Complementos de Análise Matemática

PARTE I - EDOs

Equações de Primeira Ordem

Maria Joana Soares
Ricardo Severino

MIECivil

setembro 2011

Equações Diferenciais

Muitos modelos usados para descrever fenómenos físicos envolvem equações que contêm uma ou mais derivadas de uma função desconhecida. Tais equações são chamadas *equações diferenciais*.

Exemplos

1. $$m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg, \quad \text{queda de um grave}$$

   $h(t)$ - altura acima do solo (no instante t) do objeto, m - massa do objeto, g - constante de gravitação

2. $$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \quad \text{equação do calor (ou difusão)}$$

   $u(x,t)$ - temperatura na posição x e instante t quando o calor se propaga apenas ao longo do eixo dos xx (por exemplo, ao longo de um fio condutor), β - constante de difusividade do material.

EDO's e EDP's; Ordem

Eq. Dif. $\begin{cases} \text{ordinárias (EDO's) – Ex: } \dfrac{d^2y}{dx^2} + y(x) = 3\cos x \\ \\ \text{de derivadas parciais (EDP's) – Ex: } \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$

Ordem

- $\dfrac{dy}{dt} = 1 + y^2$ – $1^{\underline{a}}$ ordem
- $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = e^x$ – $2^{\underline{a}}$ ordem
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ – $2^{\underline{a}}$ ordem

Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)

Neste primeira parte do curso, trataremos apenas do caso de equações diferenciais ordinárias, i.e. equações da forma:

$$F\left(x, y, y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \tag{1}$$

Por vezes, é possível escrever a equação (1) na forma

$$y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

As equações diferenciais ordinárias classificam-se em

- **lineares** se se puderem escrever na forma

  $$a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x) = f(x)$$

- **não lineares** - caso contrário.

Exemplos

- $$\frac{dy}{dx} + xy = 1$$ linear

- $$\frac{d^2y}{dx^2} + x^2y = \cos x$$ linear

- $$\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} = \cos x$$ não linear

- $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$ não linear

Solução explícita

Considere-se uma equação diferencial ordinária de ordem n

$$F\left(x, y, y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \tag{3}$$

Uma função ϕ diz-se uma **solução explícita** de (3) num certo intervalo $I = (a, b)$ de $\mathbb{R}$[a], se $\phi, \phi', \ldots, \phi^{(n)}$ estiverem definidas e forem contínuas em I e satisfizerem

$$F\left(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)\right) = 0, \quad \forall x \in I.$$

[a]Onde poderá ser $a = -\infty$ e/ou $b = +\infty$

Nota: De acordo com a definição, se ϕ é solução da equação diferencial num certo intervalo aberto I, também é solução em qualquer intervalo aberto $I' \subset I$; quando falamos da solução num intervalo I, entende-se que I é o maior intervalo possível.

Exemplo (solução de uma EDO)

A função

$$\phi(x) = e^{-x}$$

é solução explícita da equação diferencial

$$y'(x) + y(x) = 0$$

em $I = (-\infty, +\infty)$.

1. $\phi(x) = e^{-x}$ e $\phi'(x) = -e^{-x}$ estão definidas e são contínuas em $I = (-\infty, +\infty)$.
2. Tem-se $\phi'(x) + \phi(x) = -e^{-x} + e^{-x} = 0$, para todo o $x \in I$.

Solução implícita

Uma relação $G(x,y)=0$ diz-se uma **solução implícita** de (3) num intervalo I, se define uma ou mais funções que são soluções explícitas de (3) em I.

Exemplo: A relação $x^2+y^2-25=0$ é solução implícita de $x+y\dfrac{dy}{dx}=0$ em $I=(-5,5)$.

1. $x^2+y^2-25=0 \Rightarrow y=\pm\sqrt{25-x^2}$
2. $\phi(x)=\sqrt{25-x^2} \Rightarrow \frac{d\phi}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$
3. ϕ e $\frac{d\phi}{dx}$ estão definidas e são contínuas em $I=(-5,5)$ e tem-se

$$x+\phi\frac{d\phi}{dx}=x+\sqrt{25-x^2}\,\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}=0, \quad \forall x\in I.$$

Solução formal

A relação

$$x + y + e^{xy} = 0 \tag{4}$$

será solução implícita da equação diferencial

$$(1 + xe^{xy})\frac{dy}{dx} + e^{xy}y + 1 = 0\,? \tag{5}$$

Neste caso, não conseguimos explicitar y a partir de (4)!
Admitindo que (4) define implicitamente y como função diferenciável de x num certo intervalo I e derivando (4) implicitamente (em ordem a x), vem

$$1 + \frac{dy}{dx} + e^{xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0 \Leftrightarrow (1 + xe^{xy})\frac{dy}{dx} + e^{xy}y + 1 = 0$$

Solução formal (cont.)

Deixando de lado o problema de saber se a relação (4) define ou não uma função de x, obtivemos (5) a partir de (4). (Tratou-se de uma dedução puramente formal, porque envolveu uma derivação que não sabemos sequer se faz sentido!). Dizemos, então, que a relação (4) é uma **solução formal** da equação diferencial (5).

A solução formal pode ser ou não uma solução implícita.

Exemplo: $x^2 + y^2 + 25 = 0$ é solução formal de $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$ e, no entanto, não é solução implícita dessa equação.

1. Derivando implicitamente $x^2 + y^2 + 25 = 0$ (em ordem a x, admitindo que y é função diferenciável de x), vem
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \iff x + y\frac{dy}{dx} \rightarrow \text{é solução formal.}$$
2. $x^2 + y^2 + 25 = 0 \iff x^2 + y^2 = -25 \rightarrow$ impossível para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Notas

1. Em certos casos, é possível mostrar que uma relação $G(x, y) = 0$ define implicitamente uma função $y = \phi(x)$ diferenciável, usando o chamado *Teorema da Função Implícita*. Neste caso, se $G(x, y)$ for uma solução formal de uma certa equação diferencial, será solução implícita. [1]
2. Muitas vezes, neste curso, limitar-nos-emos a encontrar soluções formais.
3. Quando nos referirmos a solução de uma equação diferencial poderá significar tanto uma solução implícita como explícita, ou até mesmo, apenas uma solução formal.

[1]**Teorema da Função Implícita** Suponhamos que $G(x, y)$ tem derivadas parciais contínuas num retângulo $R = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ que contém o ponto (x_0, y_0). Se $G(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, então existe uma função $y = \phi(x)$ diferenciável num certo intervalo $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ que satisfaz $G(x, \phi(x)) = 0, \forall x \in I$.

Problema de Valores Iniciais

Em geral, uma equação diferencial de ordem n admite uma família de soluções, dependente de n constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Exemplo:

Qualquer função da família de funções $\phi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ é solução da equação diferencial $y'' - y' - 2y = 0$ em $I = (-\infty, +\infty)$.

São, assim, necessárias n *condições adicionais* para determinar o valor das constantes e se obter uma única solução.

Quando essas condições são a exigência de qual o valor que a solução y e as suas derivadas (até à ordem $n-1$, no caso de uma EDO de ordem n) devem assumir num determinado ponto x_0, dizemos que estamos perante um problema de valores inicias (PVI). [2]

[2] Em muitos problemas, a variável independente representa o tempo e x_0 será visto como o *instante inicial*, daí a referência a valores iniciais.

Problema de Valores Iniciais (cont.)

Resolver um **Problema de Valores Iniciais (PVI)** consiste, assim, em determinar uma função $y = \phi(x)$ que seja solução de uma dada equação diferencial $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ num certo intervalo I e que satisfaça, além disso, condições do tipo:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_n, \end{cases}$$

onde $x_0 \in I$ e $y_0, \ldots, y_n$ são constantes dadas. As condições impostas a y e às suas derivadas no ponto x_0 são chamadas **condições iniciais.**

Exemplo

Considere-se o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0, \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Vejamos que $\phi(x) = e^{-x}$ é solução deste problema, em $I = (-\infty, +\infty)$.

1. $\phi(x) = e^{-x} \Rightarrow \phi'(x) = -e^{-x},\ \phi''(x) = e^{-x}$; ϕ, ϕ' e ϕ' estão definidas e são contínuas em $I = (-\infty, +\infty)$.
2. Tem-se $\phi''(x) - \phi'(x) - 2\phi(x) = e^{-x} - (-e^{-x}) + 2e^{-x} = 0$, para todo o $x \in I$.
   $\rightarrow$ ϕ é solução da equação diferencial.
3. $\phi(0) = e^0 = 1$, $\phi'(0) = -e^0 = -1$
   $\rightarrow$ ϕ satisfaz as condições iniciais.

Existência e Unicidade de Solução

Para um PVI associado a uma EDO de primeira ordem, pode provar-se o seguinte teorema.

Teorema (de Picard): Seja dado o PVI

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

e suponhamos que f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas num retângulo $R = \{(x,y) : a < x < b, c < y < d\}$ que contém o ponto (x_0, y_0). Então o problema admite uma e uma só solução definida num certo intervalo $I = (x_0 - h, x_0 + h),\ h > 0$.

Equações separáveis

Vamos agora estudar métodos para resolver alguns tipos especiais de equações diferenciais de primeira ordem. As primeiras a considerar serão as chamadas *equações separáveis*:

Uma equação que se possa escrever na forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\, p(y),$$

é dita **separável.**

Exemplo:

1. $\displaystyle \frac{dy}{dx} = \frac{2x + xy}{y^2 + 1} = \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{\frac{2 + y}{y^2 + 1}}_{p(y)} \to$ é separável.

2. $\displaystyle \frac{dy}{dx} = 1 + x\, y \to$ não é separável.

Equações separáveis (Resolução)

Considere-se uma equação separável

$$\frac{dy}{dx} = g(x)p(y).$$

Dividindo ambos os membros desta equação por $p(y)$ (admitindo que $p(y) \neq 0$), vem

$$\underbrace{\frac{1}{p(y)}}_{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x).$$

Tem-se, então

$$h(y)\,\frac{dy}{dx} = g(x), \tag{6}$$

onde $h(y) = \dfrac{1}{p(y)}$.

Sejam $H(y)$ e $G(x)$ primitivas de $h(y)$ e $g(x)$, respetivamente (i.e. funções tais que $\frac{dH}{dy} = h(y)$ e $\frac{dG}{dx} = g(x)$). A equação (6) escreve-se, então, como

$$\frac{dH}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dG}{dx}.$$

Tendo em conta a regra da derivação da função composta (regra da cadeia), vemos que a última equação é equivalente a

$$\frac{dH(y(x))}{dx} = \frac{dG(x)}{dx}. \tag{7}$$

Integrando ambos os membros da equação anterior em ordem a x, vem

$$H(y(x)) = G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

(Note-se que, ao integrarmos ambos os membros da equação (7), não necessitamos de usar duas constantes de integração, i.e. escrever $H(y(x)) + C_1 = G(x) + C_2$, porque isto é equivalente a usar-se $C = C2 - C1$.)

Resolução de equações separáveis (cont.)

Em conclusão, todas as soluções da equação diferencial satisfazem a relação

$$H(y(x)) = G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Contudo, esta relação define apenas *soluções formais*. Para encontrar as *verdadeiras soluções* será necessário um estudo adicional, já que estas terão de ser funções continuamente diferenciáveis num certo intervalo aberto I (o qual, em geral, vai depender do valor da constante C).

Como já referimos, neste curso, quando falamos em "resolver a equação diferencial" tal pode significar, apenas, obter a relação $H(y(x)) = G(x) + C$.

Na prática, podemos resolver as equações de uma forma mais simples, considerando $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ como o quociente de dois *diferenciais*, dy e dx, vistos como duas entidades próprias que podem ser separadas; isto permite-nos "separar as variáveis", da forma como se indica de seguida.

Resolução de Equações Separáveis (Método de separação de variáveis)

1. $\frac{dy}{dx} = g(x)\, p(y) \longrightarrow \frac{1}{p(y)}\, dy = g(x)\, dx$ (sep. variáveis)

2. $h(y) := \frac{1}{p(y)} \longrightarrow h(y)\, dy = g(x)\, dx$

3. $\int h(y) dy = \int g(x) dx \longrightarrow \boxed{H(y) = G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}}$

4. Se possível, explicitar y.

Exemplo (resolução de uma equação separável)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$$

Reescrevendo a equação anterior na forma

$$y^2\, dy = x^2\, dx$$

e integrando ambos os membros desta equação, obtém-se

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, é fácil explicitar y, vindo

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}, \quad C \in \mathbb{R},$$

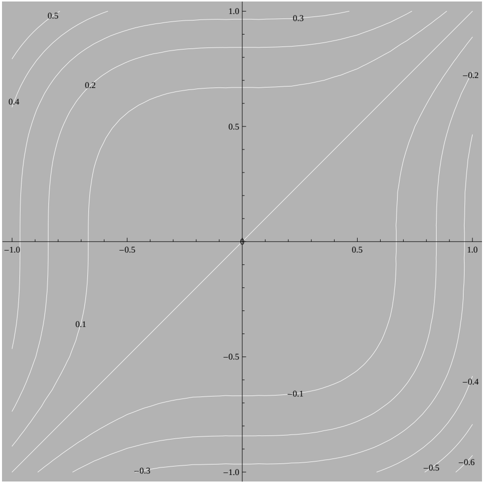
ou, de forma equivalente

$$y = \sqrt[3]{x^3 + k}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exemplo (cont.)

- $y(x) = \sqrt[3]{x^3+k} \Longrightarrow y'(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+k)^2}}$
  Quando $k \neq 0$, a derivada de y não está definida para $x^3+k=0$ ou seja, para $x = -\sqrt[3]{k}$. Assim, para cada $k \neq 0$, temos como soluções da equação dada, as funções:
  - $y_1(x) = \sqrt[3]{x^3+k}$, para $x \in I_1 = (-\infty, -\sqrt[3]{k})$;
  - $y_2(x) = \sqrt[3]{x^3+k}$, para $x \in I_2 = (-\sqrt[3]{k}, +\infty)$;
- Tem-se ainda a solução $y(x) = x$, definida em $I = (-\infty, +\infty)$ (correspondente ao caso $k = 0$).
- Note-se que, neste caso, o intervalo de existência da solução depende da solução considerada (isto é, do valor de k).

Exemplo (cont.)



Alguns cuidados

1. **Solução formal**
   Método separação variáveis pode conduzir apenas a soluções formais. Obtenção de soluções implícitas (ou explícitas) requer algum cuidado com as constantes arbitrárias.
   Exemplo
   $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \longrightarrow ydy = -xdx \longrightarrow x^2 + y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$
   A equação anterior só define uma solução para $C > 0$ (solução essa definida em $I = (-\sqrt{C}, \sqrt{C})$).

Alguns cuidados

2. **Possível perda de soluções**

   Consideremos a equação

$$\frac{dy}{dx} = g(x)p(y) \tag{9}$$

   Quando, ao usar o método anterior, dividimos por $p(y)$, assumimos que $p(y) \neq 0$.

   Se r é uma solução da equação $p(y) = 0$, então a função constante $y(x) = r$ é uma solução da equação diferencial (9) (Porquê?) que podemos perder quando dividimos por $p(y)$.

Exemplo (perda de soluções)

$$\frac{dy}{dx} = (x-3)(y+1)^{2/3} \underset{((y+1)\neq 0)}{\longrightarrow} \frac{1}{(y+1)^{2/3}}dy = (x-3)dx$$

$$\longrightarrow 3(y+1)^{1/3} = \frac{x^2}{2} - 3x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

de onde se obtém

$$y = \left(\frac{x^2}{6} - x + k\right)^3 - 1, \quad k \in \mathbb{R} \tag{10}$$

Neste caso, tem-se $p(y) = (y+1)^{2/3} = 0 \iff y = -1$, pelo que a função constante $y(x) = -1$ é solução da equação dada; mas, esta solução **não** pertence à família de soluções (10)!

Equações exatas

Uma equação diferencial da forma

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{11}$$

diz-se **exata** num certo retângulo $R = \{(x,y) : a < x < b, c < y < d\}$[a], se existir uma função $F(x,y)$ definida e contínua em R, com derivadas parciais $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ contínuas em R e que satisfaça

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y), \tag{12}$$

para todo o (x,y) em R.

[a] Não é estritamente necessário considerar um retângulo; poderíamos considerar um domínio D convexo de $\mathbb{R}^2$.

Equação exata (exemplo)

A equação $(y - 3x^2) + (x - 1)\,\frac{dy}{dx} = 0$ é exata.
Basta notar que a função

$$F(x, y) = xy - x^3 - y$$

está definida e é contínua em $R = \mathbb{R}^2$ e é tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y - 3x^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x - 1$$

sendo, além disso, estas funções contínuas em R.

Resolução de equações exatas

Dada uma equação exata, se encontrarmos a função $F(x, y)$ em (12), é muito simples resolver a equação dada. De facto, sendo y uma função de x com derivada contínua num certo intervalo I, tem-se, para $x \in I$:

$$\begin{aligned} M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 &\iff \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \\ &\iff \frac{d}{dx}F(x,y(x)) = 0 \\ &\iff F(x,y) = C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Conclusão: as soluções da equação dada são as funções (continuamente diferenciáveis num certo intervalo I de $\mathbb{R}$) que satisfazem

$$F(x,y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Resolução de equações exatas (cont.)

Nota: Se $F(x,y)$ satisfaz (12), i.e., se $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$, também $F(x,y) + k_0$, com $k_0 \in \mathbb{R}$, satisfaz as mesmas equações, ou seja, a função $F(x,y)$ está definida a menos de uma constante. No entanto, como a relação que obtemos para as soluções é da forma

$$F(x,y) = C \tag{13}$$

o papel dessa constante é irrelevante, já que "pode ser sempre absorvido" pela constante C do lado direito de (13), i.e. ter-se $F(x,y) + k_0 = C$, com k_0 e C constantes arbitrárias, equivale a ter-se $F(x,y) = k$, com $k = C - k_0$ arbitrária.

1. Como saber se uma equação é exata?
2. Como encontrar $F(x,y)$?

Equações exatas (cont.)

O teorema seguinte responde à primeira questão.

Teorema (Teste de exatidão): Seja dada a equação

$$M(x,y) + N(x,y)\,\frac{dy}{dx} = 0$$

e suponhamos que as primeiras derivadas parciais de $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são contínuas num certo retângulo R. Então, a equação dada é exata se e só se

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)}$$

para todo (x,y) em R.

Dem: $\Rightarrow$)

$$M(x,y)+N(x,y)\,\tfrac{dy}{dx}=0 \text{ exata}$$

$$\Longrightarrow \exists F(x,y): \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

Mas, (Teorema de Schwarz)

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$

logo, tem-se

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

q.e.d.

$\Leftarrow$) Ver Ross, pp. 28-30.

Vejamos, com um exemplo, como proceder para encontrar $F(x,y)$ (sabendo que a equação é exata).
Considere-se a seguinte equação exata em $R=\mathbb{R}^2$ (verifique que é exata):

$$(3x^2+4xy)+(2x^2+2y)\,\frac{dy}{dx}=0.$$

- $M(x,y)=3x^2+4xy=\frac{\partial F}{\partial x}$ e $N(x,y)=2x^2+2y=\frac{\partial F}{\partial y}$
- $\dfrac{\partial F}{\partial x}=3x^2+4xy \Longleftrightarrow F(x,y)=\displaystyle\int(3x^2+4xy)\,dx+g(y)$
  $\Longleftrightarrow F(x,y)=x^3+2x^2y+\underbrace{g(y)}_{?}$
- $\dfrac{\partial F}{\partial y}=2x^2+2y \Longleftrightarrow 2x^2+g'(y)=2x^2+2y \Longleftrightarrow g'(y)=2y \Longleftrightarrow$
  $g(y)=y^2+k_0, \quad k_0\in\mathbb{R}.$
- Tomando, por exemplo, $g(y)=y^2$ (i.e. $k_0=0$), vem
  $F(x,y)=x^3+2x^2y+y^2.$
  As soluções satisfazem:

$$x^3+2x^2y+y^2=C, \quad C\in\mathbb{R}.$$

Resolução de Equações Exatas

1. $$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \Longleftrightarrow F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y) \qquad (*)$$
2. Derivar (em ordem a y) ambos os lados da equação $(*)$:
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\int M(x,y)\,dx\right\} + g'(y)$$
3. Substituir $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ por $N(x,y)$ para obter $g'(y)$.
4. Integrar $g'(y)$ para obter $g(y)$ (a menos de uma constante, mas podemos escolher arbitrariamente o valor da constante).
5. Substituir $g(y)$ em $(*)$ $\rightarrow F(x,y)$.
6. Soluções satisfazem $F(x,y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$.

Nota:

Na determinação de $F(x,y)$, poderíamos ter começado por integrar $N(x,y)$ em ordem a y, de modo a obter

$$F(x,y) = \int N(x,y)\,dy + h(x),$$

prosseguindo depois de modo análogo ao anterior para determinar $h(x)$.

Devemos ver qual das funções $M(x,y)$ ou $N(x,y)$ é mais fácil de integrar!

Exemplo:

$$(1 + e^x y + x e^x y) + (x e^x + 2)\,\frac{dy}{dx} = 0.$$

(Experimente!)

Fator integrante

Uma equação pode não ser exata, mas transformar-se numa equação exata se for multiplicada por um fator conveniente.

Exemplo: A equação

$$y + 2x\,\frac{dy}{dx} = 0$$

não é exata, mas, se multiplicarmos ambos os membros por y, vem

$$y^2 + 2xy\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

que é uma equação exata. (Verifique!)

Um fator $\mu(x, y)$ que transforma uma equação não exata numa equação exata (essencialmente) equivalente[a] à primeira chama-se um **fator integrante**.

[a] Essencialmente equivalente, porque poderá haver perda ou ganho de soluções quando multiplicamos por $\mu(x, y)$.

Equações lineares

Uma equação de primeira ordem, linear, é da forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x).$$

No que se segue, supomos que a_1, a_0 e f são contínuas num certo intervalo aberto I de $\mathbb{R}$ e que $a_1(x) \neq 0, \quad \forall x \in I$. Dividindo ambos os membros da equação anterior por $a_1(x)$, obtém-se uma equação na forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{14}$$

onde $P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e $Q(x) = \frac{f(x)}{a_1(x)}$.
A forma (14) é dita **forma canónica** de uma equação linear de primeira ordem.

Equações lineares (cont.)

A equação $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ pode escrever-se como

$$\underbrace{\Big(P(x)y - Q(x)\Big)}_{M(x,y)} + \underbrace{1}_{N(x,y)} \frac{dy}{dx} = 0. \tag{15}$$

Esta equação só será exata se $\dfrac{\partial M}{\partial y} = P(x) = \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0.$

No entanto, vamos ver que existe um fator integrante $\mu(x)$ (que é apenas apenas função de x) para esta equação!

Equações lineares

Determinação do fator integrante $\mu(x)$

Multipliquemos a equação (15) por $\mu(x)$ e tentemos determinar $\mu(x)$ de modo a que a equação resultante

$$\underbrace{\Big(\mu(x)\, P(x)y - Q(x)\Big)}_{M(x,y)} + \underbrace{\mu(x)}_{N(x,y)}\ \frac{dy}{dx} = 0 \tag{16}$$

seja exata.
Tem-se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \mu(x)P(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}.$$

Logo, a equação (19) será exata se e só se $\mu(x)$ satisfizer

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)P(x). \tag{17}$$

A equação anterior pode escrever-se como

$$\frac{1}{\mu}\,d\mu = P(x)dx \tag{18}$$

que é uma equação separável. Resolvendo-a, obtém-se a seguinte solução particular (note-se que só precisamos de encontrar **um** fator integrante)

$$\ln|\mu(x)| = \int P(x)\,dx\,,$$ [3]

ou seja, vem

$$\mu(x) = \pm\exp\left(\int P(x)\,dx\right).$$

É natural escolher

$$\mu(x) = \exp\left(\int P(x)\,dx\right).$$

[3] Há aqui um pequeno abuso de linguagem; o símbolo $\int P(x)dx$, geralmente reservado para uma família de primitivas, é aqui usado para designar **uma** primitiva particular de $P(x)$, por exemplo, a que corresponde a tomar a constante de integração igual a zero.

Podemos, então, usar o fator integrante μ para converter a equação dada numa equação exata, resolvendo-a de seguida da forma habitual.
Mas, podemos também observar o seguinte:
Multiplicando a equação na forma canónica por $\mu(x)$, obtemos

$$\mu(x)\,\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x). \tag{19}$$

Da equação (18), vem $\mu(x)P(x) = \frac{d\mu}{dx}$, pelo que a equação anterior pode ser escrita como

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu}{dx}y = \mu(x)Q(x), \tag{20}$$

ou seja, como

$$\frac{d}{dx}\big(\mu(x)y\big) = \mu(x)Q(x). \tag{21}$$

Se integramos em ordem a x, vem

$$\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)\,dx + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Resolvendo em ordem a y, obtemos

$$y(x) = \mu(x)^{-1} \left(\int \mu(x) Q(x)\, dx + C \right) \tag{22}$$

onde

$$\mu(x)^{-1} = \frac{1}{\exp\left(\int P(x)\, dx\right)} = \exp\left(- \int P(x)\, dx \right).$$

Exemplo: Considere-se a seguinte equação linear (já escrita na forma canónica)

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 3\, e^{x}.$$

Temos $P(x) = 2$, pelo que podemos tomar $\mu(x) = \exp\left(\int P(x)\, dx\right) = e^{2x}$.

Multiplicando a equação por este fator integrante, vem

$$e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2\,e^{2x}y = 3\,e^{3x},$$

ou seja, tem-se

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2x}y\right) = 3\,e^{3x}.$$

Integrando ambos os lados desta equação, vem

$$e^{2x}y = e^{3x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

de onde se obtém

$$y(x) = e^{x} + C\,e^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(As soluções estão todas definidas em $I = (-\infty, +\infty)$).

Resolução de Equações Lineares

1. Escrever a equação na forma canónica
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

2. Calcular o fator integrante $\mu(x)$ pela fórmula
$$\mu(x) = \exp\Big(\int P(x)\,dx\Big).$$

3. Multiplicar a equação na forma canónica por $\mu(x)$ e notar que se obtém
$$\frac{d}{dx}\big(\mu(x)y\big) = \mu(x)Q(x).$$

4. Integrar esta última equação.

5. Resolver em ordem a y, dividindo por $\mu(x)$.

Equações homogéneas

Uma equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

diz-se uma **equação homogénea**, se $f(x,y)$ for apenas uma função do quociente y/x, isto é, se existir uma função G tal que $f(x,y) = G(y/x)$.

Exemplo: A equação $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x}$ é homogénea, pois pode escrever-se como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1 = G\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{com} \quad G(v) := v - 1.$$

Equações homogéneas (cont.)

Teorema: A equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

é homogénea se e só se

$$f(tx,ty) = f(x,y),$$

para todo o $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$.

Dem:

$\Rightarrow)$ Seja $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ com $f(x,y) = G(\frac{y}{x})$. Então, para $t \neq 0$, vem

$$f(tx,ty) = G(\frac{ty}{tx}) = G(\frac{y}{x}) = f(x,y).$$

$\Leftarrow$) Seja $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ com $f(x,y)$ tal que $f(tx,ty) = f(x,y), \quad t \neq 0.$ Então, tem-se

$$f(x,y) = f(x \times 1, x \times \frac{y}{x}) = f(1, \frac{y}{x}) = G(\frac{y}{x}), \quad x \neq 0.$$

Teorema: Uma equação homogénea $\dfrac{dy}{dx} = G(\dfrac{y}{x})$ transforma-se numa equação separável através de uma mudança de variável definida por

$$\boxed{v = \frac{y}{x}.}$$

Dem: $v = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = v\,x \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = x\,\frac{dv}{dx} + v$. Substituindo na equação diferencial, vem

$$x\,\frac{dv}{dx} + v = G(v),$$

a qual é uma equação separável, pois pode ser escrita como

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\left(G(v) - v\right).$$

Exemplo (resolução equação homogénea)

Considere-se a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x}.$$

Tem-se $f(x,y) = \frac{y-x}{x}$. Então, para $t \neq 0$, tem-se

$$f(tx,ty) = \frac{tx-ty}{tx} = \frac{t(x-y)}{tx} = f(x,y)$$

$\longrightarrow$ A equação é homogénea.

Seja $y = v\,x$. Então,

$$\frac{dy}{dx} = x\,\frac{dv}{dx} + v.$$

Substituindo na equação diferencial, vem

$$x\,\frac{dv}{dx} + v = \frac{vx-x}{x} = v-1$$

ou, de modo equivalente

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}.$$

Integrando a equação (separável, embora um pouco especial...) anterior, obtemos

$$v = -\ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Voltando à variável y vem, finalmente:

$$y = x(-\ln|x| + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Nota: A fórmula acima dá-nos uma família de soluções formais; para determinar as soluções explícitas haveria que discutir em que intervalos, dependentes de C, as soluções estariam definidas.

Resolução de Equações Homogéneas

1. Fazer a mudança de variável $y = vx$ ($\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\,\frac{dv}{dx} + v$).
2. Resolver a equação separável resultante.
3. Voltar à variável y.