por duas funções reais (ainda solução da equação homogénea e tal que a independência linear das funções usadas se mantivesse).
Tal pode fazer-se, do modo como descrevemos de seguida.

I. Raízes não repetidas

(B) Raízes complexas

Se considerarmos a função que corresponde à raiz $r_1 = \alpha + i\beta$,

$$y_1(x) = e^{r_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + i\, e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x$$

pode provar-se que as duas funções que constituem, respetivamente, a sua parte real e sua parte imaginária, i.e as funções

$$Y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

e

$$Y_2(x) = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x$$

são ambas solução da equação diferencial homogénea considerada e podem ser usadas para "substituir"a parte da solução geral correspondente à raiz r_1 e à sua conjugada $\overline{r_1}$, ou seja,podem ser usadas para substituir as funções y_1 e y_2.

I. Raízes não repetidas

(B) Raízes complexas

Quer dizer, neste caso, a solução geral da equação homogénea vem dada por

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + C_3 e^{r_3 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}, \; C_i \in \mathbb{R}$$

Notas:

1. Se considerássemos a outra raiz, $r_2 = \overline{r_1} = \alpha - i\beta$, esta originaria as funções $e^{\alpha x} \cos \beta x$ e $-e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ que são, aparte o sinal da segunda função, as mesmas que obtemos com r_1, ou seja, conduzem à mesma "parte" da solução geral $C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$.
2. Se alguma das raízes $r_3, \ldots, r_n$ não for real, aplica-se o mesmo processo de substituição das exponenciais complexas correspondentes a essa raiz (e à sua conjugada), pelas respetivas partes real e imaginária.

Exemplo - raízes reais e complexas não repetidas

Considere-se a equação diferencial

$$y'''(x) + y''(x) + 3y'(x) - 5y(x) = 0.$$

A equação caraterística correspondente é

$$r^3 + r^2 + 3r - 5 = 0 = (r-1)(r^2 + 2r + 5) = 0.$$

As raízes da equação caraterística são $r_1 = 1$, $r_2 = -1 + 2i$ e $r_3 = -1 - 2i$. A solução geral da equação diferencial é, assim

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \cos 2x + C_3 e^{-x} \operatorname{sen} 2x, \ \ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

II. Raízes repetidas

Se a equação caraterística tem uma raiz r_1 de multiplicidade m (ou seja, se temos m raizes iguais $r_1 = r_2 = \cdots = r_m$), então as funções correspondentes a essas raizes, $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x} = e^{r_1 x}, \ldots,$ $y_m(x) = e^{r_m x} = e^{r_1 x}$ não são linearmente independentes (são iguais!), pelo que a solução geral da equação **não pode** ser dada pela expressão

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + \cdots + C_m e^{r_m x} + \cdots + C_n e^{r_n x}, C_i \in \mathbb{R}.$$

No entanto, neste caso, pode provar-se que as funções

$$y_1(x) = e^{r_1 x},\ y_2(x) = x e^{r_1 x}, \ldots,\ y_m(x) = x^{m-1} e^{r_1 x}$$

são ainda solução da equação homogénea considerada e que a "parte"da solução geral correspondente à raiz múltipla é da forma

$$\begin{aligned} &C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} + \cdots + C_m x^{m-1} e^{r_1 x} \\ &= (C_1 + C_2 x + \cdots + C_m x^{m-1}) e^{r_1 x}. \end{aligned}$$

1. **(A) Raízes reais repetidas**

   Se a raiz r_1 que está repetida é real, então a parte da solução geral correspondente a esta raiz é da forma

$$\left(C_1 + C_2 x + \cdots + C_m x^{m-1}\right) e^{r_1 x},\ C_1, \ldots, C_m \in \mathbb{R}.$$

2. **(B) Raízes complexas repetidas**

   Se a raiz repetida m vezes é uma raiz complexa $r_1 = \alpha + i\beta$, então também a sua raiz conjugada $\overline{r_1}$ aparece repetida m vezes. Nesse caso, as $2m$ funções complexas

$$e^{r_1 x},\ x e^{r_1 x}, \ldots, x^{m-1} e^{r_1 x}, e^{\overline{r_1} x},\ x e^{\overline{r_1} x}, \ldots,\ x^{m-1} e^{\overline{r_1} x}$$

   podem ser substituídas pelas $2m$ funções reais

$$e^{\alpha x} \cos \beta x,\ x e^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots,\ x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$
$$e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, x e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, \ldots,\ x^{m-1} e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,$$

   ou seja a parte da solução geral da equação correspondente a estas raízes é da forma

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} [& (C_1 + C_2 x + \cdots + C_m x^{m-1}) \cos \beta x \\ & + (C_{m+1} + C_{m+2} x + \cdots + C_{2m} x^{m-1}) \operatorname{sen} \beta x] \end{aligned}$$

Exemplo - raízes repetidas

Consideremos a equação diferencial

$$y^{(4)}(x) + 2y^{(2)}(x) + y(x) = 0,$$

à qual corresponde a equação caraterística

$$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)^2 = 0.$$

Esta equação tem duas raízes complexas, $r_1 = i$ e $r_2 = -i$, ambas de multiplicidade dois.
A solução geral da equação é, assim,

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\,\mathrm{sen}\, x,\;\; C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Equação não homogénea

Debruçamo-nos agora sobre o caso em que a equação diferencial dada não é homogénea. Tem-se o seguinte resultado.

Teorema

Considere-se uma equação diferencial

$$L[y] := y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = g(x), \tag{8}$$

com p_i e g funções contínuas num certo no intervalo aberto I de $\mathbb{R}$. Seja $y_p(x)$ uma solução particular dessa equação (no intervalo I) e seja $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ um conjunto fundamental de soluções (no intervalo I) da equação homogénea correspondente

$$L[y] := y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = 0. \tag{9}$$

Então, toda a solução da equação (8) no intervalo I pode ser escrita na forma

$$y(x) = y_p(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x),\ C_i \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Dem: $\Rightarrow$)

- y_p solução da equação $L[y] = g \Rightarrow L[y_p] = g$
- $y_1, \ldots, y_n$ soluções da equação homogénea $L[y] = 0 \Rightarrow$ $L[C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n] = 0$
- Então, temos $L[y_p + C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n] = L[y_p] + L[C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n] = g + 0 = g$ $\longrightarrow y_p + C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n$ é solução da equação $L[y] = g$.

$\Leftarrow$)

- Seja y_q uma solução da equação $L[y] = g$, i.e. seja y_q tal que $L[y_q] = g$.
- Por hipótese, y_p é solução da equação, i.e. temos $L[y_p] = g$.
- Então, tem-se $L[y_q - y_p] = L[y_q] - L[y_p] = g - g = 0 \rightarrow y_q - y_p$ é solução da equação homogénea $L[y] = 0$. Como $y_1, \ldots, y_n$ é um conjunto fundamental de soluções desta equação, segue-se que $y_q - y_p = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n$, para certas constantes $C_i \in \mathbb{R}$, ou seja, temos
$$y_q = y_p + C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n,$$
com $C_i \in \mathbb{R}$, c.q.d.

Solução geral da equação não homogénea

Dada a equação linear de ordem n, não homogénea $L[y] = g$, a expressão

$$y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

em que $y_p(x)$ é uma sua solução particular e $y_1, \ldots, y_n$ formam um conjunto fundamental de soluções da correspondente equação homogénea $L[y] = 0$ (ou seja, onde $C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x)$ é a solução geral da equação homogénea $L[y] = 0$) é chamada solução geral da equação não homogénea.

No caso em que a equação não homogénea é de coeficientes constantes

$$L[y] := a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = g(x),$$

como já sabemos determinar a solução geral da correspondente equação homogénea $L[y] = 0$, para determinarmos a sua solução geral, bastar-nos-á, então, encontrar uma sua solução particular.

O método que iremos descrever agora – chamado **método dos coeficientes indeterminados** – permite-nos encontrar essa solução particular, mas apenas para certo tipo de funções g.
Comecemos por analisar alguns exemplos.

Exemplo 1

Consideremos a seguinte equação diferencial

$$L[y](x) := y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 3x + 1$$

Pretendemos encontrar uma função y_p tal que $L[y_p](x) = 3x + 1$.

$$\boxed{y_p(x) = Ax + B \quad ?}$$

Virá

$$L[y_p](x) = 0 + 3A + 2(Ax + B) = 2Ax + (3A + 2B)$$

Igualando a $3x + 1$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2A = 3 \\ 3A + 2B = 1, \end{cases}$$

que tem como solução $A = \frac{3}{2}$ e $B = -\frac{7}{4}$.
Conclusão: $y_p(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$ é uma solução particular da equação dada.

Exemplo 2

Consideremos agora a seguinte equação diferencial

$$L[y](x) := y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^{2x}$$

Neste caso, pretendemos encontrar uma função y_p tal que $L[y_p](x) = e^{2x}$.

$$\boxed{y_p(x) = Ae^{2x} \ \ ?}$$

Se $y_p(x) = Ae^{2x}$, virá

$$L[y_p](x) = 4Ae^{2x} + 3(2Ae^{2x}) + 2(Ae^{2x}) = 12e^{2x}$$

Igualando a e^{2x}, ter-se-á $A = \frac{1}{12}$.

Conclusão: $y_p(x) = \frac{1}{12}e^{2x}$ é uma solução particular da equação considerada.

Exemplo 3

Seja dada a seguinte equação diferencial

$$L[y](x) := y''(x) - y'(x) = \operatorname{sen} x$$

Neste caso, pretendemos encontrar uma função y_p tal que $L[y_p](x) = \operatorname{sen} x$.

$$\boxed{y_p(x) = A \operatorname{sen} x \ ?}$$

Se $y_p(x) = A \operatorname{sen} x$, virá

$$L[y_p](x) = -A \operatorname{sen} x - A \cos x$$

Igualando a $\operatorname{sen} x$, ter-se-ia[4] $A = -1$ e $A = 0$ (Impossível!).

[4] Note-se que as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}$

Exemplo 3 (cont.)

$$L[y](x) := y''(x) - y'(x) = \operatorname{sen} x$$

$$\boxed{y_p(x) = A \operatorname{sen} x + B \cos x \quad ?}$$

Neste caso, virá

$$\begin{aligned} L[y_p](x) &= (-A \operatorname{sen} x - B \cos x) - (A \cos x - B \operatorname{sen} x) \\ &= (-A + B) \operatorname{sen} x - (A + B) \cos x \end{aligned}$$

Igualando a $\operatorname{sen} x$ obtém-se o sistema

$$\begin{cases} -A + B = 1 \\ A + B = 0, \end{cases} ,$$

o qual tem solução $A = -\frac{1}{2}$ e $B = \frac{1}{2}$.
Conclusão: $y_p(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x$ é uma solução particular da equação dada.

Funções CI

Chamam-se funções de coeficientes indeterminados, ou abreviadamente, funções CI, a todas funções da seguinte forma:

- $x^n, \ n \in \mathbb{N}_0$
- $e^{\alpha x}, \ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$
- $\operatorname{sen}(bx+c), \ \cos(bx+c), \ b \neq 0$
- Produtos finitos de quaisquer funções anteriores.

Por exemplo, as funções $g_1(x) = x^3$, $g_2(x) = e^{3x} \operatorname{sen} 2x$ e $g_3(x) = x^2 e^x \cos x$ são funções CI.

Conjuntos CI

A cada função CI está associado um conjunto, chamado conjunto CI dessa função, do seguinte modo:

- $x^n, \; n \in \mathbb{N}_0 \longrightarrow \{1, x, \ldots, x^n\}$
- $e^{\alpha x}, \; \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \longrightarrow \{e^{\alpha x}\}$
- $\operatorname{sen}(bx+c), \; \cos(bx+c), \; b \neq 0 \longrightarrow \{\operatorname{sen}(bx+c), \cos(bx+c)\}$
- Produto de duas funções anteriores $\longrightarrow$ conjunto formado pelos produtos obtidos multiplicando todos os elementos do conjunto CI da primeira pelos elementos do conjunto CI da segunda.

Exemplo

Considere-se a seguinte função CI

$$g(x) = xe^x \operatorname{sen} x.$$

Para procurar o conjunto CI associado a esta função, procedemos do seguinte modo:

$$x \longrightarrow \{1, x\}$$
$$e^x \longrightarrow \{e^x\}$$
$$\operatorname{sen} x \longrightarrow \{\operatorname{sen} x, \cos x\}$$

A função xe^x terá $\{e^x, xe^x\}$ como conjunto CI e a função $xe^x \operatorname{sen} x$ terá, então, como conjunto CI associado, o seguinte conjunto:

$$\{e^x \operatorname{sen} x, e^x \cos x, xe^x \operatorname{sen} x, xe^x \cos x\}.$$

Exemplo 4

Considere-se agora seguinte equação diferencial

$$L[y](x) := y''(x) - y'(x) - 12y(x) = e^{4x}$$

Neste caso, pretendemos encontrar uma função y_p tal que $L[y_p](x) = e^{4x}$. Como o conjunto CI de e^{4x} é $\{e^{4x}\}$, será natural procurar uma solução da forma

$$\boxed{y_p(x) = Ae^{4x}}$$

Se $y_p(x) = Ae^{4x}$, virá

$$L[y_p](x) = 16Ae^{4x} - 4Ae^{4x} - 12Ae^{4x} = 0,$$

pelo que será impossível obter-se $L[y_p](x) = 0 = e^{4x}$, seja qual for o valor da constante A.

O problema vem do facto de e^{4x} ser uma solução da equação homogénea $L[y] = y'' - y' - 12y = 0$.

(Note que a equação caraterística é $r^2 - r - 12 = 0$, a qual tem como raízes $r_1 = 4$ e $r_2 = -3$, pelo que as funções $y_1(x) = e^{4x}$ e $y_2(x) = e^{-3x}$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogénea.)

Exemplo 4 (cont.)

$$L[y](x) := y''(x) - y'(x) - 12y(x) = e^{4x}$$

Vamos procurar uma solução da forma

$$\boxed{y_p(x) = Axe^{4x}}$$

Quando $y_p(x) = Axe^{4x}$, vem

$$\begin{aligned} L[y_p](x) &= (16Ax + 8A)e^{4x} - (4Ax + A)e^{4x} - 12Axe^{4x} \\ &= 8Ae^{4x} \end{aligned}$$

Igualando a e^{4x}, obtém-se $A = \frac{1}{8}$.
Conclusão: $y_p(x) = \frac{1}{8}xe^{4x}$ é uma solução particular da equação dada.

Método dos coeficientes indeterminados

Para encontrar uma solução particular y_p de uma equação da forma

$$L[y](x) := a_n y^{(n)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x),$$

onde $g(x) = \alpha_1 g_1(x) + \cdots + \alpha_m g_m(x)$, com $g_1, \ldots, g_m$ funções CI, devemos:

1. Encontrar o conjunto CI associado a cada uma das funções g_i.
2. Eliminar, de entre estes conjuntos, os que sejam subconjunto de algum outro.
3. Se algum dos conjuntos resultantes contiver uma solução da equação homogénea $L[y] = 0$, multiplicar todos os seus elementos por x^s, onde s é o menor inteiro que garante que o conjunto resultante já não possui nenhuma solução dessa equação.
4. Considerar para y_p uma combinação linear (com coeficientes a determinar) de todas as funções dos conjuntos resultantes.
5. Partindo de $L[y_p](x) = g(x)$, encontrar um sistema de equações cujas incógnitas são os coeficientes de y_p.
6. Resolver o sistema resultante.